ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXX 1960 4

МАТЕМАТИКА

А. В. Чакмазян

Об одном преобразовании двойственно нормализованной поверхности

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 3 I 1960)

Рассмотрим поверхность двух измерений X_2, погруженную в евклидово E_4. Допустим, что X_2 дополнена до гиперполосы так, что ее естественная нормализация будет одновременно и двойственной. Это значит, что поверхность X_2 дополнена до гиперполосы так, чтобы характеристика была перпендикулярна касательной плоскости X_2.

Если обозначить через X нормальный вектор главной касательной гиперплоскости гиперполосы, а Y направляющий вектор характеристической прямой, то основные дифференциальные уравнения Γ_2 ([1]) будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} &\nabla_j r_i = h_{ij} X + k_{ij} Y && (a) \\ &X_j = -h_j^k r_k && (b) \\ &Y_j = -k_j^k r_k, && (c) \end{aligned} \qquad (1)$$

где $h_{ij} = -\partial_i r \partial_j X = X \nabla_j r_i$, $k_{ij} = -\partial_i r \partial j$, $Y = Y \nabla_j r_i$.

Условия (1b) можно истолковать следующим образом. Если рассмотрим на гиперсфере S_3 двумерную поверхность Σ_2, радиус-вектор точки которой $X = X(u^1, u^2)$, то ее касательная плоскости, определяемая векторами $\partial_i X$, параллельна касательной плоскости X_2.

Говорят, что эти поверхности находятся в соответствии Петерсона ([2]). Такое отображение X_2 на поверхности Σ_2 назовем ее главным сферическим отображением.

Поверхность Σ_2 определяется следующей системой дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_j X_{(i)} = -\gamma_{ij} X + E_{ij} Y \\ &Y_j = -E_j^k X_k \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где

$$\gamma_{ij} = X_i X_j = h_i^k h_{jk}, \quad E_{ij} = -\partial_i X \partial_j Y = -h_i^k k_{jk} \qquad (3)$$

есть первый и второй тензоры поверхности Σ_2 на гиперсфере S_3, причем скобка вокруг индекса показывает, что ковариантное дифференцирование соответствует внутренней связности Σ_2 ([3]). Условия (3) показывают, что главная сеть (4) X_2 соответствует сети линий кривизны Σ_2.

1. В нормальной плоскости X_2 возьмем точку с постоянными координатами c_1, c_2 относительно репера X, Y. Радиус-вектор этой точки

$$r^*(u^1, u^2) = r(u^1, u^2) + c_1 X(u^1, u^2) + c_2 Y(u^1, u^2) \tag{4}$$

определяет двумерную поверхность, которую мы обозначим через X_2^*. Дифференцируя (4) по u^i, получим

$$r_i^* = r_i + c_1 X_i + c_2 Y_i \tag{5}$$

или, вследствие (1)

$$r_i^* = (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k) r_k. \tag{6}$$

Эти уравнения показывают, что в соответствующих точках поверхностей X_2 и X_2^* касательные плоскости параллельны.

Кроме того, поверхности X_2 и X_2^* имеют общую нормальную плоскость. Для X_2^* получаем выражения

$$X r_i^* = 0, \quad Y r_i^* = 0, \quad XY = 0, \quad \partial_i XY = 0,$$

а это показывает, что X_2^* допускает действенную нормализацию с теми же X, Y. Основные дифференциальные уравнения X_2^* будут иметь следующий вид:

$$\nabla_j r_i^* = h_{ij}^* X + k_{ij}^* Y,$$

$$X_i = - h_i^{*k} r_k^*,$$

$$Y_i = - k_i^{*k} r_k^*,$$

где

$$h_{ij}^* = -\partial_i r^* \partial_{ij} X = h_{ij} - c_1 h_i^k h_{jk} - c_2 k_i^k h_{jk}$$

$$k_{ij}^* = -\partial_i r^* \partial_i Y = k_{ij} - c_1 h_i^k k_{jk} - c_2 k_i^k k_{jk}.$$

Кроме того, поверхностям X_2 и X_2^* соответствует один и тот же сферический образ Σ_2. Мы можем сказать, что уравнение (4) дает переход от одной двойственно нормализованной X_2 к другой X_2^* с тем же сферическим отображением. Но так как главные сети как X_2, так и X_2^* соответствуют одной и той же сети линий кривизны сферического образа Σ_2, то главные сети X_2 и X_2^* соответствуют друг другу.

Вычислим метрической тензор X_2^*. Используя (6), получаем

$$g_{ij}^* = (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k)(\delta_1^e - c_1 h_j^e - c_2 k_1^e) g_{ke}.$$

Если теперь главную сеть на X_2 примем координатную, то $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$; следовательно, на X_2^* получаем соответственно $h_{12}^* = k_{12}^* = g_{12}^* = 0$. Из (6) следует

$$r_1^* = (1 - c_1 h_1^1 - c_2 k_1^1)\, r_1,$$
$$r_2^* = (1 - c_1 h_2^2 - c_2 k_2^2)\, r_2.$$

Эти условия показывают, что касательные к координатным линиям параллельны.

2. Предположим, что в уравнении (4) c_1 и c_2 зависят от параметров u^3, u^4. Тогда

$$r^* = r(u^1, u^2) + c_1(u^3, u^4)\, X(u^1, u^2) + c_2(u^3, u^4)\, Y(u^1, u^2).$$

Примем u^1, u^2, u^3, u^4 за криволинейные координаты пространства E_4. Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial r^*}{\partial u^i} = \frac{\partial r}{\partial u^i} + c_1 \frac{\partial X}{\partial u^i} + c_2 \frac{\partial Y}{\partial u^i} \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial u^3} = \frac{\partial c_1}{\partial u^3} X + \frac{\partial c_2}{\partial u^3} Y$$

$$\frac{\partial r^*}{\partial u^4} = \frac{\partial c_1}{\partial u^4} X + \frac{\partial c_2}{\partial u^4} Y$$

Выберем u^3, u^4 так, чтобы в нормальной плоскости они определяли ортогональную систему криволинейных координат. В этом случае будем иметь $\dfrac{\partial r^*}{\partial u^3} \dfrac{\partial r^*}{\partial u^4} = 0$.

Линейный элемент пространства E_4 выражается следующим образом

$$ds^2 = g_{ij}^* du^i du^j + g_{33}^* (du^3)^2 + g_{44}^* (du^4)^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} g_{ij}^* &= (\delta_i^k - c_1 h_i^k - c_2 k_i^k)(\delta_j^e - c_1 h_j^e - c_2 k_j^e)\, g_{ke} \\ g_{33}^* &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial u^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial u^3}\right)^2 \\ g_{44}^* &= \left(\frac{\partial c_1}{\partial u^4}\right)^2 + \left(\frac{\partial c_2}{\partial u^4}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Если, кроме того, главную сеть X_2 принять за координатную, то $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$, а из (7) получим $g_{12}^* = 0$. Таким образом линейный элемент пространства примет вид

$$ds^2 = g_{11}^* (du^1)^2 + g_{22}^* (du^2)^2 + g_{33}^* (du^3)^2 + g_{44}^* (du^4)^2.$$

Отсюда следует, что с каждой двойственно нормализованной поверхностью можно связать четырежды ортогональную систему координатных поверхностей в E_4.

3. Допустим, что в уравнении (4) c_1, c_2 зависят от параметра u^3. Тогда уравнение

$$r^* = r(u^1, u^2) + c_1(u^3)\, x(u^1, u^2) + c_2(u^3)\, y(u^1, u^2) \qquad (8)$$

выражает трехмерную поверхность X_3, вложенную в E_4. Линейный элемент X_3 равен

$$ds^2 = g^*_{ij}(u^1, u^2, u^3)\,du^i du^j + g^*_{33}(u^3)\,(du^3)^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} g^*_{ij} &= (\delta^k_i - c_1 h^k_i - c_2 k^k_i)(\delta^e_j - c_1 h^e_j - c_2 k^e_j)\, g_{ke} \\ g^*_{i3} &= 0 \\ g^*_{33} &= (c'_2)^2 + (c'_2)^2 \end{aligned}\right| \tag{9}$$

Если обозначить $w = \int \sqrt{g^*_{33}(u^3)}\, du^3$, то линейный элемент примет вид

$$ds^2 = g^*_{ij}\, du^i du^j + dw^2, \tag{10}$$

который показывает, что линии w будут геодезическими линиями X_3, а поверхность $w = \text{const}$ ортогональна направлениям этих линий

Из (9) получаем выражение $(c'_1)^2 + (c'_2)^2 = 1$, которое показывает, что кривая $\{c_1(w),\ c_2(w)\}$, находящаяся в нормальной плоскости, отнесена к длине дуги. Обозначим коэффициенты второй квадратичной формы X_3 через $\pi_{\alpha\beta} = -\partial_\alpha \boldsymbol{r}^* \partial_\beta \boldsymbol{n} = \nabla_\alpha \boldsymbol{r}^*_\beta \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{n}$ — нормальный вектор $(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$. Очевидно, что $\pi_{i3} = 0$ $(i = 1, 2)$.

Из деривационного уравнения следует

$$\nabla_3 \boldsymbol{r}^*_3 = \pi_{33} \boldsymbol{n},$$

но так как в нашем случае $\overset{*}{\Gamma}{}^k_{33} = \overset{*}{\Gamma}{}^3_{33} = \Gamma^3_{k3} = 0$, то имеем

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}^*_3}{\partial u^3} \pi_{33} \boldsymbol{n}.$$

Отсюда, вследствие (8), получаем

$$c''_2 \boldsymbol{x} + c''_2 \boldsymbol{y} = \pi_{33} \boldsymbol{n},$$

следовательно,

$$\pi_{33} = \sqrt{(c''_1)^2 + (c''_2)^2}\ ,$$

т. е. π_{33} есть кривизна кривой, лежащей в нормальной плоскости. Для π_{ij} получаем выражение

$$\pi_{ij} = \frac{(\delta^e_i - c_1 h^e_i - c_2 k^e_i)(c''_1 h_{ej} + c''_2 k_{ej})}{\sqrt{(c''_1)^2 + (c''_2)^2}}. \tag{11}$$

Если, кроме того, главная сеть X_2 является координатной, то $h_{12} = k_{12} = g_{12} = 0$ и из (11) получаем $\pi_{12} = 0$. Таким образом, матрицы фундаментальных тензоров X_3 получают диагональный вид

$$\begin{Vmatrix} g^*_{11} & & 0 \\ & g^*_{22} & \\ 0 & & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} \pi_{11} & & 0 \\ & \pi_{22} & \\ 0 & & \pi_{33} \end{Vmatrix}$$

где

$$g^*_{ii} = (1 - c_1 h^i_i - c_2 k^i_i)^2 g^*_{ii}$$

$$\pi_{ii} = \frac{(1 - c_1 h^i_i - c_2 k^i_i)(c^*_1 h_{ii} + c^*_2 k_{ii})}{\sqrt{(c^*_1)^2 + (c^*_2)^2}} \quad (i = 1, 2).$$

Таким образом, главные направления на X_1 образуют голономную систему.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность А. П. Нордену, под руководством которого выполнена эта работа.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Ա. Վ. ՉԱՔՄԱՁՅԱՆ

Երկակի նորմալացված մակերևույթի մի ձևափոխության մասին

1. Դիտարկենք նորմալացված X_2 մակերևույթն ընկղմված էվկլիդյան E_4-ում: Վերցնենք X_2-ի նորմալ հարթությունում կետ c_1, c_2 հաստատուն կոորդինատներով x, y ռեպերի նկատմամբ: Այդ կետի շառավիղ վեկտորը

$$r^* (u^1, u^2) = r (u^1, u^2) + c_1 x (u^1, u^2) + c_2 y (u^1, u^2) \qquad (*)$$

որոշում է երկրաչափ մակերևույթ, որը մենք կնշանակենք X^*_2-ով:

Դիֆերենցենք ըստ u^i վերջին արտահայտությունը և հաշվի առնենք (1) կստանանք

$$r^*_i = (\delta^k_i - c_1 h^k_i - c_2 k^k_i) r_k$$

Այս հավասարումը ցույց է տալիս, որ համապատասխան կետում X_2 և X^*_2 մակերևույթի շոշափող հարթությունները զուգահեռ են: Բացի դրանից X_2 և X^*_2 մակերևույթներն ունեն ընդհանուր նորմալ հարթություն:
X^*_2-ի համար ստանում ենք արտահայտություններ

$$X r^*_i = 0, \quad Y r^*_i = 0, \quad XY = 0, \quad X_i Y = 0$$

իսկ այս ցույց է տալիս, որ X^*_2-ը թույլատրում է երկակի նորմալացում նույն X և Y-ով:

Բացի դրանից X_2 և մակերևույթներին S_3-ի վրա համապատասխանում է նույն սֆերիկական պատկեր Σ_2-ը:

Մենք կարող ենք ասել, որ (*) հավասարումը տալիս է անցում մեկ երկակի նորմալացված X_2 մակերևույթից մյուս X^*_2-ին նույն սֆերիկական պատկերմամբ: Բայց քանի որ գլխավոր ցանցը X_2-ի X^*_2-ի համապատասխանում է սֆերիկական պատկերի Σ_2 կորության ցանցին, ապա գլխավոր ցանցը X_2-ի X^*_2 համապատասխանում է մեկը մյուսին:

2. Ենթադրենք, որ (*) հավասարման մեջ c_1 և c_2 կախված են u^3, u^4 պարամետրից: Այդ դեպքում ստացվում է հետևյալը

$$r^* = r (u^1, u^2) + c_1 (u^3, u^4) X (u^1, u^2) + c_2 (u^3, u^4) Y (u^1, u^2).$$

---

* по i не суммировать.

եթե գլխավոր ցանցը X_2-ի ընդունենք որպես կոորդինատային և հաշվի առնենք (7)-ը, տարածության գծային էլեմենտը ստանում է հետևյալ տեսքը

$$ds^2 = g^*_{11}(du^1)^2 + g^*_{22}(du^2)^2 + g^*_{33}(du^3)^2 + g^*_{44}(du^4)^2:$$

Այստեղից հետևում է, որ ամեն մի երկակի նորմալացված մակերևույթի հետ կարելի է կապել քառորթոգոնալ սիստեմի կոորդինատային մակերևույթներ E_4-ում:

3. Ենթադրենք որ (*) հավասարման մեջ c_1, c_2 կախված են u^3 պարամետրից: Այդ դեպքում ստացվում է, որ X_3-ի վրա գլխավոր ուղղությունները կազմում են հոլոնոմ սիստեմ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. XXVIII, № 4 (1959). [2] *А. П. Норден*, Известия высших учебных заведений. Математика, № 4 (5), 1958. [3] *А. П. Норден*, Пространства аффинной связности, М.—Л., Гостехиздат, 1950. [4] *А. В. Чакмазян*, ДАН АрмССР, т. XXIX, № 1 (1959).