ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXIX 1959 1

ТЕОРИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. Х. Арутюнян, академик АН Армянской ССР, и М. М. Манукян

Пластическое кручение конического стержня

(Представлено 30. IV. 1959)

Вопросу о пластическом кручении круглых стержней переменного диаметра посвящены работы Л. М. Качанова [1], В. В. Соколовского [2], где даны решения ряда задач при идеальной пластичности и степенном условии упрочнения материала.

Однако экспериментальные исследования, выполненные за последнее время, показывают, что для некоторых материалов, как, например, твердая хромоникелевая сталь [3], алюминиевый сплав [4] и др., связь между деформациями и напряжениями достаточно хорошо описывается зависимостью вида

$$\varepsilon_i = F(\sigma_i)\,\sigma_i = \left[\frac{1}{G} + \beta\,\frac{\sigma_i^{m-1}}{G^m}\right]\sigma_i, \quad (m > 1) \tag{A}$$

где G—начальный модуль мгновенной деформации, а β и m—параметры, характеризующие степень отклонения кривых деформаций—напряжений ($\varepsilon_i \sim \sigma_i$) от линейного закона.

Очевидно, что если в зависимости (A) параметр β является малым, то она будет описывать кривые упрочнения материала со слабой нелинейностью.

Ниже рассматривается задача о пластическом кручении конического стержня с упрочнением материала, выраженным зависимостью (A).

Задача сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения эллиптического типа, содержащего параметр β, решение которого дается в § 2.

§ 1. **Постановка задачи.** Пусть имеем круглый вал переменного диаметра, нижнее сечение которого закреплено, а верхнее испытывает действие момента M_z. Направим ось z цилиндрических координат r, θ, z по оси стержня, а плоскость $z = 0$ совместим с нижним сечением стержня (верхнее сечение $z = l$).

Положим, как и в теории кручения круглых стержней переменного диаметра, что

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = 0 \tag{1.1}$$

и напряженное состояние определяется компонентами $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{z\theta}$ касательного напряжения, не зависящими от θ.

Тогда уравнение равновесия в цилиндрических координатах примет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau_{\theta z}) = 0 \tag{1.2}$$

и будет тождественно удовлетворено, если, как обычно, положить

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial z}, \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial U}{\partial r}, \tag{1.3}$$

где функция напряжений U зависит только от r и z.

Пусть, далее, (Γ) — контур, ограничивающий односвязную область Ω поперечного сечения, тогда

$$U/\Gamma = \text{const}, \tag{1.4}$$

так как боковая поверхность стержня свободна от внешних усилий.

На концевых поперечных сечениях стержня должно быть задано распределение касательных напряжений $\tau_{\theta z}$. Следовательно, здесь также известна функция напряжений

$$U(0, r) = U(l, r) = \varphi(r). \tag{1.5}$$

Однако этому условию для длинных стержней можно удовлетворить, пользуясь принципом Сен-Венана.

Из условий статической эквивалентности будем иметь

$$M_z = 2\pi \int_0^{r_1} \tau_{\theta z} r^2 dr = 2\pi [U(r_1, z) - U(0, z)], \tag{1.6}$$

где r_1 — радиус сечения вала.

Условия неразрывности деформаций в силу (1.1) примут вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\gamma_{\theta z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\gamma_{r\theta}\right) = 0. \tag{1.7}$$

В общем случае уравнение, связывающее интенсивность деформаций и интенсивность напряжений, можно написать в следующем виде:

$$\varepsilon_i = F(\sigma_i)\,\sigma_i, \tag{1.8}$$

где

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)},$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2 + (\sigma_y-\sigma_z)^2 + (\sigma_z-\sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \tag{1.9}$$

В рассмотренном случае (1.9) примут вид

$$\varepsilon_i = \sqrt{\gamma_{\theta z}^2 + \gamma_{r\theta}^2}\,,$$
$$\sigma_i = \sqrt{\tau_{\theta z}^2 + \tau_{r\theta}^2}\,. \tag{1.10}$$

Тогда можно принять

$$\gamma_{\theta z} = F(\sigma_i)\,\tau_{\theta z}\,,$$
$$\gamma_{r\theta} = F(\sigma_i)\,\tau_{r\theta}\,. \tag{1.11}$$

Вносятся эти выражения для компонентов деформаций в уравнение неразрывности (1.7) и принимая во внимание соотношение (1.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}F(\sigma_i)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial z}F(\sigma_i)\right] = 0, \tag{1.12}$$

где

$$\sigma_i = \frac{1}{r^2}\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}\,. \tag{1.13}$$

Таким образом, решение задачи пластического кручения круглых валов переменного диаметра приводится к решению дифференциального уравнения типа Монжа-Ампера (1.12) с граничным условием (1.4).

Положим, что $F(\sigma_i)$ имеет вид

$$F(\sigma_i) = \frac{1}{G} + \beta f(\sigma_i), \tag{1.14}$$

где G—модуль сдвига, β—параметр, а $f(\sigma_i)$ удовлетворяет условиям

$$f(\sigma_i) > 0, \quad f'(\sigma_i) > 0. \tag{1.15}$$

Внося выражение $F(\sigma_i)$ из (1.14) в (1.8), получим

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma_i}{G} + \beta f^*(\sigma_i), \tag{1.16}$$

где положено

$$f^*(\sigma_i) = f(\sigma_i)\,\sigma_i\,. \tag{1.17}$$

Подставляя выражение $F(\sigma_i)$ из (1.14) в (1.12), получим

$$\frac{1}{G}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{G}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] +$$
$$+ \beta\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}f(\sigma_i)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial z}f(\sigma_i)\right]\right\}. \tag{1.18}$$

Пусть $f(\sigma_i)$ выражается через σ_i степенным законом вида

$$f(\sigma_i) = \frac{\sigma_i^{m-1}}{G^m}, \quad (m > 1). \tag{1.19}$$

Тогда уравнение (1.18) примет следующий вид:

$$\frac{1}{G}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U}{\partial z}\right)\right] + \frac{\beta}{G^m}L(U) = 0, \tag{1.20}$$

где $L(U)$—дифференциальный оператор вида

$$L(U)=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r^{2m+1}}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial U}{\partial r}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r^{2m+1}}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial U}{\partial z}\right\}. \qquad (1.21).$$

§ 2. Решение дифференциального уравнения (1.20) Пользуясь методом, развитым в работах ([5,6]), будем искать решение уравнения (1.20) в виде ряда

$$U(r,z)=U_0(r,z)+\beta U_1(r,z)+\beta^2U_2(r,z)+\cdots \qquad (2.1)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.20) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях β, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)=0. \qquad (2.2)$$

$$\frac{1}{G}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U_1}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{G^m}L(U_0)=0. \qquad (2.3)$$

$$\frac{1}{G}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\frac{\partial U_2}{\partial z}\right)\right]+\frac{1}{G^m}L(U_0,U_1)=0, \qquad (2.4)$$

где $L(U_1, U_0)$—дифференциальный оператор вида

$$L(U_0,U_1)=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r^{2m+1}}\left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial U_1}{\partial r}+\right.$$

$$\left.+\frac{m-1}{r^{2m+1}}\left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\frac{\partial U_0}{\partial r}\right\}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{1}{r^{2m+1}}\left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}}\frac{\partial U_1}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+\frac{m-1}{r^{2m+1}}\left[\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial U_0}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{m-1}{2}-1}\left(\frac{\partial U_0}{\partial r}\frac{\partial U_1}{\partial r}+\frac{\partial U_0}{\partial z}\frac{\partial U_1}{\partial z}\right)\frac{\partial U_0}{\partial z}\right\}. \qquad (2.5)$$

Таким образом, решение нелинейного дифференциального уравнения (1.20) сводится к решению некоторой совокупности линейных рекуррентных дифференциальных уравнений (2.2), (2.3), (2.4) $\cdots$, с условием

$$U=\text{const.} \qquad (2.6)$$

на боковой поверхности $(r=r_1)$ и на оси $(r=0)$ вала, причем

$$M_z=2\pi\,[U(r_1,z)-U(0,z)], \qquad (2.7)$$

где r_1—радиус сечения вала. Здесь можно принять, что на боковой поверхности вала $U(r_1, z)=0$.

Займемся решением этих уравнений.

Уравнением (2.2), которое можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial U_0}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} = 0, \tag{2.8}$$

и условиями (2.6) и (2.7) полностью определяется функция $U_0(r, z)$.

Аналогичным образом уравнения (2.3), (2.4) и др. соответственно можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = -\frac{1}{G^{m-1}} L(U_0) r^3, \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial U_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = -\frac{1}{G^{m-1}} L(U_0, U_1) r^3 \tag{2.10}$$

и т. д.,

где функция $L(U_0)$ в (2.9) является известной функцией, она определяется при помощи решения уравнения (2.8), а функция $L(U_0 U_1)$ в выражении (2.10) будет известной после решения уравнения (2.9).

Таким образом, значения U_0, U_1, $U_2 \ldots$ будут определены последовательно указанным способом.

В качестве приложения рассмотрим задачу о пластическом кручении конического стержня с упрочнением материала, определяемого зависимостью (A).

§ 3. **Кручение круглого конического стержня.** Рассмотрим задачу о кручении круглого конического стержня с углом конусности γ. Направим ось z цилиндрических координат r, θ, z по оси конического стержня, а центр координат совместим с вершиной конуса.

В этом случае функция напряжений U зависит от r, z. Функцию $U(r, z)$ представим в виде (2.1). Для определения $U_0(r, z)$ нужно решить уравнение (2.8) с условием (2.7). Решение будет [7]:

$$U_0(r, z) = A\left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)^3\right], \tag{3.1}$$

где

$$A = -\frac{M_z}{2\pi\left(\frac{2}{3} - \cos\gamma + \frac{1}{3}\cos^3\gamma\right)}, \tag{3.2}$$

M_z — величина крутящего момента.

Теперь перейдем к нахождению второго приближения. Для этого подставим выражение $U_0(r, z)$ из (3.1) в (2.9). Тогда дифференциальное уравнение (2.9) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial U_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} = B_m \frac{r^{m+1} z}{(r^2+z^2)^{2m+\frac{1}{2}}}, \tag{3.3}$$

где

$$B_m = \frac{m-1}{G^{m-1}} A^m. \tag{3.4}$$

Если решение однородного уравнения (3.3) обозначить через $U_1^*(r, z)$, то будем иметь

$$U_1^*(r, z) = D\left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}\right)^3\right], \tag{3.5}$$

где D—постоянная интегрирования.

Остается определить частное решение уравнения (3.3). Для этого удобно из цилиндрических координат перейти к сферическим координатам.

Если положить

$$r = \rho\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta, \tag{3.6}$$

то уравнение (3.3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial\rho^2} - \frac{2}{\rho}\frac{\partial U_1}{\partial\rho} - \frac{3}{\rho^2}\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial U_1}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U_1}{\partial\theta^2} = B_m\frac{\cos\theta\sin^{m+1}\theta}{\rho^{3m-1}}. \tag{3.7}$$

Примем

$$U_1(\rho, \theta) = \rho^{-3(m-1)}\Phi(\theta), \tag{3.8}$$

где $\Phi(\theta)$—новая неизвестная функция.

Тогда (3.7) примет вид:

$$\Phi''(\theta) - 3\operatorname{ctg}\theta\Phi'(\theta) + 9m(m-1)\Phi(\theta) = B_m\cos\theta\sin^{m+1}\theta. \tag{3.9}$$

Наконец, принимая

$$\Phi(\theta) = \varphi(\xi), \tag{3.10}$$

где $\xi = \cos\theta$, уравнение (3.9) приведем к виду

$$(\xi^2-1)\varphi''(\xi) - 2\xi\varphi'(\xi) - 9m(m-1)\varphi(\xi) = -B_m\xi(1-\xi^2)^{\frac{m+1}{2}}. \tag{3.11}$$

Рассмотрим тот случай, когда m—нечетное число. Если обозначить $m = 2k+1$, где k—целое число ($k \geqslant 0$), то частное решение дифференциального уравнения (3.11) можно представить в форме

$$\varphi(\xi) = \sum_{i=0}^{k+1} a_{2i+1}\xi^{2i+1}. \tag{3.12}$$

Здесь коэффициенты $a_1, a_3, \cdots a_{2k+3}$ определяются следующими рекуррентными формулами

$$[2(2k+3)k - 9k(2k+1)]\,a_{2k+3} + B_{2k+1}(-1)^{k+1} = 0, \tag{3.13}$$

$$[2(2i+1)(i-1) - 9k(2k+1)]\,a_{2i+1} +$$
$$+ B_{2k+1}(-1)^i C_{k+1}^i = 2(i+1)(2i+3)\,a_{2i+3},$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots n),$$

где

$$C_{k+1}^i = \frac{(k+1)k(k-1)\cdots[k+1-(i-1)]}{1.2.3\cdots i}. \tag{3.14}$$

В цилиндрических координатах частное решение (3.3) будет

$$U_1^{**}(r, z) = \frac{1}{(r^2+z^2)^{3k}} \sum_{i=0}^{k+1} a_{2i+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^{2i+1}, \tag{3.15}$$

а общее решение

$$U_1(r, z) = U_1^{*}(r, z) + U_1^{**}(r, z) =$$

$$= D \left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^3 \right] +$$

$$+ \frac{1}{(r^2+z^2)^{3k}} \sum_{i=1}^{k+1} a_{2i+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^{2i+1}. \tag{3.16}$$

Если ограничиваться первыми двумя приближениями, то решение основного дифференциального уравнения Монжа-Ампера (1.20) можно представить в следующем виде:

$$U(r, z) = (A + \beta D) \left[\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^3 \right] +$$

$$+ \beta \frac{1}{(r^2+z^2)^{3k}} \sum_{i=1}^{k+1} a_{2i+1} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2+z^2}} \right)^{2i+1} + O(\beta^2). \tag{3.17}$$

Остается в выражении (3.17) определить значение постоянной интегрирования D.

Подставляя значения $U(z, a)$ и $U(z, 0)$ из (3.17) в (2.17), найдем

$$D = - \frac{\sin^{6k}\gamma}{a^{6k}\left(\cos\gamma - \frac{1}{3}\cos^3\gamma - \frac{2}{3} \right)} \sum_{i=0}^{k+1} \left[a_{2i+1}\cos^{2i+1}\gamma - \frac{a_{2i+1}}{\cos^{6k}\gamma} \right]. \tag{3.18}$$

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ ԵՎ Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

Կոնաձև ձողի պլաստիկական ոլորումը

Փոփոխական տրամագիծ ունեցող կլոր ձողերի պլաստիկական ոլորման խնդրին են նվիրված Լ. Մ. Կաչանովի (1) և Վ. Վ. Սոկոլովսկու (2) աշխատանքները, որտեղ արված են մի շարք խնդիրների լուծումը իդեալական պլաստիկության և նյութի ամրապնդման աստիճանային օրենքի պայմաններում:

Բայց վերջին ժամանակներս կատարված էքսպերիմենտալ հետազոտությունները ցույց են տալիս, որ մի քանի նյութերի համար, ինչպես օրինակ, խրոմանիկելային մետաղի (3), ալյումինային ձուլվածքի (4) և այլն, լարումների և դեֆորմացիաների միջև կապն արտահայտվում է՝

$$\varepsilon_i = F(\sigma_i)\sigma_i = \left(\frac{1}{G} + \beta \frac{\sigma_i^{m-1}}{G^m} \right)\sigma_i \quad (m > 1) \tag{A}$$

տեսքով, որտեղ G—ակնթարթային դեֆորմացիայի մոդուլն է, β և m—պարամետրեր են, որոնք բնորոշում են դեֆորմացիայի և լարումների կորերի շեղման աստիճանը գծային օրենքից:

Ակնհայտ է, որ եթե (A) առնչության մեջ β պարամետրը փոքր է, ապա նա կնկարագրի նյութի ամրապնդման կորերը թույլ ոչ գծայնության դեպքում:

Ներկա աշխատության մեջ քննարկվում է կոնաձև ձողի պլաստիկական ոլորման խնդիրը (A) առնչությամբ արտահայտվող նյութի ամրապնդման պայմաններում:

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է էլիպտական տիպի ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարման, որի լուծման համար օգտագործվում է (5,6) աշխատություններում շարադրված մեթոդը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Л. М. Качанов*, ПММ, т. XII, вып. 4 (1948). [2] *В. В. Соколовский*. Теория пластичности. М.—Л, 1948. [3] *Дж. Г. Ют*, A note on plastic torsion. Journal of Applied Mechanics, vol. 22, No 3, 1955. [4] *Д. Трифан*, On the plastic bending of circular plates under uniform transverse loads. Quarterly of Appl. Math., vol. VI, No 4, 1949. [5] *Р. А. Александрян, Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, „Известия АН СССР", отд. техн. наук, № 1, 1959. [6] *Р. А. Александрян, Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян*, ПММ вып. 6, 1958. [7] *С. П. Тимошенко*, Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.