ISSN 00002-3043

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

2010

Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ա Կ Ա Ն Կ Ո Լ Ե Գ Ի Ա

Գլխավոր խմբագիր Ա. Ա. Սահակյան

Ն.Հ. Առաքելյան
Վ. Ս. Աթաբեկյան
Գ.Գ. Գևորգյան
Մ. Ս. Գինովյան
Ն. Բ. Նիգիրարյան
Վ. Ս. Զաքարյան
Ա. Ա. Թալալյան
Վ. Կ. Օհանյան (գլխավոր խմբագրի տեղակալ)
Ռ. Վ. Համբարձումյան
Հ. Մ. Հայրապետյան
Ա. Հ. Հովհաննիսյան
Վ. Ա. Մարտիրոսյան
Բ. Ս. Նահապետյան
Բ. Մ. Պողոսյան

Պատասխանատու քարտուղար՝ Ն. Գ. Ահարոնյան

Р Е Д А К Ц И О Н Н А Я К О Л Л Е Г И Я

Главный редактор А. А. Саакян

Г. М. Айрапетян
Р. В. Амбарцумян
Н. У. Аракелян
В. С. Атабекян
Г. Г. Геворкян
М С. Гиновян
В. К. Оганян (зам. главного редактора)
Н. Б. Енгибарян
В. С. Закарян
В. А. Мартиросян
Б. С. Нахапетян
А. О. Оганнисян
Б. М. Погосян
А. А. Талалян

Ответственный секретарь Н. Г. Агароняи

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 3-10.

О НЕКОТОРЫХ СООТНОШЕНИЯХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ОКРУЖНОСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ФИКСИРОВАННЫМИ ПОЛЮСАМИ. III

А. В. АБРАМЯН

Ванадзорский государственный педагогический институт

Аннотация. Работа посвящена свойствам ортогональных на единичной окружности рациональных функций с фиксированными полюсами.

MSC2000 number: 26C15
Ключевые слова: Рациональные функции, ортогональные системы.

1. ВВЕДЕНИЕ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(|z_k| < 1,\ k = 0, 1, \ldots)$ - произвольная последовательность комплексных чисел. Рассмотрим систему Такенака-Мальмквиста рациональных функций $\{r_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, ассоциированной с последовательностью чисел $\{z_k\}_{k=0}^{\infty}$:

$$r_0(z) = \frac{(1-|z_0|^2)^{1/2}}{1-\overline{z}_0\, z}$$

$$(1.1)\quad r_n(z) = \frac{(1-|z_n|^2)^{1/2}}{1-\overline{z}_n\, z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z_k - z}{1-\overline{z}_k\, z}\,\varepsilon_k,\ \varepsilon_k = \begin{cases} \frac{|z_k|}{z_k}, & z_k \neq 0 \\ -1, & z_k = 0 \end{cases} \quad n,\, k = 0, 1, \ldots$$

Известно, что система (1.1) ортонормальна на единичной окружности $T = \{\xi : |\xi| = 1\}$ относительно меры $(2\pi)^{-1}\, d\theta$, т.е.

$$\frac{1}{2\pi}\int_T r_n(\xi)\,\overline{r_m(\xi)}\,|d\xi| = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \qquad n,\, m = 0, 1, \ldots$$

Пусть $\mu(\theta)$ - произвольная ограниченная неубывающая функция на отрезке $[0, 2\pi]$ с бесконечным множеством точек роста. Ортогонализируя упорядоченную последовательность (1.1) на единичной окружности T относительно меры $(2\pi)^{-1}\, d\mu(\theta)$, получим последовательность рациональных функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям, определяющим функции этой последовательности единственным образом:

$$\varphi_n(z) = \alpha_n\, r_n(z) + \ldots, \quad \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_T \varphi_n(\xi)\,\overline{\varphi_m(\xi)}\,|d\mu| = \delta_{nm}, \quad n,\, m = 0, 1, \ldots.$$

Рациональные функции $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ были введены М. М. Джрбашяном [1], где и были получены аналоги некоторых хорошо известных соотношений теории ортогональных на единичной окружности многочленов. Доказанные в настоящей работе теоремы, в случае когда $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ сводятся к соответсвующим известным утверждениям теории ортогональных на единичной окружности многочленов развитой Г. Сеге [2] и Я. Л. Геронимусом [3]. Нам потребуются некоторые соотношения, которые для удобства приведены ниже (см. [4] - [5]):

$$S_n(\xi, z) = \frac{(1 - \bar{z}_n\, z)(1 - z_n\, \bar{\xi})}{(1 - |z_{n+1}|^2)(1 - \bar{\xi}\, z)} \left\{ \overline{\varphi_{n+1}^*(\xi)}\, \varphi_{n+1}^*(z) - \overline{\varphi_{n+1}(\xi)}\, \varphi_{n+1}(z) \right\}, \tag{1.2}$$

$n = 0, 1, \ldots$, где

$$S_n(\xi, z) = \sum_{k=0}^{n} \overline{\varphi_k(\xi)}\, \varphi_k(z), \quad \xi, z \in C$$

(C - поле комплексных чисел),

$$\varphi_n^*(z) = \frac{B_n(z)}{z} \overline{\varphi_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad B_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \frac{z_k - z}{1 - \bar{z}_k\, z} \varepsilon_k, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$c_0 \mathtt{Re} \left\{ \frac{\psi_n(\xi)}{\varphi_n(\xi)} \right\} = c_0 \mathtt{Re} \left\{ \frac{\psi_n^*(\xi)}{\varphi_n^*(\xi)} \right\} = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} \frac{1}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad |\xi| = 1,\ n = 0, 1, \ldots \tag{1.3}$$

$$c_0\, \psi_k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z} (\varphi_k(\xi) - \varphi_k(z))\, d\mu + \frac{1}{2\pi} \int_T \varphi_k(\xi)\, d\mu, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.4}$$

$$c_0 \frac{\psi_k^*(z)}{\varphi_k^*(z)} = \frac{1}{2\pi} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\mu - \frac{B_k(z)}{\varphi_k^*(z)} \frac{1}{\pi} \int_T \frac{\overline{\varphi_k(\xi)}}{\xi - z}\, d\mu, \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_T d\mu. \tag{1.5}$$

$$\int_T r_i(\xi) \overline{r_j(\xi)}\, d\nu_n = \int_T r_i(\xi) \overline{r_j(\xi)}\, d\mu, \quad i, j = 0, 1, \ldots, n, \tag{1.6}$$

$$d\nu_n = \frac{1 - |z_n|^2}{|\xi - z_n|^2} \frac{d\theta}{|\varphi_n(\xi)|^2}, \quad |\xi| = e^{i\,\theta},\ n = 0, 1, \ldots$$

$$\varphi_n(z) = \frac{\tau_n\, \omega_n(z)}{\pi_n(z)}, \quad \pi_n(z) = \prod_{k=0}^{n} (1 - \bar{z}_k\, z), \quad \omega_n(z) = z^n + \ldots$$

$$\varphi_n^*(z) = \frac{\lambda_n \bar{\tau}_n\, \omega_n^*(z)}{\pi_n(z)}, \quad \omega_n^*(z) = z^n\, \omega_n\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), \quad \lambda_n = \prod_{k=0}^{n} (-\varepsilon_k) \tag{1.7}$$

$$|\tau_n|^2 = |\tau_0|^2 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1 - |z_{k+1}|^2}{|\xi - z_k|^2} \frac{1 - |z_k\, \omega_k(0)|^2}{1 - |\omega_{k+1}(0)|^2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

$$\varphi_n^*(z) \neq 0, \quad |z| \leq 1, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1.8}$$

Заметим, что если $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$ и $d\mu = d\theta$, то $\varphi_n(z) = z^n$.

2. О НУЛЯХ ЯДЕР РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $(2\pi)^{-1}\,d\mu$

В этом параграфе будет доказана теорема о нулях так называемых ядер распределения $(2\pi)^{-1}\,d\mu$:

$$S_n(\xi,z)=\sum_{k=0}^{n}\overline{\varphi_k(\xi)}\,\varphi_k(z),\quad \xi,z\in C,\quad n=0,1,\dots$$

Теорема 1. *Пусть $\xi\in T$ фиксирована. Тогда все нули рациональной функции $S_n(\xi,z)$ простые, лежат на единичной окружности T и справедлива формула*

$$S_n(x,y)=\sum_{k=0}^{n}\frac{S_n(x,\xi_{nk})\,S_n(\xi_{nk},y)}{S_n(\xi_{nk},\xi_{nk})},\tag{2.1}$$

где ξ_{nk} $(k=1,2,\dots,n)$ -нули $S_n(\xi,z)$, т.е. $S_n(\xi,\xi_{nk})=0$, $k=1,\dots,n$, $\xi_{n0}=\xi$, $x,y\in C$.

Доказательство. Так как согласно (1.8) $\varphi_n^*(0)\neq 0$, то числитель рациональной функции $\varphi_n(z)$ имеет точную степень n. Используя (1.7), перепишем (1.2) в виде

$$S_n(\xi,z)=\frac{|\tau_{n+1}|^2}{1-|z_{n+1}|^2}\frac{1}{\overline{\pi_n(\xi)}\,\pi_n(z)}\,\frac{\overline{\omega_{n+1}^*(\xi)}\,\omega_{n+1}^*(z)-\overline{\omega_{n+1}(\xi)}\,\omega_{n+1}(z)}{1-\bar{\xi}\,z}.\tag{2.2}$$

Очевидно, что $S_n(\xi,\xi)\neq 0$ и уравнение $S_n(\xi,z)=0$ эквивалентно уравнению

$$\overline{\omega_{n+1}^*(\xi)}\,\omega_{n+1}^*(z)-\overline{\omega_{n+1}(\xi)}\,\omega_{n+1}(z)=0,\quad z\neq\xi.\tag{2.3}$$

Так как из $\xi\in T$ следует $|\omega_{n+1}^*(\xi)|=|\omega_{n+1}(\xi)|$, то $\xi_{n0}=\xi$ является корнем уравнения (2.3). Остальные корни указанного уравнения являются корнями уравнения $S_n(\xi,z)=0$ и $S_n(\xi,z)=0$ не имеет других корней. Согласно (1.8), все нули многочлена $\omega_{n+1}(z)$ лежат внутри единичного круга $U=\{z:\,|z|<1\}$. Для дальнейших рассуждений нам понадобится следующий результат И. Шура ([6], стр. 114):

Пусть $P(z)=0$ - полином n-ой степени, все корни которого лежат внутри единичного круга U. Положим $P^*(z)=z^n\,\overline{P(\frac{1}{\bar{z}})}$. Если $|\xi|=1$, то все корни уравнения $P(z)+\xi\,P^*(z)=0$ лежат на окружности T.

Из этой теоремы следует, что все нули уравнения (2.3) лежат на окружности T. Таким образом все нули $S_n(\xi,z)$ лежат на единичной окружности. Докажем, что все эти нули простые. Допустим, что это не так. Тогда существует $\xi_0\in\{\xi_{nk}:\,k=1,2,\dots,n\}$ такое, что ξ_0 имеет кратность больше 1, т.е. $S_n(\xi,\xi_0)=0$, $\frac{\partial}{\partial z}S_n(\xi,z)\big|_{z=\xi_0}$ или

$$\overline{\omega_{n+1}^*(\xi)}\,\omega_{n+1}^*(\xi_0)-\overline{\omega_{n+1}(\xi)}\,\omega_{n+1}(\xi_0)=0,$$

$$\overline{\omega_{n+1}^*(\xi)}\,\omega_{n+1}^{*\,\prime}(\xi_0)-\overline{\omega_{n+1}(\xi)}\,\omega_{n+1}'(\xi_0)=0.$$

С учетом (1.8) из этих равенств имеем

$$\frac{{\omega^*_{n+1}}'(\xi_0)}{\omega^*_{n+1}(\xi_0)} = \frac{\omega'_{n+1}(\xi_0)}{\omega_{n+1}(\xi_0)}. \tag{2.4}$$

Пусть $\{z_{n+1\,k}\}_{k=1}^{n+1}$ – нули многочлена $\omega_{n+1}(z)$. Эти нули лежат внутри единичного круга U (см.(1.8)), тогда $\omega^*_{n+1}(z) = \prod\limits_{k=1}^{n+1}(1-\bar z_{n+1\,k}z)$ и (2.4) можно переписать в виде

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\bar z_{n+1\,k}}{1-\bar z_{n+1\,k}\,\xi_0} + \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\xi_0-\bar z_{n+1\,k}} = 0.$$

Так как

$$\frac{\bar z_{n+1\,k}}{1-\bar z_{n+1\,k}\,\xi_0} + \frac{1}{\xi_0-\bar z_{n+1\,k}} = \xi_0\,\frac{1-|z_{n+1\,k}|^2}{\xi_0-z_{n+1\,k}|^2},$$

то из предыдущего равенства выводим

$$\xi_0\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1-|z_{n+1\,k}|^2}{\xi_0-z_{n+1\,k}|^2} = 0,$$

что невозможно. Полученное противоречие показывает, что все нули $\{\xi_{nk}\}_{k=1}^{n}$ - простые. Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать справедливость формулы (2.1). Обозначим

$$H_n(x,y) = \frac{1-|z_{n+1}|^2}{|\tau_{n+1}|^2}\,\overline{\pi_n(x)}\,\pi_n(y)\,S_n(x,y).$$

Тогда

$$H_n(x,y) = \frac{1}{1-\bar x y}\left\{\overline{\omega^*_{n+1}(x)}\,\omega^*_{n+1}(y) - \overline{\omega_{n+1}(x)}\,\omega_{n+1}(y)\right\}. \tag{2.5}$$

Заметим, что $H_n(x,y)$ многочлен как от $\bar x$, так и от y. Из (2.5) следует, что

$$\begin{aligned}
&(1-\bar\xi x)\overline{\omega^*_{n+1}(y)}H_n(\xi,x) + (1-\bar\xi y)\,\bar\xi^{n+1}\,\omega_{n+1}(x)\,H_n(y,\xi) = \\
&= \overline{\omega^*_{n+1}(y)}\,\left\{\overline{\omega^*_{n+1}(\xi)}\,\omega^*_{n+1}(x) - \overline{\omega_{n+1}(\xi)}\,\omega_{n+1}(x)\right\} + \\
&+\bar\xi^{n+1}\,\omega_{n+1}(x)\,\left\{\overline{\omega^*_{n+1}(y)}\,\omega^*_{n+1}(\xi) - \overline{\omega_{n+1}(y)}\,\omega_{n+1}(\xi)\right\} = \\
&= \overline{\omega^*_{n+1}(\xi)}\,\left\{\overline{\omega^*_{n+1}(y)}\,\omega^*_{n+1}(x) - \overline{\omega_{n+1}(y)}\,\omega_{n+1}(x)\right\} = (1-\bar x y)\,\omega^*_{n+1}\xi\,H_n(x,y),
\end{aligned}$$

откуда имеем $(1-\bar\xi_{ni}\,\xi_{nj})\,H_n(\xi_{ni},\xi_{nj}) = 0,\ i\neq j,\ i,j = 0,1,\dots,n.$
Так как $\xi_{ni}\neq\xi_{nj}$ (при $i\neq j$), то

$$H_n(\xi_{ni},\xi_{nj}) = 0, \quad i\neq j, \quad i,j = 0,1,\dots,n. \tag{2.6}$$

Применение интерполяционной формулы Лагранжа дает

$$H_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}\frac{H_n(y,\xi_{nk})\,R_n(\xi,x)}{(x-\xi_{nk})\,R'_n(\xi,\xi_{nk})}, \quad R_n(\xi,x) = (x-\xi)\,H_n(\xi,x), \quad \xi_{n0} = \xi.$$

Из этой формулы с учетом (2.6), при $y = \xi_{nk}$, $k = 0, 1, \ldots, n$ следует

$$H_n(\xi_{nk}, x) = \frac{H_n(\xi_{nk}, \xi_{nk})\, R_n(\xi, x)}{(x - \xi_{nk})\, R_n'(\xi, \xi_{nk})}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Таким образом

$$H_n(y, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{H_n(\xi_{nk}, y)\, H_n(x, \xi_{nk})}{H_n(\xi_{nk}, \xi_{nk})},$$

откуда следует (2.1). Теорема доказана. □

Замечание 1. *Аналог формулы* (2.1) *для ортогональных на отрезке многочленов см.* [7]*, стр. 104.*

Следствие 1. *Пусть* $p, q = 0, 1, \ldots, n$, $m_{nk} = \frac{1}{S_n(\xi_{nk}, \xi_{nk})}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi} \int_T r_p(e^{i\tau}) \overline{r_q(e^{i\tau})}\, d\mu(\tau) = \sum_{k=0}^{n} m_{nk}\, r_p(\xi_{nk})\, \overline{r_p(\xi_{nk})}.$$

Доказательство. Из (2.1) при $x = e^{i\tau}$ следует

$$\int_0^{2\pi} r_p(x)\, S_n(x, y)\, d\mu(\tau) = \sum_{k=0}^{n} m_{nk}\, S_n(\xi_{nk}, y) \int_0^{2\pi} r_p(x)\, S_n(x, \xi_{nk})\, d\mu(\tau)$$

или

$$r_p(y) = \sum_{k=0}^{n} m_{nk}\, r_p(\xi_{nk})\, S_n(\xi_{nk}, y), \quad p = 0, 1, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_p(y) \overline{r_q(y)}\, d\mu(t) = \sum_{k=0}^{n} m_{nk}\, r_p(\xi_{nk}) \int_0^{2\pi} \overline{r_q(y)}\, S_n(\xi_{nk}, y)\, d\mu(t), \quad y = e^{it},$$

откуда имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_p(y) \overline{r_q(y)}\, d\mu(t) = \sum_{k=0}^{n} m_{nk}\, r_p(\xi_{nk})\, \overline{r_q(\xi_{nk})}, \quad p, q = 0, 1, \ldots, n.$$

Следствие доказано. □

3. О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ $\left\{\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}\right\}$

Пусть $C(T)$ – пространство непрерывных на T комплексных функций, $\nu(\theta)$ – неубывающая на отрезке $[0, 2\pi]$ функция, $f \in C(T)$,

$$\|d\nu\| = \sup_{\|f\| \le 1} \left| \int_T f\, d\nu \right| = \int_T d\nu.$$

Если ν, ν_n $(n = 1, 2, \ldots)$ – конечные положительные меры на T, то символом $d\nu_n \longrightarrow d\nu$ будем обозначать слабую сходимость: для любой функции $f \in C(T)$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_T f\, d\nu_n = \int_T f\, d\nu.$$

Допустим, что данная последовательность равномерно ограничена по норме, т.е. $\|d\nu_n\| \le c$, $n = 1, 2, \ldots$ и семейство функций $\Delta \subset C(T)$ плотно в $C(T)$. Из теоремы о слабой сходимости в сопряженном пространстве (см. [8], стр. 181) следует, что если для любой функции $f \in \Delta$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_T f\, d\nu_n = \int\limits_T f\, d\nu$, то $d\nu_n \longrightarrow d\nu$. Пусть

$$d\nu_n = \frac{1-|z_n|^2}{|\xi - z_n|^2}\frac{|d\xi|}{\varphi_n(\xi)|^2}, \quad \Delta = \left\{ r_i(\xi)\,\overline{r_j(\xi)} \right\}_{i,j=0}^{\infty}, \quad \xi \in T.$$

Теорема 2. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|) = \infty$, *то* $d\nu_n \longrightarrow d\mu$.

Доказательство. Перепишем (1.6) в виде

$$\lim_{n\to\infty}\int_T r_i(\xi)\,\overline{r_j(\xi)}\,d\nu_n = \int_T r_i(\xi)\,\overline{r_j(\xi)}\,d\mu, \quad i,j = 0,1,\ldots.$$

Отсюда следует, что теорема будет доказана, если мы покажем, что последовательность $d\nu_n$ равномерно ограничена по норме и Δ (при условии теоремы) плотно в $C(T)$. Из (1.6) при $i = j = 0$ имеем

$$\int\limits_T \frac{1-|z_0|^2}{|\xi - z_0|^2}\,d\nu_n = \int\limits_T \frac{1-|z_0|^2}{|\xi - z_0|^2}\,d\mu,$$

откуда следует

$$(3.1)\quad \|d\nu_n\| = \int_T d\nu_n = \int\limits_T \frac{1-|z_0|^2}{|\xi - z_0|^2}\frac{|\xi - z_0|^2}{1-|z_0|^2}\,d\nu_n \le 2\pi\left(\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right)^2 c_0,\ n = 0,1,\ldots$$

т.е. последовательность $d\nu_n$ равномерно ограничена по норме. Пусть F - линейный непрерывный функционал в $C(T)$. В силу классической теоремы Ф. Рисса (см. [9], стр. 173) функционал F представим в виде $F(f) = \int_T f\, d\nu$, где ν - конечная комплексная мера Радона на окружности T. Известно, что для полноты системы $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ в $C(T)$ необходимо и достаточно, чтобы из равенств $F(f_k) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, вытекало $F(f) = 0$ для любого $f \in C(T)$ (см. [10], стр. 80). Допустим, что $F(r_i(\xi)\,\overline{r_j(\xi)}) = 0$, $i, j = 0, 1, \ldots$. Так как (см.[1])

$$\frac{1}{1-\bar\xi z} = \sum_{k=0}^{n}\overline{r_k(\xi)}r_k(z) + \frac{B_n(z)\,\overline{B_n(\xi)}}{1-\bar\xi z},$$

то

$$\int_T \left|\frac{1}{1-\bar\xi z} - \frac{B_n(z)\,\overline{B_n(\xi)}}{1-\bar\xi z}\right|^2 d\nu = \int_T \left|\sum_{k=0}^{n}\overline{r_k(\xi)}r_k(z)\right|^2 d\nu =$$

$$= \sum_{i,j=0}^{n} r_i(z)\,\overline{r_j(\xi)}\,d\nu \int_T r_i(\xi)\,\overline{r_j(\xi)}\,d\nu = 0, \quad z \in U,$$

следовательно

$$\int_T \frac{d\nu}{|\xi - z|^2} = 2 \int_T \mathtt{Re}\{B_n(z)\,\overline{B_n(\xi)}\}\,\frac{d\nu}{|\xi - z|^2} - |B_n(z)|^2 \int_T \frac{d\nu}{|\xi - z|^2}. \tag{3.2}$$

Учитывая, что (при условии теоремы) $\lim\limits_{n\to\infty} B_n(z) = 0$ равномерно внутри U, из (3.2) имеем $\int_T \frac{d\nu}{|\xi - z|^2} = 0$, $z \in U$, откуда следует, что $F(f) = 0$ для любой функции вида:

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^{m} c_k\, P(W_k, \xi), \quad P(W, \xi) = \frac{1 - |W|^2}{|\xi - W|^2}, \tag{3.3}$$

где m - натуральное число, $|W_k| < 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, c_k - произвольные комплексные числа, $|\xi| = 1$. Так как множество функций вида (3.3) плотно в $C(T)$ (см. [11]), то $F(f) = 0$ для любого $f \in C(T)$. Следовательно Δ - плотно в $C(T)$. Теорема доказана (при $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, см. [11]). □

Теорема 3. *Если* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (1 - |z_k|) = \infty$, *то равномерно внутри* U

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi\, c_0} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\mu, \quad z \in U. \tag{3.4}$$

Доказательство. Так как (см. (1.8)) рациональные функции $\varphi_k^*(z)$, $k = 0, 1, \ldots$, не имеют нулей в замкнутом круге $|z| \le 1$, то из (1.3) и из формулы Шварца следует:

$$\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = i\,\beta_n + \frac{1}{2\pi\, c_0} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\nu_n, \quad \beta_n = \mathcal{I}\Updownarrow\left\{\frac{\psi_n^*(0)}{\varphi_n^*(0)}\right\}, \quad z \in U \tag{3.5}$$

Учитывая, что (см. (1.5))

$$\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi\, c_0} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\mu - \frac{B_n(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{\pi\, c_0} \int_T \frac{\overline{\varphi_n(\xi)}}{\xi - z}\, d\mu, \quad z \in U \tag{3.6}$$

из (3.6) выводим

$$i\,\beta_n = \frac{1}{2\pi\, c_0} \int_T \frac{\xi + z_0}{\xi - z_0}\, d\mu - \frac{1}{2\pi\, c_0} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\nu_n. \tag{3.7}$$

Так как (при $\xi \in T$, $z \in U$) $\frac{\xi + z}{\xi - z} \in C(T)$ и $d\nu_n \longrightarrow d\mu$, то из (3.7) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, но тогда из (3.5) имеем: для любого $z \in U$ последовательность $\left\{\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ сходится поточечно, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} = \frac{1}{2\pi\, c_0} \int_T \frac{\xi + z}{\xi - z}\, d\mu, \quad z \in U.$$

Докажем, что последовательность $\left\{\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}\right\}_{n=0}^{\infty}$ равномерно ограничена внутри U. Из (3.5), (3.1) имеем

$$\left|\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}\right| \le \sup_n |\beta_n| + \left(\frac{1+|z_0|}{1-|z_0|}\right)^2 \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| \le r < 1.$$

Таким образом $\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)}$ – последовательность аналитических функций в U, равномерно ограничена внутри и сходится поточечно для всех $z \in U$. Утверждение теоремы следует теперь из теоремы Витали (см. [12], стр. 192). Теорема доказана (при $z_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, см. [3]). □

Заметим, что в [5] содержится следующий результат:

Если $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(1-|z_k|) = \infty$, то равномерно внутри U

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1-|z_n^2|}\left\{\frac{\psi_n^*(z)}{\varphi_n^*(z)} - \frac{1}{2\pi\, c_0}\int_T \frac{\xi+z}{\xi-z}\, d\mu\right\} = 0.$$

Очевидно, что этот результат является следствием Теоремы 3.2.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность А. Саакяну и С. Рафаеляну за ценные советы.

Abstract. In this work certain properties of orthogonal rational functions are proved.

Список литературы

[1] М. М. Джрбашян, "Ортогональные системы рациональных функций на окружности", Изв. АН. Арм. ССР, Математика, том 1, часть 1, 3 - 24, часть 2, 106 - 125 (1966).
[2] Г. Сеге, Ортогональные многочлены, М., Физматгиз (1962).
[3] Я. Л. Геронимус, Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке. М., Физматгиз (1958).
[4] А. В. Абрамян, "О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами", Изв. НАН Армении, Математика, **41** (3), 3-12 (2006).
[5] А. В. Абрамян, "О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. II", Изв. НАН Армении, Математика, **43** (2), 3 - 16 (2008).
[6] Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа. часть I, М., Наука (1978).
[7] Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., Физматгиз (1925).
[8] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, М., Наука (1981).
[9] П. Кусис, Введение в теорию пространств, М., Мир (1984).
[10] А. Ф. Леонтьев, Целые функции, Ряды экспонент. М., Наука (1983).
[11] Е. А. Рахманов, "Об асимптотике отношения ортогональных многочленов", Мат. Сборник, том **102** (145), 2(6), 237 - 252 (1977).
[12] А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, М., Наука (1979).

Поступила 3 мая 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 11-24.

СИЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ КАТЕГОРИИ И СИЛЬНАЯ ПОДВИЖНОСТЬ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Т. А. АВАКЯН, П. С. ГЕВОРКЯН

Московский Энергетический Институт (Технический Университет)
E-mail: *pgev@yandex.ru*

Аннотация. Работа посвящена одному из важных понятий теории шейпов. Это – понятие сильной подвижности, которое первоначально, для метризуемых компактов, было введено К. Борсуком. В данной статье доказан критерий сильной подвижности топологических пространств. Этот критерий, в частности, позволяет применить новый, категорный подход к понятию сильной подвижности.

MSC2000 number: 54C56, 55P55
Ключевые слова: шейп, сильная подвижность, обратная система, категория.

1. Введение

Сильная подвижность является одним из важных понятий теории шейпов. Это понятие сыграло важную роль прежде всего при изучении устойчивости топологических пространств, т.е., пространств, имеющих шейп некоторого CW-комплекса (см. [3], [4], [11]). Понятие сильной подвижности первоначально, для метризуемых компактов, было введено К. Борсуком [3] с помощью окрестностей данного метризуемого компакта, замкнуто вложенного в некоторое AR-пространство. Для произвольного топологического пространства это понятие было определено Мардешичем [7] с помощью ассоциированных с данным пространством обратных спектров. Полученные в данной статье результаты, в частности, позволяют применить новый, более общий, подход к понятию сильной подвижности. В основе этого подхода лежат идеи, которые были применены в работах [2], [5] к подвижности топологических пространств. Эти идеи, как было показано И. Поп в работе [10] и вторым автором данной статьи совместно с И. Поп в работе [6], оказались пригодными и для изучения равномерной подвижности топологических пространств.

Критерий сильной подвижности топологических пространств, полученный в настоящей статье, позволяет также сделать некоторые уточнения и замечания по поводу формулировок Теоремы 4.1 из [2] и Теоремы 3 из [5].

2. Основные определения и понятия.

Напомним некоторые необходимые для дальнейшего изложения определения и понятия из теории категорий и функторов и теории шейпов.

Пусть K произвольная категория. Класс всех объектов категории K обозначается через $\mathrm{Ob}(K)$. Если A и B произвольные объекты категории K, короче $A, B \in K$, то класс всех морфизмов из A в B обозначается через $\mathrm{Hom}_K(A, B)$ или $\mathrm{Hom}(A, B)$, если из контекста становится понятным о какой категории идет речь. Этот класс обозначают также через $\mathrm{Mor}_K(A, B)$.

Определение 1. *Говорят, что категория K функторно доминируется категорией L, если существуют такие функторы $F : K \to L$ и $G : L \to K$, что $G \circ F = 1_K$. В этом случае будем писать $K \leq L$.*

Определение 2. *Пусть F и G – ковариантные функторы из категории K в категорию L. Говорят, что задан функторный морфизм или естественное преобразование $\varphi : F \to G$ функтора F в функтор G, если для произвольного объекта $A \in K$ задан морфизм $\varphi(A) : F(A) \to G(A)$ категории L так, что для любого морфизма $f : A \to B$ категории K диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\varphi(B)]{} & G(B) \end{array}$$

коммутативна.

Если существует естественное преобразование $\varphi : F \to G$ функтора F в функтор G, будем писать $F \rightsquigarrow G$.

Пусть (K_i), $i \in I$ – семейство категорий. Произведением категорий K_i, $i \in I$ называется категория $\prod\limits_{i \in I} K_i$, объектами которой служат всевозможные семейства (X_i), $i \in I$ где X_i – объект категории K_i, $i \in I$, а морфизмы определяются

следующим образом

$$\mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I} K_i}((X_i),(Y_i)) = \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{K_i}(X_i, Y_i).$$

Если

$$(u_i) \in \mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I} K_i}((X_i),(Y_i)),$$

а

$$(v_i) \in \mathrm{Hom}_{\prod_{i\in I} K_i}((Y_i),(Z_i)),$$

то композиция этих морфизмов определяется формулой

$$(v_i)\circ(u_i) = (v_i \circ u_i).$$

Пусть $HTOP$ – гомотопическая категория топологических пространств, а HCW – ее полная подкатегория, объектами которой являются топологические пространства, имеющие гомотопический тип CW-комплексов.

Определение 3 (К. Морита [9]). *Обратная система (обратный спектр)* $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ *категории* HCW *называется ассоциированной с топологическим пространством* X, *если для произвольного* $\alpha \in A$ *существует гомотопический класс* $p_\alpha : X \to X_\alpha$ *такой, что*

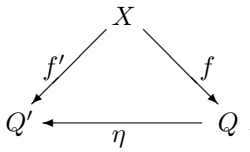
1° $p_{\alpha\alpha'} \circ p_{\alpha'} = p_\alpha$ *для произвольных* $\alpha, \alpha' \in A$, $\alpha < \alpha'$;

2° *для произвольного гомотопического класса* $f : X \to Q$, $Q \in Ob(HCW)$, *существуют* $\alpha \in A$ *и гомотопический класс* $f_\alpha : X_\alpha \to Q$ *такие, что* $f = f_\alpha \circ p_\alpha$;

3° *для произвольного* $\alpha \in A$ *и произвольных гомотопических классов* $f_\alpha, g_\alpha : X_\alpha \to Q$, $Q \in Ob(HCW)$, *удовлетворяющих условию* $f_\alpha \circ p_\alpha = g_\alpha \circ p_\alpha$, *существует индекс* $\alpha' \in A$, $\alpha \le \alpha'$ *такой, что* $f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'} = g_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'}$.

Известно [9], что для любого топологического пространства X существует ассоциированный с ним обратный спектр категории HCW. Иначе говоря, HCW является плотной подкатегорией категории $HTOP$, а, значит, можно построить теорию шейпов для всех топологических пространств, применяя ассоциированные обратные спектры.

Теорию шейпов топологических пространств можно построить и с помощью кома-категорий (см. [8]). Для этого каждому топологическому пространству X сопоставляется кома-категория W^X, объекты которой являются гомотопическими классами $f : X \to Q$, а морфизмы – коммутативными треугольниками



где $Q, Q' \in \mathrm{Ob}(HCW)$. Тогда шейповый морфизм $F : X \to Y$ определяется как ковариантный функтор $F : W^Y \to W^X$, который оставляет неизменным гомотопический класс η.

Определение 4 ([8]). *Обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ категории HCW называется* сильно подвижной, *если выполняется условие:*

(SM1). для произвольного $\alpha \in A$, существует $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$ такое, что для любого $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$ существует $\alpha^* \in A$, $\alpha^* \geq \alpha'$, $\alpha^* \geq \alpha''$, и существует гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$ такой, что одновременно выполняются равенства

$$p_{\alpha\alpha'} = p_{\alpha\alpha''} r^{\alpha'\alpha''}, \tag{2.1}$$

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^*}. \tag{2.2}$$

Топологическое пространство X называется сильно подвижным, *если существует ассоциированная с ним сильно подвижная обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ в категории HCW.*

Для подробного ознакомления с вышеизложенными вопросами теории категорий и функторов и теории шейпов мы рекомендуем читателю книги [1] и [8].

3. Сильно подвижные категории

Пусть K и L произвольные категории, а $\Phi : K \to L$ – произвольный ковариантный функтор.

Определение 5. *Будем говорить, что категория K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi : K \to L$, если для произвольного объекта $X \in Ob(K)$ существуют объект $M(X) \in Ob(K)$ и морфизм $m_X \in Mor_K(M(X), X)$ такие, что для любого объекта $Y \in Ob(K)$ и любого морфизма $p \in Mor_K(Y, X)$ существует такой морфизм $u \in Mor_L(\Phi(M(X)), \Phi(Y))$, что $\Phi(p) \circ u = \Phi(m_X)$.*

В случае, когда в последнем определении K – полная подкатегория категории L, а $\Phi : K \hookrightarrow L$ – функтор вложения, подкатегория K называется подвижной относительно категории L (см. Определение 1 статьи [2]).

Пусть X топологическое пространство, а W^X – кома-категория этого пространства. Определим ковариантный функтор $\Omega : W^X \to HCW$, который каждому объекту $f : X \to Q$ сопоставляет объект $Q \in HCW$, а каждому морфизму $\eta : (f : X \to Q) \to (f' : X \to Q')$, $(\eta \circ f = f')$ – морфизм $\eta : Q \to Q'$. Функтор Ω назовем *стирающим* функтором.

Теорема 1. *Топологическое пространство X подвижно тогда и только тогда, когда кома-категория W^X подвижна относительно категории HCW и стирающего функтора $\Omega : W^X \to HCW$.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 4, [2] (см. также, теорему 4.2, [5]). Отметим, что последняя теорема исправляет неточность, которая была замечена нами в формулировке теоремы 3, [2] (см. также, теорему 4.1, [5]).

Предложение 1. *Пусть K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi : K \to L$, а $F : L \to L'$ – произвольный функтор. Тогда категория K будет подвижной относительно категории L' и функтора $F \circ \Phi : K \to L'$.*

Доказательство. По определению 5 для произвольного объекта $X \in Ob(K)$ существуют объект $M(X) \in Ob(K)$ и морфизм $m_X \in Mor_K(M(X), X)$ такие, что для любого объекта $Y \in Ob(K)$ и любого морфизма $p \in Mor_K(Y, X)$ существует такой морфизм $u \in Mor_L(\Phi(M(X)), \Phi(Y))$, что $\Phi(p) \circ u = \Phi(m_X)$. Но поскольку $F : L \to L'$ ковариантный функтор, то из последнего равенства следует, что $F(\Phi(p)) \circ F(u) = F(\Phi(m_X))$. А это значит, что морфизм $F(u) \in Mor_{L'}((F \circ \Phi)(M(X)), (F \circ \Phi)(Y))$ – искомый, т.е., категория K подвижна относительно категории L' и функтора $F \circ \Phi : K \to L'$. □

Определение 6. *Категорию K назовем сильно подвижной, если она подвижна относительно самой себя и тождественного функтора 1_K. Иначе говоря, если для произвольного объекта $X \in Ob(K)$ существуют объект $M(X) \in Ob(K)$ и морфизм $m_X \in Mor_K(M(X), X)$ такие, что для любого объекта $Y \in Ob(K)$ и морфизма $p \in Mor_K(Y, X)$ существует такой морфизм $u_p \in Mor_K(M(X), Y)$, что $p \circ u_p = m_X$.*

Естественность этого определения станет очевидной ниже, после доказательства теоремы 6.

Пример 1. *Пусть S_0 – категория множеств с отмеченным элементом, объектами которой служат всевозможные пары (A, a_0), где A – непустое множество, а a_0 – некоторый отмеченный элемент множества A, а морфизмами – всевозможные отображения $(A, a_0) \to (B, b_0)$, переводящие отмеченный элемент a_0 в отмеченный элемент b_0. Нетрудно проверить, что категория S_0 является сильно подвижной категорией.*

Пример 2. *Пусть Gr – категория групп, объектами которой служат всевозможные группы, а морфизмами – всевозможные гомоморфизмы между группами. Легко убедиться, что категория Gr также является сильно подвижной категорией.*

Следующая теорема дает множество нетривиальных и интересных примеров сильно подвижных категорий.

Теорема 2. *Пусть Q произвольный CW-комплекс. Тогда кома-категория W^Q является сильно подвижной категорией.*

Доказательство. Пусть $X = f' : Q \to Q'$ – произвольный объект кома-категории W^Q. Докажем, что объект $M(X) = 1_Q : Q \to Q$ и морфизм $m_X = f' : M(X) \to X$ кома-категории W^Q удовлетворяют условию определения 6 сильной подвижности для кома-категории W^Q. В самом, деле, пусть $Y = f'' : Q \to Q''$ – произвольный объект, а $p : Y \to X$ – произвольный морфизм кома-категории W^Q. По определению кома-категории W^Q, $p = \eta : Y \to X$ – гомотопический класс, удовлетворяющий равенству

$$\eta \circ f'' = f'. \tag{3.1}$$

Теперь в качестве искомого морфизма $u_p : M(X) \to Y$ положим $u_p = f'' : M(X) \to Y$. Осталось проверить равенство $p \circ u_p = m_X$, что с точностью до обозначений есть равенство 3.1. □

Предложение 2. *Если K сильно подвижная категория, то она подвижна относительно любой категории L и любого функтора $\Phi : K \to L$.*

Доказательство. Пусть K – сильно подвижная категория, L – произвольная категория, а $\Phi : K \to L$ – произвольный функтор. По определению сильной

подвижности (см. определение 6), K подвижна относительно самой себя и тождественного функтора $1_K : K \to K$. Но тогда, в силу Предложения 1, категория K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi \circ 1_K = \Phi : K \to L$. □

Предложение 3. *Пусть категория K подвижна относительно категории L и функтора $\Phi : K \to L$. Если $\Phi : K \to L$ – функторное доминирование, то K – сильно подвижная категория.*

Доказательство. По условию существует функтор $\Psi : L \to K$ такой, что $\Psi \circ \Phi = 1_K$. Но тогда, согласно Предложению 1, категория K подвижна относительно самой себя и функтора $\Psi \circ \Phi = 1_K : K \to K$. А это, по определению, означает, что K – сильно подвижная категория. □

Теорема 3. *Произведение $\prod\limits_{i \in I} K_i$ категорий K_i, $i \in I$ сильно подвижно тогда и только тогда, когда сильно подвижны все сомножители K_i, $i \in I$.*

Доказательство. Пусть произведение $\prod\limits_{i \in I} K_i$ категорий K_i, $i \in I$ – сильно подвижно. Докажем, что для произвольного $i_0 \in I$ категория K_{i_0} – сильно подвижна.

Пусть X – произвольный объект категории K_{i_0}. Рассмотрим произвольный объект $(X_i) \in \prod\limits_{i \in I} K_i$, где $X_{i_0} = X$. Для этого объекта, в силу сильной подвижности произведения $\prod\limits_{i \in I} K_i$, существуют объект $(M(X_i)) \in \prod\limits_{i \in I} K_i$ и морфизм $(m_{X_i}) : (M(X_i)) \to (X_i)$, которые удовлетворяют определению сильной подвижности произведения $\prod\limits_{i \in I} K_i$. Обозначим через $M(X_{i_0})$ i_0-ю компоненту объекта $(M(X_i))$, а через $m_{X_{i_0}}$ – i_0-ю компоненту морфизма (m_{X_i}).

Пусть теперь Y – произвольный объект, а $p : Y \to X$ – произвольный морфизм категории K_{i_0}. Рассмотрим объект $(Y_i) \in \prod\limits_{i \in I} K_i$ и морфизм $(p_i) : (Y_i) \to (X_i)$, где $Y_{i_0} = Y$ и $p_{i_0} = p$, а $Y_i = X_i$, и $p_i = 1_{X_i}$, если $i \neq i_0$. Пусть $(u_i) : (M(X_i)) \to (Y_i)$ – морфизм, существование которого следует из определения сильной подвижности объекта (X_i), т. е., $(p_i) \circ (u_i) = (m_{X_i})$. Но тогда морфизм $u_{i_0} : M(X_{i_0}) \to Y_{i_0} = Y$ удовлетворяет равенству $p_{i_0} \circ u_{i_0} = m_{X_{i_0}}$, а значит K_{i_0} – сильно подвижная категория.

Теперь предположим, что для произвольного $i \in I$ категория K_i – сильно подвижна. Докажем, что тогда произведение $\prod\limits_{i \in I} K_i$ также является сильно подвижной категорией.

Пусть (X_i) – произвольный объект категории $\prod\limits_{i\in I} K_i$. Для каждого $X_i \in K_i$ найдем объект $M(X_i)$ и морфизм $m_{X_i} : M(X_i) \to X_i$, существование которых следует из определения сильной подвижности категории K_i. Рассмотрим объект $(M(X_i)) \in \prod\limits_{i\in I} K_i$ и морфизм $(m_{X_i}) : (M(X_i)) \to (X_i)$.

Пусть теперь $(Y_i) \in \prod\limits_{i\in I} K_i$ – произвольный объект, а $(p_i) : (Y_i) \to (X_i)$ – произвольный морфизм. Для каждого $p_i : Y_i \to X_i$, $i \in I$, существует морфизм $u_i : M(X_i) \to Y_i$ такой, что $p_i \circ u_i = m_{X_i}$. Но тогда морфизм $(u_i) : (M(X_i)) \to (Y_i)$ удовлетворяет равенству $(p_i) \circ (u_i) = (m_{X_i})$. Это и означает, что категория $\prod\limits_{i\in I} K_i$ является сильно подвижной. □

Определение 7. *Будем говорить, что категория K функторно слабо доминируется категорией L, если существуют такие функторы $F : K \to L$ и $G : L \to K$, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_K$ (см. определение 2). В этом случае пишем $K \lesssim L$.*

Замечание 1. *Очевидно, что функторное доминирование влечет за собой слабое функторное доминирование, т. е. из $K \leq L$ следует $K \lesssim L$.*

Теорема 4. *Пусть $K \lesssim L$. Если категория L сильно подвижна, то категория K также сильно подвижна.*

Доказательство. Пусть $F : K \to L$ и $G : L \to K$ такие функторы, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_K$ и пусть $\varphi : G \circ F \to 1_K$ – некоторое естественное преобразование.

Возьмем произвольный объект X категории K. Рассмотрим объект $M(F(X))$ и морфизм $m_{F(X)} : M(F(X)) \to F(X)$ категории L, существование которых следует из определения сильной подвижности категории L. Теперь покажем, что для объекта $X \in K$ объект $M(X) = G(M(F(X))) \in K$ и морфизм $m_X = \varphi(X) \circ G(m_{F(X)}) : M(X) \to X$ удовлетворяют определению сильной подвижности категории K. В самом деле, пусть Y – произвольный объект, а $p : Y \to X$ – произвольный морфизм категории K. Тогда для морфизма $F(p) : F(Y) \to F(X)$ категории L, в силу сильной подвижности категории L, существует такой морфизм $v : M(F(X)) \to F(Y)$, что $F(p) \circ v = m_{F(X)}$. Осталось заметить, что морфизм $u = \varphi(Y) \circ G(v) : M(X) \to Y$ удовлетворяет равенству $p \circ u = m_X$. Действительно, $p \circ u = (p \circ \varphi(Y)) \circ G(v)) = (\varphi(X) \circ G(F(p))) \circ G(v)) = \varphi(X) \circ G(m_{F(X)}) = m_X$. Итак, K – сильно подвижная категория. □

Из последней теоремы и замечания 1 немедленно вытекает

Следствие 1. *Если категория K функторно доминируется категорией L: $K \leq L$ и категория L сильно подвижна, то тогда категория K также сильно подвижна.*

4. Сильная подвижность топологических пространств.

Понятие сильной подвижности топологических пространств с помощью обратных спектров было введено Мардешичем [7] (см. определение 4). Однако, в дальнейшем, для наших целей будет удобной другая формулировка понятия сильной подвижности, которая дается следующим предложением.

Предложение 4. *Пусть обратная система $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ категории HCW ассоциирована с пространством X. Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

(SM2). для любого $\alpha \in A$, существует $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$ такое, что для любого $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$, существует гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha''} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$ такой, что одновременно выполняются равенства:

$$p_{\alpha\alpha''} r^{\alpha'\alpha''} = p_{\alpha\alpha'}, \tag{4.1}$$

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'} = p_{\alpha''}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть X – сильно подвижное пространство. Согласно определению 4, достаточно показать справедливость равенства (4.2). Это равенство следует из формулы (2.2) и условия 1° определения 3: $r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'} = r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^*} \circ p_{\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^*} \circ p_{\alpha^*} = p_{\alpha''}$.

Теперь докажем обратное. Пусть выполняется условие (SM2). Докажем, что выполняется условие (SM1) определения 4. Для этого достаточно доказать существование такого индекса $\alpha^* \in A$, $\alpha^* \geq \alpha'$, $\alpha^* \geq \alpha''$, что справедлива формула (2.2). Рассмотрим произвольный индекс $\alpha^0 \in A$, $\alpha^0 \geq \alpha'$, $\alpha^0 \geq \alpha''$ и заметим, что равенство (4.2) можно переписать в виде: $r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^0} \circ p_{\alpha^0} = p_{\alpha''\alpha^0} \circ p_{\alpha^0}$. В силу условия 3° определения 3 существует такой индекс $\alpha^* \in A$, $\alpha^* \geq \alpha^0$, что

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^0} \circ p_{\alpha^0\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^0} \circ p_{\alpha^0\alpha^*},$$

или

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'\alpha^*} = p_{\alpha''\alpha^*}.$$

Что и требовалось доказать. □

Теорема 5. *Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:*

(*) для произвольного CW-комплекса Q и любого гомотопического класса $f : X \to Q$ существуют CW-комплекс Q', гомотопические классы $f' : X \to Q'$ и $\eta : Q' \to Q$, удовлетворяющие равенству $f = \eta \circ f'$ такие, что каковы бы не были CW-комплекс Q'', гомотопические классы $f'' : X \to Q''$ и $\eta' : Q'' \to Q$, удовлетворяющие равенству $f = \eta' \circ f''$, существует такой гомотопический класс $\eta'' : Q' \to Q''$, что выполняются

$$\eta' \circ \eta'' = \eta, \tag{4.3}$$

$$\eta'' \circ f' = f''. \tag{4.4}$$

Доказательство. Пусть выполняется условие $(*)$. Докажем, что пространство X сильно подвижно. Для этого рассмотрим некоторый ассоциированный с X спектр $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ и докажем, что он сильно подвижен, т. е. удовлетворяет условию (SM2) предложения 4.

Пусть $\alpha \in A$ произвольный элемент, а $p_\alpha : X \to X_\alpha$ естественная проекция. Для гомотопического класса $p_\alpha : X \to X_\alpha$ рассмотрим подходящий CW-комплекс Q', гомотопические классы $f' : X \to Q'$ и $\eta : Q' \to X_\alpha$, удовлетворяющие условию $\eta \circ f' = p_\alpha$, существование которых следует из условия $(*)$.

Так как $assX = \{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$, то для $f' : X \to Q'$ существуют $\tilde{a} \in A$, $\tilde{a} \geq \alpha$ и $\tilde{f}' : X_{\tilde{\alpha}} \to Q'$ такие, что

$$f' = \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}}. \tag{4.5}$$

Нетрудно убедиться, что

$$p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}}. \tag{4.6}$$

В самом деле,

$$\eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta \circ f' = p_\alpha = p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}}.$$

В силу равенства (4.6), из определения ассоциированности 3 следует, что существует такой индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \tilde{\alpha}$, что

$$p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'}. \tag{4.7}$$

Оказывается, что найденный $\alpha' \in A$ удовлетворяет условию (SM2) предложения 4. В самом деле, пусть $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$ – произвольный элемент. Для гомотопических классов $p_{\alpha\alpha''} : X_{\alpha''} \to X_\alpha$ и $p_{\alpha''} : X \to X_{\alpha''}$, в силу условия $(*)$, существует такой гомотопический класс $\eta'' : Q' \to X_{\alpha''}$, что

$$\eta = p_{\alpha\alpha''} \circ \eta'', \tag{4.8}$$

$$\eta'' \circ f' = p_{\alpha''}. \tag{4.9}$$

Теперь нетрудно убедиться, что гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha''} = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha''}$ – искомый, т. е. справедливы равенства (4.1) и (4.2) (см. предложение 4). В самом деле, справедливость равенства (4.1) проверяется непосредственно, учитывая (4.8) и (4.7):

$$p_{\alpha\alpha''} \circ r^{\alpha'\alpha''} = p_{\alpha\alpha''} \circ \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = \eta \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = p_{\alpha\tilde{\alpha}} \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} = p_{\alpha\alpha'}.$$

Справедливость равенства (4.2) следует из (4.5) и (4.9):

$$r^{\alpha'\alpha''} \circ p_{\alpha'} = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}\alpha'} \circ p_{\alpha'} = \eta'' \circ \tilde{f}' \circ p_{\tilde{\alpha}} = \eta'' \circ f' = p_{\alpha''}.$$

Теперь докажем обратное. Пусть X – сильно подвижное топологическое пространство, а $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ – некоторый ассоциированный с ним обратный спектр. Докажем, что выполняется свойство $(*)$.

Рассмотрим произвольный гомотопический класс $f : X \to Q$, где Q – некоторый CW-комплекс. В силу ассоциированности спектра $\{X_\alpha, p_{\alpha\alpha'}, A\}$ с пространством X, существуют индекс $\alpha \in A$ и гомотопический класс $f_\alpha : X_\alpha \to Q$ такие, что

$$f = f_\alpha \circ p_\alpha. \tag{4.10}$$

Для найденного $\alpha \in A$ существует индекс $\alpha' \in A$, $\alpha' \geq \alpha$, который удовлетворяет условию сильной подвижности (SM2) пространства X (см. предложение 4). Теперь убедимся, что CW-комплекс $X_{\alpha'}$, гомотопические классы

$$f' = p_{\alpha'} : X \to X_{\alpha'} \quad \text{и} \quad \eta = f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'} : X_{\alpha'} \to Q \tag{4.11}$$

удовлетворяют свойству $(*)$. В самом деле, пусть Q'' произвольный CW-комплекс, а $f'' : X \to Q''$ и $\eta' : Q'' \to Q$ такие гомотопические классы, которые удовлетворяют условию

$$f = \eta' \circ f''. \tag{4.12}$$

Для гомотопического класса $f'' : X \to Q''$ существуют индекс $\alpha'' \in A$, $\alpha'' \geq \alpha$ и гомотопический класс $\tilde{f}'' : X_{\alpha''} \to Q''$ такие, что

$$f'' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''}. \tag{4.13}$$

Из равенств (4.10), (4.12) и (4.13) следует, что

$$f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''} = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''}.$$

Следовательно, согласно определению ассоциированности, можно найти такой индекс $\alpha''' \in A$, $\alpha''' \geq \alpha''$, что выполняется равенство:

$$f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''}. \tag{4.14}$$

В силу сильной подвижности пространства X и предложения 4, существует гомотопический класс $r^{\alpha'\alpha'''} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha'''}$ такой, что

$$p_{\alpha\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = p_{\alpha\alpha'}, \tag{4.15}$$

$$r^{\alpha'\alpha'''} \circ p_{\alpha'} = p_{\alpha'''}. \tag{4.16}$$

Положим

$$\eta'' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha'''}. \tag{4.17}$$

Остается заметить, что гомотопический класс $\eta'' : X_{\alpha'} \to Q''$ удовлетворяет равенствам (4.3) и (4.4).

Равенство (4.3) следует из (4.17), (4.14), (4.15) и (4.11):

$$\eta' \circ \eta'' = \eta' \circ \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha''} \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} =$$

$$= f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} = f_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'} = \eta.$$

Равенство (4.4) следует из (4.17), (4.11), (4.16) и (4.13):

$$\eta'' \circ f' = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ r^{\alpha'\alpha'''} \circ p_{\alpha'} = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''\alpha'''} \circ p_{\alpha'''} = \tilde{f}'' \circ p_{\alpha''} = f''.$$

Теорема доказана. □

Из последней теоремы следует

Теорема 6. *Топологическое пространство X сильно подвижно тогда и только тогда, когда кома-категория W^X сильно подвижна.*

Заметим, что теорема 6 позволяет применить результаты, относящиеся к сильно подвижным категориям, для изучения свойства сильной подвижности топологических пространств. В самом деле, из теорем 2 и 6 следует хорошо известный результат о том, что *произвольный CW-комплекс является сильно подвижным пространством.* Поскольку шейповое доминирование $sh(X) \leq sh(Y)$ означает категорное доминирование $W^X \leq W^Y$, то из теоремы 6 и следствия 1 непосредственно следует другой известный результат: *пусть $sh(X) \leq sh(Y)$ и Y является сильно подвижным топологическим пространством. Тогда топологическое пространство X также является сильно подвижным.*

Предложение 5. *Пусть X – несвязная топологическая сумма топологических пространств X_1 и X_2: $X = X_1 \sqcup X_2$. Тогда $W^X = W^{X_1 \sqcup X_2} \lesssim W^{X_1} \times W^{X_2}$.*

Доказательство. Мы должны доказать, что существуют функторы $F : W^{X_1 \sqcup X_2} \to W^{X_1} \times W^{X_2}$ и $G : W^{X_1} \times W^{X_2} \to W^{X_1 \sqcup X_2}$ такие, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_{W^{X_1 \sqcup X_2}}$ (см. определение 7).

Пусть $f : X_1 \sqcup X_2 \to Q$ – произвольный объект категории $W^{X_1 \sqcup X_2}$. Функтор $F : W^{X_1 \sqcup X_2} \to W^{X_1} \times W^{X_2}$ определим, полагая $F(f) = (f|_{X_1} : X_1 \to Q, f|_{X_2} : X_2 \to Q) \in W^{X_1} \times W^{X_2}$.

Пусть теперь $(f_1 : X_1 \to Q, f_2 : X_2 \to Q')$ – произвольный объект категории $W^{X_1} \times W^{X_2}$. Определим функтор $G : W^{X_1} \times W^{X_2} \to W^{X_1 \sqcup X_2}$, полагая $G(f_1, f_2) = f : X_1 \sqcup X_2 \to Q \sqcup Q'$, где $f|_{X_1} = f_1$ и $f|_{X_2} = f_2$. Теперь нетрудно проверить, что $G \circ F \rightsquigarrow 1_{W^{X \sqcup Y}}$. □

Из теорем 3, 4, 6 и предложения 5 следует

Теорема 7. *Если топологическое пространство X имеет конечное число компонент связности и все они сильно подвижны, то топологическое пространство X также сильно подвижно.*

Abstract. The present paper is devoted to the one of the important notion of shape theory. This is the notion of strong movability, which for metrizable compacts was introduced by K. Borsuk. In this paper the criterion of strong movability of topological space is proved. This criterion, in particular, gives a new categorical approach to the strong movability.

Список литературы

[1] И. Букур, А. Деляну, Введение в теорию категорий и функторов, М. (1972).
[2] П.С. Геворкян, "Об одном критерии подвижности", Матем. заметки, **71** (2), 311-315 (2002).
[3] K. Borsuk, "A note on the theory of shape of compacta", Fund. Math. **67**, 265-278 (1970).
[4] J. Dydak, "On the Whitehead Theorem in pro-homotopy and on a question of Mardesic", Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys, **23**, 775-779 (1975).
[5] P. S. Gevorgyan, "Movable categories", Glasnik Mat., **38** (58), 177-183 (2003).
[6] P. S. Gevorgyan, I. Pop, "Uniformly movable categories and uniform movability of topological spaces", Bull. Polish Acad. Sci. Math., **55**, 229-242 (2007).
[7] S. Mardešić, "Strongly movable compacta and shape retracts", Proc. Intern. Sym. on Top.and its Appl., (Budva, 1972).
[8] S. Mardešić, J. Segal, Shape theory – The inverse system approach, North-Holland, Amsterdam (1982).
[9] K. Morita, "On shapes of topological spaces", Fund. Math., **86**, 251-259 (1975).
[10] I. Pop, "A Categorical notion of movability", Anal.Sci. University AL.I.CUZA, v. XLIX, 327-341 (2003).
[11] T. Watanabe, "On strong movability", Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astronom. Phys, **25**, 813-816 (1977).

Поступила 11 ноября 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 25-30.

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ТЕОРЕМЫ ЛЕБЕГА-КОЛМОГОРОВА

А. Л. ГРИГОРЯН

Государственный инженерный университет Армении

Аннотация. Пусть W^r - класс функций периода 2π, имеющих r-ую производную, удовлетворяющую условию $|f^{(r)}(x)| \le 1$. Абсолютное значение остаточного члена ряда Фурье функции $f(x) \in W^r$ имеет для этого класса функций конечную, не зависящую от x верхнюю грань C_m^r. А. Н. Колмогоровым доказана следующая теорема: Для любого натурального r справедлива асимптотическая формула $C_m^r = m^{-r} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot \ln m + O(1)$. Цель настоящей работы - доказать, что дискретизация непрерывной задачи не только представляет самостоятельный интерес, но и является одним из подходов ее решения.

MSC2000 number: 26A06, 26E05, 34E05
Ключевые слова: Дискретный ряд Фурье, асимптотическая формула.

Рассмотрим W^r - класс функций периода 2π, непрерывных вместе с их производными порядка r, удовлетворяющих неравенству $|f^{(r)}(x)| \le 1$. Абсолютное значение остаточного члена

$$R_m(f,x) = f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{m}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряда Фурье имеет для этого класса функций конечную, не зависящую от x верхнюю грань C_m^r. А. Лебег [1] показал, что C_m^1 имеет порядок $(\ln m)/m$.
Можно рассматривать также класс всех периодических функций $f(x)$, непрерывных вместе с их производной порядка $(r-1)$, удовлетворяющих неравенству $|f(x_2) - f(x_1)| \le |x_2 - x_1|$.
Верхняя грань величин $|R_m(f,x)|$ этого класса функций остается той же самой, что и для класса функций W^r. А. Н. Колмогоровым [2] доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого натурального r справедлива асимптотическая формула*

$$C_m^r = m^{-r} \cdot \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \ln m + O(1)\right).$$

Рассмотрим дискретный аналог теоремы Лебега-Колмогорова.
Пусть $q \in N$, $x_j = \frac{2\pi j}{q}$ $(j \in Z)$,

$$\overrightarrow{e}_k = \left\{e_k(x_j) = e^{ikx_j}\right\}_{j=0}^{q-1}, \quad k = -\left[\frac{q-1}{2}\right], \ldots, \left[\frac{q}{2}\right],$$

где $[\cdot]$ - целая часть. Тогда произвольную дискретную функцию $f : \{x_j\}_{j=0}^{q-1} \to R$ можно разложить по ортогональной системе $\vec{e}_k$, $k = -\left[\frac{q-1}{2}\right], \dots, \left[\frac{q}{2}\right]$ в следующий дискретный ряд Фурье

$$f(x_j) = \sum_{k=-[\frac{q-1}{2}]}^{k=+[\frac{q}{2}]} C_k \cdot e_k(x_j),$$

где

$$C_k = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} f(x_j) \cdot e^{-ikx_j}. \tag{1}$$

Пусть

$$\vec{f} = \{f(x_j)\}_{j=0}^{q-1}, \quad S_m(\vec{f}) = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} C_k \cdot \vec{e}_k$$

- частичная сумма дискретного ряда Фурье.

Обозначим через W_q^r- класс 2π-периодических дискретных функций $f(x_j)$, заданных на сетке $\{x_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$ и таких, что

$$\max_j |\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)| \le (2\pi/q)^r,$$

где $\Delta_{2\pi/q}^r$- разность порядка r с шагом $2\pi/q$.

Обозначим

$$C_m(W_q^r) = \sup_{f \in W_q^r} \|\vec{f} - S_m(\vec{f})\|, \tag{2}$$

где

$$\|\vec{f} - S_m(\vec{f})\| = \max_j |f(x_j) - S_m(\vec{f}, x_j)|, \qquad S_m(\vec{f}, x_j) = \sum_{k=-(m-1)}^{m-1} C_k \cdot e_k(x_j).$$

Цель настоящей работы - доказать, что дискретизация непрерывной задачи не только представляет самостоятельный интерес, но и является одним из подходов ее решения.

Теорема 2. *Если m фиксировано, то*

$$\lim_{q \to \infty} C_m(W_q^r) = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\ln m}{m^r} + O(m^{-r}).$$

Доказательство. Докажем, что равномерно по m и q имеет место формула

$$C_m(W_q^r) = \left(\frac{\pi}{q \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{q}\right)} \right)^r \cdot (L_{2m-1}(q, r) + O(1)), \tag{3}$$

где

$$L_m(q, 2n) = \frac{1}{q} \sum_{j=0}^{q-1} \frac{\left|\sin\left(\frac{mj\pi}{q}\right)\right|}{\sin(j \cdot \frac{\pi}{q})}, \quad n \in N,$$

$$L_m(q,2n-1)=\frac{1}{q}\sum_{j=\left[\frac{q}{m}\right]}^{q-\left[\frac{q}{m}\right]}\frac{\left|\cos\left(m\cdot(j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{q}\right)\right|}{\sin((j+\frac{1}{2})\cdot\frac{\pi}{q})}.$$

Так как $\{f(x_{j+k})\}_{j=0}^{q-1}\in W_q^r$, $k\in Z$, то в определение $C_m(W_q^r)$ можно вместо нормы $\|\vec{f}-S_m(\vec{f})\|$ взять отклонение $|f(0)-S_m(f,0)|$.

Применяя r раз преобразование Абеля, получим для дискретных коэффициентов Фурье 2π-периодической функции следующее выражение

$$C_k=\frac{1}{q\cdot(1-e^{-ix_k})^r}\cdot\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot e^{-ix_jk},\quad k\neq 0.$$

Следовательно, подставляя значения $f(0)$, $S_m(f,0)$ получим

$$|f(0)-S_m(f,0)|=\left|\sum_{k=m}^{[q/2]}(C_k+C_{-k})\right|+O(q^{-r})=2\left|\sum_{k=m}^{[q/2]}\operatorname{Re}C_k\right|+O(q^{-r}).$$

Замечая, что $1-e^{ix}=2\sin\frac{x}{2}\cdot e^{i\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}$, имеем

$$C_m(W_q^r)=\sup_{f\in W_q^r}\frac{2}{q}\left|\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot\operatorname{Re}\sum_{k=m}^{[q/2]}\frac{e^{-itx_j}}{(1-e^{ixk})^r}\right|+O(q^{-r})= \tag{4}$$

$$=\sup_{f\in W_q^r}\left|\frac{2}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos\left(k\cdot x_j+r\cdot\left(\frac{k}{q}-\frac{1}{2}\right)\pi\right)\right|+O(q^{-r}),$$

где $a_k=\left(2\sin\frac{k\pi}{q}\right)^{-r}$. Пусть сначала $r=2n$. Из (4) следует

$$C_m(W_q^r)=\sup_{f\in W_q^r}\frac{2}{q}\left|\sum_{j=0}^{q-1}\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\cdot\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos k\cdot x_{j+n}\right|+O(q^{-r})\leq \tag{5}$$

$$\leq\frac{2}{q}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\cdot\sum_{j=0}^{q-1}\left|\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos k\,x_j\right|+O(q^{-r}).$$

Обозначим $\Delta(k)=a_k-a_{k+1}$, $\Delta^2(k)=\Delta(k)-\Delta(k+1)$,

$$D_j(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{j}\cos nx,\qquad F_k(x)=\sum_{n=0}^{k}D_n(x).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\cos kx_j=-a_m\cdot\frac{\sin\left((2n-1)\frac{x_j}{2}\right)}{2\sin\frac{x_j}{2}}+H(x_j), \tag{6}$$

где

$$H(x_j)=a_{[q/2]}\,D_{[q/2]}(x_j)+\sum_{k=m}^{[q/2]-2}\Delta^2(k)\cdot F_k(x_j)-\Delta(m)\cdot F_{m-1}(x_j)+$$

$$+\Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right)F_{[q/2]-1}(x_j).$$

Так как $F_k(x)\geq 0$ и $\sum\limits_{j=0}^{q-1}F_k(x_j)=\frac{(k+1)\,q}{2}$, то

$$\frac{1}{q}\sum_{j=0}^{q-1}\sum_{k=m}^{[q/2]-2}\Delta^2(k)\cdot F_k(x_j)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(m\cdot\Delta(m)-\left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right)\cdot\Delta\left(\left[\frac{q}{2}\right]-1\right)+a_m-a_{[q/2]-1}\right).$$

Кроме того, $\Delta(k)=O\left(\frac{qk}{k}\right)$, $D_{\left[\frac{q}{2}\right]}(x_j)=O(1)$, $j\neq 0$. Следовательно

$$\sum_{j=0}^{q-1}|H(x_j)|=O(a_m). \tag{7}$$

Из (5) - (7) следует оценка сверху.

$$C_m(W_q^{2n})\leq\left(\frac{\pi}{q\cdot\sin\left(\frac{m\pi}{q}\right)}\right)^{2n}\cdot(L_{2m-1}(q,2n)+O(1)).$$

Докажем оценку снизу. Пусть

$$A=\left\{\left(\left[0;\,\frac{q}{4}-1\right]\cup\left[\frac{3q}{4}+2;\,q-1\right]\right)\cap Z\right\},\quad B=\{[0;q-1]\cap(Z\setminus A)\}$$

– множества целых точек. Положим

$$\varphi(x_j)=\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}\cdot\begin{cases}\operatorname{sign}\frac{\sin\left(m-\frac{1}{2}\right)x_j}{\sin\left(\frac{x_j}{2}\right)}, & j\in A\\ -\sum\limits_{p\in A}\frac{\varphi(x_p)}{|B|}, & j\in B,\end{cases}$$

где $|B|$ – число элементов B. Из условия $\sum\limits_{j=0}^{q-1}\varphi(x_j)=0$ следует, что существует функция $f\in W_q^{2n}$ такая, что $\Delta_{2\pi/q}^{2n}f(x_j)=\varphi(x_j)$. Поэтому из (4) и (6) получаем

$$C_m(W_q^{2n})\geq\frac{a_m}{q}\cdot\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}\left(\sum_{j=0}^{q-1}\frac{|\sin(m-\frac{1}{2})\cdot x_j|}{\sin\frac{x_j}{2}}-2\cdot\sum_{j\in B}\frac{|\sin(m-\frac{1}{2})\cdot x_j|}{\sin\frac{x_j}{2}}\right)+$$

$$+O(a_m\cdot q^{-2n})=a_m\cdot\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2n}\cdot(L_{2m-1}(q,2n)+O(1)).$$

Для четных r формула (3) установлена. Пусть теперь $r\equiv 1(\mathrm{mod}2)$. Обозначим

$$\varphi_0(x_j)=\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{r}\cdot\operatorname{sign}\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\sin\left((j+\frac{r}{2})\cdot x_k\right).$$

Ясно, что $\sum\limits_{j=0}^{q-1}\varphi_0(x_j)=0$. Поэтому существует функция $f\in W_q^r$ такая, что $\Delta_{2\pi/q}f(x_j)=\varphi_0(x_j)$. Следовательно, из (4) имеем

$$C_m(W_q^r)=\frac{2}{q}\cdot\left(\frac{2\pi}{q}\right)^r\cdot\sum_{j=0}^{q-1}|A_m(j)|+O(a_m\cdot q^{-r}), \tag{8}$$

где

$$A_m(j)=\sum_{k=m}^{[q/2]}a_k\cdot\sin\left(j+\frac{1}{2}\right)\cdot x_k.$$

Применяя дважды преобразование Абеля, получаем

$$A_m(j)=a_m\cdot\frac{\cos(2m-1)\cdot(j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{q}}{2\sin(j+\frac{1}{2})\frac{\pi}{q}}+Q_m(j), \tag{9}$$

где

$$\frac{1}{q}\sum_{j=[\frac{q}{2m-1}]+2}^{q-[\frac{q}{2m-1}]-3}|Q_m(j)|=O(a_m). \tag{10}$$

Замечая, что

$$\sum_{j=0}^{[\frac{q}{2m-1}]+1}|A_m(j)|+\sum_{j=q-[\frac{q}{2m-1}]-2}^{q-1}|A_m(j)|=O(a_m),$$

из (8), (9) и (10) получим формулу (3) для нечетных r. Далее, аналогично доказательству неравенства (7) работы [3], доказывается, что

$$\frac{(4m-2)\ln m}{\pi q}\cot\frac{(2m-1)\pi}{2q}+O(1)\le L_{2m-1}(q,r)\le\frac{(4m-2)\cdot\ln m}{\pi q\cdot\sin(2m-1)\frac{\pi}{2q}}+O(1). \tag{11}$$

Из (3) и (11) следует утверждение Теоремы 2. □

Теорема 3. *Для фиксированного m имеет место формула:*

$$\lim_{q\to\infty}C_m(W_q^r)=C_m^r.$$

Доказательство. Докажем, что

$$\sup_{f\in W_q^r}|f(0)-S_{m-1}(f,0)|=\sup_{g\in W^r}|g(0)-S_{m-1}(g,0)|. \tag{12}$$

Пусть $f\in W_q^r$. Построим функцию $g\in W^r$. Обозначим

$$\varphi(x)=\left(\frac{q}{2\pi}\right)^r\cdot\Delta_{2\pi/q}^r f(x_j)\quad\text{при}\quad x\in[x_j;x_{j+1}),\quad j=0,\dots,q-1.$$

Так как $\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx=0$ и $|\varphi(x)|\le 1$, то существует $g(x)\in W^r$ такая, что $g^{(r)}(x)=\varphi(x)$. Наоборот, пусть $g(x)\in W^r$. Построим функцию $f\in W_q^r$.

Рассмотрим уравнение в конечных разностях

$$\Delta^r_{2\pi/q} f(x_j) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \cdot g^{(r)}(x_j).$$

Как известно (см. [4], стр. 327)

$$f(x_j) = \left(\frac{2\pi}{q}\right)^r \cdot \sum_{i=0}^{j-1} \frac{(j-i-1)\cdot(j-i-2)\cdots(j-i+r+1)}{(r-1)!} \cdot g^{(r)}(x_i) +$$
$$+C_1 + C_2 \cdot x_j + \ldots + C_r \cdot x_j^{r-1}, \quad j = 0, 1, \ldots, q-1,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_r$ – произвольные постоянные. Возьмем $C_2 = C_3 = \ldots = C_r = 0$, а C_1 выбираем из условия $f(x_0) = f(x_q)$. $f(x_j)$ можно продолжить с периодом 2π. Ясно, что $f(x_j) \in W^r_q$. Формула (12) доказана. Замечая, что

$$\lim_{q\to\infty} S_m(g, 0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, D_m(x)\, dx,$$

где $D_m(x)$ – ядро Дирихле, из (12) получим

$$\lim_{q\to\infty} C_m(W^r_q) = \sup_{g\in W^r} \left| g(0) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, D_m(x)\, dx \right| = C^r_m.$$

Теорема 3 доказана. □

Из Теорем 2 и 3 следует доказательство Теоремы 1.

Abstract. Let W^r be the space of 2π-periodic functions $f(x)$ that are continuous together with their derivatives of order r ($r \in \mathbb{N}$), and satisfy the condition $|f^{(r)}(x)| \le 1$. The absolute value of the remainder of the Fouries series of function $f(x) \in W^r$ has a finite upper bound which does not depend on x. A. N. Kolmogorov obtained the following result: For any natural r the following asymptotic relation holds $C^r_m = m^{-r} \cdot \left(\frac{4}{\pi^2} \cdot \ln m + O(1)\right)$. The aim of the present paper is to prove that discretization of the above continuous problem is one of the possible approaches of its solution.

Список литературы

[1] H. Lebesgue, "Sur la representation trigonometrique approachee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschits", Bull. Soc. math. France, **38**, 184 - 210 (1910).

[2] А. Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика, Наука, Москва, 179 - 185 (1985).

[3] А. Л. Григорян, "Интерполирование функций по способу наименьших квадратов", Мат. заметки, **66**, 3, 372 - 379 (1999).

[4] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, Издательство физикоматематической литературы, Москва (1959).

Поступила 14 февраля 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 31-52.

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ж. ДУМАНЯН

Ереванский государственный университет
E-mail: *duman@ysu.am*

Аннотация. Получены условия на коэффициенты младших членов, при которых решение задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n}(a_{i\,j}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\ x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q),$$

обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности (принадлежит пространству А.К.Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$); при этом граничное значение u_0 является пределом в L_2 следов решения на поверхностях из довольно широкого класса (не обязательно "параллельных" границе). Для решения задачи установлена ограниченность интеграла Дирихле с весом $r(x)$, т.е. интегрируемость в Q функции $r(x)|\nabla u(x)|^2$, где $r(x)$ – расстояние точки $x\in Q$ до границы ∂Q.

MSC2000 number: 35B60, 35D99, 35J25

Ключевые слова: Эллиптические уравнения, задача Дирихле, поведение вблизи границы, граничное значение, интеграл Дирихле.

1. Введение

Работа посвящена изучению поведения вблизи границы решения задачи Дирихле в ограниченной области $Q\subset\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, с гладкой границей $\partial Q\in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

$$(1)\ -\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\ x\in Q;$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \tag{2}$$

где $u_0 \in L_2(\partial Q)$, функции f и $F = (f_1, \ldots, f_n)$ принадлежат $L_{2,\,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{i\,j}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma_1|\xi|^2 \le \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i\,j}(x)\,\xi_i\xi_j = (\xi,\ A(x)\,\xi) \le \gamma_2|\xi|^2 \tag{3}$$

для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и п.в. $x \in Q$ с положительными постоянными γ_1 и γ_2, а коэффициенты $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))$, $c(x) = (c_1(x), \ldots, c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными в каждой строго внутренней подобласти области Q функциями.

Целью работы является получение условий на коэффициенты младших членов уравнения, при которых решение рассматриваемой задачи обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности. Понятие s-мерной непрерывности, являющееся естественным обобщением непрерывности функции по совокупности переменных, было предложено А. К. Гущиным в работе [1] и заключается в следующем. Пусть μ и ν — меры (будем считать их единичными) в $\mathbb{R}^n$ с носителями в $\bar{Q}$ и удовлетворяют условию: существует такая постоянная C, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $U_{x^0}^{(r)}$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа Cr^s, $0 < s < n$; наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой меры и обозначать через $\|\mu\|$ (или, соответственно, $\|\nu\|$). Пусть ϕ — такая мера в $\mathbb{R}^{2n}$ с носителем в $\bar{Q} \times \bar{Q}$, что $\mu(G) = \phi(G \times \mathbb{R}^n)$, $\nu(G) = \phi(\mathbb{R}^n \times G)$ для всех (борелевских) множеств $G \subset \bar{Q}$. Функцию v будем называть s-мерно непрерывной, если для любого положительного числа ε найдется такое число $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{\|\mu\| + \|\nu\|} \int\limits_{\bar{Q}\times\bar{Q}} \Big(v(x) - v(y)\Big)^2 d\phi(x,y) < \varepsilon,$$

как только

$$\int\limits_{\bar{Q}\times\bar{Q}} |\,x - y\,|\,d\phi(x,y) < \delta.$$

Отметим, что если в этом определении взять произвольные меры ($s = 0$), то получится классическое определение равномерной непрерывности функции на

$\bar{Q}$. Множество всех s-мерно непрерывных (в $\bar{Q}$) функций образует банахово пространство $C_s(\bar{Q})$, являющееся пополнением $C(\bar{Q})$ по норме, эквивалентной функционалу

$$\ell(v) = \int_0^\infty M_s\left(\left\{x \in \bar{Q} \ : \ |v(x)|^2 > \lambda\right\}\right) \, d\lambda, \quad v \in C\left(\bar{Q}\right),$$

в котором

$$M_s(E) = \inf\left\{\sum_{i=1}^\infty r_i^s, \ \bigcup_{i=1}^\infty U^{(r_i)} \supset E\right\},$$

а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества E шарами $U^{(r_i)}$ радиуса r_i; $C_0(\bar{Q}) = C(\bar{Q})$, а $C_n(\bar{Q}) = L_2(Q)$, см. [1]. Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности решения задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов (т.е. $b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ и $F = 0$ было установлено в [1]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к границе удовлетворяет условию Дини:

$$\left|\bar{\nu}(x) - \bar{\nu}(y)\right| \leq \omega(|x-y|) \tag{4}$$

для всех x и y из ∂Q, где ω – такая монотонная функция, что

$$\int_0 \frac{\omega(t)}{t} \, dt < \infty,$$

а коэффициенты a_{ij} непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x-y|) \tag{5}$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i, \ j = 1, \ \ldots, \ n$. Не ограничивая общности можно считать, что функция ω в условиях (4) и (5) одна и та же. Обобщение приведенного выше результата на более широкий класс правых частей было получено в работе [2], где было показано, что результат остается справедливым, если

$$r^{\frac{1}{2}}(x)\left(1 + |\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{4}} |F(x)| \in L_2(Q), \tag{6}$$

$$r^{\frac{3}{2}}(x)\left(1 + |\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{4}} |f(x)| \in L_2(Q), \tag{7}$$

где $r(x)$ – расстояние от точки $x \in Q$ до границы ∂Q.

Установлению $(n-1)$-мерной непрерывности решения задачи Дирихле для уравнения с младшими членами $c(x) = 0$ посвящены работы [3], [4] в которых относительно коэффициентов $b(x)$ и $d(x)$ предполагается выполнение следующих условий:

существует постоянная $K > 0$, такая что

$$|b(x)| \le \frac{K}{r(x)\left(1 + |\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q, \tag{8}$$

$$\int_0 t^3 \left(1 + |\ln t|\right)^{\frac{3}{2}} D^2(t)\, dt < \infty, \quad \text{где } D(t) \equiv \sup_{r(x)\ge t} |d(x)|. \tag{9}$$

Далее мы также будем предполагать условия (4) – (9) выполненными.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать функцию u из $W^1_{2,\,loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1) в смысле обобщенных функций, т.е. для всех $\eta \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_Q (A(x)\nabla u + c(x)u, \nabla\eta)dx + \int_Q ((b(x),\ \nabla u) + d(x)u)\eta dx = \int_Q (f\eta + (F,\ \nabla\eta))\, dx, \tag{10}$$

и удовлетворяющую условию (2) в следующем смысле:

для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta\ \bar{\nu}\ (x^0)) - u_0(x)\right)^2\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{11}$$

Понятие решения из $W^1_{2,\,loc}(Q)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей В. П. Михайловым в работах [5], [6], (см. также [7], [8] и [9]). При этом принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле

$$\int_{\partial Q} \left(u(\varphi_\delta(x)) - u_0(x)\right)^2\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0$$

где $\varphi_\delta(x) = x + \delta\ \bar{\nu}\ (x)$. В [5], [6] было установлено, что в случае уравнения с гладкими коэффициентами

$$(a_{i\,j}(x),\ b_i(x) \in C^1(\bar{Q}),\ \ i,j = 1,\ \ldots, n,\ \ d(x) \in C^1(\bar{Q}),\ \text{ а }\ c(x) = 0),$$

задача (1), (2) в приведенной выше постановке фредгольмова и имеет тот же спектр, что и задача в $W^1_2(Q)$. Если ноль не является точкой спектра, то задача

разрешима при любой граничной функции $u_0 \in L_2(\partial Q)$ и любой правой части f (с $F \equiv 0$), удовлетворяющей условию

$$\int\limits_Q r^\theta(x) f^2(x)\, dx < \infty, \quad \text{с некоторым показателем } \theta < 3.$$

Обобщение этого результата на области с Ляпуновской границей было получено в работах [10] и [11]; при этом выполнение граничного условия (2) формулировалось в локальных терминах – требовалось выполнение (11). Тем самым было показано, что в отображении $x \to \varphi_\delta(x)$, $x \in \partial Q$, ставящем в соответствие точкам границы точки "параллельной" ей поверхности, можно немного отойти от выделенного ("ортогонального" к границе) направления и брать нормаль в фиксированной точке рассматриваемой окрестности. Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности показывает, что от выделенного направления нормали можно отказаться полностью: со значениями граничной функции u_0 можно сравнить не только значения решения u на "параллельных" к границе или близких к ним поверхностях, но и на образах ∂Q при отображениях из довольно широкого класса. В частности, поверхность ∂Q можно разбить на достаточно мелкие части, и каждую из них подвинуть и повернуть (не выходя из $\bar{Q}$) так, чтобы точки переместились "не очень далеко"; при этом разные точки границы могут перейти в одну точку, но нельзя допустить, чтобы таких точек было "слишком много". Кроме того, обсуждаемое свойство позволяет дать определение решения задачи Дирихле с квадратично суммируемой граничной функцией, не использующее условия гладкости границы (см. [1]).

В настоящей работе устанавливается принадлежность пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ решения из $W^1_{2,\,loc}$ задачи Дирихле для общего уравнения второго порядка (см.[12], [13]). Относительно коэффициента $c(x)$ предполагается выполнение следующего условия:

$$\int\limits_0 t\,(1+|\ln t|)^{\frac{3}{2}}\, C^2(t)\, dt < \infty, \quad \text{где } C(t) \equiv \sup_{r(x)\geq t} |c(x)|. \tag{12}$$

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (3)-(9) *и* (12). *Тогда решение из* $W^1_{2,\,loc}$ *задачи Дирихле* (1), (2) *принадлежит пространству Гущина* $C_{n-1}(\bar{Q})$.

Отметим, что доказательство этого утверждения не следует из результатов работ [1] и [2]: если перенести младшие члены уравнения в правую часть и рассмотреть исследуемое решение как решение уравнения без младших членов, то из (6), (7), (8), (9) и (11), вообще говоря (без привлечения дополнительных свойств решений эллиптических уравнений), не следует выполнение условий (6) и (7) для новой правой части. Кроме того, так как постановка исследуемой задачи не требует условий гладкости коэффициентов уравнения внутри области, то рассматриваемое в настоящей работе уравнение общего вида (1) не сводится к ранее изученному в работах [3], [4] случаю (при $c(x) = 0$).

2. Основная лемма

Доказательство теоремы существенно использует следующее утверждение об ограниченности весового интеграла Дирихле решения задачи (1), (2) (см. [14]).

Лемма. *Пусть $u(x)$ решение из $W^1_{2,\,loc}$ задачи Дирихле* (1), (2). *Тогда функция $r(x)\,|\nabla u(x)\,|^2$ интегрируема по Q, т.е.*

$$\int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)\,|^2 dx < \infty.$$

Доказательство. Как и в работе [4], будем следовать схеме доказательства леммы 1 работы [1]. Пусть $x^0 \in \partial Q$ произвольная точка границы ∂Q области Q. Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0, а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu\left(x^0\right)$ к ∂Q в точке x^0. Поскольку ∂Q принадлежит классу C^1, то существует число $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1\left(\mathbb{R}^{n-1}\right)$, удовлетворяющая условию:

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \nabla\varphi_{x^0}(0) = 0 \text{ и } |\nabla\varphi_{x^0}(x')\,| \le \frac{1}{2} \quad \text{для всех} \quad x' \in \mathbb{R}^{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром

$$U_{x^0}^{\left(r_{x^0}\right)} = \{x : |x - x^0| < r_{x^0}\}$$

радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{\left(r_{x^0}\right)} = U_{x^0}^{\left(r_{x^0}\right)} \cap \{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Тогда

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{\left(r_{x^0}\right)} = U_{x^0}^{\left(r_{x^0}\right)} \cap \{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\}.$$

Будем считать, что r_{x^0} такое,что $\partial Q \cap U_{x^0}^{\left(r_{x^0}\right)}$ принадлежит окрестности V_{x^0} из условия (11) (этого можно добиться уменьшая r_{x^0}). Тогда будем иметь

$$\int\limits_{\{x' \in \mathbb{R}^{n-1} : |x'| < \frac{2}{\sqrt{5}} r_{x^0}\}} \left(u\left(x', \varphi_{x^0}\left(x'\right) + \delta\right) - u_0\left(x', \varphi_{x^0}\left(x'\right)\right)\right)^2 dx' \to 0 \text{ при } \delta \to +0.$$

Положим $\ell_{x^0} = \frac{r_{x^0}}{\sqrt{2}}$ и из покрытия $\left\{U_{x^0}^{\left(\ell_{x^0}\right)}, x^0 \in \partial Q\right\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие: $U_{x^m}^{\left(\ell_{x^m}\right)}, m = 1, \ldots, p$. Обозначим

$$U_m = U_{x^m}^{\left(r_{x^m}\right)},\ r_m = r_{x^m},\ \ell_m = \ell_{x^m},\ \varphi_m = \varphi_{x^m},$$

где $m = 1, \ldots, p$. Пусть

$$h = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \min\left(1, r_1, \ldots, r_p\right).$$

Тогда каждый из криволинейных "цилиндров"

$$\Pi_m^{\ell_m + h, h} = \left\{(x', x_n) : |x'| < \ell_m + h, \varphi_m\left(x'\right) < x_n < \varphi_m\left(x'\right) + h\right\}$$

лежит в соответствующем шаре U_m, также как и в $U_m \cap Q$ (напомним, что здесь (x', x_n) – координаты точки в локальной системе координат с началом в точке x^m). Пусть $\ell_0 \in (0, h/4)$ такое число, что дополнение в Q области

$$Q_{3\ell_0} = \left\{x \in Q : r(x) = \operatorname{dist}(x, \partial Q) > 3\ell_0\right\}$$

содержится в объединении "цилиндров"

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \left\{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m\left(x'\right) < x_n < \varphi_m\left(x'\right) + h\right\},\ m = 1, \ldots, p,$$

и поэтому

$$Q^{3\ell_0} = \left\{x \in Q : r\left(x\right) = \operatorname{dist}\left(x, \partial Q\right) \le 3\ell_0\right\} \subset \bigcup_{m=1}^{p} \Pi_m^{\ell_m, h}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \Pi_m^h &= \Pi_m^{\ell_m + l_0, h} \subset \Pi_m^{\ell_m + h, h} \subset U_m \cap Q,\ Q_m = \left(Q \backslash Q^{2\ell_0}\right) \cup \Pi_m^h, \\ Q'_m &= \left(Q \backslash Q^{3l_0}\right) \cup \Pi_m^{\ell_m, h}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^h$, $m = 1, \ldots, p$

$$r\left(x\right) \le x_n - \varphi_m\left(x'\right) \le \frac{\sqrt{5}}{2} r\left(x\right) < \frac{4}{3} r\left(x\right). \tag{13}$$

Зафиксируем некоторый номер m, $1 \le m \le p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m. В дальнейшем зависимость функции φ_m от

номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}(y)$ пространства $\mathbb{R}^n$ на себя соотношениями:

$$\mathcal{L}(x) = (x', x_n - \varphi(x')),\ x = (x', x_n) \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y')),\ y = (y', y_n).$$

Образ множества при отображении $\mathcal{L}$ будем обозначать той же буквой с волной сверху, в частности

$$\mathcal{L}(Q) = \tilde{Q},\ \mathcal{L}(Q_m) = \tilde{Q}_m, \mathcal{L}\left(\Pi_m^h\right) = \tilde{\Pi}_m^h, \mathcal{L}\left(\Pi_m^{\ell_m,h}\right) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}.$$

Пусть $u(x)$ решение из $W_{2,loc}^1$ задачи (1), (2). Возьмем произвольную функцию $\tilde{\eta}$ из $W_2^1(\tilde{Q})$ с носителем в $\tilde{Q}$. Тогда функция

$$\eta(x) = \tilde{\eta}(x', x_n - \varphi(x')),\ x = (x', x_n) \in Q,$$

принадлежит $W_2^1(Q)$ и ее носитель содержится в Q.

Обозначая $\tilde{u}(y)$=$u(y', y_n + \varphi(y'))$, $\tilde{f}(y)$=$f(y', y_n + \varphi(y'))$ и $\tilde{d}(y)$,=$d(y', y_n + \varphi(y'))$, из интегрального тождества (10) получаем

$$\begin{aligned}(14)\qquad &\int\limits_{\tilde{Q}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y)\tilde{u}_{y_i}(y)\tilde{\eta}_{y_j}(y)dy + \sum_{i=1}^{n} \tilde{c}_i(y)\tilde{u}(y)\tilde{\eta}_{y_i}(y) \right) dy + \\ &\int\limits_{\tilde{Q}} \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(y)\tilde{u}_{y_i}(y) + \tilde{d}(y)\tilde{u}(y) \right) \tilde{\eta}(y)dy = \int\limits_{\tilde{Q}} \tilde{f}(y)\tilde{\eta}(y)dy + \int\limits_{\tilde{Q}} \sum_{i=1}^{n} \tilde{f}_i(y)\tilde{\eta}_{y_i}(y)dy,\end{aligned}$$

где матрица $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{ij}(y))$ и векторы

$$\tilde{b}(y) = (\tilde{b}_1(y), \ldots, \tilde{b}_n(y)),\ \tilde{c}(y) = (\tilde{c}_1(y),\ \ldots,\ \tilde{c}_n(y)),\ \tilde{F}(y) = (\tilde{f}_1(y), \ldots, \tilde{f}_n(y))$$

имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_{ij}(y) = a_{ij}(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n,\ j < n,\\
&\tilde{a}_{ni}(y) = \tilde{a}_{in}(y) = a_{ni}(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} a_{ki}(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} \quad \text{при } i < n,\\
&\tilde{a}_{nn}(y) = \sum_{k,m=1}^{n-1} \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} a_{km}(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_m} - 2\sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k} + \\
&\qquad + a_{nn}(y', y_n + \varphi(y')),\\
&\tilde{b}_i(y) = b_i(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n,\\
&\tilde{b}_n(y) = b_n(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} b_k(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k},\\
&\tilde{c}_i(y) = c_i(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n,\\
&\tilde{c}_n(y) = c_n(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k},\\
&\tilde{f}_i(y) = f_i(y', y_n + \varphi(y')) \quad \text{при } i < n,\\
&\tilde{f}_n(y) = f_n(y', y_n + \varphi(y')) - \sum_{k=1}^{n-1} f_k(y', y_n + \varphi(y')) \frac{\partial \varphi(y')}{\partial y_k}.
\end{aligned}$$

Это значит, что функция $\tilde{u}(y)$ (из $W^1_{2,loc}(\tilde{Q})$) является решением уравнения

$$(15)\quad -div(\tilde{A}(y),\nabla\tilde{u}(y))+(\tilde{b}(y),\nabla\tilde{u}(y))-div(\tilde{c}(y)\tilde{u}(y))+\tilde{d}(y)\tilde{u}(y)=\tilde{f}(y)-div\ \tilde{F}(y).$$

Матрица $\tilde{A}(y)$ равномерно по $y\in\tilde{Q}$ положительно определена, а коэффициент $\tilde{a}_{nn}(y)$ удовлетворяет неравенствам

$$\gamma_1\le\gamma_1\left(1+|\nabla\varphi(y')|^2\right)\le\tilde{a}_{nn}(y)\le\gamma_2\left(1+|\nabla\varphi(y')|^2\right)\le\frac{5}{4}\gamma_2.$$

Обозначим через $A_0(y)=\left(a^0_{ij}(y)\right)$ матрицу, элементы которой определены в $\tilde{\Pi}^h_m$ и имеют следующий вид:

$a^0_{ij}(y)=\tilde{a}_{ij}(y)$ для $i<n,\ j<n,$

$a^0_{ni}(y)=a^0_{in}(y)=a^0_{in}(y',y_n)=$

$$=\frac{1}{mes_{n-1}\{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}:|\xi|<y_n\}}\int\limits_{\{\xi\in\mathbb{R}^{n-1}:|\xi-y'|<y_n\}}\tilde{a}_{in}(\xi,0)\,d\xi\quad\text{для}\quad i<n,$$

$a^0_{nn}(y)=\tilde{a}_{nn}(y',0).$

В [1] установлено, что в $\tilde{\Pi}^h_m$

$$(16)\qquad\left(\sum_{i=1}^{n}|a^0_{in}(y)-\tilde{a}_{in}(y)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\tilde{w}(y_n),$$

и

$$(17)\qquad\left|\frac{\partial a^0_{in}(y)}{\partial y_i}\right|\le\frac{\tilde{w}(y_n)}{y_n},i=1,\dots,n-1,$$

где $\tilde{w}(t)=Cw\left(2\sqrt{2}t\right)$ ($w(t)$ из условий (4) и (5)); постоянная C зависит только от n и γ_2.

Зафиксируем произвольное положительное число $\delta_0<\dfrac{\ell_0}{2}$. Далее зависимость от выбранных и зафиксированных чисел $p,r_m,\ell_m,m=1,\dots,p,\ell_0,n,\gamma_1,\gamma_2,\delta_0$ отмечать не будем.

В области $\tilde{Q}_m$ для произвольного $\delta\in(0,\delta_0)$ определим функцию $\varrho_\delta(y)$ следующим образом:

$$\varrho_\delta(y)=\begin{cases}0 & \text{для } |y'|<\ell_m+\ell_0,\quad 0<y_n<\delta,\\ y_n-\delta & \text{для } |y'|<\ell_m+\ell_0,\quad \delta\le y_n\le 4\delta_0,\\ 4\delta_0-\delta & \text{для остальных точек } y \text{ из } \tilde{Q}_m.\end{cases}$$

Функция ϱ_δ удовлетворяет неравенствам

$$(18)\qquad r_\delta(x)\le\varrho_\delta(\mathcal{L}(x))\le\frac{4}{3}r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\ \text{для всех } x\in Q_m,$$

где $r_\delta(x)=\min\{3\delta_0,\max\{0,r(x)-\delta\}\}$. Кроме того $\left|\left||\nabla\varrho_\delta|\right|\right|_{L_\infty(\tilde{Q}_m)}\le 1$. Зафиксируем функцию $\psi\in C^1\left(\overline{Q}\right)$ такую, что $\psi(x)=1$ при $x\in Q'_m$, $\psi(x)=0$ при $x\in Q^{\frac{5\ell_0}{2}}\backslash\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}$, и $0\le\psi(x)\le 1$ для всех $x\in Q$. Кроме того, будем предполагать, что при $|y'|<\ell_m+\ell_0$ и $0<y_n<2\ell_0$ функция $\tilde{\psi}(y)=\psi(\mathcal{L}_{-1}(y))$ не зависит от переменной y_n.

Подставляя в интегральное тождество (15) функцию $\tilde{\eta}(y)=\varrho_\delta(y)\tilde{\psi}(y)\tilde{u}(y)$, получим

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{\psi}(\nabla\tilde{u},\tilde{A}\nabla\tilde{u})dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{u}(\nabla\tilde{\psi},\tilde{A}\nabla\tilde{u})dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\tilde{\psi}\tilde{u}(\nabla\varrho_\delta,\tilde{A}\nabla\tilde{u})dy+\\&+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{\psi}\tilde{u}(\tilde{b},\nabla\tilde{u})dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{\psi}(\nabla\tilde{u},\tilde{c}\tilde{u})\,dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{u}(\nabla\tilde{\psi},\tilde{c}\tilde{u})\,dy+\\&+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\tilde{\psi}\tilde{u}(\nabla\varrho_\delta,\tilde{c}\tilde{u})\,dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{\psi}\tilde{d}\tilde{u}^2\,dy=\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{\psi}\tilde{u}\tilde{f}dy+\\&+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{\psi}(\tilde{F},\nabla\tilde{u})dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\tilde{u}(\tilde{F},\nabla\tilde{\psi})dy+\int\limits_{\tilde{Q}_m}\tilde{\psi}\tilde{u}(\tilde{F},\nabla\varrho_\delta)dy.\end{aligned}\tag{19}$$

В силу (18)

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1^{(m)}(\delta)&=\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta(y)\tilde{\psi}(y)(\nabla\tilde{u}(y),\tilde{A}(y)\nabla\tilde{u}(y))dy\ge\\&\ge\int\limits_{Q'_m}r_\delta(x)(\nabla u(x),A(x)\nabla u(x))dx\ge\gamma_1\int\limits_{Q'_m}r_\delta(x)\left|\nabla u(x)\right|^2dx.\end{aligned}$$

Остальные члены равенства (19) оценим сверху.

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_2^{(m)}(\delta)=\int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta(y)\,\tilde{u}(y)\,(\nabla\tilde{\psi}(y),\tilde{A}(y)\,\nabla\tilde{u}(y))dy.$$

Из (18) имеем

$$\begin{aligned}\left|\tilde{I}_2^{(m)}(\delta)\right|&\le\frac{4}{3}\int\limits_{Q_m}r_{\frac{3}{4}\delta}(x)|u(x)|\,|(\nabla\psi(x),A(x)\nabla u(x))|\,dx\le\\&\le\frac{4}{3}||\psi||_{C^1(\overline{Q})}\gamma_2\int\limits_{Q_m}r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\,|u(x)\,||\nabla u(x)\,|dx\le\end{aligned}$$

$$\le\frac{4}{3}||\psi||_{C^1(\overline{Q})}\gamma_2\left\{\int\limits_{Q_m}r_{\frac{3}{4}\delta}(x)u^2(x)dx\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{\int\limits_{(Q\backslash Q^{\frac{5\ell_0}{2}})\cup\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}}r_{\frac{3}{4}\delta}(x)|\nabla u(x)|^2dx\right\}^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\leq \frac{4}{3}||\psi||_{C^1(\overline{Q})}\gamma_2 \left\{ \int\limits_Q r\left(x\right) u^2(x)dx \right\}^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left\{ \frac{\delta}{2} \int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right)\setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u\left(x\right)|^2dx + 2\int\limits_Q r_\delta\left(x\right)|\nabla u(x)|^2dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \epsilon \int\limits_Q r_\delta\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx + \frac{\epsilon\delta}{4} \int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right)\setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2dx + \frac{C_2'}{\epsilon}\int\limits_Q r(x)u^2(x)dx,$$

где $0 < \epsilon < 1$, которое мы выберем позже.

Так как для решений эллиптического уравнения (1) справедлива оценка (см. [15])

(20)

$$\int\limits_{\Omega'}|\nabla u|^2dx \leq C_0(n,\gamma_1,\gamma_2)\left(\frac{1}{\sigma^2}\int\limits_\Omega u^2dx + \int\limits_\Omega(|b|^2+|c|^2+|d|)u^2dx + \sigma^2\int\limits_\Omega f^2dx + \int\limits_\Omega|F|^2dx\right)$$

где $\Omega' \Subset \Omega$ а $\sigma = dist\left(\Omega', \partial\Omega\right)$, то в силу (8) и (12)

$$\delta \int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right)\setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u\left(x\right)|^2dx \leq C_0\delta\left(\left(\frac{16}{\delta^2} + |||b|||^2_{L_\infty\left(Q_{\frac{\delta}{2}}\setminus\overline{Q}_{\frac{3}{2}\delta}\right)}\right)\times\right.$$

$$\int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right)\setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} u^2\left(x\right)dx + \int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right)\setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} \left(|c|^2+|d|\right)u^2\left(x\right)dx +$$

$$\left.\frac{\delta^2}{16}\int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right)\setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} f^2\left(x\right)dx + \int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right)\setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} |F\left(x\right)|^2dx\right) \leq$$

$$\leq C_2''\left(\left(1+\frac{1}{(1+|\ln\delta|)^{\frac{3}{2}}}+\delta\int\limits_{3\delta/8}^{3\delta/2}(C^2(t)+D(t))dt\right)\max_{\frac{\delta}{2}\leq y_n\leq 2\delta}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0}\tilde{u}^2\left(y',y_n\right)dy' +\right.$$

$$\left.\frac{1}{\left(1+|\ln\frac{3}{2}\delta|\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right)\setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} r^3\left(x\right)\left(1+|\ln r\left(x\right)|\right)^{\frac{3}{2}}f^2(x)dx +\right.$$

$$\frac{1}{\left(1+|\ln\frac{3}{2}\delta|\right)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\left(\Pi^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q^{\frac{3\delta}{2}}\right)\setminus Q^{\frac{\delta}{2}}} r(x)\left(1+|\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{2}}|F(x)|^2dx\Bigg).$$

Введем следующие обозначения:

$$M=\max_{0\le y_n\le h}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0}\tilde{u}^2(y',y_n)\,dy',$$

$$||f||^2=\int\limits_Q r^3(x)\left(1+|\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{2}}f^2(x)\,dx,$$

$$||F||^2=\int\limits_Q r(x)\left(1+|\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{2}}|F(x)|^2dx.$$

Так как в силу (9), (12)

$$\delta\int\limits_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta}\left(C^2(t)+D(t)\right)dt\le\frac{8}{3}\int\limits_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta}t(C^2(t)+D(t))dt\le\frac{8}{3}\Bigg(\int\limits_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta}t(1+|\ln t|)^{\frac{3}{2}}C^2(t)dt+$$

$$\left(\int\limits_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta}\frac{1}{t\left(1+|\ln t|\right)^{\frac{3}{2}}}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\frac{3}{8}\delta}^{\frac{3}{2}\delta}t^3\left(1+|\ln t|\right)^{\frac{3}{2}}D^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg)\le C_2''',$$

то

$$\delta\int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right)\setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}}|\nabla u(x)|^2dx\le\tilde{C}_0\left(M+||f||^2+||F||^2\right).\tag{21}$$

Следовательно, получаем оценку

$$|\tilde{I}_2^{(m)}(\delta)|\le\epsilon\int\limits_Q r_\delta(x)\,|\nabla u(x)|^2dx+I_2^{(m)}(\epsilon),$$

где

$$I_2^{(m)}(\epsilon)=C_2\left(\frac{1}{\epsilon}\int\limits_Q r(x)\,u^2(x)\,dx+\epsilon\left(M+||f||^2+||F||^2\right)\right).$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_3^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi}(y)\tilde{u}(y)(\nabla \varrho_\delta(y), \tilde{A}(y)\nabla\tilde{u}(y))dy.$$

Имеем

$$\tilde{I}_3^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\delta}^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y')\tilde{u}(y',y_n)(\nabla\varrho_\delta(y_n), (\tilde{A}(y',y_n)-A_0(y',y_n))\nabla\tilde{u}(y',y_n))dy'd_{y_n}-$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\delta}^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y')\,\tilde{u}^2(y',y_n)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial a_{in}^0(y',y_n)}{\partial y_i}dy'dy_n-$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\delta}^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{u}^2(y',y_n)\sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(y',y_n)\frac{\partial\tilde{\psi}(y')}{\partial y_i}dy'dy_n+$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{a}_{nn}(y',0)\,\tilde{\psi}(y')\,\tilde{u}^2(y',4\delta_0)\,dy'-\frac{1}{2}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{a}_{nn}(y',0)\,\tilde{\psi}(y')\,\tilde{u}^2(y',\delta)\,dy' =$$

$$\tilde{I}_{31}^{(m)}(\delta)+\tilde{I}_{32}^{(m)}(\delta)+\tilde{I}_{33}^{(m)}(\delta)+\tilde{I}_{34}^{(m)}(\delta_0)+\tilde{I}_{35}^{(m)}(\delta).$$

В силу (16) и (13)

$$|\tilde{I}_{31}^{(m)}(\delta)| \le \int\limits_{\delta}^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y')\,|\tilde{u}(y)|\,|\nabla\tilde{u}(y)|\,\tilde{\omega}(y_n)\,dy'dy_n \le I_{31}^{(m)'}(\delta)+$$

$$\tilde{\omega}(4\delta_0)\int\limits_{\delta_0}^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y')\,|\tilde{u}(y)|\,|\nabla\tilde{u}(y)|\,dy'dy_n,$$

где

$$I_{31}^{(m)'}(\delta) = \left(\int\limits_{\delta}^{\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y')\,y_n|\nabla\tilde{u}(y)|^2dy'dy_n\right)^{\frac{1}{2}}\left(M\int\limits_0^{\delta_0}\frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n}dy_n\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q_{\frac{2\delta}{\sqrt{5}}}} r(x)\,|\nabla u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(M\int\limits_0^{\delta_0}\frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n}dy_n\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(4\sqrt{5}\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\,|\nabla u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(M\int\limits_0^{\delta_0}\frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n}dy_n\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{8\sqrt{5}}{\epsilon} M \int\limits_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n.$$

Далее, в силу (21)

$$\frac{\epsilon}{2} \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x) |\nabla u(x)|^2 dx \leq$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{\delta}{2} \int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h} \cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right) \setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}} |\nabla u(x)|^2 dx + 2 \int\limits_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx \right) \leq$$

$$\leq \epsilon \int\limits_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 \left(M + ||f||^2 + ||F||^2 \right).$$

Итак $|\tilde{I}_{31}^{(m)}(\delta)| \leq \epsilon \int\limits_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_{31}^{(m)}(\delta_0, \epsilon)$,

где $I_{31}^{(m)}(\delta_0, \epsilon) = \frac{\epsilon}{4} \tilde{C}_0 \left(M + ||f||^2 + ||F||^2 \right) + \frac{8\sqrt{5}}{\epsilon} M \int\limits_0^{\delta_0} \frac{\tilde{\omega}^2(y_n)}{y_n} dy_n +$

$$\tilde{\omega}(4\delta_0) \int\limits_{\delta_0}^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y') |\tilde{u}(y)| |\nabla \tilde{u}(y)| dy' dy_n.$$

В силу (17)

$$\left|\tilde{I}_{32}^{(m)}(\delta)\right| \leq \frac{n-1}{2} \int\limits_0^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{\psi}(y') \tilde{u}^2(y', y_n) \frac{\tilde{\omega}(y_n)}{y_n} dy' dy_n \leq$$

$$\leq M \frac{n-1}{2} \int\limits_0^{4\delta_0} \frac{\tilde{\omega}(y_n)}{y_n} dy_n = I_{32}^{(m)}(\delta_0),$$

$$\left|\tilde{I}_{33}^{(m)}(\delta)\right| \leq \frac{1}{2} \int\limits_0^{4\delta_0} \int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \tilde{u}^2(y', y_n) \left| \sum_{i=1}^{n-1} a_{in}^0(y', y_n) \frac{\partial \tilde{\psi}(y')}{\partial y_i} \right| dy' dy_n = I_{33}^{(m)}(\delta_0),$$

$$\left|\tilde{I}_{35}^{(m)}(\delta)\right| \leq \frac{5}{8} \gamma_2 M = I_{35}^{(m)}.$$

Таким образом, получили

$$|\tilde{I}_3^{(m)}(\delta)| \leq \epsilon \int\limits_Q r_\delta(x) |\nabla u(x)|^2 dx + I_3^{(m)}(\epsilon),$$

где $I_3^{(m)}(\epsilon) = I_{31}^{(m)}(\delta_0,\epsilon) + I_{32}^{(m)}(\delta_0) + I_{33}^{(m)}(\delta_0) + \tilde{I}_{34}^{(m)}(\delta_0) + I_{35}^{(m)}$.

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_4^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y)\,\tilde{\psi}(y)\,\tilde{u}(y)\left(\tilde{b}(y), \nabla\tilde{u}(y)\right)dy.$$

В силу (18)

$$\left|\tilde{I}_4^{(m)}(\delta)\right| \le \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\psi(x)|u(x)||b(x)||\nabla u(x)|dx \le$$

$$\left(2\int\limits_{Q_m\cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} r(x)\,\psi(x)\,u^2(x)\,|b(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{Q_m\cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} \psi(x)\,r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\,|\nabla u(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\frac{\epsilon}{2}\int\limits_{\left(Q\setminus Q^{\frac{5\ell_0}{2}}\right)\cup\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\,|\nabla u(x)|^2dx + \frac{1}{\epsilon}\int\limits_{Q_m\cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} \frac{K^2u^2(x)}{r(x)\left(1+|\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{2}}}dx \le$$

$$\epsilon\int\limits_Q r_\delta(x)\,|\nabla u(x)|^2dx + \frac{\epsilon}{4}\tilde{C}_0\left(M+||f||^2+||F||^2\right) +$$

$$\frac{K^2}{\epsilon}\left(\int\limits_{Q\setminus Q^{2\ell_0}} \frac{u^2(x)}{r(x)\left(1+|\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{2}}}dx + \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q_{\frac{3\delta}{4}}} \frac{u^2(x)}{r(x)\left(1+|\ln r(x)|\right)^{\frac{3}{2}}}dx\right) \le$$

$$\epsilon\int\limits_Q r_\delta(x)\,|\nabla u(x)|^2dx + \frac{\epsilon}{4}\tilde{C}_0\left(M+||f||^2+||F||^2\right) + \frac{K^2}{2\epsilon\ell_0}||u||^2_{L_2(Q)} +$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{K^2}{\epsilon}\int\limits_{\frac{3\delta}{4}}^{h}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} \frac{\tilde{u}^2(y)}{y_n\left(1+|\ln y_n|\right)^{\frac{3}{2}}}dy'dy_n \le \epsilon\int\limits_Q r_\delta(x)\,|\nabla u(x)|^2dx + I_4^{(m)}(\epsilon),$$

где $I_4^{(m)}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{4}\tilde{C}_0\left(M+||f||^2+||F||^2\right) + \frac{K^2}{2\epsilon\ell_0}||u||^2_{L_2(Q)} + \frac{\sqrt{5}}{2}\frac{K^2}{\epsilon}M\int\limits_0^h \frac{dy_n}{y_n\left(1+|\ln y_n|\right)^{\frac{3}{2}}}$.

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_5^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y)\,\tilde{\psi}(y)\left(\tilde{c}(y)\,\tilde{u}(y), \nabla\tilde{u}(y)\right)dy.$$

В силу (10), (18)

$$\left|\tilde{I}_5^{(m)}(\delta)\right| \le \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\psi(x)\,|c(x)|\,|u(x)|\,|\nabla u(x)|\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{Q_m}\psi(x)r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx+$$

$$+\frac{16}{9\varepsilon}\int\limits_{Q_m}\psi\left(x\right)r_{\frac{3}{4}\delta}\left(x\right)|c\left(x\right)|^2u^2\left(x\right)dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\left(Q\setminus Q^{\frac{5\ell_0}{2}}\right)\cup\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}} r_{\frac{3}{4}\delta}\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx+$$

$$+\frac{16}{9\varepsilon}\int\limits_{Q_m\cap Q_{\frac{3\delta}{4}}}\psi\left(x\right)r\left(x\right)C^2\left(r\left(x\right)\right)u^2\left(x\right)dx \le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\delta}{2}\int\limits_{\left(\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q^{\frac{5\delta}{4}}\right)\setminus Q^{\frac{3\delta}{4}}}|\nabla u\left(x\right)|^2dx+2\int\limits_Q r_\delta\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx\right)+$$

$$+\frac{16}{9\varepsilon}\left(\int\limits_{Q\setminus Q^{2\ell_0}}\psi(x)r(x)C^2(r(x))u^2(x)dx+\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\frac{\ell_0}{2},h}\cap Q_{\frac{3\delta}{4}}}\psi(x)r(x)C^2(r(x))u^2(x)dx\right)\le$$

$$\le\varepsilon\int\limits_Q r_\delta(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx+\frac{\varepsilon}{4}\tilde{C}_0\left(M+\|f\|^2+\|F\|^2\right)+\frac{16}{9\varepsilon}C^2(2\ell_0)\int\limits_Q r(x)u^2(x)dx+$$

$$+\frac{16}{9\varepsilon}\int\limits_{\frac{3\delta}{4}}^{h}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\frac{\ell_0}{2}}\tilde{u}^2\left(y',y_n\right)y_nC^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n\right)dy'dy_n\le$$

$$\le\varepsilon\int\limits_Q r_\delta\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx+\frac{\varepsilon}{4}\tilde{C}_0\left(M+\|f\|^2+\|F\|^2\right)+\frac{16}{9\varepsilon}C^2\left(2\ell_0\right)\int\limits_Q r\left(x\right)u^2\left(x\right)dx+$$

$$+\frac{16}{9\varepsilon}M\int\limits_0^h y_nC^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n\right)dy_n.$$

Таким образом,

$$\left|\tilde{I}_5^{(m)}\left(\delta\right)\right|\le\varepsilon\int\limits_Q r_\delta\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx+I_5^{(m)}\left(\varepsilon\right),$$

где

$$I_5^{(m)}(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}\tilde{C}_0(M+\|f\|^2+\|F\|^2)+\frac{16}{9\varepsilon}C^2(2\ell_0)\int\limits_Q r(x)u^2(x)dx+\frac{16}{9\varepsilon}M\int\limits_0^h y_nC^2(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n)dy_n.$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_6^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y)\tilde{u}(y)(\tilde{c}(y)\tilde{u}(y), \nabla\tilde{\psi}(y))dy.$$

Опять в силу (10), (18)

$$\left|\tilde{I}_6^{(m)}(\delta)\right| \le \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)C(r(x))u^2(x)\left|\nabla\psi(x)\right|dx \le$$

$$\frac{4}{3}\|\psi\|_{C^1(\overline{Q})}\left(\int\limits_{Q\setminus Q^{2\ell_0}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)C(r(x))u^2(x)dx + \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q_{\frac{3\delta}{4}}} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)C(r(x))u^2(x)dx\right) \le$$

$$\frac{4}{3}\|\psi\|_{C^1(\overline{Q})}\left(C(2\ell_0)\int\limits_Q r(x)u^2(x)dx + \int\limits_{\frac{3\delta}{4}}^{h}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0}\tilde{u}^2(y',y_n)y_nC\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n\right)dy'dy_n\right) \le$$

$$\frac{4}{3}\|\psi\|_{C^1(\overline{Q})}\left(C\left(2\ell_0\right)\int\limits_Q r\left(x\right)u^2\left(x\right)dx + M\int\limits_0^h y_nC\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n\right)dy_n\right) \le$$

$$\frac{4}{3}\|\psi\|_{C^1(\overline{Q})}\left(C\left(2\ell_0\right)\int\limits_Q r\left(x\right)u^2\left(x\right)dx + M\int\limits_0^h y_ndy_n + M\int\limits_0^h y_nC^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n\right)dy_n\right) =$$

$\tilde{I}_6^{(m)}$.

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_7^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m}\tilde{\psi}\left(y\right)\tilde{u}\left(y\right)\left(\tilde{c}\left(y\right)\tilde{u}\left(y\right), \nabla\varrho_\delta\left(y\right)\right)dy.$$

В силу (10),

$$\left|\tilde{I}_7^{(m)}(\delta)\right| \le \int\limits_{Q_m}\left|\tilde{c}\left(y\right)\right|\tilde{u}^2\left(y\right)dy \le \int\limits_{Q\setminus Q^{2\ell_0}}\left|c\left(x\right)\right|u^2\left(x\right)dx + \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}}\left|c\left(x\right)\right|u^2\left(x\right)dx \le$$

$$C\left(2\ell_0\right)\int\limits_Q u^2\left(x\right)dx + M\int\limits_0^h C\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,y_n\right)dy_n \le C(2\ell_0)\int\limits_Q u^2(x)dx +$$

$$M\int\limits_0^h\frac{1}{y_n(1+|\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}}\,dy_n + M\int\limits_0^h y_n(1+|\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)dy_n = I_7^{(m)}.$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_8^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m}\varrho_\delta\left(y\right)\tilde{\psi}\left(y\right)\tilde{d}\left(y\right)\tilde{u}^2\left(y\right)dy.$$

В силу (9),

$$|\tilde{I}_8^{(m)}(\delta)| \leq \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\psi(x)|d(x)|u^2(x)dx \leq \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m\cap Q_{\frac{3}{4}\delta}} r(x)D(r(x))\psi(x)u^2(x)dx \leq$$

$$\frac{4}{3}\left(D\left(2\ell_0\right)\int\limits_{Q\setminus Q^{2\ell_0}} r\left(x\right)u^2\left(x\right)dx + \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m+\ell_0,h}\cap Q_{\frac{3\delta}{4}}} r\left(x\right)D\left(r\left(x\right)\right)u^2\left(x\right)dx\right) \leq$$

$$\frac{4}{3}\left(D\left(2\ell_0\right)\int\limits_{Q} r\left(x\right)u^2\left(x\right)dx + \int\limits_{\frac{3\delta}{4}}^{h}\int\limits_{|y'|<\ell_m+\ell_0} y_n D\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)\tilde{u}^2\left(y',y_n\right)dy'dy_n\right) \leq$$

$$C_8\left(\int\limits_{Q} r\left(x\right)u^2\left(x\right)dx + M\int\limits_{0}^{h} y_n D\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)dy_n\right) = I_8^{(m)}.$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_9^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta(y)\tilde{\psi}(y)\tilde{u}(y)\tilde{f}(y)dy.$$

$$|\tilde{I}_9^{(m)}(\delta)| \leq \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r(x)|u(x)|\,|f(x)|\,dx \leq C_9(||u||^2_{L_2(Q)}+||f||^2+M\int\limits_0^h \frac{dy_n}{y_n(1+|\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}}) =$$

$I_9^{(m)}$.

Для интеграла $\tilde{I}_{10}^{(m)}\left(\delta\right) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta\left(y\right)\tilde{\psi}\left(y\right)\left(\tilde{F}\left(y\right),\nabla\tilde{u}\left(y\right)\right)dy$ аналогично оценкам $\tilde{I}_2^{(m)}\left(\delta\right)$ и $\tilde{I}_4^{(m)}\left(\delta\right)$ имеем

$$|\tilde{I}_{10}^{(m)}\left(\delta\right)| \leq \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}\left(x\right)\psi\left(x\right)|F\left(x\right)||\nabla u\left(x\right)|dx \leq \frac{\epsilon}{2}\int\limits_{Q_m}\psi\left(x\right)r_{\frac{3}{4}\delta}\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx+$$

$$\frac{16}{9\epsilon}||F||^2 \leq \epsilon\int\limits_{Q} r_\delta\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx + \frac{\epsilon}{4}\tilde{C}_0\left(M+||f||^2+||F||^2\right)+\frac{16}{9\epsilon}||F||^2 =$$

$$\epsilon\int\limits_{Q} r_\delta\left(x\right)|\nabla u\left(x\right)|^2dx + I_{10}^{(m)}\left(\epsilon\right).$$

Оценим интеграл

$$\tilde{I}_{11}^{(m)}\left(\delta\right) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \varrho_\delta\left(y\right)\tilde{u}\left(y\right)\left(\tilde{F}\left(y\right),\nabla\tilde{\psi}\left(y\right)\right)dy.$$

$$|\tilde{I}_{11}^{(m)}(\delta)| \le \frac{4}{3}\int\limits_{Q_m} r_{\frac{3}{4}\delta}(x)\,|u(x)\,||F(x)\,||\nabla\psi(x)\,|dx \le$$

$$\frac{4}{3}||\psi||_{C^1(\overline{Q})}\left(\int\limits_{Q} r(x)\,u^2(x)\,dx + ||F||^2\right) = I_{11}^{(m)}.$$

Наконец, оценим интеграл

$$\tilde{I}_{12}^{(m)}(\delta) = \int\limits_{\tilde{Q}_m} \tilde{\psi}(y)\,\tilde{u}(y)\left(\tilde{F}(y), \nabla\varrho_\delta(y)\right)dy.$$

$$\left|\tilde{I}_{12}^{(m)}(\delta)\right| \le \int\limits_{Q_m} |u(x)\,||F(x)\,|dx \le \int\limits_{Q_m} \frac{u^2(x)\,dx}{r(x)\,(1+|\ln r(x)\,|)^{\frac{3}{2}}} + ||F||^2 \le$$

$$\frac{1}{2\ell_0}\int\limits_{Q} u^2(x)\,dx + \frac{\sqrt{5}}{2}M\int\limits_0^h \frac{dy_n}{y_n\,(1+|\ln y_n|)^{\frac{3}{2}}} + ||F||^2 = I_{12}^{(m)}.$$

Подставляя полученные оценки в равенство (19) получаем

$$\gamma_1\int\limits_{Q'_m} r_\delta(x)|\nabla u(x)|^2dx \le \tilde{I}_1^{(m)}(\delta) \le \sum_{k=2}^{12}|\tilde{I}_k^{(m)}(\delta)| \le 5\epsilon\int\limits_{Q} r_\delta(x)|\nabla u(x)|^2dx + I^{(m)}(\epsilon),$$

где $I^{(m)}(\epsilon) = \sum\limits_{k=2}^{12} I_k^{(m)}$.

Суммируя полученные неравенства по m, $1 \le m \le p$, приходим к неравенствам

$$\gamma_1\int\limits_{Q} r_\delta(x)\,|\nabla u(x)\,|^2dx \le \gamma_1\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{Q'_m} r_\delta(x)\,|\nabla u(x)\,|^2dx \le$$

$$5\epsilon p\int\limits_{Q} r_\delta(x)\,|\nabla u(x)\,|^2dx + \sum_{m=1}^{p} I^{(m)}(\epsilon).$$

Беря $\epsilon < \dfrac{\gamma_1}{10p}$, получаем

$$\int\limits_{Q} r_\delta(x)\,|\nabla u(x)\,|^2dx \le \frac{2}{\gamma_1}\sum_{m=1}^{p} I^{(m)}(\epsilon).$$

Так как правая часть последнего неравенства не зависит от δ, $0 < \delta < \delta_0$, то очевидно функция $r(x)\,|\nabla u(x)\,|^2$ интегрируема на Q. Лемма доказана. □

3. Доказательство теоремы

Пусть $u(x)$ решение из $W^1_{2,loc}$ задачи (1), (2). Тогда, очевидно, функция $u(x)$ будет также решением из $W^1_{2,loc}$ следующей задачи Дирихле:

$$(1')\ \ -div\,(A(x),\nabla v(x)) = f(x) - (b(x),\nabla u(x)) - d(x)u(x) - div\,(F(x) - c(x)u(x)),$$

$$(2')\qquad v|_{\partial Q} = u_0,$$

Тогда, как следует из результатов работы [2], для установления $(n-1)$-мерной непрерывности (т.е. принадлежности $C_{n-1}(\bar{Q})$) решения $v(x) = u(x)$ задачи $(1')$, $(2')$ достаточно показать, что функции

$$h(x) = F(x) - c(x)\,u(x)$$

и

$$g(x) = f(x) - (b(x),\nabla u(x)) - d(x)\,u(x)$$

удовлетворяют условиям (6) и (7) соответственно, т.е.

$$(6')\qquad r^{\frac{1}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,h(x) \in L_2(Q),$$

$$(7')\qquad r^{\frac{3}{2}}(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\,g(x) \in L_2(Q).$$

В силу (12),

$$\int\limits_Q r(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}|c(x)|^2u^2(x)dx \le C^2(2\ell_0)\int\limits_{Q_{2\ell_0}} r(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}u^2(x)dx +$$

$$\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m,h}} r(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}\,C^2(r(x))\,u^2(x)\,dx \le$$

$$C'||u||^2_{L_2(Q)} + \sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}} y_n\left(1+|\ln\frac{2}{\sqrt{5}}y_n|\right)^{\frac{3}{2}}C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)\tilde{u}^2(y',y_n)\,dy'dy_n < \infty.$$

Аналогично, в силу (9),

$$\int\limits_Q r^3(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}d^2(x)u^2(x)dx \le D^2(2\ell_0)\int\limits_{Q_{2\ell_0}} r^3(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}u^2(x)dx +$$

$$\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m,h}} r^3(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}\,D^2(r(x))\,u^2(x)\,dx \le$$

$$C''||u||^2_{L_2(Q)}+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}} y_n^3\left(1+|\ln\frac{2}{\sqrt{5}}y_n|\right)^{\frac{3}{2}} D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)\tilde{u}^2(y',y_n)dy'dy_n<\infty.$$

В силу (8) и доказанной леммы,

$$\int\limits_Q r^3(x)\,(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{2}}\,|\,(b(x),\nabla u(x))\,|^2dx\le K^2\int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)\,|^2dx<\infty.$$

Далее, учитывая (6) и (7), получаем справедливость условий (6′) и (7′). □

Abstract. Conditions on the low-order terms of the general second order elliptic equation are obtained for the solution of the Dirichlet problem

$$-\sum_{i,\,j=1}^{n}(a_{i\,j}(x)u_{x_i})_{x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-\sum_{i=1}^{n}(c_i(x)u)_{x_i}+d(x)u=f(x)-divF(x),\quad x\in Q,$$

$$u|_{\partial Q}=u_0\in L_2(\partial Q),$$

to be $(n-1)$–dimentional continuous (belongs to the Gushchin space $C_{n-1}(\bar{Q})$); at the same time the boundary value u_0 is the limit in L_2 of traces of the solution on surfaces from a rather wide class (not only "parallel" to the boundary). For the solution we prove boundedness of the Dirichlet integral with the weight $r(x)$, i.e. that the function $r(x)|\nabla u(x)|^2$ is integrable over Q, where $r(x)$ is the distance from a point $x\in Q$ to the boundary ∂Q.

Список литературы

[1] А. К. Гущин, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", Матем. сб., **137**(179), 1(9), 19 - 64 (1988).

[2] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, "О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения", Матем. сб., **182** (6), 787 - 810 (1991).

[3] В. Ж. Думанян, "О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", ДАН РАН, **386** (6), 735 - 737 (2002).

[4] V. Zh. Dumanyan, "On the behaviour near the boundary of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations", Note di matematica, **21** (2), 99 - 118 (2002/2003).

[5] В. П. Михайлов, "О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", Дифференц. уравнения, **12** (10), 1877 - 1891 (1976).

[6] В. П. Михайлов, "О граничных свойствах решений эллиптических уравнений", Матем. заметки, **27** (1), 137 - 145 (1980).

[7] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, "Обобщенные функции и их применения в математической физике". Труды Международной конференции, Москва 24 - 28 ноября (1980), М. Вычислительный центр АН СССР, 189 - 205 (1981).

[8] В. П. Михайлов, "Дифференциальные уравнения в частных производных", М., Наука, 424 с. (1983).

[9] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гущин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, "Краевые задачи математической физики", Труды МИАН, **175**, 63 - 102 (1986).

[10] И. М. Петрушко, "О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей", Матем. сб., **119** (161), 48 - 77 (1982).

[11] И. М. Петрушко, "О граничных значениях решений в L_p, $p > 1$, эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей", Матем. сб., **120** (162), 569 - 588 (1983).

[12] В. Ж. Думанян, "О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка", ДНАН Армении, **108** (2), 110 - 116 (2008).

[13] В. Ж. Думанян, О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Второе российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, Москва 5-11 октября 2008, Тезисы докладов, М. Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, с. 32.

[14] В. Ж. Думанян, "Об ограниченности весового интеграла Дирихле решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", ДНАН Армении, **108** (1), 45 - 49 (2008).

[15] В. Ж. Думанян, "Об оценке $\int |\nabla u|^2 dx$ для решений эллиптических уравнений второго порядка", Ученые записки ЕГУ, (2), 145 - 147 (2008).

Поступила 8 марта 2009

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 53-60.

EXAMPLES OF HOMOGENEOUS VECTORS ON THE FIBER SPACE OF THE ASSOCIATED AND THE TANGENT BUNDLES

R. CHAVOSH KHATAMY

Department of Mathematics, Faculty of Sciences
Islamic Azad University, Tabriz Branch, Tabriz-IRAN
E-mails: *r_ chavosh@iaut.ac.ir, chavosh@tabrizu.ac.ir*

Abstract. In the present paper the associated bundle $\xi = (G \times_K \mathcal{G}/\mathcal{K}, \rho_\xi, G/K, \mathcal{G}/\mathcal{K})$ and the tangent bundle $\tau_{G/K} = (T_{G/K}, \pi_{G/K}, G/K, \mathrm{R}^m)$ are considered. We give special examples of odd dimensional solvable Lie groups equipped with left invariant Riemannian metric, and we prove some conditions about the existence of homogeneous (geodesic) vectors on the fiber space of ξ and $\tau_{G/K}$.

MSC2000 number: 53C30, 53C22
Key words: Associated bundle, tangent bundle, homogeneous manifold, solvable Lie group, homogeneous (geodesic) vector.

1. Introduction

Let G be a connected Lie group and K be a closed subgroup of G. The set of left cosets of K in G is denoted by G/K and a unique differentiable structure can be given ([6], vol.II, chap.2), hence $M = G/K$ is called a homogeneous manifold. When a Lie group G acts transitively isometric on a Riemannian manifold M, we can identify M with the set G/K as left cosets of the isotropy group K of a point $x_0 \in M$. The point x_0 is called the origin of M. Let $\bigtriangledown$ be an affine connection on $M = G/K$ and let $\bigtriangledown$ be invariant under the natural action of $T : G \times M \longrightarrow M$. A geodesic $\gamma : I \longrightarrow M$ is called a *homogeneous geodesic*, if there exists a 1-parameter subgroup $t \longrightarrow \exp tX$, $t \in \mathbf{R}$, of G with $X \in \mathcal{G} = T_eG$ such that

$$\gamma(t) = T(\exp tX,\, x_0),$$

where $\gamma(0) = x_0 \in M$ and $exp : \mathcal{G} \to G$ is the exponential map [10]. A vector $0 \neq X \in \mathcal{G}$ is called a *homogeneous* (or *geodesic*) *vector* , if the curve $\gamma(t) = (\exp tX)(x_0)$ is geodesic on $M = G/K$ [10]. In particular, if $\bigtriangledown$ is a natural torsion-free affine connection on a naturally reductive homogeneous manifold $M = G/K$, then all geodesics on M are homogeneous (see [12] or [7], vol.II, pp. 196-197). If $<,>$ is a

naturally reductive G-invariant Riemannian metric on $M = G/K$ then with the Levi-Civita connection $\bigtriangledown$ arising from $<,>$, all geodesics on M are homogeneous [10]. It is proved in [9], that every Riemannian homogeneous manifold M at any point $x_0 \in M$ has at least one homogeneous geodesic. Let $\Im = (G, \pi, G/K, K)$ be a fiber bundle with group structure K, G be a connected Lie group and K be a closed subgroup of G (see [4], definition 2.2). We take the Lie algebras $\mathcal{G}$ and $\mathcal{K}$ of G and K respectively. In [2] and [3] we proved some relations between the homogeneous vector in the fiber space of the associated bundle $\xi = (G \times_K \mathcal{G}/\mathcal{K}, \rho_\xi, G/K, \mathcal{G}/\mathcal{K})$ and the homogeneous geodesic in the base space of a principal homogeneous bundle $\Im = (G, \pi, G/K, K)$.
In [4], we considered the homogeneous bundle $\Im = (G, \pi, G/K, K)$ and the tangent bundle $\tau_{G/K}$ of $M = G/K$, and obtained some results about the existence of homogeneous vectors on the fiber space of $\tau_{G/K}$, for both cases of G semisimple and weakly semisimple.
In this paper we study the associated bundle and the tangent bundle of special examples of unimodular solvable Lie groups equipped with left invariant Riemannian metric, in arbitrary odd dimension, constructed in [1] and [8]. We give conditions about homogeneous vectors on the fiber space of the associated and the tangent bundles.

2. Preliminaries

Let $\wp = (P, \pi, B, G)$ be a smooth fiber bundle. A pair $(\wp, T)$ is called a (smooth) *principal bundle with structure group* G, if $T : P \times G \longmapsto P$ is a right action of G on P and $\wp$ admits a coordinate representation $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ such that

$$\psi_\alpha(x, ab) = \psi_\alpha(x, a)b, \quad x \in U_\alpha, \quad a, b \in G$$

(see [6], vol.II, chap.V).
Let $\wp = (P, \pi, B, G)$ be a principal bundle and F be a differentiable manifold. Consider the left action Q of G on the product manifold $P \times F$ given by

$$Q_a(z, y) = (z, y)a = (za, a^{-1}y) \quad z \in P,\ y \in F,\ a \in G.$$

The set of orbits of this action is denoted by $P \times_G F$ and

$$q : P \times F \to P \times_G F$$

denotes the corresponding projection, i.e. $q(z,y)$ is the orbit through (z,y). The map q determines a map $\rho_\xi : P \times_G F \to B$ such that

$$\rho_\xi \circ q = \pi \circ \pi_p,$$

where $\pi_p : P \times F \to P$ is the canonical projection and $\pi : P \to B$ is the bundle map. There is a unique smooth structure on $P \times_G F$, such that $\xi = (P \times_G F, \rho_\xi, B, F)$ is a smooth fiber bundle (see [6], vol.II, chap.V, sec.2).

Definition 2.1. The fiber bundle $\xi = (P \times_G F, \rho_\xi, B, F)$, is called the *associated bundle* with $\wp = (P, \pi, B, G)$.

Let K be a closed subgroup of G. The principal fiber bundle $\Im = (G, \pi, G/K, K)$ is called *homogeneous bundle* [4].

In [4] we proved the following lemma.

Lemma 2.2. *Let $\Im = (G, \pi, G/K, K)$ be a homogeneous bundle. Then*

$$\xi = (G \times_K \mathcal{G}/\mathcal{K}, \rho_\xi, \mathrm{G/K}, \mathcal{G}/\mathcal{K})$$

is the associated bundle of $\Im = (G, \pi, G/K, K)$.

3. Main results

Let G be a 3-dimensional solvable Lie group, given in [8], pp. 134. In [5] we proved some results about the existence of homogeneous vectors on the fiber space of $\tau_{G/K}$ and ξ.

Now we extend theorems 5.6 and 5.7 in [5], and give the following theorems for the odd dimensional solvable Lie group.

Theorem 3.1. *Let $\Im = (G, \pi, G/K, K)$ be a principal homogeneous bundle and let $\xi = (G \times_K \mathcal{G}/\mathcal{K}, \rho_\xi, G/K, \mathcal{G}/\mathcal{K})$ be the associated bundle of $\Im = (G, \pi, G/K, K)$. If G is the matrix group of all matrices of the form*

$$\begin{pmatrix} e^{z_0} & 0 & \dots & 0 & x_0 \\ 0 & e^{z_1} & \dots & 0 & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{z_n} & x_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where $(x_0, x_1, \cdots, x_n, z_1 \cdots, z_n) \in \boldsymbol{R}^{2n+1}$ and $z_0 = -(z_1 + z_2 + \cdots + z_n)$, then a vector V in the fiber space of ξ is homogeneous (geodesic) if and only if its components

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n)$$

satisfy the following conditions

$$x_0(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = 0, \quad x_1 z_1 = 0, \cdots, x_n z_1 = 0, \tag{1}$$

$$x_0^2 - x_1^2 = 0, \cdots, x_0^2 - x_n^2 = 0. \tag{2}$$

Proof. Let $\Im = (G, \pi, G/K, K)$ be a principal homogeneous bundle with the associated bundle $\xi = (G \times_K \mathcal{G}/\mathcal{K}, \rho_\xi, G/K, \mathcal{G}/\mathcal{K})$. The Lie group G is unimodular and solvable (see [8], pp.134-136) with the left invariant Riemannian metric

$$g = \sum_{i=0}^{n} e^{-2z_i} dx_i^2 + \lambda^2 \sum_{k,j=0}^{n} dz_k dz_j,$$

where $\lambda \neq 0$ is a constant. Then G is a homogeneous Riemannian manifold with the origin at $(0, 0, \cdots, 0)$ ([8], p.134).

Let $\mathcal{G} = \mathcal{M} + \mathcal{K}$ be the reductive decomposition of $\mathcal{G}$ (see [7], vol.II, p.190). Then $\mathcal{K} = 0$ and hence $\mathcal{G} = \mathcal{M}$. By Lemma 2.2 we can take $\xi = (G \times \mathcal{M}, \rho_\xi, G, \mathcal{M})$ as the associated bundle of $\Im = (G, \pi, G/K, K)$.

Consider the vector fields $X_0 = e^{-(\sum_{i=1}^{n} z_i)} \partial/\partial x_0$, $X_1 = e^{z_1} \partial/\partial x_1$, $X_2 = e^{z_2} \partial/\partial x_2$, ..., $X_n = e^{z_n} \partial/\partial x_n$ and $Z_1 = \partial/\partial z_1$, $Z_2 = \partial/\partial z_2$, $Z_3 = \partial/\partial z_3$, ..., $Z_n = \partial/\partial z_n$.

Then $\{X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n, Z_1, Z_2, \ldots, , Z_n\}$ is a basis of the Lie algebra $\mathcal{G} = \mathcal{M}$ of G. Let $M = G/K$ be a Riemannian manifold and $\mathcal{G} = \mathcal{M} + \mathcal{K}$ be its reductive decomposition. Then the natural map $\phi : G \longrightarrow G/K = M$ induces a linear epimorphism $(d\phi)_e : T_eG \longrightarrow T_{x_0}M$, and the vector space $\mathcal{M}$ can be identified with $T_{x_0}M$. If C is a scalar product on $\mathcal{M}$ induced by the scalar product on $T_{x_0}M$, then using such basis in the fiber space of

$$\xi = (G \times \mathcal{M}, \rho_\xi, G, \mathcal{M}),$$

we compute explicitly the Lie bracket $[,]$ and the scalar product C on $\mathcal{G} = \mathcal{M}$. We have

$$[X_i, X_j] = [e^{z_i} \partial/\partial x_i, e^{z_j} \partial/\partial x_j] = 0, \quad 0 \leq i, j \leq n,$$

$$[X_0, Z_\alpha] = [e^{z_0} \partial/\partial x_0, \partial/\partial z_\alpha] = e^{-(\sum_{i=1}^{n} z_i)} \partial/\partial x_0 = X_0, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

$$[X_i, Z_\alpha] = [e^{z_i} \partial/\partial x_i, \partial/\partial z_\alpha] = -e^{z_i} \partial/\partial z_\alpha = -X_i, \quad 1 \leq (\alpha = i) \leq n,$$

$$[Z_\alpha, Z_\beta] = [\partial/\partial z_\alpha, \partial/\partial z_\beta] = 0, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n,$$

$$[X_i, Z_\alpha] = [e^{z_i} \partial/\partial x_i, \partial/\partial z_\alpha] = 0, \quad 1 \leq (\alpha \neq i) \leq n$$

and

$$C(Z_\alpha, Z_\alpha) = \lambda^2, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

$$C(X_i, Z_\alpha) = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad 0 \leq i \leq n,$$

$$C(Z_\alpha, Z_\beta) = \lambda^2/2, \quad 1 \leq (\alpha \neq i) \leq n,$$

$$C(X_i, X_j) = \delta_{ij}, \quad 0 \leq i, j \leq n.$$

If V is an element of $\mathcal{G}$, then $V = \sum_{i=0}^{n} x_i X_i + \sum_{i=1}^{n} z_i Z_i$, where

$$(x_0, x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n)$$

are components of V. By the following proposition (see [10], proposition 2.1).

Let $[X,Y]_{\mathcal{M}}$ and $X_{\mathcal{M}}$ be the components of $[X,Y]$ and X in $\mathcal{M}$ with respect to reductive decomposition. If X belongs to $\mathcal{G}$, then X is homogeneous (or *geodesic*) *vector if and only if*

$$C(X_{\mathcal{M}}, [X,Y]_{\mathcal{M}}) = 0 \quad \forall Y \in \mathcal{G}$$

on the fiber space of ξ we can compute the following

$$C([V, X_0], V) = C(-(\sum_{i=1}^{n} z_i)X_0, V) = -x_0(\sum_{i=1}^{n} z_i)$$

$$C([V, X_i], V) = C(z_i X_i, V) = x_i z_1, \quad 1 \leq i \leq n$$

$$C([V, Z_j], V) = C(x_0 X_0 - x_j X_j, V) = x_0^2 - x_j^2, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Therefore the vector V in the fiber space of the associated bundle of $\Im$ is homogeneous if and only if its component $(x_0, x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_n)$ satisfies conditions (1), (2). The proof is complete.

Let M be a differential manifold and $T_M = \bigcup_{a \in M} T_a M$, where $T_a M$ is the tangent space of M at a. Let

$$\pi_M : T_M \to M$$

be the canonical projection such that for all $v \in T_a M$ we have $\pi_M(v) = a$. In this case there is a unique differentiable structure on T_M such that $\tau_M = (T_M, \pi_M, M, \mathbf{R}^m)$ is a vector bundle ([6], vol. I, chap.3), and τ_M is called the *tangent bundle of M.*

In the proof of Theorem 5.3 in [4], we obtained a strong isomorphism between the tangent bundle

$$\tau_{G/K} = (T_{G/K}, \pi_{G/K}, G/K, \mathbf{R}^m)$$

and the associated bundle

$$\xi = (G \times_K \mathcal{G}/\mathcal{K}, \rho_\xi, G/K, \mathcal{G}/\mathcal{K}).$$

Hence under the hypothesis of Theorem 3.1. there is a strong isomorphism between the associated bundle

$$\xi = (G \times \mathcal{M}, \rho_\xi, G, \mathcal{M})$$

and the tangent bundle

$$\tau_G = (T_G, \pi_G, G, \mathbf{R}^{2n+1}).$$

Thus we have,

Corollary 3.2. *Under the hypothesis of Theorem 3.1 let*

$$\tau_G = (T_G, \pi_G, G, \mathbf{R}^{2n+1})$$

be the tangent bundle of the homogeneous Riemannian manifold G. Then the vector W in $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ is a homogeneous vector (under isomorphism), if and only if its component $(x_0, x_1, \cdots, x_n, z_1 \cdots, z_n)$ satisfies conditions (1), (2).

According to the following result in [4], there is a subspace of $\mathcal{G}'$ all member of which are homogeneous vectors, and by strong isomorphism between $\tau_{G/K}$ and ξ we can find a subspace of $\mathbf{R}^m$ (under isomorphism) all members of which are homogeneous vectors.

"Let $\tau_{G/K} = (T_{G/K}, \pi_{G/K}, G/K, \boldsymbol{R}^m)$ be a tangent bundle of G/K. Let V be a vector subspace of $\mathcal{G}' = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, such that V is $Ad(K)$-invariant and irreducible with respect to the restricted adjoint representation $Ad : K \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$. If the Killing form B on V is non-degenerate, V and $\mathcal{K}$ are orthogonal with respect to B, then up to isomorphism there is a subspace W of R^m such that every $w \in W$ is a homogeneous vector."

In the next theorem, we consider the tangent bundle

$$\tau_G = (T_G, \pi_G, G, \mathbf{R}^{2n+1})$$

of the homogeneous Riemannian manifold G in theorem 3.1, and give structure of all subspaces of $\mathbf{R}^{2n+1}$ all members of which are homogeneous vectors.

Theorem 3.3. *Let*

$$\tau_G = (T_G, \pi_G, G, \mathbf{R}^{2n+1})$$

be the tangent bundle of the homogeneous Riemannian manifold G (given in Theorem 3.1). Then all homogeneous vectors are decomposed into an n-dimensional vector subspace W of $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ and 2^n one-dimensional vector subspaces of $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ generated by all vectors of the form $X_0 \pm X_1 \pm \cdots \pm X_n$.

Proof. By Corollary 3.2 a vector w in $\mathbf{R}^{2n+1}$ is a homogeneous vector (under isomorphism), if and only if

$$A) \qquad w \in W = span(Z_1, Z_2, \cdots, Z_n),$$

$$B) \qquad w = \sum_{i=0}^{i=n} x_i X_i \quad \texttt{and} \quad x_0^2 - x_1^2 = 0, \cdots, x_0^2 - x_n^2 = 0.$$

Then all homogeneous vectors are decomposed into

A) n-dimensional vector subspace W of $\mathbf{R}^{2n+1}$ and,

B) 2^n one-dimensional vector subspaces of $\mathbf{R}^{2n+1}$ generated by all vectors of the form $X_0 \pm X_1 \pm \cdots \pm X_n$. □

The following Proposition was proved in [11].

Proposition 3.4. *A finite family $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ of homogeneous geodesics through $x_o \in M$ is orthogonal (respectively, linearly independent) if the $\mathcal{M}$-component of the corresponding homogeneous vectors are orthogonal (respectively, linearly independent).*

It is easy to see, that there exist $n+1$ linearly independent homogeneous vectors of type (B), hence the following Corollary holds.

Corollary 3.5. *Under the hypothesis of theorem 3.1.the tangent bundle*

$$\tau_G = (T_G, \pi_G, G, \mathbf{R}^{2n+1})$$

admits $2n+1$ linearly independent homogeneous geodesics through the origin $\{e\}$ of the base space of τ_G.

Acknowledgement. The author was supported by the funds of the Islamic Azad University- Tabriz Branch (IAUT). The author would like to express his appreciation to professor O. Kowalski for his invaluable suggestions and also professor M. Toomanian for his constructive comments.

Список литературы

[1] M. Božek, "Existence of generalized symmetric Riemannian spaces with solvable isometry group", Časopis Pěst. Mat. **105** (4), 336-334 (1980).

[2] R. Chavosh Khatamy and M. Toomanian, "On the homogeneity of principal bundles", Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii Mat. **38** (5), 39-46 (2003); translation in J. Contemp. Math. Anal. **38** (5), 37-45 (2004).

[3] R. Chavosh Khatamy and M. Toomanian, "On The Associated Bundles of Homogeneous Principal Bundles", Proc. of 3^{rd} Sem. of Top. and Geo. Tabriz, Iran, 33-41 (2004).

[4] R. Chavosh Khatamy and M. Toomanian, "Existence of homogeneous vectors on the fiber space of the tangent bundle", Acta Mathematica Hungarica, **116** (4), 285-294 (2007).

[5] R. Chavosh Khatamy and M. Toomanian, "Homogeneous geodesics on the solvable homogeneous principal bundles", To appear in: Proc. of 4^{th} Sem. of Top. and Geo. Uromia, Iran (2007).

[6] W. Greub, S. Halperin and R. Vanstone, "Connections, curvature, and cohomology", Academic Press, Vol. I, II (1973).

[7] S. Koboyashi and K. Nomizu, "Foundation of diffential geometry I, II", New York (1963, 1969).

[8] O. Kowalski, "Generalized symmetric spaces", Lecture notes in Math. Springer-Verlag, **805** (1980).

[9] O. Kowalski and J.Szenthe, "On the existence of homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds", Geometriae Dedicata, **84**, 331-332 (2001).

[10] O. Kowalski and L. Vanhecke, "Riemannian manifolds with homogeneous geodesics", Bull. Un.Math Ital, **5**, 189-246 (1991).

[11] O. Kowaski, S. Nikčević and Z. Vlášek, "Homogeneous geodesics in homogeneous Riemannian manifolds (examples)", Geometry and topology of submanifolds, Beijing/Berlin, World Sci. Publishing Co., (1999), River Edge., NJ 104-112 (2000).
[12] K. Nomizu, "Invariant affine connections on homogeneous spaces", Amer. J. Math., **76**, 33-65 (1954).

Поступила 16 августа 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 61-72.

ОБОБЩЕННАЯ ПРОБЛЕМА КАЦА ДЛЯ БОЗЕ ГАЗА В МНОГОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

С. ПОГОСЯН

Институт Математики НАН Армении
E-mail: *suren.poghosyan@unicam.it*

Аннотация. В статье рассматривается взаимодействующий Бозе газ в многоугольной области и изучается асимптотика логарифма статсуммы в представлении Фейнмана-Каца при бесконечном расширении области. Доказывается, что в случае отталкивающего взаимодействия со степенным убыванием на бесконечности, асимптотика логарифма статсуммы определяет площадь области, длину ее границы и константу, которая задается углами многоугольника. Этот результат представляет собой естественное обобщение известной проблемы Каца о вычислении асимптотики статсуммы $Tre^{\beta\Delta}$, где Δ - лапласиан многоугольной области с граничными условиями Дирихле.

Посвящается шестидесятипятилетию Карло Болдригини

MSC2000 number: 82B10, 82C22
Ключевые слова: Статсумма, газ Бозе, асимптотическое разложение, представление Феймана-Каца

1. Введение

Мы изучаем асимптотическое поведение логарифма большой статсуммы $\ln \Xi(\Lambda, z)$ взаимодействующего квантового газа Бозе в ограниченной области $\Lambda \subset \mathbf{R}^d$ при бесконечном расширении Λ. Эта задача изучалась в [1] для квантового газа со статистикой Максвелла-Больцмана. Для частиц заключенных в ограниченной области с гладкой границей были найдены два первых члена асимптотики. Идеальный квантовый газ со статистикой Максвелла-Больцмана был рассмотрен в [2] для ограниченных областей с гладкой и многоугольной границей. Наконец работа [3] была посвящена случаю идеального Бозе газа в ограниченной области с гладкой границей. Нужно отметить, что методы доказательств для случаев с гладкой и не гладкой границей различны. Как результат, в первом случае можно получить только три первых члена, в то время как в случае не гладких границ соответствующий метод позволяет найти все не убывающие члены асимптотики.

Цель настоящей статьи – найти асимптотику $\ln \Xi(\Lambda, z)$ для ограниченных областей Λ с многоугольной границей при $\Lambda \to \infty$. Для простоты мы рассматриваем только двумерный случай, где Λ - выпуклый многоугольник с тупыми углами. Пользуясь представлением Фейнмана-Каца для статсуммы в терминах взаимодействующих броуновских петель, мы доказываем, что при естественных ограничениях на парное взаимодействие, для малых значениях активности $z > 0$,

$$\Xi(\Lambda_R, \beta, z) = R^2|\Lambda|p(\beta, z) + R|\partial\Lambda|b(\beta, z) + c(\theta_1, \cdots, \theta_m; \beta, z) + o(1)$$

при $R \to \infty$. Здесь $\Lambda_R = R\Lambda$, $|\Lambda|$ и $\partial\Lambda$ означают площадь и периметр Λ соответственно, а константа $c(\theta_1, \cdots, \theta_m; \beta, z)$ зависит от углов Λ.

Это геометрическое разложение может быть рассмотрено в духе знаменитой проблемы Каца. В [4] он рассмотрел задачу нахождения асимптотического разложения статсуммы $Tr \exp(\beta\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta\lambda_k}$ при $\beta \to 0$, где λ_k являются собственными значениями лапласиана $-\Delta$ в ограниченной области на плоскости с граничными условиями Дирихле. В случае выпуклого многоугольника с тупыми углами, в работе [4] было доказано, что собственные значения λ_k однозначно определяют такие геометрические характеристики области, как ее площадь и периметр границы. Кац выдвинул гипотезу о том, что постоянный член ассимптотики равен $\frac{1}{6}(1 - h)$, где h означает связность области. Его метод состоял в представлении статсуммы в виде броуновского интеграла по путям с интервалом времени β, заключенным в ограниченной области. Задача, таким образом, сводилась к изучению асимптотики броуновского интеграла при $\beta \to 0$. В работе [2] была рассмотрена двойственная задача – найти асимптотику броуновского интеграла по путям с фиксированным интервалом времени β, заключенным в ограниченной области, которая стремится к бесконечности. Заметим, что логарифм статсуммы идеального Бозе газа является броуновским интегралом. Поэтому, соответствующая задача для взаимодействующего квантового газа представляет собой естественное обобщение проблемы Каца. Наш результат, в частности, означает, что потенциал взаимодействия однозначно определяет площадь и длину границы области содержащей частицы.

Наш анализ основан на кластерном представлении логарифма статсуммы и использует убывание корреляций для газа взаимодействующих броуновских петель [5].

2. Формулировка основного результата

Мы рассматриваем систему бозонов в области $\Lambda \subset \mathbf{R}^d$, $d \geq 1$, взаимодействующих с помощью парного потенциала Φ, определенного на d-мерном эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^d$. Мы предпологаем, что:

a) Φ четная, неотрицательная, непрерывная вне начала координат функция,

b) Φ обладает степенным убыванием на бесконечности:

$$\int_{\mathbf{R}^d} \Phi(u)(1+|u|)^l du < \infty$$

с $l \geq 0$, которое будет определено позже.

Пространством состояний N бозонов в Λ является гильбертово пространство $L^2_+(\Lambda^N)$ квадратично интегрируемых, комплексных функций, симметричных относительно аргументов. N-частичный гамильтониан системы представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергий

$$H_{\Lambda,N} = -\sum_{i=1}^{N} \Delta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi(u_i - u_j),$$

где Δ_i - лапласиан i-ой частицы с граничными условиями Дирихле, а $\Phi(u)$, $u \in \mathbf{R}^d$ - оператор умножения. Большая каноническая статсумма задается формулой

$$\Xi(\Lambda, z) = \sum_{N=0}^{\infty} z^N Tr e^{-\beta H_{\Lambda,N}}$$

где активность z и обратная температура β являются положительными параметрами [6], [10].

Пусть $\Lambda_R = \{Ru \mid u \in \Lambda\}$, $R \geq 1$, где Λ - многоугольная область в $\mathbf{R}^2$. Для простоты мы рассматриваем только двумерные многоугольные области Λ с $m+1$ тупыми углами $\theta_1, \cdots, \theta_m$, с вершинами $A_1, \cdots, A_m$. Мы фиксируем ориентацию Λ с помощью внутренних единичных нормалей n_j так, что n_j - нормаль к стороне $A_{j-1}A_j$, где $\langle n_j, n_{j+1} \rangle = |cos\theta_j|$, $j = 1, \cdots, m$; $m+1$ отождествлено с 1, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в $\mathbf{R}^2$.

Основным результатом настоящей статьи является:

Теорема 1. *Пусть $\Xi(\Lambda_R, z)$ – большая каноническая статсумма Бозе газа в выпуклой m-угольной области Λ_R на плоскости. Если потенциал взаимодействия Φ удовлетворяет условиям (a)-(b), тогда для всех достаточно малых z,*

удовлетворяющих условию

$$(\ln z)^{-2}\left[1+\left(\frac{\beta}{|\ln z|}\right)^{\frac{l}{2}}\right]<\frac{2^{l-1}}{\pi}\int_{\mathbf{R}^2}\Phi(u)(1+|u|)^l du\cdot\sum_{j=1}^{\infty}j^{-2},$$

имеет место следующее разложение:

$$\Xi(\Lambda_R,\beta,z)=R^2|\Lambda|p(\beta,z)+R\sum_{j=1}^{m}|A_{j-1}A_j|b_{n_j}(\beta,z)+ \tag{2.1}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}c_{n_j,n_{j+1}}(\beta,z)+o(1),\quad \textit{при } R\to\infty,$$

где вклад угла θ_j имеет вид:

$$c_{n_j,n_{j+1}}(\beta,z)=\int_0^{\theta_j}d\varphi\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)+\int_{\pi-\theta_j}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi c_{n_j}(\varphi,\beta,z)+ \tag{2.2}$$

$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_j}d\varphi c_{n_{j+1}}(\varphi,\beta,z),\ j=1,\dots,m.$$

Здесь $\beta p(\beta,z)$ представляет собой давление, определенное ниже формулой (3.15), $|A_{j-1}A_j|$ - длина стороны $A_{j-1}A_j$, а величины $b_{n_j}(\beta,z)$, $c_{n_j}(\varphi,\beta,z)$ и $\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)$ определены явно в терминах броуновских интегралов формулами (3.17), (3.20) и (3.24) соответственно.

Если взаимодействие Φ инвариантно относительно вращения, то разложение (2.1) принимает более простой вид. Величины $b_{n_j}(\beta,z)$, $c_{n_j}(\varphi,\beta,z)$ не зависят более от ориентации нормалей n_j и могут быть выражены с помощью фиксированого единичного вектора e. Подобным образом, величина $\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)$ не зависит от ориентации соответствующего угла θ_j. Поэтому этот угол может быть определен с помощью пары единичных векторов $e_1(\theta_j),e_2(\theta_j)$, ортогональных сторонам угла и удовлетворяющих равенству $\langle e_1(\theta_j),e_2(\theta_j)\rangle=|cos\theta_j|$.

Следствие 1. *Если вдобавок к условиям Теоремы 1 взаимодействие* Φ *является инвариантным относительно вращений, то*

$$\Xi(\Lambda_R,\beta,z)=R^2|\Lambda|p(\beta,z)+R|\partial\Lambda|b_e(\beta,z)+\sum_{j=1}^{m}c(\theta_j,\beta,z)+o(1)$$

при $R\to\infty$, c

$$c(\theta_j,\beta,z)=\int_0^{\theta_j}d\varphi\hat{c}_{e_1(\theta_j),e_2(\theta_j)}(\varphi,\beta,z)+\int_{\pi-\theta_j}^{\theta_j}d\varphi c_e(\varphi,\beta,z). \tag{2.3}$$

Здесь $b_e(\beta,z)$, $c_e(\varphi,\beta,z)$ и $\hat{c}_{\theta_j}$ заданы ниже формулами (3.26)-(3.28) соответственно.

3. Доказательство Теоремы

Формула Фейнмана-Каца дает явное представление ядра интегрального оператора $e^{-\beta H_{\Lambda,N}}$ в терминах условной меры Винера $P_\beta^{u,v}$ для плоских броуновских траекторий $x(t)$, начинающихся в u при $t=0$ и оканчивающихся в v при $t=\beta$. Каноническая статсумма принимает вид:

$$Tre^{-\beta H_{\Lambda,N}} = \frac{1}{N!}\sum_{\pi\in S_N}\int_{\Lambda^N} du_1\cdots du_N \int P_\beta^{u_1,u_{\pi(1)}}(dx_1)\cdots P_\beta^{u_N,u_{\pi(N)}}(dx_N)\times$$

$$\times\prod_{i=1}^{N} 1_{\mathcal{X}(\Lambda)}(x_i)\exp\left\{-\sum_{1\le i<j\le N}\int_0^\beta \Phi(x_i(t)-x_j(t))dt\right\}, \tag{3.1}$$

где 1_A - индикатор множества A, S_N - группа перестановок N элементов. Формулу Фейнмана-Каца для квантового Бозе газа и различных статсумм можно найти в [6].

Мы запишем большую статсумму в терминах так называемых сложных петель. Пусть

$$\mathcal{X}_{j\beta} = \left\{X\in C([0,j\beta],\mathbf{R}^2) \;\middle|\; X(0)=X(j\beta)\right\}$$

- множество всех непрерывных траекторий в $\mathbf{R}^2$ с одним и тем же началом и концом. В топологии равномерной сходимости $\mathcal{X}_{j\beta}$ является полным сепарабельным метрическим пространством с борелевской σ-алгеброй $\mathcal{B}_{j\beta}$. Элементы $\mathcal{X}_{j\beta}$ мы называем сложными петлями длины $j\beta$ [5], [6] (часто называемых также вьющимися петлями с числом витков j [7]). Через $\mathcal{X}_{j\beta}^u$ мы будем обозначать множество сложных петель с началом в $u\in\mathbf{R}^2$. На $\mathcal{X}_{j\beta}^u$ мы рассматриваем не нормированную меру $P_{j\beta}^u$ броунского моста с общей массой $(2\pi j\beta)^{-1}$. Пусть $\mathcal{X}=\bigcup_{j=1}^\infty \mathcal{X}_{j\beta}$ и пусть σ-алгебра $\mathcal{B}$ определена равенством

$$\mathcal{B}=\{B\subset\mathcal{X} \;\middle|\; B\cap\mathcal{X}_{j\beta}\in\mathcal{B}_{j\beta},\ j=1,2,\ldots\}.$$

На измеримом пространстве $(\mathcal{X},\mathcal{B})$ рассмотрим меру ρ_z, заданную с помощью равенства

$$\int_{\mathcal{X}}\rho_z(dX)h(X) = \int_{\mathbf{R}^2} du\int_{\mathcal{X}^u} P_z^u(dX^u)h(X^u) \tag{3.2}$$

для любой измеримой функции $h:\mathcal{X}\to[0,\infty)$, где мера P_z^u определена на $\mathcal{X}^u$ с помощью $P_z^u=\sum\limits_{j=1}^\infty \frac{z^j}{j}P_{j\beta}^u$. Заметим, что P_z^u конечна для $0<z\le 1$.

Далее, пользуясь разложением в циклы перестановки $\pi \in S_N$, после некоторых комбинаторных выкладок, находим желаемое представление большой статсуммы

$$\Xi(\Lambda_R, \beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{X}^n} \rho_z(dX_1) \cdots \rho_z(dX_n) e^{U(X_1, \cdots, X_n)}, \tag{3.3}$$

где энергия $U(X_1, \cdots, X_n)$ конфигурации сложных петель $X_1, \cdots, X_n$ является суммой $U_1(X)$ и $U_2(X, Y)$, $X, Y \in \mathcal{X}$, где

$$U_1(X) = \sum_{0 \le i < k \le j-1} \int_0^\beta \Phi(X(t + i\beta) - X(t + k\beta))dt, \;\; X \in \mathcal{X}_{j\beta}, \tag{3.4}$$

$$U_2(X, Y) = \sum_{0 \le i \le j-1} \sum_{0 \le k \le l-1} \int_0^\beta \Phi(X(t + i\beta) - Y(t + k\beta))dt, X \in \mathcal{X}_{j\beta}, Y \in \mathcal{X}_{l\beta}.$$

Имея пространство $(\mathcal{X}, \mathcal{B}, \rho_z)$, которое является одночастичным пространством газа Бозе в представлении Фейнмана-Каца, мы определяем пространство $\mathcal{M}$ конечных конфигураций петель в $\mathbf{R}^2$: $\mathcal{M} = \{\omega \subset \mathcal{X} \;\big|\; |\omega| < \infty\}$, где $|\cdot|$ означает число элементов конечного множества. На пространстве $\mathcal{M}$ с канонической σ-алгеброй $\mathfrak{M}$ (см. [5], [8]) мы задаем σ-конечную меру W_{ρ_z} равенством

$$\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) h(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{X}^n} \rho_z(dX_1) \cdots \rho_z(dX_n) h(X_1, \cdots, X_n) \tag{3.5}$$

для любой измеримой функции $h : \mathcal{M} \to [0, \infty)$. Ограничение $W_{\rho_z, \Lambda}$ меры W_{ρ_z} на $\mathcal{M}(\Lambda)$ является конечной мерой при любом ограниченном Λ, где $\mathcal{M}(\Lambda) = \{\omega \in \mathcal{M} \;\big|\; \forall X \in \omega \cap \mathcal{X}_{j\beta}, X(t) \in \Lambda, \forall t \in [0, j\beta]\}$.

В этих новых обозначениях (3.3) можно переписать как:

$$\Xi(\Lambda_R, \beta, z) = \int_{\mathcal{M}(\Lambda)} W_{\rho_z, \Lambda}(d\omega) e^{U(\omega)}. \tag{3.6}$$

Из кластерного разложения логарифма статсуммы [5], [8] следует, что

$$\ln \Xi(\Lambda_R, \beta, z) = \int_{\mathcal{M}(\Lambda_R)} W_{\rho_z, \Lambda} d(\omega) g(\omega) = \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z} d(\omega) g(\omega) 1_{\mathcal{M}(\Lambda_R)}(\omega), \tag{3.7}$$

где g – функция Урселла, заданная с помощью равенства

$$g(\omega) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{con}(\omega)} \prod_{(X,Y) \in \gamma} U_2(X, Y), \text{ если } |\omega| \ge 2, \;\; g(\omega) = 1, \text{ если } |\omega| = 1. \tag{3.8}$$

Здесь U_2 то же, что и в (3.4), $\Gamma_{con}(\omega)$ – множество (неориентированных) простых связных графов с множеством вершин ω, а произведение берется по всем ребрам графа γ.

Чтобы виделить точку из конфигурации ω, мы используем известное равенство [5], [9]

$$\int_{\mathcal{M}} F(\mu) \sum_{\omega\subset\mu} h_1(\omega)h_2(\mu\setminus\omega)W_\rho(d\mu) \tag{3.9}$$

$$= \int_{\mathcal{M}}\int_{\mathcal{M}} F(\mu_1\cup\mu_2)h_1(\mu_1)h_2(\mu_2)W_\rho(d\mu_1)W_\rho(d\mu_2),$$

справедливое при условии, что функции F, h_1 и h_2 неотрицательны или когда хотя бы одна из сторон абсолютно сходится. Тогда (3.7) можно записать как

$$\ln\Xi(\Lambda_R,\beta,z) = \int_{\mathcal{X}} \rho_z(dX)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X\}\cup\omega)1_{\mathcal{M}(\Lambda_R)}(\{X\}\cup\omega) \tag{3.10}$$

$$= \int_{\Lambda_R} du\int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X^0+u\}\cup\omega)1_{\mathcal{M}(\Lambda_R)}(\{X^0+u\}\cup\omega).$$

Обозначим вершины выпуклого m-угольника Λ_R через $A_{R,1},\cdots,A_{R,m}$, и определим функцию H равенством $H(t)=1_{[0,+\infty)}(t),\ -\infty<t<\infty$. Тогда $1_{\mathcal{M}(\Lambda_R)}(\omega) = \prod_{j=1}^m H(\inf\langle\omega,n_j\rangle)$, где $\inf\langle\omega;n_j\rangle = \min_{X\in\omega}\inf_t\langle X(t);n_j\rangle$. Отсюда, с помощью тождества $H(t)=1-H(-t)$, получаем

$$1_{\mathcal{M}(\Lambda_R)}(\{X^0+u\}\cup\omega) = \sum_{J\subset\{1,\cdots,m\}}(-1)^{|J|}\prod_{j\in J}H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_j\rangle).$$

Подставляя это в (3.10), находим

$$\ln\Xi(\Lambda_R,\beta,z) = \int_{\Lambda_R} du\int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X^0+u\}\cup\omega)$$

$$-\sum_{j=1}^m\int_{\Lambda_R} du\int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X^0+u\}\cup\omega)$$

$$\times H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_j\rangle)+\sum_{j=1}^m\int_{\Lambda_R} du\int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)$$

$$\times g_1(\{X^0+u\}\cup\omega)H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_j\rangle)H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_{j+1}\rangle)$$

$$+I'(R,z)\equiv I^A(R,z)+\sum_{j=1}^m I_j^B(R,z)+\sum_{j=1}^m I_j^C(R,z)+I'(R,z), \tag{3.11}$$

где

$$I'(R,z) = \sum_{J\subset\{1,\cdots,m\},|J|\geq 3}(-1)^{|J|}\int_{\Lambda_R} du\int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)$$

$$\times g_1(\{X^0+u\}\cup\omega)\prod_{j\in J}H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_j\rangle). \tag{3.12}$$

Заметим, что те конфигурации, которые дают вклад в $I'(R,z)$ содержат петли пересекающие по крайней мере две несмежные стороны. Следовательно, мы

сможем оценить этот член с помощью Следствия 4 из [5] (см. также [1]), которое утверждает, что в условиях Теоремы 1 существует константа $C = C(\Phi, \beta, z)$ такая, что

(3.13)
$$\int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) 1_{\mathcal{M}^c(B_R(u))}(\{X^0 + u\} \cup \omega) \cdot |g_1(\{X^0 + u\} \cup \omega)| \leq \frac{C}{(1+R)^l}$$

равномерно по $u \in \mathbf{R}^d$. Здесь $B_R(u)$ – шар радиуса R с центром в $u \in \mathbf{R}^d$, а A^c означает дополнение множества A.

Ниже мы полагаем, что Φ удовлетворяет условию (b) с $l > 2$. Тогда с помощью (3.13) легко найти, что $I'(R, z) = o(1)$ при $R \to \infty$.

Пользуясь трансляционной инвариантностью g_1, W_{ρ_z} и $\mathcal{M}$, имеем

$$I^A(R, z) = R^d |\Lambda| \beta p(\beta, z), \tag{3.14}$$

где давление $p(\beta, z)$ имеет следующее кластерное представление

$$p(\beta, z) = \beta^{-1} \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) g_1(\{X^0 + u\} \cup \omega). \tag{3.15}$$

Сходимость интеграла в правой части (3.15) прямо следует из Леммы 4 в [5] (см. также Теорему 2.1 в [8]).

Зафиксируем произвольное j, $1 \leq j \leq m$, и рассмотрим член $I_j^b(R, z)$, заданный с помощью (3.11). Рассмотрим соответствующую сторону $A_{R,j-1}A_{R,j}$ между вершинами углов θ_{j-1} и θ_j. Здесь и ниже 0 отождесвляется с m так, что $A_{R,0} = A_{R,m}$, $\theta_0 = \theta_m$. Выберем координаты u_1, u_2 с u_1 вдоль стороны $A_{R,j-1}A_{R,j}$ и u_2 вдоль нормали n_j так, что координаты вершин $A_{R,j-1}$ и $A_{R,j}$ будут $(Ra_{j-1}, 0)$ и $(Ra_j, 0)$ соответственно. Рассмотрим три непересекающиеся области в Λ_R: прямоугольник D_j с высотой δR ($\delta = \delta(\Lambda)$ фиксировано) и длиной $R(a_j - a_{j-1})$ и два сектора $S_1(j-1)$ и $S_2(j)$ радиуса δR и углами $\theta_{j-1} - \frac{\pi}{2}$ и $\theta_j - \frac{\pi}{2}$ соответственно. Тогда из неравенства (3.13) следует разложение:

$$\begin{aligned} I_j^B(R, z) = &- \int_{S_1(j-1)} du \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) g_1(\{X^0 + u\} \cup \omega) \\ &\times H(-\inf\langle \{X^0 + u\} \cup \omega, n_j \rangle) - \int_{D_j} du \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) \\ &\times g_1(\{X^0 + u\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + u\} \cup \omega, n_j \rangle) - \int_{S_2(j)} du \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \\ &\times \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) g_1(\{X^0 + u\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + u\} \cup \omega, n_j \rangle) + o(1) \\ &= I^B_{S_1(j-1)}(R, z) + I^B_{D_j}(R, z) + I^B_{S_2(j)}(R, z) + o(1) \end{aligned} \tag{3.16}$$

при $R \to \infty$. Величина $I^B_{D_j}(R,z)$ дает вклад в граничный член, в то время как $I^B_{S_1(j-1)}(R,z)$ и $I^B_{S_2(j)}(R,z)$ дают вклад в константу.
Поскольку $D_j = \{(u_1,u_2) \in \Lambda \mid Ra_{j-1} \le u_1 \le Ra_j,\ 0 \le u_2 \le \delta R\}$, мы получаем

$$I^B_{D_j}(R,z) = -\int_{Ra_{j-1}}^{Ra_j} du_1 \int_0^{\delta R} du_2 \int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)$$
$$\times g_1(\{X^0 + (u_1,u_2)\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + (u_1,u_2)\} \cup \omega, n_j\rangle)$$
$$= \int_{Ra_{j-1}}^{Ra_j} du_1 b_{n_j}(u_1,\beta,z) + o(1),$$

где

$$b_{n_j}(u_1,\beta,z) = -\int_0^\infty du_2 \int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) \tag{3.17}$$
$$\times g_1(\{X^0 + (u_1,u_2)\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + (u_1,u_2)\} \cup \omega, n_j\rangle).$$

Теперь заметим, что $\inf\langle \{X^0 + (u_1,u_2)\} \cup \omega, n_j\rangle = \inf\langle \{X^0 + (0,u_2)\} \cup \omega, n_j\rangle$. Следовательно функции g_1 и H не зависят от u_1, и поэтому, в силу трансляционной инвариантности W_{ρ_z}, величина $b_{n_j}(u_1,\beta,z)$ не зависит от u_1.

Таким образом,

$$I^B_{D_j}(R,z) = R(a_j - a_{j-1}) b_{n_j}(\beta,z) + o(1) \tag{3.18}$$

с $b_{n_j}(\beta,z) \equiv b_{n_j}(0,\beta,z)$, заданным формулой (3.17).
Теперь рассмотрим сектор $S_1(j-1)$. Пользуясь полярными координатами с центром в $A_{R,j-1}$ имеем $S_1(j-1) = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le \delta R, \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \theta_{j-1}\}$, где угол φ измеряется со стороны $A_{R,j-1}A_{R,j}$. Поэтому, с помощью равенства (3.13), мы получаем

$$I^B_{S_1(j)}(R,z) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{j-1}} d\varphi \int_0^{\delta R} dr \int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) \tag{3.19}$$
$$\times g_1(\{X^0 + (r,\varphi)\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + (r,\phi)\} \cup \omega, n_j\rangle) =$$
$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_{j-1}} d\varphi c_{n_j}(\varphi,\beta,z) + o(1),$$

где

$$c_{n_j}(\varphi,\beta,z) = -\int_0^\infty dr \int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) \tag{3.20}$$
$$\times g_1(\{X^0 + (r,\varphi)\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + (r,\varphi)\} \cup \omega, n_j\rangle).$$

Заметим, что в силу трансляционной инвариантности, $c_{n_j}(\varphi,\beta,z)$ инвариантно относительно сдвигов центра полярных координат на произвольный вектор $a = (a_1,0)$.

Подобным образом, находим, что

$$I^B_{S_2(j)}(R,z)=\int_{\pi-\theta_j}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi c_{n_j}(\varphi,\beta,z)+o(1) \tag{3.21}$$

есть вклад сектора $S_2(j)$ с $c_{n_j}(\varphi,\beta,z)$ заданным формулой (3.20). Комбинируя (3.18)-(3.21) находим, что

$$\sum_{j=1}^m I^B_j(R,z)=R\sum_{j=1}^m (a_j-a_{j-1})b_{n_j}(u_1,\beta,z)+ \tag{3.22}$$

$$+\sum_{j=1}^m\left\{\int_{\pi-\theta_j}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi c_{n_j}(\varphi,\beta,z)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_j} d\varphi c_{n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)\right\}+o(1).$$

Теперь исследуем величину $I^C_j(R,z)$ из (3.11), $1\le j\le m$. Рассмотрим угол θ_j с вершиной $A_{R,j}$. Пусть угол θ_j измеряется со стороны $A_{R,j}A_{R,j+1}$ с внутренней нормалью n_{j+1} . Пусть S_j – сектор в Λ_R радиуса δR, с углом θ_j и вершиной $A_{R,j}$. Выбирая u_1-ось вдоль $A_{R,j}A_{R,j+1}$ и u_2-ось вдоль нормали n_{j+1}, в силу (3.13), находим

$$I^C_j(R,z)=\textstyle\int_{S_j} du\int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X^0+u\}\cup\omega)$$
$$\times H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_j\rangle)H(-\inf\langle\{X^0+u\}\cup\omega,n_{j+1}\rangle))+o(1).$$

Используя полярные координаты (r,φ) с центром в $A_{R,j}$, мы можем переписать это как

$$I^C_j(R,z)=\int_0^{\theta_j} d\varphi\int_0^\infty dr\int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X^0+(r,\varphi)\}\cup\omega)$$

$$\times H(-\inf\langle\{X^0+(r,\varphi)\}\cup\omega,n_j\rangle)H(-\inf\langle\{X^0+(r,\varphi)\}\cup\omega,n_{j+1}\rangle))+o(1) \tag{3.23}$$

$$=\int_0^{\theta_j} d\varphi\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)+o(1),$$

где

$$\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)=\int_0^\infty dr\int_{\mathcal{X}^0} P^0_z(dX^0)\int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega)g_1(\{X^0+(r,\varphi)\}\cup\omega) \tag{3.24}$$

$$\times H(-\inf\langle\{X^0+(r,\varphi)\}\cup\omega,n_j\rangle)H(-\inf\langle\{X^0+(r,\varphi)\}\cup\omega,n_{j+1}\rangle)).$$

Чтобы найти постоянный член разложения (2.3), необходимо собрать вклады всех углов из формул (3.22) и (3.23):

(3.25)

$$c_{n_j,n_{j+1}}(\beta,z)=\int_0^{\theta_j} d\varphi\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}(\varphi,\beta,z)+\int_{\pi-\theta_j}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi c_{n_j}(\varphi,\beta,z)+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta_j} d\varphi c_{n_{j+1}}(\varphi,\beta,z),$$

где c_{n_j} и $\hat{c}_{n_j,n_{j+1}}$ определены формулами (3.20) и (3.24) соответственно. Теорема доказана. □

Если трансляционно инвариантное взаимодействие Φ является вдабавок инвариантным относительно вращений, то, поскольку P_z^0 и W_{ρ_z} также являются инвариантными относительно вращений, величины $b_{n_j}(\beta, z)$ и $c_{n_j}(\varphi, \beta, z)$ не зависят от n_j. Зафиксируем произвольный единичный вектор $e \in \mathbf{R}^2$. Выберем декартовые координаты (u_1, u_2) с u_2 вдоль e и положим

$$b_e(\beta, z) = -\int_0^\infty du_2 \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) \tag{3.26}$$

$$\times g_1(\{X^0 + (0, u_2)\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + (0, u_2)\} \cup \omega, e\rangle).$$

Подобным образом, выаражая все члены c_{n_j}, заданные формулой (3.20), через фиксированный вектор e, находим

$$c_e(\varphi, \beta, z) = -\int_0^\infty dr \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) \tag{3.27}$$

$$\times g_1(\{X^0 + (r, \varphi)\} \cup \omega) H(-\inf\langle \{X^0 + (r, \varphi)\} \cup \omega, e\rangle).$$

Наконец, поскольку члены $c_{n_j, n_{j+1}}$ из (3.24) не зависят от ориентаций n_j, n_{j+1}, а зависят только от значения θ_j соответствующего угла, мы можем выразить их через произвольную фиксированную пару единичных векторов $e_1(\theta_j)$, $e_2(\theta_j) \in \mathbf{R}^2$ с $\langle e_1(\theta_j), e_2(\theta_j)\rangle = |cos\theta_j|,\ j = 1, \cdots, m$.

Пусть

$$\hat{c}_{\theta_j}(\varphi, \beta, z) = \int_0^\infty dr \int_{\mathcal{X}^0} P_z^0(dX^0) \int_{\mathcal{M}} W_{\rho_z}(d\omega) g_1(\{X^0 + (r, \varphi)\} \cup \omega) \tag{3.28}$$

$$\times H(-\inf\langle \{X^0 + (r, \varphi)\} \cup \omega, e_1(\theta_j)\rangle) H(-\inf\langle \{X^0 + (r, \varphi)\} \cup \omega, e_2(\theta_j)\rangle)).$$

Чтобы получить (2.3), остается заменить в (2.2) члены c_{n_j} и $\hat{c}_{n_j, n_{j+1}}$ величинами $c_e(\varphi, \beta, z)$ и $\hat{c}_{\theta_j}(\varphi, \beta, z)$ соответственно. Теперь, чтобы завершить докозательство Следствия, остается вставить в формулу (2.1) вместо величин b_{n_j} величины b_e.

Автор приносит благодарность Г. Цессину за полезные обсуждения.

Abstract. The paper considers interacting Bose gas in a polygonal domain and studies the asymptotics of the log-partition function in its Feynman-Kac representation as this domain is delated to infinity. We prove that for repulsive interaction with power decay at infinity the asymptotics of the log-partition function determines the area of the domain, the length of its boundary and the constant term which is defined by the angles of the polygon. This is a natural generalization of the Kac's famous problem of computing the asymptotics of the partition function $Tre^{\beta\Delta}$ where Δ is the Dirichlet Laplacian for a polygonal domain.

Список литературы

[1] S. Poghosyan, H. Zessin, "Asymptotic expansion of the log-partition function for a gas of interacting Brownian loops", Journal of Mathematical Physics, **48**, 093301 (2007).
[2] N. Macris, P. A. Martin, J. V. Pule, "Large volume asymptotics of Brownian integrals and orbital magnetism", Ann. Inst. Henry Poincare, **66** (2), 147 - 183 (1997).
[3] S. Frigio, S. Poghosyan, "Asymptotics of Brownian integrals and pressure: Bose-Einstein statistics", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **42** (3), 23 - 38 (2007).
[4] M. Kac, "Can one hear the shape of a drum", Amer. Math. Monthly, **73**, 1 - 23 (1966).
[5] S. Poghosyan, "Strong cluster properties of Ginibre gas. Quantum statistics", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **40** (4), 57 - 80 (2005).
[6] J. Ginibre, "Some applications of functional integration in statistical mechanics", in Statistical mechanics and quantum field theory, Les Houches Ed. by C. De Witt and R. Stora, 327 - 427 (1971).
[7] D. Ueltschi, "Cluster expansions and correlation functions", Moscow Math. J., **4**, 511 - 522 (2004); math-ph/0304003.
[8] S. Poghosyan, D. Ueltschi, "Abstract cluster expansion with applications to statistical mechanical systems", Journal of Mathematical Physics, **50**, 053509 (2009).
[9] V. A. Malyshev, R. A. Minlos, "Gibbs random fields. Cluster expansions", in Mathematics and its applications (Soviet series), **44**, Kluwer Academic Publishers (1991).
[10] D. Ruelle, "Statistical mechanics: Rigorous results", World Scientific (1969)

Поступила 7 декабря 2008

Известия НАН Армении. Математика, том 45, н. 1, 2010, стр. 73-86.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ С ИНТЕРПОЛЯЦИЕЙ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ ТЕЙЛОРА

Р. М. Тригуб[1]

Донецкий государственный университет, Украина
E-mail: *postmaster@ok.donbass.com*

Аннотация. Рассмотрен вопрос о порядке приближения периодических функций тригонометрическими полиномами с интерполяцией в произвольной системе узлов и указан способ построения эрмитовских интерполяционных полиномов.

MSC2000 numbers: 41A05, 42A15, 41A44

Ключевые слова: лагранжевский и эрмитовский интерполяционные тригонометрические полиномы, наилучшее приближение, критерий Чебышева, прямая теорема Джексона, неравенства Маркова и Бернштейна, эрмитовский сплайн.

1. ВВЕДЕНИЕ, ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Как следует из теоремы П. Л. Чебышева об альтернансе, тригонометрический полином наилучшего приближения порядка n любой вещественной непрерывной периодической функции является интерполяционным (лагранжевским) полиномом по некоторой системе из $(2n+1)$ узлов на периоде, зависящей от функции. Известно также, что при любой системе узлов интерполяционные полиномы по этой системе не сходятся при $n \to \infty$ на всём пространстве непрерывных периодических функций, так как нормы таких линейных операторов растут не медленнее $\log n$ (логарифмический рост имеет место при равноотстоящих узлах интерполяции).

Д. Джексон построил полиномы, которые интерполируют функцию в n равноотстоящих узлах на периоде и сходятся равномерно к ней при $n \to \infty$. Порядок

[1]Работа поддержана Фондом фундаментальных исследований Украины (F25)

такого полинома равен n, т.е. примерно в два раза больше порядка лагранжевского интерполяционного полинома. С. Н. Бернштейн при любом $\epsilon > 0$ указал полиномы интерполяционного типа (при тех же равноотстоящих узлах) порядка в $(1+\epsilon)$ раз больше лагранжевского. См. [1], гл. 10, а также, напр. [2].

В следующей теореме узлы произвольные, а соответствующее неравенство о сравнении с наилучшим приближением - точное в некотором смысле. См. также ниже лемму 4.

Далее $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$, $C(\mathbb{T})-$ пространство непрерывных 2π-периодических комплекснозначных функций, $||\cdot||-$ sup-норма в $C(\mathbb{T})$ и

$$\tau_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \hat{\tau_n}(k) e^{ikx}$$

(тригонометрический полином порядка не выше n).

Через $\gamma(\cdot,\cdot)$, возможно с разными индексами, будем обозначать некоторые положительные величины, зависящие только от аргументов в круглых скобках.

Теорема 1. *Для любой системы узлов $\Pi = \{x_s\}_1^m \subset [-\pi, \pi)$ и любого $\epsilon > 0$ можно указать число $N = N(\epsilon, \Pi)$ такое, что при $n \geq N$ для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ можно построить полином τ_n порядка не выше n, удовлетворяющий условиям*

$$||f - \tau_n|| \leq (2+\epsilon) E_n^T(f), \quad \tau_n(x_s) = f(x_s), \quad 1 \leq s \leq m,$$

где

$$E_n^T(f) = \min_{\{c_k\}} \max_x |f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}|$$

наилучшее приближение f тригонометрическими полиномами порядка не выше n. При этом ни при одном n нельзя множитель $(2+\epsilon)$ заменить на $(2-\epsilon)$.

Аналогичный результат справедлив для интерполяции алгебраическими полиномами непрерывных на отрезке функций. Этот результат в случае отрезка $[-1, 1]$ сразу следует из теоремы 1 после стандартной замены $t = \cos x$.

Рассмотрим теперь эрмитовскую интерполяцию, когда в данной системе узлов полином интерполирует функцию, а его производные - соответствующие производные функции. Начнём с одного узла и найдём тригонометрический полином наименьшего порядка с условием

$$\tau^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0), \qquad 0 \leq \nu \leq r$$

(тригонометрический полином Тейлора). Его естественно искать в виде

$$\sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(0)h_{k,r}(x), \quad h_{k,r}(x) = \frac{x^k}{k!} + O(x^{r+1}) \quad (x \to 0) \tag{1.1}$$

($h_{k,r}-$ полином порядка не выше $\frac{r+1}{2}$).

Явный вид (две формулы) и свойства $h_{k,2n}$ $(n \in Z_+)$ приведены ниже (см. Лемму 1 и $\alpha - \delta$). Эти полиномы при чётном $r = 2n$ в отличие от нечётного r определяются однозначно. А при нечётном r полагаем $h_{0,r} \equiv 1$ и $h_{k,r} = h'_{k+1,r+1}$ при $k \geq 1$.

Теорема 2. *a) Для любой функции $f \in C^{2n}(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x \in [-\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}]$ существует $\theta \in [0,1]$ такое, что*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)h_{k,2n}(x) + [D_{2n}f(\theta x) - D_{2n}f(0)]h_{2n,n}(x),$$

где $D_{2n}f(x) = q_n(\frac{d^2}{dx^2}f(x))$ при $q_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(x+k^2)$.

b)Для любой функции $f \in C^r(\mathbb{T})$ $(r \in \mathbb{N})$ существует тригонометрический полином h_f порядка не выше $[\frac{r+1}{2}]$ (целая часть) такой, что для всех $x \in \mathbb{R}$ и целых $\nu \in [0,r]$ (ω-модуль непрерывности)

$$|f^{(\nu)}(x) - h_f^{(\nu)}(x)| \leq \gamma(r)\omega(f^{(r)};\pi)|\sin\frac{x}{2}|^{r-\nu}.$$

Переход от одного узла к эрмитовской интерполяции с любой системой узлов см.ниже перед Леммой 2.

Теоремы 1 и 2 (в несколько более слабой форме) анонсированы в статье [3]. Там же найдена общая оценка сверху приближения функции $f \in C^r(\mathbb{T})$ полиномами с учётом положения точки и эрмитовской интерполяцией. Аналогичная теорема о приближении алгебраическими полиномами есть в [2], 4.8.10.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1 И 2

Спектром функции $f \in L(\mathbb{T})$ называют множество номеров ее коэффициентов Фурье $\hat{f}(k)$, которые не равны нулю. Приведем сначала простые свойства полиномов, которые используется далее.

I. Полином $\tau(z) = \sum_{k=p}^{n} \hat{\tau}(k)e^{ikz}$ с условием $n \geq p$ и $\hat{\tau}(p)\hat{\tau}(n) \neq 0$ имеет в полосе $\Re z \in [a, a+2\pi)$ $(a \in \mathbb{R})$ ровно $n-p$ нулей (с учётом кратностей).

II. Для любого набора различных точек $\{z_\nu\}, 1 \leq \nu \leq k$ в указанной в утверждении I полосе и натуральных чисел $\{r_\nu\}, 1 \leq \nu \leq k$ с условием $\sum_{\nu=1}^{k} r_\nu = n-p+1$, для

любого набора комплексных чисел $\{y(s)\}$, $0 \le s \le n-p$ существует единственный полином τ со спектром в $[p,n]$, удовлетворяющий условиям (см., например, [2]):

$$\tau^{(s)}(z_\nu) = y(\sum_{q=0}^{\nu-1} r_q + s) \quad (1 \le \nu \le k, 0 \le s \le r_\nu - 1).$$

Начнём с доказательства Теоремы 2. При чётном $r = 2n$ полином $h_{k,2n}$ порядка не выше n условием (1.1), т.е. по производным $h_{k,2n}^{(\nu)}(0)$ $(0 \le \nu \le 2n)$, определяется однозначно. Поэтому

$$h_{k,2n}(-x) = (-1)^k h_{k,2n}(x), \quad h_{2k-1,2n}(x) = h'_{2k,2n}(x).$$

Кроме того, легко видеть, что

$$h_{0,2n}(x) \equiv 1, \quad h_{2n,2n}(x) = \frac{2^n}{(2n)!}(1-\cos x)^n$$

и при $k \in \mathbb{N}$

$$h'_{2k-1,2n}(x) = h_{2k-2,2n}(x) - c_{k,n} h_{2n,2n}(x),$$

где числовой множитель $c_{k,n}$ определяется однозначно, если учесть, что интеграл от h' по периоду равен нулю. Это рекуррентные формулы: по $h_{2n,2n}$ можно найти $h_{2n-1,2n}$, $h_{2n-2,2n}$ и т.д.

Приведем явные формулы для $h_{k,2n}$.

Лемма 1. *a) Если* $q_n(x) = \prod_{\nu=1}^{n}(x+\nu^2) = \sum_{s=0}^{n} a_{s,n}x^s$, *то*

$$h_{k,2n}(x) = \sum_{[\frac{k+1}{2}] \le s \le n} a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x).$$

b) $h_{2k-1,2n}(x) = h'_{2k,2n}(x)$, *а при* $0 \le k \le n$

$$h_{2k,2n}(x) = \sum_{s=k}^{n} b_{s,k}(1-\cos x)^s, b_{s,k} = \frac{2^{2k-s}}{(2k)!(2s)!} \cdot \frac{d^{2s}}{dx^{2s}}\{(\arcsin x)^{2k}\}_{x=0}.$$

Доказательство. а) Так как $a_{n,n} = 1$, то $h_{2n,2n}$- тот же полином. Нужно проверить,что $h_{k,2n}$ удовлетворяет условию (1.1). Имеем

$$h'_{k,2n}(x) = \sum_{s=[\frac{k+1}{2}]}^{n} a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k+1)}(x),$$

откуда $h'_{k,2n}(x) = h_{k-1,2n}(x)$ при чётном k $(1 \le k \le 2n)$, а при нечётном k

$$h'_{k,2n}(x) = \sum_{s=[\frac{k}{2}]}^{n} a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k+1)}(x) - a_{\frac{k-1}{2},n} h_{2n,2n}(x) = h_{k-1,2n}(x) - a_{\frac{k-1}{2},n} h_{2n,2n}(x).$$

Найдём по указанной формуле $h_{0,2n}$.

Так как оператор $\frac{d^2}{dx^2}+n^2$ понижает порядок полинома τ_n порядка n и умножает свободный член $\hat{\tau}_n(0)$ на n^2, то

$$h_{0,2n}(x)=\sum_{s=0}^{n}a_{s,n}h_{2n,2n}^{(2s)}(x)=\prod_{\nu=1}^{n}(\frac{d^2}{dx^2}+\nu^2)h_{2n,2n}(x)=(n!)^2\hat{h}_{2n,2n}(0).$$

Но

$$\hat{h}_{2n,2n}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h_{2n,2n}(x)dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{4^{n+1}}{(2n)!}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}u\,du=\frac{1}{(n!)^2}.$$

Так что $h_{0,2n}(x)\equiv 1$. Теперь индукцией по k (от $k-1$ к k) легко получить

$$h_{k,2n}(x)=\frac{x^k}{k!}+O(x^{2n+1+\frac{1+(-1)^k}{2}})\quad(x\to 0, 0\le k\le 2n).$$

b) Любой чётный тригонометрический полином можно представить в указанном виде. Нужно только определить коэффициенты $b_{s,k}$.

После замены $\sin\frac{x}{2}=y$ при $y\to 0$ $h_{2k,2n}$ должен вести себя так:

$$\sum_{s=k}^{n}b_{s,k}\cdot 2^s\cdot y^{2s}=\frac{(2\arcsin y)^{2k}}{(2k)!}+O(y^{2n+2}).$$

А это возможно лишь в случае

$$b_{s,k}\cdot 2^s\cdot(2s)!=\frac{4^k}{(2k)!}\cdot\frac{d^{2s}}{dy^{2s}}\{(\arcsin y)^{2k}\}_{y=0}\qquad(k\le s\le n),$$

что и требовалось доказать. □

Отметим,что формула a) получена при участии В. П. Заставного. Приведём некоторые свойства полиномов $h_{k,2n}$,которые следуют (см.ниже) из доказанной леммы.

α) Для любого $k\in[1,2n]$ и $x\in[0,\pi]$

$$h_{k,2n}(x)\le\frac{x^k}{k!}\le\frac{\pi^k}{k!}(\sin\frac{x}{2})^k,\quad h''_{k+1,2n}(x)\le h'_{k,2n}(x)\le h_{k-1,2n}(x).$$

β) Для любого $k\in[1,n]$ и $x\in[0,\pi]$

$$\frac{(2\sin\frac{x}{2})^{2k}}{(2k)!}\le h_{2k,2n}(x),\quad\frac{(2\sin\frac{x}{2})^{2k-1}}{(2k-1)!}\cos\frac{x}{2}\le h_{2k-1,2n}(x).$$

γ) $h'_{2k,2n}(x)>0\quad(x\in(0,\pi)),\quad h'_{2k-1,2n}(x)>0\quad(x\in(0,\frac{\pi}{2}))$.

δ) $h_{2k,2n}(x+\pi)$-полином с положительными коэффициентами.

Для доказательства заметим,что $a_{s,n}>0$ при $0\le s\le n$. Проверим, что и коэффициенты $b_{s,k}(0\le k\le s\le n)$ положительны. Биномиальный степенной ряд

$(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$ имеет при чётных степенях y положительные коэффициенты. Следовательно, и проинтегрированный ряд для $\arcsin y$ имеет положительные коэффициенты. К тому же в формуле b) при переходе от n к $n+1$ добавляется лишь одно слагаемое.

Утверждение α) следует теперь из рекуррентной формулы индукцией по k с учётом того, что $h_{2n,2n}(x) > 0$ на $(0, 2\pi)$, а $h'_{2n,2n}(x) > 0$ на $(0, \pi)$.

Для доказательства β) и γ) нужно в формуле b) леммы 1 оставить только первое слагаемое для $h_{2k,2n}$ и учесть, что $h_{2k-1,2n} = h'_{2k,2n}(x)$, $b_{k,k} = \frac{2^k}{(2k)!}$ и $h''_{2n,2n}(x) > 0$ на $(0, \frac{\pi}{2}]$.

Утверждение δ) следует из a) или b) в лемме 1 и разложения

$$h_{2n,2n}(x) = \frac{4^n}{(2n)!}\Big(\frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}\Big)^{2n} = \frac{1}{(2n)!}\sum_{\nu=-n}^{n}(-1)^{\nu}\frac{(2n)!}{(n+\nu)!(n-\nu)!}e^{i\nu x}.$$

Используя найденную выше формулу Тейлора (эрмитовский полином для одного узла), можно построить эрмитовский полином для функции с любым числом узлов $\{x_s\}$: $\tau^{(\nu)}_{f,r}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s) \quad (0 \le \nu \le r_s, 1 \le s \le m)$.

Пусть t_1 - нетривиальный полином наименьшего порядка, удовлетворяющий условиям: $t_1^{(\nu)}(x_1) = 0 (0 \le \nu \le r_1)$. Полагаем

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1)h_{k,r_1}(x-x_1)}{t_1(x)}.$$

Тогда полином

$$\sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1)h_{k,r_1}(x-x_1) + t_1(x)\sum_{k=0}^{r_2} f_1^{(k)}(x_2)h_{k,r_2}(x-x_2)$$

является эрмитовским для f в двух узлах x_1 и x_2. Если f_2 - это разность между f и этим полиномом, делённая на нетривиальный полином наименьшего порядка t_2 с условиями:

$$t_2^{(\nu)}(x_1) = 0 \quad (0 \le \nu \le r_1), \quad t_2^{(\nu)}(x_2) = 0 \quad (0 \le \nu \le r_2),$$

то полином

$$\sum_{k=0}^{r_1} f^{(k)}(x_1)h_{k,r_1}(x-x_1) + t_1(x)\sum_{k=0}^{r_2} f_1^{(k)}(x_2)h_{k,r_2}(x-x_2) + t_2(x)\sum_{k=0}^{r_3} f_2^{(k)}(x_3)h_{k,r_3}(x-x_3)$$

является эрмитовским для функции f в трёх узлах x_1, x_2 и x_3. И так далее.

Считаем для простоты, что $r_1 = r_2 = \cdots = r$. Если ещё учесть, что при любом $q \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in [0, \frac{r+1}{2}]$

$$|h_{k,r}^{(q)}(x)| \le \gamma(r,q) \left|\sin \frac{x}{2}\right|^{(k-q)_+} \quad (a_+ = \max\{a, 0\}),$$

(при $k \le q$ неравенство очевидно, а при $k > q$ нужно проинтегрировать $(k-q)$ раз по $[0,x]$ это неравенство при $k = q$), то из предыдущего рассуждения сразу получаем следующее утверждение.

Лемма 2. *Для любого набора узлов* $\Pi = \{x_s\}$ *и чисел* $\{y_{s,\nu}\}(1 \le s \le m, 0 \le \nu \le r)$ *существует единственный тригонометрический полином* τ *со спектром в* $[p,n]$, *где* $n - p = m(r+1) - 1$, *удовлетворяющий условиям:* $\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}(1 \le s \le m, 0 \le \nu \le r)$. *При этом для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и* $q \in \mathbb{Z}_+$

$$|\tau^{(q)}(x)| \le \gamma(r,q,\Pi) \sum_{\nu=0}^{r} \sum_{s=1}^{m} |y_{s,\nu}|.$$

Подобное утверждение справедливо и в случае алгебраических полиномов. Уточним его в случае двух узлов ($m = 2$).

Лемма 3. *При любом* $r \in \mathbb{Z}_+$ *и любом* $k \in [0,r]$ *алгебраический полином* $p_{k,r}$ *степени* $2r+1$, *определяемый условиями*

$$p_{k,r}^{(\nu)}(0) = 0 (\nu \ne k), \quad p_{k,r}^{(k)}(0) = 1, \quad p_{k,r}^{(\nu)}(1) = 0, \quad (0 \le \nu \le r)$$

обладает следующими свойствами на $[0,1]$*:*

$$\frac{x^k}{k!}(1-x)^{r+1} \le p_{k,r}(x) \le \frac{x^k}{k!}(1 - x^{r+1-k}), \quad |p_{k,r}^{(\nu)}(x)| \le \gamma(r,\nu) x^{(k-\nu)_+}.$$

Доказательство. При $r = 0$, $p_{0,0}(x) = 1 - x$. Считаем далее $r \in \mathbb{N}$. При $k = 0$, $p_{0,r}(0) = 1$, $p_{0,r}^{(\nu)}(0) = 0$ $(1 \le \nu \le r)$, $p_{0,r}^{(\nu)}(1) = 0$ $(0 \le \nu \le r)$. Проверим, что $p_{0,r}'(x) < 0$ на $(0,1)$.

Если бы полином $p_{0,r}'$ степени $2r$ и уже имеющий $2r$ нулей в концах отрезка $[0,1]$ имел бы ещё один ноль, то $p_{0,r} = const$, чего быть не может. Поэтому $p_{0,r}'(x) < 0$ и $0 < p_{0,r}(x) < 1$ на $(0,1)$.

Пусть теперь $k \in [1,r]$ $(p_{k,r}^{(k)}(0) = 1)$. Проверим, что $p_{k,r}(x) \le \frac{x^k}{k!}$ на $[0,1]$. Для этого полином представим в виде

$$p_{k,r}(x) = \frac{x^k}{k!} + x^{r+1} \sum_{\nu=0}^{r} a_\nu (x-1)^\nu$$

и вычислим коэффициенты $\{a_\nu\}$. $a_0 = p_{k,r}(1) - \frac{1}{k!} = -\frac{1}{k!}$. А при $\nu \geq 1$

$$a_\nu = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\{\frac{p_{k,r}(x) - \frac{x^k}{k!}}{x^{r+1}}\}_{x=1} = \frac{-1}{\nu!k!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\{x^{k-r-1}\}_{x=1} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!k!}(r-k+\nu)\cdots(r-k+1).$$

Следовательно, $a_\nu(x-1)^\nu < 0$ при $\nu \in [0,r]$ и $x \in (0,1)$. Поэтому $p_{k,r}(x) < \frac{x^k}{k!} + a_0 x^{r+1} = \frac{x^k}{k!}(1 - x^{r+1-k})$.

Аналогично оцениваем $p_{k,r}$ снизу.

$$p_{k,r}(x) = (1-x)^{r+1}\sum_{\nu=k}^{r} b_\nu x^\nu$$

и

$$b_\nu = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dx^\nu}\{p_{k,r}(x)(1-x)^{-r-1}\}_{x=0} =$$

$$\frac{1}{k!(\nu-k)!}p_{k,r}^{(k)}(0)\frac{d^{\nu-k}}{dx^{\nu-k}}\{(1-x)^{-r-1}\}_{x=0} = \frac{1}{k!(\nu-k)!}(r+1)(r+2)\cdots(r+\nu-k) > 0.$$

Так что на $(0,1)$

$$p_{k,r}(x) > b_k(1-x)^{r+1}x^k = \frac{x^k}{k!}(1-x)^{r+1}.$$

Осталось применить неравенство А. А. Маркова для производных алгебраических полиномов степени n (см.,напр.,[2], 5.4.6)

$$\max_{0\leq t\leq b}|p^{(\nu)}(t)| \leq (\frac{2}{b}n^2)^\nu \max_{0\leq t\leq b}|p(t)|.$$

В рассматриваемом случае $n = 2r+1$, а $b = x$ при $\nu \leq k$ и $b = 1$ при $\nu > k$. □

Вернёмся к периодическому случаю.

Лемма 4. *Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$, для любых наборов $\Pi = \{x_s\}$ и $\{y_{s,\nu}\}$ $(1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r)$ и для любого $\epsilon > 0$ можно построить тригонометрический полином высокого порядка, зависящего от r, $\delta = \min_s |x_s - x_{s+1}|$ и ϵ, который удовлетворяет условиям:*

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu} \quad (1 \leq s \leq m, 0 \leq \nu \leq r), \quad ||\tau|| \leq (\gamma_0(r,\Pi) + \epsilon)\max_{s,\nu}|y_{s,\nu}|,$$

где $\gamma_0(r,\Pi) = \sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!}(\max_s \Delta x_s)^\nu$.

Доказательство. По предположению $x_1 < x_2 < \cdots < x_m < x_{m+1} = x_1 + 2\pi$. Считаем,что $y_{m+1,\nu} = y_{1,\nu}$ $(0 \leq \nu \leq r)$. Построим 2π-периодический (эрмитовский) сплайн h степени $2r+1$ из класса $C^r(\mathbb{T})$. Он определяется условиями:

$h^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu} \quad (1 \le s \le m+1, 0 \le \nu \le r)$. На $[x_s, x_{s+1}] \quad (x_{s+1} - x_s = \Delta x_s, p_{\nu,r}-$ полином из леммы 3)

$$h(x) = \sum_{\nu=0}^{r} \{y_{s,\nu} p_{\nu,r}(\frac{x - x_s}{\Delta x_s})(\Delta x_s)^\nu + y_{s+1,\nu} p_{\nu,r}(\frac{x_{s+1} - x}{\Delta x_s})(\Delta x_s)^\nu (-1)^\nu\},$$

так как, например, при $q \le r$

$$h^{(q)}(x_{s+1}) = \sum_{\nu=0}^{r} \{y_{s,\nu} p_{\nu,r}^{(q)}(1)(\Delta x_s)^{\nu-q} + y_{s+1,\nu} p_{\nu,r}^{(q)}(0)(\Delta x_s)^{\nu-q}(-1)^{q+\nu}\} = y_{s+1,q}.$$

В силу Леммы 3 при $x \in [x_s, x_{s+1}]$

$$|h(x)| \le \sum_{\nu=0}^{r} \{|y_{s,\nu}| \frac{(x - x_s)^\nu}{\nu!} + |y_{s+1,\nu}| \frac{(x_{s+1} - x)^\nu}{\nu!}\} \le$$

$$\le \max_\nu \{|y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}|\} \sum_{\nu=0}^{r} \frac{1}{\nu!} \{(x - x_s)^\nu + (x_{s+1} - x)^\nu\} \le$$

$$\le \max_\nu \{|y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}| \sum_{\nu=0}^{r} \frac{1}{\nu!} (\Delta x_s)^\nu \le e^{2\pi} \max_\nu \{|y_{s,\nu}|, |y_{s+1,\nu}|\} \tag{2.1}$$

При $r = 0$ вместо $e^{2\pi}$ можно поставить 1.

При $q \ge 1$ на $[x_s, x_{s+1}]$ в силу той же леммы 3

$$|h^{(q)}(x)| \le \gamma(r,q) \sum_{\nu=0}^{r} \{|y_{s,\nu}| (\frac{x - x_s}{\Delta x_s})^{(\nu-q)_+} (\Delta x_s)^{\nu-q} + |y_{s+1,\nu}| (\frac{x_{s+1} - x}{\Delta x_s})^{(\nu-q)_+} (\Delta x_s)^{\nu-q} \le$$

$$\gamma(r,q) \sum_{\nu=0}^{r} \{|y_{s,\nu}| + |y_{s+1,\nu}|\} (\Delta x_s)^{\nu-q}.$$

Поэтому при $q \ge 1$ и $\Delta x_s \ge \delta > 0$

$$||h^{(q)}|| \le \gamma_1(r,q) \max\{1, \frac{1}{\delta^q}\} \max_{1 \le s \le m, 0 \le \nu \le r} |y_{s,\nu}|. \tag{2.2}$$

По теореме Джексона для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ существует полином порядка не выше n такой, что

$$||h^{(\nu)} - \tau_n^{(\nu)}|| \le c \frac{||h^{(r+1)}||}{(n+1)^{r+1-\nu}} \quad (0 \le \nu \le r+1).$$

Возьмём теперь эрмитовский полином τ, определяемый условиями:

$$\tau^{(\nu)}(x_s) = (h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s) \quad (1 \le s \le m, 0 \le \nu \le r).$$

В силу Леммы 3 и неравенства Джексона

$$||\tau^{(q)}|| \le \gamma(r, \Pi) \max_{s,\nu} |(h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s)| \le c\gamma(r, \Pi) \frac{||h^{(r+1)}||}{n+1}.$$

Положим теперь $\tilde{\tau} = \tau_n + \tau$ (его порядок равен $\max\{n, m(r+1)-1\}$). Тогда при $1 \le s \le m$ и $0 \le \nu \le r$

$$\tilde{\tau}^{(\nu)}(x_s) = \tau_n^{(\nu)}(x_s) + (h - \tau_n)^{(\nu)}(x_s) = h^{(\nu)}(x_s) = y_{s,\nu}.$$

При этом при $q \in [0, r]$

$$||\tilde{\tau}^{(q)}|| \le ||\tau_n^{(q)}|| + ||\tau^{(q)}|| \le ||h^{(q)} - \tau_n^{(q)}|| + ||h^{(q)}|| + ||\tau^{(q)}|| \le$$
$$c\frac{||h^{(r+1)}||}{(n+1)^{r+1-q}} + ||h^{(q)}|| + c\gamma(r,\Pi)\frac{||h^{(r+1)}||}{n+1}.$$

Учитывая неравенство (2.2) при $q = r+1$, получаем

$$||\tilde{\tau}^{(q)}|| \le \gamma_1(r,\Pi)\frac{1}{(n+1)\delta^{r+1}}\max|y_{s,\nu}| + ||h^{(q)}||.$$

А при $q = 0$, как это следует из (2.1),

$$||\tilde{\tau}|| \le \{\sum_{\nu=0}^{r}\frac{1}{\nu!}(\max_s \Delta x_s)^\nu + \gamma_1(r,\Pi)\frac{1}{(n+1)\delta^{r+1}}\}\max_{s,\nu}|y_{s,\nu}|$$

и при достаточно большом n полином $\tilde{\tau}$-искомый. □

Лемма 5. *Пусть $f \in C^r(\mathbb{T})(r \in \mathbb{Z}_+)$ и $\tau_{f,r}$- эрмитовский интерполяционный тригонометрический полином, определяемый условиями: $\tau_{f,r}^{(\nu)}(x_s) = f^{(\nu)}(x_s)$ $(1 \le s \le m, 0 \le \nu \le r)$(его порядок не больше $[\frac{m(r+1)+1}{2}]$). Тогда для $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in [0, r]$*

$$|f^{(\nu)}(x) - \tau_{f,r}^{(\nu)}(x)| \le \gamma(r,\Pi)\min_s|\sin\frac{x-x_s}{2}|^{r-\nu}\omega(f^{(r)};\min_s|\sin\frac{x-x_s}{2}|),$$

$$||\tau_{f,r}^{(r+1)}|| \le \gamma(r,\Pi)\omega(f^{(r)};\pi).$$

Доказательство. Главное - это неравенство для $(r+1)$-й производной. Сначала из него выведем неравенство о приближении. Пусть для определённости $x \in [\frac{x_s+x_{s+1}}{2}]$. Тогда

$$f^{(r)}(x) - \tau_{f,r}^{(r)}(x) = \big[f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)\big] + \big[\tau_{f,r}^{(r)}(x_s) - \tau_{f,r}^{(r)}(x)\big].$$

и в силу очевидного неравенства и монотонности ω

$$\big|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(x_s)\big| \le \omega(f^{(r)};|x-x_s|) \le \omega(f^{(r)};\frac{2}{\pi}|\sin(x-x_s)|),$$

$$\big|\tau_{f,r}^{(r)}(x_s) - \tau_{f,r}^{(r)}(x)\big| \le \int_{x_s}^{x}\big|\tau_{f,r}^{(r+1)}(t)\big|dt \le \gamma(r,\Pi)\omega(f^{(r)};\pi)(x-x_s)$$

и нужно воспользоваться известным неравенством $\omega(f;\lambda h) \le (\lambda+1)\omega(f;h)$, откуда следует, что $\omega(f;c)h \le 2c\omega(f;h)$. Так что искомое неравенство при $\nu = r$ доказано. А далее можно либо интегрировать это неравенство r раз по $[x_s, x]$, либо сразу воспользоваться формулой Тейлора для $f^{(\nu)} - \tau_{f,r}^{(\nu)}$ в окрестности точки x_s.

Неравенство для $(r+1)-$ой производной $\tau_{f,r}$ можно доказать индукцией по m (вместо $\tau_{f,r}$ будем писать $\tau_{f,r,m}$). При $m=1$ нужно лишь учесть, что при $k\in[1,r]$ существует число ξ_k такое, что $f^{(k)}(\xi_k)=0$. Но тогда при $k\le r-1$

$$||f^{(k)}||=\max_x|\int_{\xi_k}^x f^{(k+1)}(t)dt|\le\pi||f^{(k+1)}||\le\pi^{r-k}||f^{(r)}||= \tag{2.3}$$
$$=\pi^{r-k}||f^{(r)}(\cdot)-f^{(r)}(\xi_r)||\le\pi^{r-k}\omega(f^{(r)};\pi).$$

Производная периодического полинома Тейлора при $r=2n$ (см. лемму 1), а также и при $r=2n-1$, когда $h_{0,r}\equiv 1$ $h_{k,r}=h'_{k+1,r+1}$, по норме не превосходит

$$||\sum_{k=1}^r f^{(k)}(x_1)h_{k,r}^{(r)}(\cdot-x_1)||\le\gamma(r)\sum_{k=1}^r||f^{(k)}||\le\gamma_1(r)||f^{(r)}||\le\gamma_1(r)\omega(f^{(r)};\pi).$$

Например, при $r=2n$

$$\tau_{f,r,m}(x)=\tau_{f,r,m-1}+e^{-i[\frac12(m-1)(r+1)]x}\Pi_{s=1}^{m-1}(e^{ix}-e^{ix_s})^{r+1}\sum_{k=0}^{2n}a_kh_{k,2n}(x-x_m).$$

Теперь легко доказать такие же оценки для $|a_k|$, из которых и следует искомая оценка для $|\tau_{f,r,m}^{(r+1)}|$. □

Доказательство Теоремы 2. Утверждение b) является частным случаем ($m=1$) леммы 5. Для доказательства a) используем факторизацию дифференциальных операторов по Фробениусу и обобщённую теорему Ролля, доказанную Пойа (см.[4], гл.IV и [5], V, гл.1). Частный случай - в следующей лемме.

Лемма 6. *Пусть при $\lambda>0$ и $n\ge2$ функция $f\in C^n[0,\frac{\pi}{\lambda})$ и имеет на $[0,\frac{\pi}{\lambda})$ $m\ge3$ нулей с учётом кратностей. Тогда функция $f''+\lambda^2f$ имеет там же не менее $m-2$ нулей.*

Доказательство. Не умаляя общности, считаем $\lambda=1$ (преобразование подобия). Легко видеть,что

$$f''(x)+f(x)=\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx}\{\sin^2x\frac{d}{dx}(\frac{f(x)}{\sin x})\}.$$

Если на $(0,\pi)$ $f(x)\ne0$ и значит, $f^{(\nu)}(0)=0$ при $0\le\nu\le m-1$, то по известной лемме Адамара частное $\frac{f(x)}{\sin x}\in C^{n-1}[0,\pi)$ и имеет в точке 0 нуль кратности $m-1$. Но тогда функция в фигурных скобках имеет в точке 0 нуль кратности m. Следовательно, функция $f''+f$ имеет в нуле $m-2$ нуля (не менее).
Если же у f есть нули лежат на $(0,\pi)$, то рассуждение аналогичное с применением теоремы Ролля. □

Как видно из доказательства, если нули f лежат на $[0, \delta\pi]$ при $\delta < 1$, то и нули $f'' + f$ лежат на $[0, \delta\pi]$. Положим

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x),$$

а при $x \in (0, 2\pi)$

$$H(x) = \frac{\Delta_n(x)}{h_{2n,2n}(x)}, \quad F(y) = \Delta_n(y) - H(x) h_{2n,2n}(y).$$

Очевидно, что $\Delta_n^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \le \nu \le 2n$, $\quad F^{(\nu)}(0) = 0$ при $0 \le \nu \le 2n-1$ и $F(x) = 0$. Если ещё $F^{(2n)}(0) = 0$, то $\Delta_n^{(2n)}(0) - H(x) h_{2n,2n}^{(2n)}(0) = 0$ и $H(x) = 0$, т.е.

$$\Delta_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0) h_{k,2n}(x) = 0$$

и доказывать нечего ($\theta = 1$). Считаем далее, что $F^{(2n)}(0) \ne 0$ и $x \in (0, \frac{\pi}{n})$. К функции F, имеющей на $[0, x]$ $\;2n+1$ нуль, применяем лемму 6 при $\lambda = n$. Тогда функция $F'' + n^2 F$ имеет на $[0, \frac{\pi}{n})$ не менее $(2n-1)$ нуля. При этом в нуле ровно $(2n-2)$ нуля, так как

$$(F'' + n^2 F)_{x=0}^{(2n-2)} = F^{(2n)}(0) \ne 0,$$

и значит, хотя бы один нуль лежит на $(0, x)$.

Если $n \ge 2$, то применяем лемму 6 при $\lambda = n-1$ к функции $F'' + n^2 F$. Продолжая таким же образом, получим, что существует число $\xi \in (0, x)$ такое, что $D_{2n} F(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\Delta_n(x) = H(x) h_{2n,2n}(x) = \frac{D_{2n}\Delta_n(\xi)}{D_{2n} h_{2n,2n}(\xi)} h_{2n,2n}(x).$$

Очевидно, что для любого полинома τ порядка не выше n

$$D_{2n}\tau(x) \equiv (n!)^2 \hat{\tau}(0) = (n!)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(t) dt.$$

Для любой функции $f \in C^{2n}$

$$D_{2n} f(x) = q_n\left(\frac{d^2}{dx^2} f(x)\right) = \sum_{s=0}^{n} a_{s,n} f^{(2s)}(x).$$

А так как (см. лемму 1)

$$h_{k,2n}(x) = \sum_{s=[\frac{k+1}{2}]}^{n} a_{s,n} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x),$$

то при чётном k

$$\hat{h}_{k,2n}(0) = \sum_{s=[\frac{k+1}{2}]}^{n} a_{s,n}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_{2n,2n}^{(2s-k)}(x) = a_{\frac{k}{2},n}\hat{h}_{2n,2n}(0) = \frac{1}{(n!)^2}a_{\frac{k}{2},n},$$

а при нечётном k $\quad \hat{h}_{k,2n}(0) = 0.$ $\quad D_{2n}h_{2n,2n} \equiv a_{n,n} = 1$, поэтому

$$D_{2n}\Delta_n(\xi) = D_{2n}f(\xi) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)D_{2n}h_{k,2n}(\xi) = D_{2n}f(\xi) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)(n!)^2\hat{h}_{k,2n}(0) =$$

$$= D_{2n}f(\xi) - \sum_{s=0}^{n} a_{s,n}f^{(2s)}(0) = D_{2n}f(\xi) - D_{2n}f(0).$$

Таким образом, для любой функции $f \in C^{2n}(\mathbb{T})$ и $x \in (0, \frac{\pi}{n})$ существует $\xi \in (0, x)$ такое, что

$$f(x) - \sum_{k=0}^{2n} f^{(k)}(0)h_{k,2n}(x) = (D_{2n}f(\xi) - D_{2n}f(0))h_{2n,2n}(x).$$

Подобное равенство имеет место, конечно, и при $x \in (-\frac{\pi}{n}, 0)$. □

Доказательство Теоремы 1. Если $||f - \tau_n|| = E_n^{\mathbb{T}}(f)$, то в силу леммы 4 при $r = 0$ и любом $\varepsilon > 0$ можно построить полином $\tau_{f,n}$ такой, что

$$\tau_{f,n}(x_s) = f(x_s) - \tau_n(x_s) \quad (1 \le s \le m), \quad ||\tau_{f,n}|| \le (1+\varepsilon)E_n^{\mathbb{T}}(f).$$

Полагаем $\tau_{1,n} := \tau_n + \tau_{f,n}$. Тогда $\tau_{1,n}(x_s) = f(x_s) \quad (1 \le s \le m)$ и

$$||f - \tau_{1,n}|| \le ||f - \tau_n|| + ||\tau_{f,n}|| \le (2+\varepsilon)E_n^{\mathbb{T}}(f).$$

Предположим, что множитель $(2+\varepsilon)$ можно заменить (хотя бы при одном n и одном узле x_1) на $(2-\varepsilon)$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Возьмём какую-либо функцию f_δ, имеющую на периоде $(2n+2)$ точки чебышевского альтернанса, из которых x_1 и $x_1 + \delta$ - две соседние, а $||f_\delta||$ не зависит от δ. Можно взять просто кусочно линейную непрерывную и периодическую функцию. Тогда существует полином $\tau_{\delta,n}$ такой, что $\tau_{\delta,n}(x_1) = f_\delta(x_1)$ и

$$|f_\delta(x) - \tau_{\delta,n}(x)| \le (2-\varepsilon)E_n^{\mathbb{T}}(f_\delta) = (2-\varepsilon)||f_\delta||.$$

Отсюда $||\tau_{\delta,n}|| \le (3-\epsilon)||f_\delta||$ и в силу неравенства Бернштейна

$$|\tau_{\delta,n}(x_1) - \tau_{\delta,n}(x_1+\delta)| \le ||\tau'_{\delta,n}||\delta \le n||\tau_{\delta,n}||\delta \le n(3-\varepsilon)||f_\delta||\delta.$$

Поэтому

$$2||f_\delta|| = |f_\delta(x_1) - f_\delta(x_1+\delta| \le |\tau_{\delta,n}(x_1) - \tau_{\delta,n}(x_1+\delta)| + |\tau_{\delta,n}(x_1+\delta) - f_\delta(x_1+\delta| \le$$

$$n(3-\varepsilon)||f_\delta||\delta + (2-\varepsilon)||f_\delta||.$$

При достаточно малом δ имеем противоречие. □

Abstract. Order of approximation of periodic functions by trigonometric polynomials with interpolation in an arbitrary system of nodes have been considered and a method of construction Hermitian interpolation polynomials has pointed out.

Список литературы

[1] А. Зигмунд,Тригонометрические ряды, т.II, М. Мир,1965.
[2] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, Fourier Analysis and Approximation of Functions, Kluwer Acad. Publ., Springer. 585 p. (2004).
[3] Р. М. Тригуб, "Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с эрмитовской интерполяцией и учетом положения точки. Кусочно односторонняя аппроксимация", Доповіді НАН Укр., **5**, 19-22 (2006).
[4] Ф. Хартман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М. Мир (1970).
[5] Г. Полиа, Г. Сегё, Задачи и теоремы из анализа, т. II, М. (1956).

Поступила 21 ноября 2008

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Один из результатов нашей работы [1] гласит, что для произвольной конечной измеримой $f(x)$, заданной на $T = (0, 2\pi)$, существует равномерно гладкая примитивная $F(x)$, т.е. F - непрерывная, $F'(x) = f(x)$ почти всюду и

$$\omega_2(h; F) \equiv \sup_{|t| \le h,\, x \in T} |F(x+t) + F(x-t) - 2F(t)| = o(h), \quad h \to 0.$$

Недавно нам стало известно, что в работе [2] В. Г. Кротов, опираясь на другие идеи, доказал более сильное утверждение. А именно, его примитивная функция F удовлетворяет условию

$$\omega_2(h; F) = O(h \cdot \sigma(h)), \quad h \to 0,$$

где $\sigma(h)$ – произвольная наперед заданная положительная, возрастающая функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^1 \frac{\sigma^2(h)}{h}\, dh = \infty; \qquad \sigma(16 \cdot h) \le 2 \cdot \sigma(h).$$

Р. И. Овсепян

[1] Р. И. Овсепян, О тригонометрических рядах и примитивных функциях, Изв. НАН Армении, Математика, том 44, но. 4, 3 – 11 (2009).

[2] В. Г. Кротов, О гладкости примитивных Н. Н. Лузина и о теоремах Д. Е. Меньшова и Н. К. Бари, Матем. сборник, том 134 (176), но. 3(11), 404 – 420 (1987).

9 ноября 2009

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

том 45, номер 1, 2010

Содержание

А. В. Абрамян, О некоторых соотношениях ортогональных на окружности рациональных функций с фиксированными полюсами. III 3
Т. А. Авакян, П. С. Геворкян, Сильно подвижные категории и сильная подвижность топологических пространств 11
А. Л. Григорян, Дискретизация теоремы Лебега-Колмогорова 25
В. Ж. Думанян, О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка 31
R. Chavosh Khatamy, Examples of homogeneous vectors on the Fiber space of the associated and the tangent bundles 53
С. Погосян, Обощенная проблема Каца для Бозе газа в многоугольной области 61
Р. М. Тригуб, Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами с интерполяцией. Тригонометрический полином Тейлора 73
Письмо в редакцию 87

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 45, No. 1, 2010

Contents

A. V. Abramyan, Orthogonal on the circle rational functions with fixed poles. III 3
T. A. Avakyan, P. S. Gevorkyan, Strongly movable categories and strong movability of topological spaces 11
A. L. Grigoryan, Discretization of problem Lebeg-Kolmogorov 25
V. Zh. Dumanyan, On the boundary values of solution of the Dirichlet problem for the second order elliptic equation 31
R. Chavosh Khatamy, Examples of homogeneous vectors on the Fiber space of the associated and the tangent bundles 53
S. Poghosyan, Generalized Kac problem for a Bose gas in polygonal region 61
R. M. Trigub, Approximation of periodic functions by trigonometric polynomials with interpolation. Taylor trigonometric polynomial 73
Letter to the editor 87