ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XXVII 1958 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

К. С. Чобанян

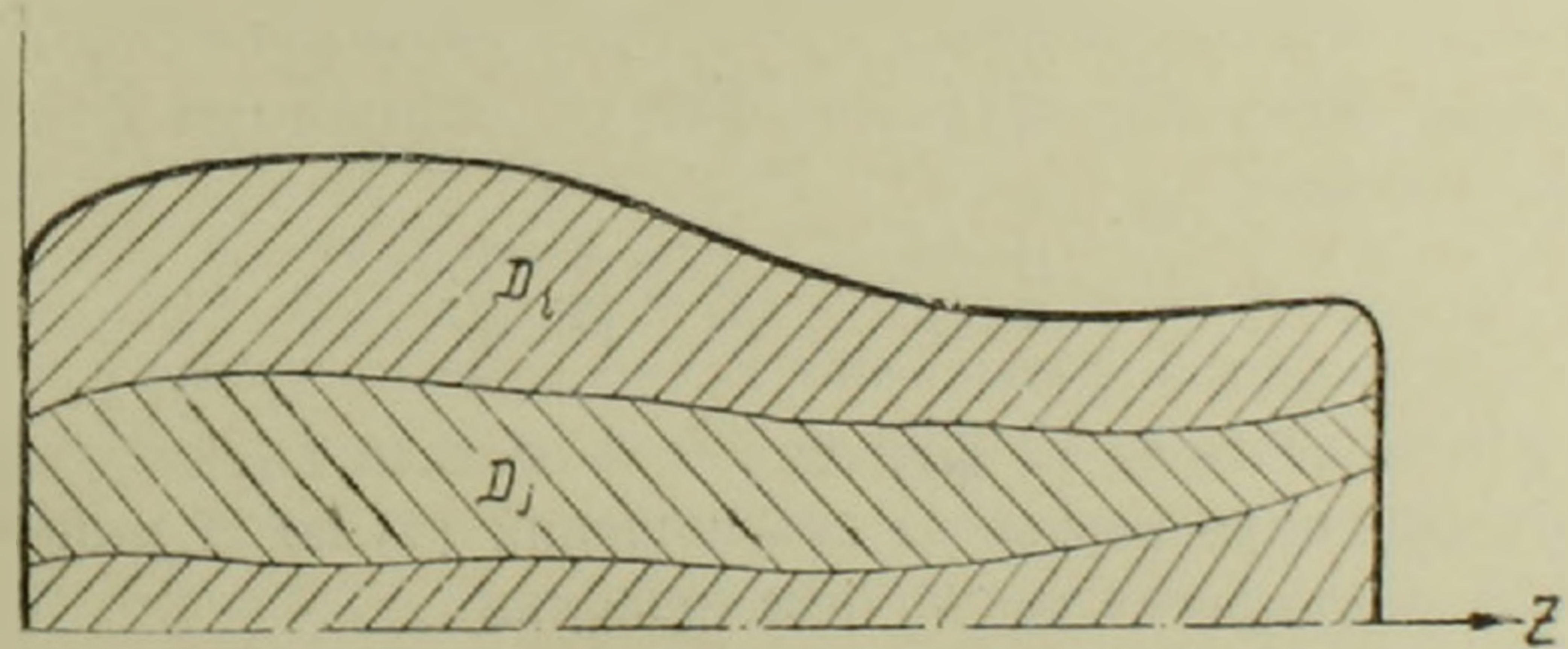
Кручение составного вала переменного диаметра

(Представлено Н. Х. Арутюняном 22 IV 1958)

В работе рассматривается задача о кручении вала переменного круглого сечения, составленного из различных материалов, спаянных по боковым поверхностям.

Рассмотрена также задача о кручении вала переменного сечения с тонким усиливающим покрытием в приближенной постановке.

1. Пусть тело вращения состоит из различных материалов, расположенных симметрично относительно оси вращения. Осевое сечение такого тела будет постоянным (фиг. 1). Область осевого сечения рас-



Фиг. 1

сматриваемого тела, которое в дальнейшем будем называть составным валом переменного сечения, состоит из нескольких областей. D_1, $D_2, \ldots$, соответствующих различным материалам, из которых составлен вал.

Отнесем составной вал переменного сечения к цилиндрической системе координат r, φ, z, направляя ось z по оси вала.

Если составной вал переменного сечения подвергнуть только симметрично распределенным относительно оси вращения скручивающим внешним усилиям, то компоненты упругого перемещения по направлениям осей r и z, как и в случае однородного вала [1], будут равны нулю, а перемещение по направлению координатной линии φ не будет зависеть от этой координаты φ.

Обозначим через $v(r, z)$ упругое перемещение в области D_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда для деформаций и напряжений в соответствующих областях D_i будем иметь

$$\tau^i_{r,\varphi} = G_i \gamma^i_{r,\varphi} = G_i r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_i}{r}\right),$$
$$\tau^i_{\varphi,z} = G_i \gamma^i_{\varphi,z} = G_i \frac{\partial v_i}{\partial z}, \tag{1}$$

где G_i модуль сдвига материала в области D_i. Остальные компоненты тензоров напряжений и деформаций равны нулю. Для упрощения записи индекс φ при напряжениях и деформациях в дальнейшем будет опущен.

Уравнение упругого равновесия бесконечно малого элемента материала, соответствующего области D_i, в цилиндрических координатах будет [1]

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + \frac{2\tau_r}{r} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (2) можно представить в следующей более удобной форме

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau^i_r) = -\frac{\partial}{\partial z}(r^2 \tau^i_z). \tag{3}$$

Уравнение (3) будет удовлетворено, если напряжения τ^i_r и τ^i_z будут представлены через одну функцию $\Phi(r, z)$, называемую функцией напряжения, в форме

$$\tau^i_r = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z}, \quad \tau^i_z = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial r}. \tag{4}$$

Здесь через Φ_i обозначена функция Φ в области D_i.

Дифференцируя первое из соотношений (4) по z, второе по r и сопоставляя полученные результаты, находим

$$\frac{\partial \tau^i_r}{\partial z} - \frac{\partial \tau^i_z}{\partial r} = -\frac{1}{r}\tau^i_z. \tag{5}$$

Подставляя выражения τ^i_r и τ^i_z из (4) в уравнение (5), получаем дифференциальное уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений $\Phi(r, z)$ в каждой из областей D_i

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

Обозначая напряжения, действующие на поверхности составного вала через $p(s)$, где s длина дуги контура осевого сечения, отсчитываемая от произвольно выбранной на контуре точки, будем иметь контурное условие

$$\tau_r \cos(r, \nu) + \tau_z \cos(z, \nu) = \tau_r l + \tau_z m = 0, \tag{7}$$

где ν — внешняя нормаль к контуру, а l и m ее направляющие косинусы

$$l = \frac{dz}{ds}, \quad m = -\frac{dr}{ds}. \tag{8}$$

На основании (7) и (8) получаем следующее контурное условие для функции Φ_i:

$$\Phi_i(r, s) = -\int\limits_0^s r^2 p(s)\, ds + c_0. \tag{9}$$

Перейдем теперь к определению условий, которым должна удовлетворять функция напряжений Φ на линиях раздела L_{ij} областей D_i и D_j.

Из условия равновесия бесконечно малого элемента поверхности раздела следует, что проекция касательного напряжения на нормаль ν к линии раздела L_{ij} должна быть непрерывной на L_{ij}

$$\tau_r^i l + \tau_z^i m = \tau_r^j l + \tau_z^j m. \tag{10}$$

Здесь l и m направляющие косинусы нормали ν к линии раздела L_{ij}, которые через ее координаты r и z выражаются формулами (8).

Внося (4) и (8) в условие (10), находим

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial s} = 0 \quad \text{на} \quad L_{ij}$$

или

$$\Phi_i - \Phi_j = c_{ij} \qquad \text{на} \quad L_{ij}. \tag{11}$$

На основании непрерывности граничного условия (9) постоянная c_{ij} будет равна нулю, если линия раздела L_{ij} пересекается с контуром L_0. В случае, когда линия раздела целиком лежит внутри контура L_0, функция Φ в области, ограниченной L_{ij}, будет определяться с точностью до постоянной c_{ij}, которая, согласно (4), не влияет на величины напряжений. Поэтому все постоянные c_{ij} могут быть приняты равными нулю.

Принимая, что на поверхностях раздела имеем полное слипание, используем непрерывность перемещения v на L_{ij}:

На основании соотношений (1) и (4) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{G_i r^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial z} &= \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r}, \\ \frac{1}{G_i r^2}\frac{\partial \Phi_i}{\partial r} &= \frac{\partial v_i}{\partial z}. \end{aligned} \tag{12}$$

Умножая первое из соотношений (12) на $\frac{dr}{ds}$, а второе — на $\frac{dz}{ds}$ и складывая полученные результаты, будем иметь:

$$\frac{1}{G_i r^2} \cdot \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{\partial v_i}{\partial s} - \frac{v_i}{r} \frac{dr}{ds}, \tag{13}$$

где ν — внешняя нормаль к линии раздела L_{ij}.

Принимая во внимание непрерывнсcть перемещения v на линии L_{ij}, на основании (13), получаем второе условие, которому должна удовлетворять функция напряжения $\Phi(r, z)$ на L_{ij}

$$\frac{1}{G_i} \frac{\partial \Phi_i}{\partial \nu} = \frac{1}{G_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \nu}. \tag{14}$$

На основании симметричности рассматриваемой задачи относительно оси вала, функцию Φ можно определить только для одной половины области осевого сечения вала, ограниченной осью z и частью контура L_0. На оси сплошного вала напряжения равны нулю. Поэтому, согласно (4), производные функции Φ как по z, так и по r при $r = 0$ должны равняться нулю, т. е. функция Φ на оси z должна быть постоянной

$$\Phi = c \quad \text{при} \quad r = 0. \tag{15}$$

Таким образом, при симметричном кручении составного круглого вала переменного сечения функция напряжения $\Phi(r, z)$ в каждой из областей D_i осевого сечения вала должна удовлетворять уравнению (6), контурному условию (9), условию (15) на оси z и условиям (11), (14) на линиях раздела L_{ij}.

В случае полого вала на внутренней поверхности должно выполняться условие (9), где $p(s)$ будет скручивающее внешнее усилие, действующее на этой поверхности.

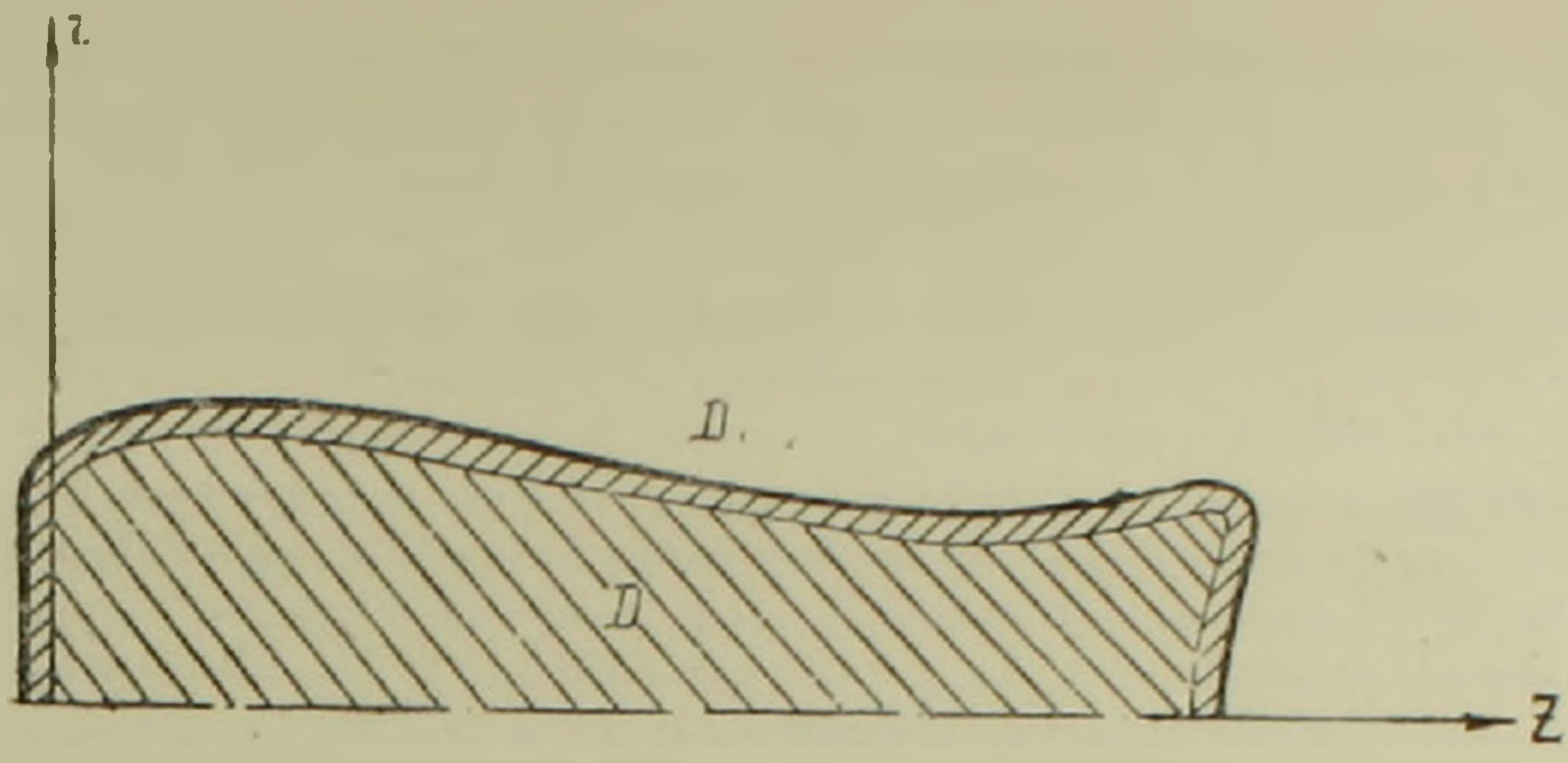
2. Рассмотрим теперь случай, когда внешняя область осевого сечения вала соответствует тонкому усиливающему покрытию. Для упрощения задачи определения функции напряжений Φ в двух областях воспользуемся тонкостью усиливающего покрытия, т. е. малостью толщины покрытия по сравнению с поперечными размерами вала.

Области осевого сечения вала, соответствующие покрытию и основному материалу, обозначим через D_1 и D_2, их линию раздела — через L_1. Постоянную толщину покрытия обозначим через δ.

Для области D_1, которая будет иметь форму криволинейной полосы, введем местную систему координат s и n, где s будет длина дуги линии раздела, отсчитываемая от ее левого конца, а n — расстояние точки до линии раздела по ее нормали.

На основании малости δ можно положить, что функция напряжения $\Phi(s, n)$ в области D_1 от координаты n зависит линейно:

$$\Phi_1(s, n) = A(s)n + B(s).$$



Фиг. 2.

Используя контурное условие (9) и условия (11) и (14) на линии раздела L_1, будем иметь:

$$A(s)\delta + B(s) = -\int_0^s r^2 p(s)\,ds, \tag{16}$$

$$B(s) = \Phi_2(r, z), \quad \frac{1}{G_1} A(s) = \frac{1}{G_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}. \tag{17}$$

Исключая из соотношений (16) и (17) функции $A(s)$ и $B(s)$, находим

$$\Phi + \delta \frac{G_1}{G_2} \frac{\partial \Phi}{\partial n} = -\int_0^s r^2 p(s)\,ds + c_0. \tag{18}$$

Здесь индекс при функции Ф опущен на основании предположения, что основной материал вала однороден.

Таким образом, задача кручения круглого вала переменного диаметра с тонким усиливающим покрытием в ее приближенной постановке свелась к той же задаче для однородного вала с несколько измененным контурным условием (18).

Институт математики и механики
Академии наук Армянской ССР

Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ

Փոփոխական տրամագծով բաղադրյալ լիսեռի ոլորման խնդիրը

Դիտարկվում է կողմնային մակերևույթներով իրար հետ զոդված և առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված տարբեր նյութերից բաղկացած փոփոխական տրամագծով կլոր լիսեռի ոլորման խնդիրը, երբ արտաքին ուժերը հանդիսանում են լիսեռի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված և նրա մակերևույթի վրա կիրառված ոլորող ճիգեր այնպես, որ ոլորվող բաղադրյալ լիսեռի ցանկացած կետի առաձգական տեղափոխությունը լինի ուղղահայաց այդ կետով և լիսեռի առանցքով անցնող հարթությանը, իսկ առանցքին ուղղահայաց և նրա վրա կենտրոն ունեցող շրջանագծի վրա դասավորված կետերը ստանան միևնույն տեղափոխությունները։

Քննարկվող խնդրի լուծումը բերվում է $F(r, z)$ լարումների ֆունկցիայի որոշմանը, որը լիսեռի առանցքային հատվածքի տարբեր նյութերի համապատասխանող տիրույթներից յուրաքանչյուրում պետք է բավարարի (8) հավասարմանը, (9) եզրային պայմանին և (11) ու (14) պայմաններին տիրույթների բաժանման L_{ij} գծերի վրա:

Դիտարկված է նաև այն դեպքը, երբ փոփոխական տրամագծով կլոր լիսեռն ունի ուժեղացնող բարակ ծածկույթ: Օգտագործելով լիսեռի լայնական չափերի նկատմամբ ծածկույթի հաստության փոքրության պայմանը և կատարելով որոշակի մոտավորություններ, խնդրի գրվածքը պարզեցվում է այն իմաստով, որ վերանում է բարակ ծածկույթին համապատասխանող առանցքային հատվածի տիրույթում լարումների ֆունկցիայի որոնման հարցը: Այսպիսով, ուժեղացնող բարակ ծածկույթով լիսեռի ոլորման խնդիրը մոտավոր գրվածքով բերվում է նույն խնդրի ծածկույթի բացակայության դեպքին. միայն լարումների $F(r, z)$ ֆունկցիան (9) պայմանի փոխարեն պետք է բավարարի (18) խառը եզրային պայմանին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 *К. В. Соляник-Красса*, Кручение валов переменного сечения. Гостехиздат, 1947.

2 *С. П. Тимошенко*. Теория упругости. ОНТИ, 1937.