ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIX 1959 3

МАТЕМАТИКА

Р. М. Мартиросян

О спектре обобщенного оператора Шредингера

(Представлено академиком АН Армянской ССР А. Л. Шагиняном 2.VI.1959)

Пусть Ω_n обозначает область определения гипермаксимального оператора $-\Delta u$, рассматриваемого в гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$ функций, определенных на всем n-мерном эвклидовом пространстве E_n и суммируемых с квадратом. Как известно, этот оператор является замыканием в $L_2(E_n)$ оператора $-\Delta u$, рассматриваемого на всех неограниченно дифференцируемых и финитных функциях. Известно далее, что этот оператор обладает чисто непрерывным спектром, совпадающим с положительной полуосью, причем для всех λ, не принадлежащих этой полуоси, резольвента B_λ оператора $-\Delta u$ представляется в виде

$$B_\lambda f(M) = \int\limits_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) f(Q)\, dQ \qquad (\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0,\ Jm\sqrt{\lambda} > 0), \tag{1}$$

где r_{MQ} обозначает расстояние между точками M и Q, $\sqrt{\lambda}$ выбирается из верхней полуплоскости, а функция $\Phi_{n,\lambda}(r)$ определена формулой

$$\Phi_{n,\lambda}(r) = \frac{i}{4}\left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{n-2}{2}} H^{(1)}_{\frac{n-2}{2}}(\lambda r) \quad (r > 0,\ n = 2, 3 \cdots), \tag{2}$$

причем $H^{(1)}_\nu(z)$ обозначает функцию Ханкеля первого рода порядка ν.

Предполагая теперь комплекснозначную функцию $p(Q)$ ограниченной и суммируемой с квадратом и обозначая через L произвольный ограниченный (несамосопряженный) оператор в $L_2(E_n)$, а через K — произвольный вполне непрерывный оператор, введем в рассмотрение оператор

$$Tu = -\Delta u - pLu + Ku \qquad (u \in \Omega_n) \tag{3}$$

с областью определения, совпадающей с Ω_n.

Вопрос о строении спектра этого оператора в том частном случае, когда $K = 0$, а оператор L сводится к единичному, был рассмотрен впервые в заметке И. М. Гельфанда [1], а затем в диссертации автора, выполненной в 1954 году под руководством И. М. Гельфанда.

В предлагаемой заметке на операторы вида (3) будет распространен наиболее общий результат этой диссертации. Однако первоначальное доказательство, основанное на рассмотрении итераций резольвенты оператора $-\Delta u$ и довольно громоздкое, не применимо в данном случае. Здесь нам удалось обнаружить полную непрерывность одного интегрального оператора с ядром, не являющимся типа Гильберта-Шмидта, что дало возможность провести доказательство и в рассматриваемом случае, причем значительно более коротким путем.

Теорема. Все точки положительной полуоси являются точками спектра оператора T, определенного формулой (3). *Точки спектра этого оператора, лежащие вне положительной полуоси, могут быть лишь собственными значениями, не имеющими предельных точек вне этой полуоси.*

Доказательство. Для доказательства необходимо предварительно установить полную непрерывность оператора

$$C_\lambda u = B_\lambda (pLu) + B_\lambda Ku \qquad (\lambda \neq 0,\ \arg\lambda \neq 0). \tag{4}$$

В силу полной непрерывности оператора K и ограниченности оператора L достаточно, очевидно, показать, что вполне непрерывен оператор $B_\lambda p$, который согласно (1) представляется в виде

$$[B_\lambda p]\, u(M) = \int\limits_{E_n} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\, p(Q)\, u(Q)\, dQ \qquad (Jm\sqrt{\lambda} > 0). \tag{5}$$

Заметим, что при $n > 3$ ядро этого оператора даже не типа Карлемана из-за высокой особенности при $M = Q$. Однако, в силу известной асимптотики функций Ханкеля интеграл

$$\int\limits_{E_n} \left| \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ}) \right| dM \qquad (Jm\sqrt{\lambda} > 0) \tag{6}$$

существует и не зависит от выбора точки Q (ибо интегрирование совершается по всему пространству E_n). Введем теперь в рассмотрение зависящее от ε семейство операторов

$$B_\lambda^{(\varepsilon)} u(M) = \int\limits_{E_n} \Phi^{(\varepsilon)}_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\, p(Q)\, u(Q)\, dQ, \qquad (\varepsilon > 0), \tag{7}$$

где через $\Phi^{(\varepsilon)}_{n,\sqrt{\lambda}}(r)$ обозначена функция, равная нулю при $0 < r < \varepsilon$ и совпадающая с $\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r)$ при $r > \varepsilon$. Эти операторы вполне непрерывны. В самом деле, из известной асимптотики ханкелевых функций следует, что функция $\left|\Phi^{(\varepsilon)}_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\right|^2$ суммируема по любой из переменных, причем результат интегрирования не зависит от выбора другой переменной.

Поэтому на основании теоремы Фубини

$$\int\limits_{E_n}\int\limits_{E_n} |\Phi^{(\varepsilon)}_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,p(Q)|^2\,dQ\,dM = \int\limits_{E_n} |\Phi^{(\varepsilon)}_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|^2\,dM \times$$

$$\times \int\limits_{E_n} |p(Q)|^2\,dQ < \infty.$$

Таким образом, ядра операторов $B^{(\varepsilon)}_{\lambda}$ типа Гильберта-Шмидта, что и доказывает их полную непрерывность. С другой стороны, очевидно,

$$|(B_\lambda p - B^{(\varepsilon)}_{\lambda})\,u(M)|^2 = \left| \int\limits_{r_{MQ}<\varepsilon} \Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})\,p(Q)\,u(Q)\,dQ \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{r_{MQ}<\varepsilon} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\,dQ \cdot \int\limits_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\,|p(Q)\,u(Q)|^2\,dQ.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{r_{MQ}<\varepsilon} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\,dQ = \alpha(\varepsilon)$$

не зависит от выбора точки M и в силу абсолютной непрерывности интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon) = 0. \tag{8}$$

Интегрируя последнее неравенство по переменной M и пользуясь теоремой Фубини, а также учитывая независимость интеграла (6) от переменной Q, получаем

$$\int\limits_{E_n} |(B_\lambda p - B^{(\varepsilon)}_{\lambda})\,u(M)|^2\,dM \leqslant \alpha(\varepsilon)\cdot\sup|p(Q)|^2 \int\limits_{E_n} |\Phi_{n,\sqrt{\lambda}}(r_{MQ})|\,dM\,\|u\|^2,$$

откуда в силу (8)

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|B_\lambda p - B^{(\varepsilon)}_{\lambda}\| = 0.$$

Отсюда и следует полная непрерывность оператора $B_\lambda p$, а следовательно и C_λ, ибо операторы $B^{(\varepsilon)}_{\lambda}$, как было показано выше, вполне непрерывны.

Рассмотрим теперь уравнение

$$Tu - \lambda u = -\Delta u + pLu + Ku - \lambda u = f, \tag{9}$$

где $f(Q) \in L_2(E_n)$. Очевидно, оно равносильно уравнению

$$u = B_\lambda f - C_\lambda u, \tag{10}$$

где C_λ определено формулой (4), ибо через B_λ мы обозначили ре-зольвенту оператора $-\Delta u$.

Предположим, что некоторое λ, лежащее вне положительной по-луоси, не является собственным значением оператора T. Это значит, что однородное уравнение (9), а следовательно и однородное уравне-ние (10) (получающееся при $B_\lambda f = 0$) имеют лишь тривиальное ре-шение. Поскольку оператор C_λ, как мы видели, вполне непрерывен, то в силу альтернативы Фредгольма уравнение (10), а поэтому и рав-носильное ему уравнение (9) разрешимы при любой $f(Q) \in L_2(E_n)$. Отсюда, благодаря замкнутости оператора T, заключаем, что суще-ствует ограниченная резольвента $(T - \lambda E)^{-1}$ и поэтому λ является ре-гулярной точкой оператора T. Это доказывает, что точками спектра этого оператора, лежащими вне положительной полуоси, могут быть лишь собственные значения. Эти собственные значения являются, оче-видно, собственными значениями для уравнения $u = -C_\lambda u$. Но по-скольку вполне непрерывный оператор C_λ аналитически зависит от па-раметра λ вне положительной полуоси (ибо этим свойством обладает оператор B_λ), то в силу теоремы Келдыша [1, 2] собственные значени[я] оператора T не могут иметь предельных точек вне положительно[й] полуоси. Переходя к доказательству первой части теоремы, покаже[м] сперва, что если при некотором неположительном λ существует огра-ниченная резольвента $R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1}$ оператора T, то она представ-ляется в виде

$$R_\lambda f = B_\lambda f + G_\lambda f, \tag{11}$$

где оператор G_λ вполне непрерывен. Действительно, наше предполо-жение означает прежде всего, что однородное уравнение (9), а сле-довательно и однородное уравнение (10) (получающееся при $B_\lambda f = 0$) имеют лишь тривиальное решение. Поэтому в силу доказанной полно[й] непрерывности оператора C_λ существует оператор $(E + C_\lambda)^{-1}$, опреде-ленный на всем пространстве $L_2(E_n)$. Далее, легко убедиться, что

$$(E + C_\lambda)^{-1} = E - C_\lambda (E + C_\lambda)^{-1}. \tag{12}$$

С другой стороны, $R_\lambda f$ является решением уравнения (9), а следова-тельно должно удовлетворять и уравнению (10), т. е. $R_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda R_\lambda f$. Отсюда в силу (12)

$$R_\lambda f = (E + C_\lambda)^{-1} B_\lambda f = B_\lambda f - C_\lambda (E + C_\lambda)^{-1} B_\lambda f,$$

и достаточно положить $G_\lambda = -C_\lambda (E + C_\lambda)^{-1} B_\lambda$, чтобы получить пре[д]-ставление (11). Допустим теперь, что некоторое положительное $\lambda = \lambda_0 > 0$ является регулярной точкой оператора T, т. е. что существу[ет] ограниченная резольвента R_{λ_0} этого оператора при $\lambda = \lambda_0$. Введем [в] рассмотрение уравнение

$$-\Delta u - \lambda_0 u = Tu - pLu - Ku - \lambda_0 u = f, \tag{1[3]}$$

которое, очевидно, равносильно уравнению

$$u = R_{\lambda_0} f + R_{\lambda_0} Su. \tag{1[4]}$$

где положено $Su = pLu + Ku$. Покажем, что оператор $R_{\lambda_0} S$ вполне непрерывен. Для этого заметим, что из существования R_{λ_0} следует существование R_λ в некоторой окрестности $\lambda = \lambda_0$. Выберем из этой окрестности последовательность неположительных $\lambda = \lambda_n$ так, чтобы $\lambda_n \to \lambda_0$. Как известно, будем иметь $\| R_{\lambda_n} - R_{\lambda_0} \| \to 0$. В силу ограниченности оператора S получаем отсюда $\| R_{\lambda_n} S - R_{\lambda_0} S \| \to 0$. Поэтому полная непрерывность оператора $R_{\lambda_0} S$ будет установлена, если мы убедимся в полной непрерывности операторов $R_{\lambda_n} S$. Но это очевидное следствие представления (11), ибо полная непрерывность операторов $B_{\lambda_n} S = C_{\lambda_n}$ была установлена выше. Заметим теперь, что уравнение (13) при $f = 0$ имеет, как известно, лишь тривиальное решение, ибо все положительные λ принадлежат непрерывному спектру оператора $-\Delta u$. Таким образом и равносильное уравнение (14) при $R_{\lambda_0} f = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Но тогда в силу альтернативы Фредгольма уравнение (14), а следовательно и уравнение (13) разрешимы при любой правой части. Это означает, что при $\lambda = \lambda_0$ существует резольвента оператора $-\Delta u$, определенная на всем гильбертовом пространстве $L_2(E_n)$, т. е. что $\lambda = \lambda_0$ является регулярной точкой оператора $-\Delta u$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Հ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

Շրեդինգերի ընդհանրացված օպերատորի սպեկտրի մասին

Դիցուք Ω_n-ը հանդիսանում է n-չափանի էվկլիդյան տարածության մեջ գտնվող $-\Delta u$ հիպերմաքսիմալ օպերատորի որոշման տիրույթը։

Ω_n բազմակերպի վրա դիտարկենք $Tu = -\Delta u + pLu + Ku$ օպերատորը, որտեղ $p(Q)$-ն սահմանափակ և քառակուսով ինտեգրելի կոմպլեքս ֆունկցիա է, L-ը կամայական սահմանափակ ոչ ինքնահամալուծ օպերատոր է, իսկ K-ն լիովին անընդհատ է։

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ դրական կիսաառանցքի բոլոր կետերը հանդիսանում են T օպերատորի սպեկտրի կետեր, իսկ կոմպլեքս հարթության մնացած մասում սպեկտրի կետեր կարող են լինել միայն սեփական արժեքները, որոնք չունեն սահմանային կետեր դրական կիսաառանցքից դուրս։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *И. М. Гельфанд*, О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов. Успехи матем. наук, VII, 6 (1952). [2] *М. В. Келдыш*, ДАН СССР, новая серия 77, 1 (1951).