ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՌ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
XVI 1953 5

МЕХАНИКА

**А. Г. Назаров**, чл.-корресп. АН Армянской ССР

# Метод учета рассеяния энергии при упругих колебаниях

(Представлено 4 IV 1953)

Мы рассматривали гипотезы, приводящие при учете рассеяния энергии к линейным дифференциальным уравнениям ([2]).

Учет рассеяния энергии при колебаниях упругих систем приводит, в общем случае, к нелинейным дифференциальным уравнениям, трудно поддающимся даже приближенному решению. Например, если причиной рассеяния энергии является упругий гистерезис, то при точной постановке вопроса необходимо составить различные дифференциальные уравнения, соответственно для восходящей и нисходящей ветвей петли гистерезиса, решение которых крайне затруднительно ([1, 2, 3]).

С другой стороны, хорошо известен тот факт, что периоды свободных колебаний упругих систем и соответствующие им фундаментальные функции, например, при изгибных и крутильных колебаниях, вычисленных без учета рассеяния энергии, достаточно точно отвечают действительности, т. е. при рассеянии энергии.

При решении задачи без учета рассеяния энергии свободные колебания подчиняются гармоническому закону; при учете рассеяния энергии свободные колебания затухают, но период колебаний, как уже отмечалось выше, остается практически той же величины. В силу трудностей, связанных с решением нелинейных уравнений, по ним практически не имеем возможности определять ни периоды свободных колебаний, ни отвечающие им фундаментальные функции, ни закон затухания амплитуды колебаний во времени.

Если же устранить из нелинейных дифференциальных уравнений нелинейные члены, учитывающие рассеяние энергии, то придем к обычным линейным дифференциальным уравнениям. Последние позволяют легко определить периоды свободных колебаний и фундаментальные функции, практически совпадающие с таковыми же для нелинейных колебаний, но при этом остается открытым вопрос о законе затухания колебаний.

Следующее затруднение при изучении рассеяния энергии возникает при попытке перехода от количественного учета рассеяния энергии в материале к учету рассеяния энергии в конструкции. Вопрос этот разрешен лишь для некоторых частных случаев, и потому при исследованиях общего характера такой мост не удается перебрасывать, в результате чего возникает затруднение в получении обоснованных результатов с точки зрения физики твердых тел.

Ниже покажем, что при использовании энергетического метода и установленного выше факта неизменности периода свободных колебаний и отвечающих им фундаментальных функций поставленная задача может быть достаточно просто разрешена.

Пусть свободные колебания какой-либо упругой системы происходят по какой-либо определенной фундаментальной функции $f.\varphi(x,y,z)$, где $f$—смещение какой-либо характерной точки, для которой, следовательно, принято $\varphi(x,y,z)=1$. Пусть упругая система отведена в крайнее отклоненное положение $f_1\varphi(x,y,z)$ и предоставлена самой себе. По истечении полупериода колебаний упругая система примет новое крайнее отклоненное положение $f_2\varphi(x,y,z)$, по истечении одного периода колебаний упругая система займет крайнее отклоненное положение $f_3\varphi(x,y,z)$ и т. д.

Ясно, что из-за рассеяния энергии

$$f_1>f_2>f_3\ldots$$

Речь идет об определении смещений $f_2, f_3, f_4\ldots$ если известно $f_1$.

При крайних отклоненных положениях упругой системы она будет заряжена лишь потенциальной энергией, величина которой равна соответственно

$$Af_1^2,\quad Af_2^2,\quad Af_3^2\ldots,$$

причем $A$ величина, определяемая видом функции $\varphi(x,y,z)$. Пусть величина рассеянной энергии за первый полупериод колебаний есть $\Omega_1$, за второй полупериод колебаний—$\Omega_2$ и т. д.

Тогда из закона сохранения энергии следует:

$$\begin{aligned} Af_1^2 &= Af_2^2+\Omega_1, \\ Af_2^2 &= Af_3^2+\Omega_2, \\ Af_i^2 &= Af_{i+1}^2+\Omega_i\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Если величины рассеянной энергии известны, то из полученных рекуррентных соотношений определятся значения

$$f_2,\ f_3,\ f_4\ldots$$

Если $\Omega_i$ является функцией координат смещения упругой системы, то ее значения будут известны с той же степенью точности, что и фундаментальные функции, т. е. достаточно точно; причем закон колебаний упругой системы в точности определится в моменты времени $t=0, \dfrac{T}{2}, T, \dfrac{3}{2}T$ и т. д., где $T$—период колебаний.

Если же $\Omega_i$ является функцией скоростей деформации, то $\Omega_i$ может быть определена лишь приближенно, так как закон затухания колебаний неизвестен.

С помощью полученных соотношений нетрудно определить $f_2$, $f_3$... Например, если поглощение энергии происходит за счет упругого гистерезиса, то оно должно явиться функцией максимального напряженного состояния.

Максимальное же напряженное состояние определяется видом фундаментальной функции $f \cdot \varphi(x,y,z)$, или, в конечном счете, значением $f$ для данной формы колебаний. Задавшись определенным количеством пока неизвестных параметров $a_i$, приближенно определяющих функцию рассеяния энергии $\omega$ в единице объема материала упругого тела, получим:

$$\Omega(f, a_1, a_2, a_3 ...) = \int \omega dv. \tag{2}$$

В уравнениях (1) в этом случае надо положить

$$\Omega_i = \Omega(f_i, a_1, a_2, a_3 ...). \tag{3}$$

Произведя несколько экспериментов, по количеству имеющихся параметров $a_i$, при изменяющихся условиях свободных колебаний упругой системы, например, при различных схемах загружения, мы получим из (1) систему уравнений, при известных $f_i$ и неизвестных параметрах. Решение этой системы уравнений даст искомые значения параметров $a_1, a_2, a_3$.... Если гипотеза была подобрана правильно, то значения $f_i$, определенные из системы (1), должны дать хорошие результаты для других экспериментов.

В общем случае система уравнений может иметь весьма сложную форму, точное разрешение которой практически невозможно. Здесь нужно воспользоваться тем, что разница между $f_i$ и $f_{i+1}$ невелика и потому достаточно ограничиться лишь рассмотром первой степени приращения $\Delta f = f_{i+1} - f_i$, что приводит к решению рекуррентных соотношений, каждые из которых первой степени. При желании можно учесть также вторые степени приращений, что приведет к решению уравнений второй степени.

Вычисление рассеяния энергии при наложении нескольких колебаний значительно сложнее и указанным здесь приемом может быть определено лишь приближенно.

Для стационарных однотонных вынужденных колебаний под действием пульсирующей силы

$$P = P_0 \sin pt,$$

действующей на упругую систему, вычисления могут быть построены следующим образом.

Пусть форма деформированного состояния системы при вынужденных колебаниях без учета рассеяния энергии есть $\varphi(x, y, z)$.

Тогда приближенное уравнение изогнутой оси балки можно записать в виде:

$$u = f \cdot \varphi(x, y, z) \sin(pt - \alpha), \tag{4}$$

где $\alpha$ — сдвиг фазы, обусловленной рассеянием энергии. Неизвестными величинами здесь являются $f$ и $\alpha$.

Необходимы два уравнения. Первое уравнение получим из того условия, что работа пульсирующей силы $P$ за период колебаний $T = \frac{2\pi}{p}$ равна рассеянию энергии $\Omega$ за тот же период.

Стало быть,

$$\int_0^T P du = \Omega. \tag{5}$$

Второе уравнение получится из рассмотра энергетического баланса упругой системы при переходе ее от среднего положения в крайнее отклоненное положение.

Пусть кинетическая энергия в среднем положении $V_k$, приращение потенциальной энергии в крайнем положении $V$, рассеяние энергии за четверть периода колебаний $\frac{\Omega}{4}\cdot$ Стало быть, имеет место

$$V_k + \int_0^{\frac{T}{4}} P du = V + \frac{\Omega}{4} \cdot \tag{6}$$

Из уравнений (5) и (6) определятся искомые $\alpha$ и $f$.

Институт строительных материалов и сооружений
Академии наук Армянской ССР

Ս. Գ. ՆԱԶԱՐՅԱՆ

## Առաձգական տատանումների դեպքում էներգիայի ցրման հաշվառման եղանակը

*Աշխատանքում գտնված է առաձգական տատանումների դեպքում էներգիայի ցրման հաշվառման եղանակը, որը հիմնվում է հետևյալի վրա։*

*Հայտնի է, որ շատ դեպքերում առաձգական սիստեմների ազատ տատանումների տևողությունը և նրան համապատասխան ֆունդամենտալ ֆունկցիաները, երբ հաշվի չի առնվում էներգիայի ցրումը, որը իհարկե գոյություն ունի, բավարար ճշտությամբ համապատասխանում են իրականությանը։ Դրա համար էներգիայի ցրման հաշվառման դեպքում բավական է հաշվել միայն տատանման մարումը, որի համար օգտագործվում է էներգիայի պահպանման օրենքը։ Այդ պրինցը օգտագործվում է և ստիպողական տատանումների ամպլիտուդաները հաշվելու համար։*

## ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] *Н. Н. Давиденков*, ЖТФ, VIII, в. 6, 1938. [2] *А. Г. Назаров*, ДАН Арм. ССР, XVI, 3, 1953. [3] *Д. Ю. Панов*, ПММ, IV, в. 1, 1940. [4] *Г. С. Писаренко*, ЖТФ, XIX, в. 12, 1949.