

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. Хачиян

К сейсмостойкости сооружений ступенчатого очертания по высоте

(Представлено А. Г. Назаровым 4. II. 1958)

В настоящей работе делается попытка расчета бруса, имеющего две ступени по высоте, отличающиеся своими жесткостями и погонными массами. (К такой схеме приводятся здания с легкой надстройкой или здания с цоколем, построенным из более жесткого материала).

1. Рассмотрим горизонтальные сдвиговые колебания ступенчатого бруса (рис. 1).

Начало координат возьмем в центре тяжести основания бруса. Ось oy направим по горизонтали, а ось ox — вертикально вверх. Пусть l_1 и l_2 — высоты I и II частей бруса, q_1 и q_2 — их погонные веса, G_1 и G_2 — модули сдвига соответствующих частей. Дифференциальное уравнение свободных колебаний каждого участка бруса, претерпевающего лишь деформации сдвига, можно написать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} - \frac{q_1}{gkF_1G_1} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - \frac{q_2}{gkF_2G_2} \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} = 0.$$

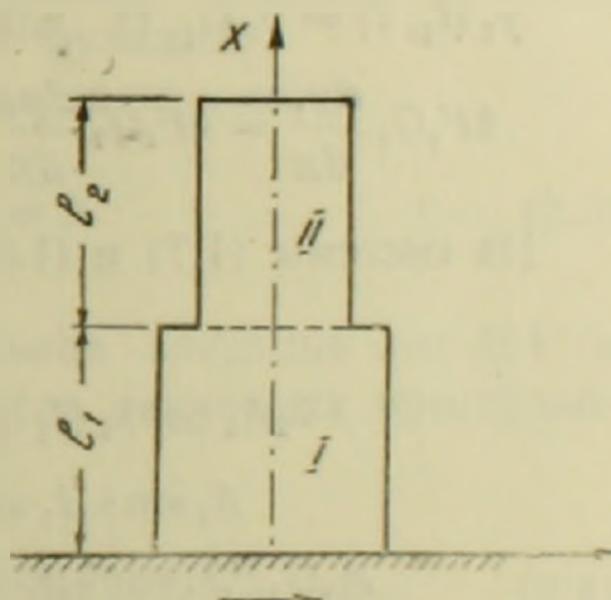


Рис. 1.

Здесь

$$y(x, t) = \begin{cases} y_1(x, t) & 0 \leq x \leq l_1 \\ y_2(x, t) & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \end{cases} \quad (1.2)$$

перемещения точек на оси бруса, k — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Ищем решения уравнений (1.1) в виде:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= Y_1(x) q(t), \\ y_2(x, t) &= Y_2(x) q(t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и разделяя переменные, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \lambda_1^2 Y_1 &= 0, \\ \frac{d^2 Y_2}{dx^2} + \lambda_2^2 Y_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\lambda_1^2 = \frac{p^2 q_1}{gkF_1G_1}, \quad \lambda_2^2 = \frac{p^2 q_2}{gkF_2G_2}. \quad (1.5)$$

Общее решение уравнений (1.4) будет:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= A_1 \sin \lambda_1 x + B_1 \cos \lambda_1 x, \\ Y_2(x) &= A_2 \sin \lambda_2 x + B_2 \cos \lambda_2 x. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для определения четырех постоянных коэффициентов имеем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \quad y_1(x, t) = 0 \quad \text{или} \quad Y_1(x) \Big|_{x=0} = 0, \\ \text{при } x=l_1+l_2 \quad \frac{dy_2(x, t)}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dY_2(x)}{dx} \Big|_{x=l_1+l_2} = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

и два условия непрерывности прогибов и поперечной силы по линии перегиба

$$\begin{aligned} y_1(l_1, t) = y_2(l_1, t) \quad \text{или} \quad Y_1(l_1) = Y_2(l_1), \\ kF_1G_1 \frac{dy_1}{dx} = kF_2G_2 \frac{dy_2}{dx} \quad \text{или} \quad F_1G_1 \frac{dY_1}{dx} \Big|_{x=l_1} = F_2G_2 \frac{dY_2}{dx} \Big|_{x=l_1}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Из системы (1.7) и (1.8) получим:

$$\begin{aligned} B_1 &= 0, \\ \lambda_2 A_2 \cos \lambda_2 (l_1 + l_2) - \lambda_2 B_2 \sin \lambda_2 (l_1 + l_2) &= 0, \\ A_1 \sin \lambda_1 l_1 &= A_2 \sin \lambda_2 l_1 + B_2 \cos \lambda_2 l_1, \\ A_1 G_1 F_1 \lambda_1 \cos \lambda_1 l_1 &= G_2 F_2 \lambda_2 (A_2 \cos \lambda_2 l_1 - B_2 \sin \lambda_2 l_1). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, для определения коэффициентов A_1 , A_2 , B_1 и B_2 мы получили систему однородных линейных уравнений. Для того, чтобы эта система имела не нулевые решения, определитель системы должен быть равен нулю. Приравняв нулю определитель системы, получим уравнение частот

$$\operatorname{tg} p \sqrt{\frac{q_1}{gkF_1G_1}} l_1 \cdot \operatorname{tg} p \sqrt{\frac{q_2}{gkF_2G_2}} l_2 = \sqrt{\frac{q_1 F_1 G_1}{q_2 F_2 G_2}}. \quad (1.10)$$

Пусть p_1, p_2, \dots, p_j — корни этого уравнения. Тогда на основании (1.5) и (1.6) получим систему фундаментальных функций

$$\begin{aligned} Y_{1j} &= A_{1j} \sin \lambda_{1j} x, \\ Y_{2j} &= A_{2j} \sin \lambda_{2j} x + B_{2j} \cos \lambda_{2j} x. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Уравнение изогнутой оси бруса при подставленных выше условиях будет иметь вид:

$$y(x, t) = \begin{cases} \sum Y_{1j} q_j & 0 \leq x \leq l_1 \\ \sum Y_{2j} q_j & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \end{cases} \quad (1.12)$$

2. Пусть теперь основание бруса колеблется в направлении оси y по закону $y_0(t)$. Определим потенциальную и кинетическую энергию системы для возможности использования уравнения Лагранжа.

Потенциальная энергия системы есть энергия сдвига и может быть выражена так:

$$\Pi = \frac{kF_1 G_1}{2} \sum q_j \int_0^{l_1} \left(\frac{dY_{1j}}{dx} \right)^2 dx + \frac{kF_2 G_2}{2} \sum q_j \int_{l_1}^{l_1+l_2} \left(\frac{dY_{2j}}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.1)$$

Кинетическая энергия колеблющегося бруса будет:

$$T = \frac{q_1}{2g_1} \int_0^{l_1} (y_0 + y_1)^2 dx + \frac{q_2}{2g_2} \int_{l_1}^{l_1+l_2} (y_0 + y_2)^2 dx. \quad (2.2)$$

Члены, содержащие произведения координат, исчезают из выражений (2.1) и (2.2) в силу ортогональности функций.

Воспользуемся теперь уравнениями Лагранжа в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0. \quad (2.3)$$

Совершив необходимые дифференциальные операции над (2.1) и (2.2) и подставляя их в уравнение (2.3), после некоторых преобразований получим:

$$\ddot{q}_j(t) + p_j^2 q_j(t) = - \frac{2A_{1j} q_1 \dot{y}_0(t)}{\lambda_{1j} [q_1 A_{1j}^2 l_1 + q_2 (A_{2j}^2 + B_{2j}^2) l_2]}. \quad (2.4)$$

В частности, если брус однороден, то, подставляя в уравнение (2.4) $A_{2j} = B_{2j} = 0$, $l_2 = 0$, $\lambda_{1j} = \lambda_2 = \lambda_j$, получим:

$$\ddot{q}_j(t) + p_j^2 q_j(t) = - \frac{2y_0(t)}{l \lambda_j A_{1j}}, \quad (2.5)$$

что совпадает с уравнением колебания, полученным для однородного бруса (1). Из системы уравнений (1.9) имеем:

$$A_{2j} = \frac{\sin \lambda_{1j} l_1 \sin \lambda_{2j} (l_1 + l_2)}{\cos \lambda_{2j} l_2} A_{1j}, \quad (2.6)$$

$$B_{2j} = \frac{\sin \lambda_{1j} l_1 \cos \lambda_{2j} (l_1 + l_2)}{\cos \lambda_{2j} l_2} A_{2j}.$$

Коэффициент A_{1j} можно положить равным единице, так как в уравнении деформированной оси (1.12) он не будет присутствовать. Подставляя значение (2.6) в (2.4), получим:

$$q_j + p_j^2 q_j = - \frac{2y_0 q_1 \cos^2 \lambda_{2j} l_2}{\lambda_{1j} (q_1 l_1 \cos^2 \lambda_{2j} l_2 + q_2 l_2 \sin^2 \lambda_{1j} l_1)}. \quad (2.7)$$

То же уравнение с учетом рассеяния энергии в соответствии с гипотезой Е. С. Сорокина (3) будет

$$q_j + e^{i\alpha} p_j^2 q_j = - \beta_j y_0, \quad (2.8)$$

где α — коэффициент внутреннего трения, а через β_j обозначен

$$\beta_j = \frac{2q_1 \cos^2 \lambda_{2j} l_2}{\lambda_{1j} (q_1 l_1 \cos^2 \lambda_{2j} l_2 + q_2 l_2 \sin^2 \lambda_{1j} l_1)}. \quad (2.9)$$

Общим решением уравнения (2.8) является

$$q_j(t) = (C_j \cos p_j t + D_j \sin p_j t) e^{-p_j \frac{\alpha}{2} t} - \frac{\beta_j}{p_j} \int_0^t e^{-\frac{\alpha}{2} p_j (t-\xi)} \sin p_j (t-\xi) y_0(\xi) d\xi. \quad (2.10)$$

Таким образом, задача о сдвиговых колебаниях ступенчатого бруса в общем случае решена до конца.

3. Для облегчения вычислений допустим, что брус изготовлен из одного материала, т. е. $G_1 = G_2$, и имеет место (схема здания с легкой надстройкой):

$$\frac{F_1}{F_2} = 4, \quad l_2 = \frac{3}{4} l, \quad l_2 = \frac{1}{4} l, \quad (3.1)$$

где l — высота бруса. В уравнение частот (1.10) подставляя $q_1 = \gamma F_1$, $q_2 = \gamma F_2$, где γ — плотность материала, получим:

$$\operatorname{tg} \frac{3}{4} \lambda \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{4} \lambda = 4, \quad (3.2)$$

где через λ обозначен

$$\lambda = p \sqrt{\frac{\gamma}{gkG}} l. \quad (3.3)$$

На основании (1.5) будем иметь

$$\lambda_{2j} = \lambda_{2j} = \frac{\lambda_j}{l} = p_j \sqrt{\frac{\gamma}{gkG}}. \quad (3.4)$$

Первые пять корней уравнения (3.2), полученных графическим методом, имеют следующие значения:

$$\lambda_1 = 1,9216; \lambda_2 = 5,2635; \lambda_3 = 7,3115; \lambda_4 = 10,6446; \lambda_5 = 14,488.$$

На основании (3.1), (3.4) и (3.12) получим систему фундаментальных функций:

$$Y_{1j}(x) = \sin \frac{\lambda_j}{l} x, \quad (3.5)$$

$$Y_{2j}(x) = - \frac{\sin \frac{3}{4} \lambda_j}{\cos \frac{1}{4} \lambda_j} \cos \lambda_j \left(1 - \frac{x}{l} \right).$$

Теперь допустим, что в основании бруса имеет место сейсмический удар. Тогда из уравнений (2.16) получим (1):

$$q_j(t) = - \frac{\beta_j}{p_j} v e^{-\frac{a}{2} p_j t} \sin p_j t. \quad (3.6)$$

Поперечные силы на каждом участке бруса будут:

$$S_1 = 2 k G F_1 v \sqrt{\frac{\gamma}{k g G}} \sum \gamma_{1j}(x) e^{-\frac{a}{2} p_j t} \sin p_j t, \quad (3.7)$$

$$S_2 = 2 k G F_2 v \sqrt{\frac{\gamma}{k g G}} \sum \gamma_{2j}(x) e^{-\frac{a}{2} p_j t} \sin p_j t,$$

где

$$\gamma_{1j}(x) = \frac{\cos^2 \frac{1}{4} \lambda_j \cos \frac{\lambda_j x}{l}}{\lambda_j \left(\frac{3}{4} \cos^2 \frac{1}{4} \lambda_j + \frac{1}{16} \sin^2 \frac{3}{4} \lambda_j \right)}, \quad (3.8)$$

$$\gamma_{2j}(x) = \frac{\cos \frac{1}{4} \lambda_j \sin \frac{3}{4} \lambda_j \sin \lambda_j \left(1 - \frac{x}{l} \right)}{4 \lambda_j \left(\frac{3}{4} \cos^2 \frac{1}{4} \lambda_j + \frac{1}{16} \sin^2 \frac{3}{4} \lambda_j \right)}.$$

Максимальные значения поперечных сил, полученных по формуле (3.7), приведены в табл. 1.

Отметим, что корни уравнения (3.2) не изменятся, если имеет место соотношение (приближенная схема здания с цоколем, построенного из более тяжелого материала):

$$l_1 = \frac{1}{4} l, \quad l_3 = \frac{3}{4} l, \quad \frac{F_1}{F_2} = 4. \quad (3.9)$$

Максимальные значения поперечных сил при этом приведены в табл. 2.

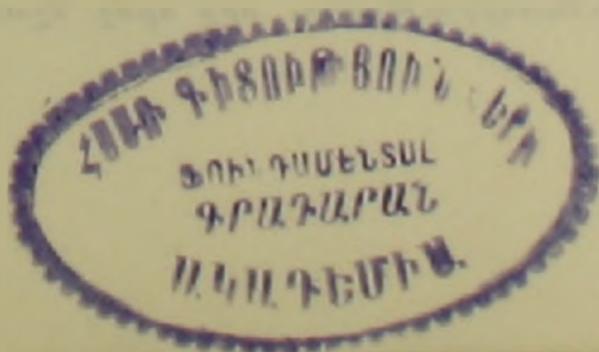


Таблица 1

| $\frac{x}{l}$ | S | $\frac{x}{l}$ | S | $\frac{x}{l}$ | S |
|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|
| 0,00 | 0,56221 | 0,35 | 0,48683 | 0,70 | 0,27291 |
| 0,05 | 0,53839 | 0,40 | 0,51272 | 0,75 | 0,19497 |
| 0,10 | 0,50157 | 0,45 | 0,48881 | 0,80 | 0,18979 |
| 0,15 | 0,49799 | 0,50 | 0,48976 | 0,85 | 0,16885 |
| 0,20 | 0,50274 | 0,55 | 0,50043 | 0,90 | 0,12797 |
| 0,25 | 0,49234 | 0,60 | 0,47333 | 0,95 | 0,06936 |
| 0,30 | 0,49032 | 0,65 | 0,39954 | 1,00 | 0,00 |

Таблица 2

| $\frac{x}{l}$ | S | $\frac{x}{l}$ | S | $\frac{x}{l}$ | S |
|---------------|---------|---------------|---------|---------------|---------|
| 0,00 | 0,57958 | 0,35 | 0,20571 | 0,70 | 0,18776 |
| 0,05 | 0,55262 | 0,40 | 0,20640 | 0,75 | 0,19386 |
| 0,10 | 0,47712 | 0,45 | 0,20009 | 0,80 | 0,18986 |
| 0,15 | 0,39230 | 0,50 | 0,19584 | 0,85 | 0,16897 |
| 0,20 | 0,28679 | 0,55 | 0,20013 | 0,90 | 0,12805 |
| 0,25 | 0,20641 | 0,60 | 0,20031 | 0,95 | 0,06941 |
| 0,30 | 0,20090 | 0,65 | 0,18346 | 1,00 | 0,00 |

Эпюры касательных напряжений приведены на рис. 2, причем кривая I построена по табл. 1, кривая II соответствует напряжению в брусе постоянного сечения (1,2), а кривая III построена по табл. 2.

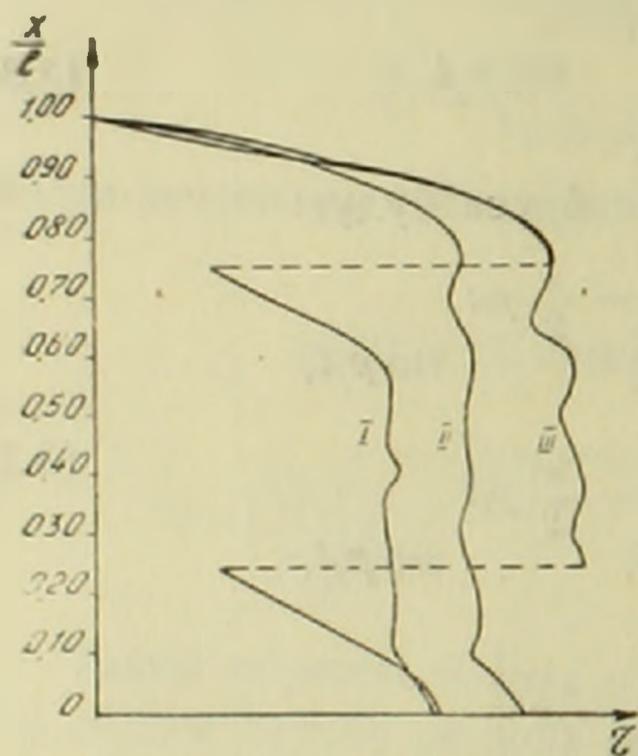


Рис. 2.

Приведенные данные показывают, что в обоих случаях в верхних частях бруса получаются большие касательные напряжения, нежели при постоянной жесткости.

Эффект усиления напряжений в верхних частях бруса принадлежит к типу явлений, которые можно рассматривать как „эффект бича“, отмеченных М. А. Био (4) для системы с двумя степенями свободы. С точки зрения распространения волн этот эффект подобен явлению, наблюдаемому в биче, когда усилия в нем передаются от исходной точки к концу. Если волну рассматривать как некоторый поток энергии, который

перемещается от тяжелой части бича к более легкой, то на конце, на более легком участке, произойдет накопление той же энергии в небольшой массе, что будет способствовать возникновению большой скорости.

Случай, рассматриваемый нами, указывает на возможность значительной концентрации напряжений вверху сооружения и согласуется с наблюдаемыми непропорционально большими повреждениями верхних частей сооружений при землетрясениях.

Институт строительных материалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР

Է. Ե. ԽԱՉԻՅԱՆ

Օստրիճանաձև կառուցվածքների սեյսմակայուն հուրյան շուրջը

Հոդվածը նվիրված է ըստ բարձրագույն աստիճանաձև կոորդինատ ունեցող (նկ. 1) ձողի տատանումների ուսումնասիրությանը, որը որոշ ճշտությամբ համապատասխանում

է թեթի վերնաշենքով շենքերին, կամ այնպիսի շենքերին, որոնց առաջին հարկերը կո-
ռուցված են ավելի կոշտ նյութերից, քան մնացած հարկերը: Ընդունվում է, որ ձողը
ենթարկվում է միայն սահքի դեֆորմացիաների:

Ձողի յուրաքանչյուր մասում ճկվածքները բավարարում են (1.1) հավասարումնե-
րին: (1.1) հավասարումների ինտեգրումից ստացվող չորս կամայական հաստատունները
արոշվում են (1.7) եզրային և (1.8) միջանկյալ պայմաններից: Ստացված (1.9) համասեռ
հավասարումների սիստեմի համատեղության պայմանից դուրս է բերվում հաճախակա-
նությունների (1.10) տրանսցենդենտ հավասարումը:

Ստիպողական տատանումները ուսումնասիրվում են Լազրյանի (2.3) հավասարում-
ների օղնությամբ:

Որոշ դործողություններից հետո ստացվում է ստիպողական տատանումների (2.4)
հավասարումների սիստեմը, որտեղ $y_0(t)$ կետի տատանումների արագացումն է: (2.10)
հավասարումներով տրվում է խնդրի ընդհանուր լուծումը:

Որպես թվային օրինակներ վերցվում են (3.1) և (3.9) պայմաններին յուրաքանչյուր
ձողեր: Այնուհետև ընդունելով, որ ձողի հիմքում տեղի ունի սեյսմիկ հարված (1), ձողի
յուրաքանչյուր մասում կտրող ուժերի հաշվման համար ստացված են (3.7) բանաձևերը:
1 և 2-րդ աղյուսակներում բերված են կտրող ուժերի մաքսիմալ արժեքները, սահմա-
նափակվելով միայն շարքի առաջին հինգ անդամներով:

Շոշափող լարումների էսյուերաները ցույց են տրված 2-րդ գծապրում, որտեղ I և
III կորերը համապատասխանում են համապատասխանաբար (3.1) և (3.9) պայմաններին
բավարարող ձողերին, իսկ II կորը կառուցված է հաստատուն ընդլայնական կտրվածք ու-
նեցող ձողերի համար (2):

Բերված տվյալները ցույց են տալիս, որ երկու զեպերում էլ ձողի վերևի մասե-
րում ստացվում է շոշափող լարումների որոշ կոնցենտրացիա, որը նշել է նաև Մ. Ա.
Բիոն (4) ազատության երկու աստիճան ունեցող սիստեմի տատանումներն ուսումնասի-
րելիս:

Ստացված տվյալները համապատասխանում են ավերիչ երկրաշարժերի ժամանակ
կառուցվածքներում վերևի մասերի համեմատաբար ավելի հաճախ բայթայումներին:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1 Э. Е. Хачиян, „Известия“ АН АрмССР (серия технических наук), т. X, № 6 (1957). 2 Э. Е. Хачиян, Труды Института стройматериалов и сооружений Мин. строит. Армянской ССР, № 1 (1958). 3 А. Г. Назаров, Метод инженерного анализа сейсмических сил АН Армянской ССР, Ереван, 1955. 4 А. М. Био, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Transactions, N. 108 (1943).