ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԱԱ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ИЗВЕСТИЯ

НАН АРМЕНИИ

ISSN 0002-3043

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

МАТЕМАТИКА

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Настоящий номер журнала продолжает публикацию (начало в № X< 4 и 5 за 2003) оригинальных статей, представленных на международной конференции "МАТЕМАТИКА в АРМЕНИИ: Достижения и перспективы" сентябрь 30 - октябрь 7, 2003, Цахкадзор, Армения. Основной целью конференции, посвящённой 60 летию Армянской Национальной Академии Наук, было обсуждение текущей работы и перспективы математики в Армении. Конференция привлекла внимание многих участников из-за границы, включая многих математиков из армянской диаспоры.

Научная программа конференции охватила следующие направления современной математики: комплексный анализ, вещественный анализ, теория аппроксимации, теория вероятностей и математическая статистика, дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика, алгебра, геометрия, топология.

Организаторами конференции были:

Институт Математики Национальной Академии Наук Армении и Ереванский Государственный Университет.

Программный комитет:

Н. Аракелян (сопредседатель, Армения), А. Аджян (сопредседатель, США), С. Адян (Россия), С. Айвазян (Россия), Р. Амбарцумян (Армения), Л. Кафарелли (США), Л. Фаддеев (Россия), П. Готье (Канада), А. Гончар (Россия), И. Ибрагимов (Россия), В. Лу (Германия), С. Мергелян (США), А. Нерсесян (Армения), Н. Никольский (Франция), Ю. Прохоров (Россия), Г. Шахголян (Швеция), Я. Синай (США), А. Талалян (Армения), Дж. Тимурян (Канада), П. Ульянов (Россия), В. Владимиров (Россия), В. Закарян (Армения).

Организационный комитет:

Г. Геворкян, М. Гиновян, А. Саакян, Б. Нахапстян, А. Акопян.

Около 120 математиков из 15 стран участвовали в работе конференции. Пленарные доклады прочитаны следующими математиками:

С. Адян (Россия), С. Айвазян (Россия), Р. Амбарцумян (Армения), Н. Аракелян (Армения), О. Бесов (Россия), Дж. Бренен (США), З. Чисельски (Польша), П. Готье (Канада), И. Ибрагимов (Россия), Б. Кашин (Россия), В. Лу (Германия), В. Михайлов (Россия), Н. Никольский (Франция), А. Олевский (Израиль), Г. Шахголян (Швеция), А. Талалян (Армения), В. Темляков (США).

Г. Г. Геворкян, М. С. Гиновян, А. А. Саакян — Ереван, октябрь 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 5–16

ПРОЕКЦИЯ ТИПА БЕРГМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ БЕСОВА

К. Л. Аветисян

Ереванский государственный университет

E-mail : avetkaren@ysu.am

Резюме. В статье построен оператор типа Бергмана в единичном круге, который осуществляет непрерывную проекцию пространства Бесова на его гармоническое подпространство.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Обозначим через $h(\mathbb{D})$ $(H(\mathbb{D}))$ множество всех гармонических (соответственно голоморфных) функций в единичном круге $\mathbb{D}$. Для измеримой в $\mathbb{D}$ функции $f(z) = f(re^{i\theta})$ обозначим через

$$M_p(f;r) = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p \, d\theta \right)^{1/p}, & 0 < p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{-\pi<\theta\le\pi} |f(re^{i\theta})|, & p = \infty, \end{cases}$$

где $0 \le r < 1$. Множество гармонических (голоморфных) функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{h^p} = \sup_{0\le r<1} M_p(f;r) < +\infty,$$

есть обычное пространство Харди h^p (соответственно H^p).

Квазинормированное пространство $L(p,q,\alpha)$ $(0 < p, q \le \infty, \alpha \in \mathbb{R})$ со смешанной нормой является множеством измеримых в $\mathbb{D}$ функций $f(z)$, для которых конечна квазинорма, определённая следующим образом :

$$\|f\|_{p,q,\alpha} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\alpha q - 1} M_p^q(f;r) dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0\le r<1} (1-r)^{\alpha} M_p(f;r), & q = \infty. \end{cases}$$

Гармонические и голоморфные пространства со смешанной нормой определяются как подпространства $L(p,q,\alpha)$, содержащие гармонические или голоморфные функции :

$$h(p,q,\alpha) = h(\mathbb{D}) \cap L(p,q,\alpha), \quad H(p,q,\alpha) = H(\mathbb{D}) \cap L(p,q,\alpha).$$

Заметим, что $h(p,\infty,0) = h^p$ и $H(p,\infty,0) = H^p$. Первые результаты о пространствах со смешанной нормой содержатся в классических работах Харди и Литтлвуда [1], [2]. Отметим, что при $p = q < \infty$ пространства $h(p,q,\alpha)$ и $H(p,q,\alpha)$ совпадают с известными весовыми классами Бергмана (см. [3] – [6]). Позднее Флетт [7] усовершенствовал методы и развил теорию [1], [2]. В работах [8], [9] изучались, в частности, аналитические проекции в пространствах Бергмана и со смешанной нормой.

В настоящей статье рассматриваются пространства Бесова, которые тесно связаны с пространствами со смешанной нормой и изучаются проекции типа Бергмана в этих пространствах.

§2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

Всюду ниже символы $C(\alpha,\beta,\ldots)$, C_α и т.п. будут обозначать различные положительные постоянные, зависящие только от указанных параметров. При $A, B > 0$ запись $A \approx B$ будет означать двустороннюю оценку $c_1 A \le B \le c_2 A$ с некоторыми положительными постоянными c_1 и c_2. Символ dm_2 означает меру Лебега на круге, нормированную условием $m_2(\mathbb{D}) = 1$. Если T – ограниченный оператор, отображающий пространство X в Y, т.е. $\|Tf\|_Y \le C\|f\|_X$, $f \in X$, то будем писать $T : X \longmapsto Y$.

Для функции $f(z) = f(re^{i\theta})$, заданной на $\mathbb{D}$, через $D^\alpha \equiv D_r^\alpha$ обозначим оператор интегродифференцирования Римана-Лиувилля, задаваемый формулами

$$D^{-\alpha} f(z) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\eta)^{\alpha-1} f(\eta z)\, d\eta,$$

$$D^0 f(z) = f(z), \quad D^\alpha f(z) = \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^k D^{-(k-\alpha)} f(z),$$

где $\alpha > 0$, а k – целое число такое, что $k - 1 < \alpha \le k$. Положим также

$$\mathcal{D}^{-\alpha} f(rw) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(rw), \quad \mathcal{D}^\alpha f(rw) = D^\alpha\{r^\alpha f(rw)\}.$$

Легко видеть, что для гармонической f функции $\mathcal{D}^\alpha f$ и $\mathcal{D}^{-\alpha} f$ также гармоничны, и для них справедливы следующие формулы обращения :

$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{D}^{-\alpha} f(z) = \mathcal{D}^{-\alpha} \mathcal{D}^\alpha f(z) = f(z). \tag{1}$$

Будем рассматривать ядра типа Пуассона P_α и сопряжённые ядра Q_α (см. [10, Гл. IX]) :

$$P_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)\left[\operatorname{Re}\frac{2}{(1-z)^{\alpha+1}} - 1\right], \quad z \in \mathbb{D}, \quad \alpha \geq 0,$$

$$Q_\alpha(z) = \Gamma(\alpha+1)\operatorname{Im}\frac{2}{(1-z)^{\alpha+1}}, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \alpha \geq 0.$$

Заметим, что $P_0(z) = P(z)$ и $Q_0(z) = Q(z)$ суть обычные ядра Пуассона и сопряжённые ядра Пуассона. Ядра

$$P_\alpha(z,\zeta) = P_\alpha(z\bar{\zeta}), \quad Q_\alpha(z,\zeta) = Q_\alpha(z\bar{\zeta}), \quad z,\zeta \in \mathbb{D}$$

гармоничны как по z, так и по ζ. Очевидно, что

$$P_\alpha(z,\zeta) = P_\alpha(\zeta,z) = P_\alpha(\bar{z},\bar{\zeta}).$$

Также для $\alpha \geq 0$ имеем

$$P_0(z,\zeta) = \mathcal{D}^{-\alpha}P_\alpha(z,\zeta), \quad Q_0(z,\zeta) = \mathcal{D}^{-\alpha}Q_\alpha(z,\zeta),$$

$$P_\alpha(z,\zeta) = \mathcal{D}^{\alpha}P_0(z,\zeta), \quad Q_\alpha(z,\zeta) = \mathcal{D}^{\alpha}Q_0(z,\zeta).$$

Лемма 1. *Для любых $\alpha \geq 0$ и p, удовлетворяющих $\frac{1}{1+\alpha} < p \leq \infty$, имеют место следующие оценки :*

$$|P_\alpha(z,\zeta)| \leq C(\alpha)\frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|^{\alpha+1}}, \quad z,\zeta \in \mathbb{D},$$

$$|Q_\alpha(z,\zeta)| \leq C(\alpha)\frac{1}{|1-\bar{\zeta}z|^{\alpha+1}}, \quad z,\zeta \in \mathbb{D},$$

$$M_p(P_\alpha;r) \leq C(\alpha,p)\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1-1/p}}, \quad 0 \leq r < 1,$$

$$M_p(Q_\alpha;r) \leq C(\alpha,p)\frac{1}{(1-r)^{\alpha+1-1/p}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Доказательство леммы мы опускаем, поскольку оно осуществляется прямыми вычислениями и оценками.

В следующей лемме содержатся версии известного неравенства Харди [11].

Лемма 2. *Если $g(t) \geq 0$ $(0 \leq t < 1)$, $1 \leq q < \infty$, $\beta < -1 < \alpha$, то*

$$\int_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int_0^r g(t)\,dt\right)^q dr \leq C(\alpha,q)\int_0^1 (1-r)^{\alpha+q} g^q(r)\,dr, \tag{2}$$

$$\int_0^1 x^\beta \left(\int_0^x g(t)\,dt\right)^q dx \leq C(\beta,q)\int_0^1 x^{\beta+q} g^q(x)\,dx. \tag{3}$$

В следующей лемме представлен ряд непрерывных вложений типа Харди–Литтлвуда и Флетта.

Лемма 3. *Для $\alpha, \alpha_0, \beta \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$ имеют место следующие непрерывные вложения :*

$$\begin{array}{rll}
(i) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q,\beta), & \beta > \alpha, \\
(ii) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha), & 0 < p_0 < p \leq \infty, \\
(iii) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\alpha), & 0 < q < q_0 \leq \infty, \\
(iv) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha_0), & \alpha_0 \geq \alpha + 1/p - 1/p_0,\ 0 < p \leq p_0 \leq \infty, \\
(v) & h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q_0,\beta), & \beta > \alpha + 1/p,\ 0 < p_0, q_0 \leq \infty, \\
(vi) & h(p,q,\alpha) \subset h(p,q_0,\beta), & \beta > \alpha,\ 0 < q_0 \leq \infty.
\end{array}$$

Причем, при $\alpha > 0$ условие $\alpha_0 \geq \alpha + 1/p - 1/p_0$ является необходимым и достаточным для вложения (iv).

Доказательство. Первые два вложения (i) и (ii) тривиальны ; вложения (iii) и (iv) доказаны в [7], вложения (v) и (vi) можно найти в [12]. Докажем теперь необходимость условия $\alpha_0 \geq \alpha + 1/p - 1/p_0$ для вложения (iv) при $\alpha > 0$. Пусть

$$\|u\|_{p_0,q,\alpha_0} \leq C\|u\|_{p,q,\alpha}, \quad u \in h(p,q,\alpha),$$

где постоянная C не зависит от функции u. Предположим, что имеет место обратное неравенство $\alpha_0 + 1/p_0 < \alpha + 1/p$. Для любой точки $a \in \mathbb{D}$ и индекса $\gamma > \max\{\alpha_0 + 1/p_0, \alpha + 1/p\}$ определим функцию $f_{\gamma,a}(z) = 1/(1-\bar{a}z)^\gamma$. Простые вычисления показывают, что

$$M_p(f_{\gamma,a}; r) \approx \frac{1}{(1-|a|r)^{\gamma-1/p}},$$

$$\|f_{\gamma,a}\|_{p,q,\alpha} \approx \left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q-1}}{(1-|a|r)^{\gamma q - q/p}}\,dr\right)^{1/q} \approx \frac{1}{(1-|a|)^{\gamma-1/p-\alpha}}.$$

Аналогично

$$\|f_{\gamma,a}\|_{p_0,q,\alpha_0} \approx \frac{1}{(1-|a|)^{\gamma-1/p_0-\alpha_0}}.$$

Отсюда
$$\frac{\|f_{\gamma,a}\|_{p_0,q,\alpha_0}}{\|f_{\gamma,a}\|_{p,q,\alpha}} \approx (1-|a|)^{(\alpha_0+1/p_0)-(\alpha+1/p)}.$$

Легко видеть, что правая часть неограниченно возрастает при $|a| \to 1$, что приводит к противоречию с условием $h(p,q,\alpha) \subset h(p_0,q,\alpha_0)$. Лемма 3 доказана.

§3. ПРОЕКЦИИ ТИПА БЕРГМАНА

Интегральные представления по площади круга в весовых классах Бергмана $H(p,p,\alpha)$ хорошо известны (см. [3]–[6]). Ниже приводится краткое элементарное доказательство для интегральных представлений для гармонических функций пространств со смешанной нормой $h(p,q,\alpha)$.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 0$ и $u \in h(p,q,\alpha)$. Если, либо $0 < p,q \le \infty$, $\beta > \max\{\alpha + 1/p - 1, \alpha\}$, либо $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le 1$, $\beta \ge \alpha$, то*
$$u(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} P_\beta(z,\zeta)\, u(\zeta)\, dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{4}$$
$$v(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} Q_\beta(z,\zeta)\, u(\zeta)\, dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{5}$$
где $v(z)$ – гармоническая сопряжённая функции $u(z)$, нормированная условием $v(0) = 0$.

Доказательство. Вначале рассмотрим случай, когда $p = q = 1$, $\beta = \alpha$ и $u(z)$ есть произвольная функция в $h(1,1,\alpha)$. Согласно формуле обращения (1) имеем
$$u(z) = \mathcal{D}_r^{-\alpha}\mathcal{D}_r^{\alpha} u(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^{\alpha} u(\tau z)\, d\tau.$$

Замена переменного $\tau = \rho^2$ и применение формулы Пуассона, приводят к
$$u(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^{\alpha} u(\rho^2 z)\, 2\rho\, d\rho =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-\rho^2)^{\alpha-1} \mathcal{D}_r^{\alpha} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_0(z,\rho e^{i\theta}) u(\rho e^{i\theta})\, d\theta \right\} 2\rho\, d\rho =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-\rho^2)^{\alpha-1}\, \mathcal{D}_r^{\alpha} P_0(z,\rho e^{i\theta})\, u(\rho e^{i\theta})\, \rho\, d\rho \frac{d\theta}{\pi} =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\alpha-1} P_\alpha(z,\zeta)\, u(\zeta)\, dm_2(\zeta),$$

где интеграл сходится по Лемме 1. Для остальных допустимых значений p, q, β доказательство следует из вложения $h(p,q,\alpha) \subset h(1,1,\beta)$ Леммы 3.

Если $v(z)$ – гармоническая сопряжённая функции $u(z)$, нормированная условием $v(0) = 0$, то вместо формулы Пуассона применяем сопряженную формулу Пуассона. Далее рассуждения повторяются. Теорема 1 доказана.

Представления (4) и (5) порождают следующие линейные интегральные операторы типа Бергмана :

$$T_\beta(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, P_\beta(z,\zeta)\, f(\zeta)\, dm_2(\zeta),$$

$$\widetilde{T}_\beta(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1}\, Q_\beta(z,\zeta)\, f(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Хорошо известны теоремы типа Форелли-Рудина (см. [5], [8], [9]), в которых осуществляется аналитическая проекция пространства $L(p,q,\alpha)$ в его голоморфное подпространство. Аналогичные вопросы возникают в других функциональных пространствах, в частности, в пространствах Бесова.

Определение. Будем говорить, что функция $f(z)$, заданная на круге $\mathbb{D}$ **принадлежит пространству Бесова** $\Lambda_\alpha^{p,q}$ $(0 < p, q \le \infty,\ \alpha \ge 0)$, если

$$\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f(z) \in L(p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha),$$

где $\widetilde{\alpha}$ – наименьшее целое число, превосходящее α, а $\mathcal{D}^\alpha$ – оператор интегродифференцирования Римана-Лиувилля. Пространство Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ снабжено нормой (квазинормой)

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}} = \|\mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f\|_{p,q,\widetilde{\alpha}-\alpha}.$$

Пусть $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ – подпространство $\Lambda_\alpha^{p,q}$, состоящее из гармонических функций. Для функции $f \in h\Lambda_\alpha^{p,q}$ индекс $\widetilde{\alpha}$ может быть заменён на любой другой индекс $\gamma > \alpha$ с эквивалентной нормой

$$\|f\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \approx \|\mathcal{D}^{\gamma} f\|_{p,q,\gamma-\alpha}.$$

Обычно пространство $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ при $1 \le p, q \le \infty$ определяется в терминах граничных значений $f(e^{i\theta})$ функции $f(z)$ через эквивалентную норму (см. [11])

$$\|f\|_{L^p} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\|\Delta_t^k f(e^{i\theta})\|_{L^p(d\theta)}^q}{|t|^{1+\alpha q}}\, dt \right)^{1/q} < +\infty, \quad 1 \le q < \infty,$$

где

$$\Delta_t^1 f(e^{i\theta}) = f(e^{i(\theta+t)}) - f(e^{i\theta}), \quad \Delta_t^k f(e^{i\theta}) = \Delta_t^1 \Delta_t^{k-1} f(e^{i\theta}), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k > \alpha.$$

В случае $q = \infty$, L_q-норма преобразуется в sup-норму.

Пространства Липшица инвариантны под действием проектора Бергмана, см. [13] – [15]. Ниже для схожих операторов

$$\Phi_{\widetilde{\alpha}}(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\widetilde{\alpha})} \iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\widetilde{\alpha}-1} P(z,\zeta)\, \mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f(\zeta)\, dm_2(\zeta),$$

$$\widetilde{\Phi}_{\widetilde{\alpha}}(f)(z) = \frac{1}{\Gamma(\widetilde{\alpha})} \iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\widetilde{\alpha}-1} Q(z,\zeta)\, \mathcal{D}^{\widetilde{\alpha}} f(\zeta)\, dm_2(\zeta),$$

исследуется та же задача для пространств Бесова. Нам необходимы две дополнительные леммы.

Лемма 4. *Для любых $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$ следующие вложения непрерывны :*

$$h\Lambda_\alpha^{p,q} \subset h(1,1,\beta), \quad \alpha \ge 0, \quad \beta > 0,$$

$$h\Lambda_\alpha^{p,q} \subset h\Lambda_0^{1,1}, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Пусть $u \in h\Lambda_\alpha^{p,q}$. Это означает, что $\mathcal{D}^\gamma u \in h(p,q,\gamma-\alpha)$ для любого $\gamma > \alpha$. Согласно вложениям (ii), (vi) Леммы 3, получим $\mathcal{D}^\gamma u \in h(1,1,\beta+\gamma)$. Используя свойства операторов дробного интегродифференцирования в пространствах $h(p,q,\alpha)$ (см. [7]), получаем $u \in h(1,1,\beta)$, откуда следует первое вложение. Чтобы доказать второе вложение заметим, что $h\Lambda_\alpha^{p,q} \subset h\Lambda_\beta^{p,q}$ с произвольным $0 < \beta < \alpha$. Это означает, что $\mathcal{D}^\delta u \in h(p,q,\delta-\beta)$ для любого $\delta > \beta$. Вновь в силу вложений (ii), (vi) и свойств оператора дробного интегродифференцирования в пространствах $h(p,q,\alpha)$, получаем $\mathcal{D}^\delta u \in h(1,1,\delta)$ для любого $\delta > 0$, т.е. $u \in h\Lambda_0^{1,1}$. Лемма 4 доказана.

Следствие. Оператор T_β тождественен на $h\Lambda_\alpha^{p,q}$ для любого $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha \ge 0$, $\beta > 0$.

Лемма 5. *При $1 \le p \le \infty$, $0 < q \le \infty$, $\alpha > 0$ и $\delta > 0$ произвольная функция $u(z) \in h\Lambda_\alpha^{p,q}$ представима в виде*

$$u(z) = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\delta-1} P(z,\zeta)\, \mathcal{D}^\delta u(\zeta)\, dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{6}$$

Доказательство. Согласно второму вложению Леммы 4, $\mathcal{D}^\delta u(z) \in h(1,1,\delta)$ для любого $\delta > 0$. По Теореме 1 представим $\mathcal{D}^\delta u(z) = T_\delta(\mathcal{D}^\delta u)(z)$, а затем, используя формулу обращения (1), проинтегрируем посредством оператора $\mathcal{D}^{-\delta}$. Лемма 5 доказана.

Теорема 2. *При $1 \le p, q \le \infty$, $\alpha > 0$, $m = \widetilde{\alpha}$ имеем*

$$\Phi_m : \Lambda_\alpha^{p,q} \longmapsto h\Lambda_\alpha^{p,q}, \quad \widetilde{\Phi}_m : \Lambda_\alpha^{p,q} \longmapsto h\Lambda_\alpha^{p,q}, \tag{7}$$

причём оператор Φ_m непрерывно проектирует пространство Бесова $\Lambda_\alpha^{p,q}$ на всё подпространство $h\Lambda_\alpha^{p,q}$.

Доказательство. Для заданной функции $f(z)$ (вообще говоря, негармонической) из $\Lambda_\alpha^{p,q}$, нужно доказать неравенство

$$\|\Phi_m(f)\|_{h\Lambda_\alpha^{p,q}} \le C\|f\|_{\Lambda_\alpha^{p,q}}, \tag{8}$$

или

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)\|_{p,q,\gamma-\alpha} \le C\|\mathcal{D}^m f\|_{p,q,m-\alpha}, \tag{9}$$

где $m \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha < m \le \alpha + 1$, $\gamma > \alpha$. Продифференцируя $\Phi_m(f)(z)$ посредством оператора $\mathcal{D}^\gamma$ и используя Лемму 1, получим

$$|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)(z)| \le C \iint_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{m-1} |\mathcal{D}^\gamma P(z,\zeta)|\, |\mathcal{D}^m f(\zeta)|\, dm_2(\zeta) \le$$

$$\le C \iint_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{m-1}}{|1-\bar{\zeta} r|^{\gamma+1}} |\mathcal{D}^m f(\zeta e^{i\theta})|\, dm_2(\zeta), \quad z = re^{i\theta}.$$

По неравенству Минковского

$$M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r) \le C \iint_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{m-1}}{|1-\bar{\zeta} r|^{\gamma+1}} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho)\, d\rho \le$$

$$\le C \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{m-1}}{(1-\rho r)^\gamma} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho)\, d\rho.$$

Если $1 \le q < \infty$, то

$$M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r) \le C \left(\int_0^r + \int_r^1 \right) \frac{(1-\rho)^{m-1}}{(1-\rho r)^\gamma} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho)\, d\rho.$$

Из неравенства треугольника имеем

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)\|_{p,q,\gamma-\alpha} = \left\|(1-r)^{\gamma-\alpha} M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f); r)\right\|_{L^q(dr/(1-r))} \le C(I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = \left\|(1-r)^{\gamma-\alpha} \int_0^r (1-\rho)^{m-\gamma-1} M_p(\mathcal{D}^m f; \rho) d\rho\right\|_{L^q(dr/(1-r))},$$

$$I_2 = \left\| (1-r)^{-\alpha} \int_r^1 (1-\rho)^{m-1} M_p(\mathcal{D}^m f;\rho) d\rho \right\|_{L^q(dr/(1-r))}.$$

Оценим интегралы I_1 и I_2 по отдельности, используя неравенства Харди (2) и (3),

$$I_1^q \le C \int_0^1 (1-r)^{(\gamma-\alpha)q-1} \left(\frac{1-r}{(1-r)^{m-\gamma-1}} M_p(\mathcal{D}^m f;r) \right)^q dr = C\|\mathcal{D}^m f\|^q_{p,q,m-\alpha},$$

$$I_2^q \le C \int_0^1 (1-r)^{-\alpha q-1} \left[(1-r)^{m+1} M_p(\mathcal{D}^m f;r) \right]^q dr = C\|\mathcal{D}^m f\|^q_{p,q,-\alpha}.$$

Следовательно, неравенства (8) и (9) выполнены. Если же $q=\infty$, то

$$M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f);r) \le \frac{\|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha}}{(1-\rho)^{m-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$M_p(\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f);r) \le C\|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha} \int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\alpha-1}}{(1-\rho r)^\gamma} d\rho \le$$

$$\le C\|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha} \frac{1}{(1-r)^{\gamma-\alpha}}.$$

Таким образом,

$$\|\mathcal{D}^\gamma \Phi_m(f)\|_{p,\infty,\gamma-\alpha} \le C\|\mathcal{D}^m f\|_{p,\infty,m-\alpha},$$

что и требовалось доказать. Для завершения доказательства остаётся заметить, что сюръективность первого отображения (7) следует из Леммы 5.

Теорема 3. *При* $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha \ge 0$, $\beta > 0$ *операторы*

$$T_\beta : L(p,q,-\alpha) \longmapsto h\Lambda^{p,q}_\alpha, \quad \widetilde{T}_\beta : L(p,q,-\alpha) \longmapsto h\Lambda^{p,q}_\alpha$$

ограничены.

Доказательства. Достаточно доказать теорему для оператора T_β. Для заданной функции $\varphi(z) \in L(p,q,-\alpha)$, $1 \le p,q \le \infty$, $\alpha \ge 0$, необходимо доказать, что при любом $\beta > 0$

$$\|T_\beta(\varphi)\|_{h\Lambda^{p,q}_\alpha} \le C\|\varphi\|_{p,q,-\alpha}. \tag{10}$$

Положим $f(z) = T_\beta(\varphi)(z)$. Тогда для любого $\gamma > \alpha$ неравенство (10) можно записать в виде

$$\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{p,q,\gamma-\alpha} \le C\|\varphi\|_{p,q,-\alpha}. \tag{11}$$

Чтобы доказать (11), продифференцируем равенство $f(z) = T_\beta(\varphi)(z)$ посредством оператора $\mathcal{D}^\gamma$:

$$\mathcal{D}^\gamma f(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} \mathcal{D}^\gamma P_\beta(z,\zeta)\varphi(\zeta)\, dm_2(\zeta).$$

Пусть $p = q = 1$. Тогда

$$\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{1,1,\gamma-\alpha} \le C \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\gamma-\alpha-1} |\mathcal{D}^\gamma f(z)|\, dm_2(z) \le$$

$$\le C \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\gamma-\alpha-1} \left[\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} |\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}^\beta P(z,\zeta)|\, |\varphi(\zeta)|\, dm_2(\zeta) \right] dm_2(z) \le$$

$$\le C \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} |\varphi(\zeta)| \left[\iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|z|^2)^{\gamma-\alpha-1} |\mathcal{D}^\gamma \mathcal{D}^\beta P(z,\zeta)|\, dm_2(z) \right] dm_2(\zeta).$$

Используя Лемму 1, получим

$$\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{1,1,\gamma-\alpha} \le C \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\beta-1} |\varphi(\zeta)| \left[\iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^{\gamma-\alpha-1}}{|1-\bar\zeta z|^{\gamma+\beta+1}}\, dm_2(z) \right] dm_2(\zeta) \le$$

$$\le C(\alpha,\beta,\gamma) \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{-\alpha-1} |\varphi(\zeta)|\, dm_2(\zeta).$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{D}^\gamma f\|_{1,1,\gamma-\alpha} \le C(\alpha,\beta,\gamma)\, \|\varphi\|_{1,1,-\alpha}. \tag{12}$$

Пусть теперь $p = q = \infty$. Тогда

$$|\mathcal{D}^\gamma f(z)| \le \frac{1}{\Gamma(\beta)} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\alpha+\beta-1} |\mathcal{D}^\gamma P_\beta(z,\zeta)|\, (1-|\zeta|^2)^{-\alpha} |\varphi(\zeta)|\, dm_2(\zeta) \le$$

$$\le C(\alpha,\beta)\, \|\varphi\|_{\infty,\infty,-\alpha} \iint\limits_{\mathbb{D}} (1-|\zeta|^2)^{\alpha+\beta-1} |\mathcal{D}^\gamma P_\beta(z,\zeta)|\, dm_2(\zeta) \le$$

$$\le C(\alpha,\beta,\gamma)\, \|\varphi\|_{\infty,\infty,-\alpha} \iint\limits_{\mathbb{D}} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha+\beta-1}}{|1-\bar\zeta z|^{\gamma+\beta+1}}\, dm_2(\zeta) \le$$

$$\le C(\alpha,\beta,\gamma)\, \|\varphi\|_{\infty,\infty,-\alpha}\, \frac{1}{(1-|z|)^{\gamma-\alpha}}.$$

Следовательно,

$$||\mathcal{D}^{\gamma} f||_{\infty,\infty,\gamma-\alpha} \le C(\alpha,\beta,\gamma)\, ||\varphi||_{\infty,\infty,-\alpha}. \tag{13}$$

Согласно одному варианту интерполяционной теоремы Рисса-Торина [16] неравенства (12) и (13) влекут (11) для всех $1 \le p,q \le \infty$. Теорема 3 доказана. Отметим, что при $p = q = \infty$, $\alpha = 0$ Теорема 3, в частности, утверждает ограниченность оператора T_β из $L^\infty(\mathbb{D})$ в пространство Блоха $\mathcal{B}h = h\Lambda_0^{\infty,\infty}$ гармонических функций. Этот факт хорошо известен для голоморфных функций, см. [5], [17].

Abstract. A Bergman type operator is constructed on the unit disc, that continuously projects a Besov space onto its harmonic subspace.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals (II)", Math. Z., vol. 34, pp. 403 – 439, 1932.
2. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", Quart. J. Math. (Oxford), vol. 12, pp. 221 – 256, 1941.
3. S. Bergman, "Über unendliche Hermitische Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen", Math. Z., vol. 29, pp. 641 – 677, 1929.
4. М. М. Джрбашян, "О проблеме представимости аналитических функций", Сообщения Инст. Матем. и Мех. АН Арм. ССР, том 2, стр. 3 – 40, 1948.
5. A. E. Djrbashian, F. A. Shamoyan, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner-Texte zur Math., b. 105, Leipzig, 1988.
6. H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York/Berlin/Heidelberg, 2000.
7. T. M. Flett, "The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities", J. Math. Anal. Appl., vol. 38, pp. 746 – 765, 1972.
8. F. Forelli, W. Rudin, "Projections on spaces of holomorphic functions in balls", Indiana Univ. Math. J., vol. 24, pp. 593 – 602, 1974.
9. M. Mateljević, "Bounded projections and decompositions in spaces of holomorphic functions", Mat. Vesnik, vol. 38, pp. 521 – 528, 1986.
10. М. М. Джрбашян, Интегральные Преобразования и Представления Функций в Комплексной Области, Наука, Москва, 1966.
11. И. М. Стейн, Сингулярные Интегралы и Дифференциальные Свойства Функций, Мир, Москва, 1973.
12. K. L. Avetisyan, "Fractional integration and integral representations in weighted classes of harmonic functions", Analysis Math., vol. 26, pp. 161 – 174, 2000.
13. E. M. Stein, "Singular integrals and estimates for the Cauchy-Riemann equations", Bull. Amer. Math. Soc., vol. 79, pp. 440 – 445, 1973.
14. E. Ligocka, "The Hölder continuity of the Bergman projection and proper holomorphic mappings", Studia Math., vol. 80, pp. 89 – 107, 1984.
15. A. E. Djrbashian, "Integral representations for Riesz systems in the unit ball and some applications", Proc. Amer. Math. Soc., vol. 117, pp. 395 – 403, 1993.

16. A. Benedek, R. Panzone, "The spaces L^P, with mixed norm", Duke Math. J., vol. 28, pp. 301 – 324, 1961.
17. R. R. Coifman, R. Rochberg, G. Weiss, "Factorization theorems for Hardy spaces in several variables", Ann. of Math., vol. 103, pp. 611 – 635, 1976.

Поступила 26 ноября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 17–32

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА В ПОЛУПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ

Г. М. Айрапетян, П. Э. Меликсетян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье рассматривается граничная задача Гильберта в полуплоскости для весовых пространств. Показано, что если весовая функция является RO-меняющейся, то задача нормально разрешима. Получены явные выражения для решений соответствующих однородной и неоднородной задачи.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Π^+ и Π^- – верхняя и нижняя полуплоскости комплексной плоскости $z = x + iy$, соответственно. Через B обозначим класс аналитических в $\Pi^+ \cup \Pi^-$ функций $\Phi(z)$, удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$ условию

$$|\Phi(z)| < A|z|^m, \quad \text{когда} \quad |Im\, z| > y_0,$$

где $m \geq 0$ – некоторое число, зависящее от $\Phi(z)$, а A – постоянное, которое может зависеть от y_0. Действительнозначная, положительная и измеримая на числовой оси функция $\rho(x)$ называется **RO-меняющейся в бесконечности** (см. [1]), если её можно представить в виде

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(g_1(x) + \int_0^x \frac{g_2(y)}{y}\, dy\right), & \text{для } x \geq 0, \\ \exp\left(g_1(x) + \int_x^0 \frac{g_2(y)}{y}\, dy\right), & \text{для } x \leq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

где функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ ограничены на действительной оси.

В настоящей работе рассматривается задача Гильберта в следующей постановке : определить функцию $\Phi(z) \in B$, удовлетворяющую граничному условию

$$\lim_{y \to +0} \|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{1.2}$$

где ρ – RO-меняющаяся функция в бесконечности, $f(x) \in L^1(\rho)$, а $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ – сужение функции $\Phi(z)$ на Π^+ и Π^- соответственно. Будем предполагать, что функция $a(x)$ отлична от нуля, принадлежит классу $\mathbf{C}^\mu(-\infty;+\infty)$, $\mu > 2^{-1}$, включая бесконечно удалённую точку, т.е. существуют $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$, $a(-\infty) = a(+\infty) = 1$, причём

$$|a(x_1) - a(x_2)| < C\left|\frac{1}{i+x_1} - \frac{1}{i+x_2}\right|^\mu.$$

Так как функция $\rho(x)$ RO-меняющаяся, то легко установить, что число

$$\alpha = sup\{\beta : |x|^\beta \rho(x) \in L^\infty(-\infty;+\infty)\} \tag{1.3}$$

конечно. Число α называется **порядком особенности** функции $\rho(x)$ на бесконечности. В данной работе предполагается, что $\alpha \geq 0$. Ясно, что $\widetilde{\rho}(x) = \rho(x)|x+i|^\alpha$ также является RO-меняющейся. Скажем, что весовая функция ρ принадлежит классу R_α, если функция $\widetilde{\rho}(x)$ допускает представление (1.1), где функция $g_2(x)$ удовлетворяет условию

$$\overline{\lim} g_2(x) < 1 - \{\alpha\}, \quad \underline{\lim} g_2(x) > -\{\alpha\}, \quad |x| \to \infty,$$

если α – нецелое число, и

$$\overline{\lim} g_2(x) \leq 0, \quad \underline{\lim} g_2(x) > -1, \quad |x| \to \infty,$$

если α – целое число.

В круге и в полуплоскости вышеприведённая задача при $\rho \equiv 1$ была исследована в [2], [3]. Граничные задачи в классах аналитических функций и тесно связанная с ними теория сингулярных интегралов в весовых пространствах $L^p(d\mu)$, где $d\mu = \rho(x)dx + d\mu_s$ ($d\mu_s$ – сингулярная часть $d\mu$), были рассмотрены в [4] – [11]. В частности в работе [8] было установлено, что для ограниченности сингулярного оператора в пространствах $L^p(d\mu)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера $d\mu$ была абсолютно непрерывной и функция $\rho(x)$ удовлетворяла условию Макентхуапта.

Отметим, что для таких мер, функции из $L^p(d\mu)$ абсолютно интегрируемы по мере Лебега, т.е. они принадлежат классу L^1. Граничные задачи в классах аналитических функций, в частности задача Дирихле в случае, когда граничное условие понимается в смысле $L^p(d\mu)$-сходимости, были исследованы в весовых пространствах независимо от условия Макентхуапта в [12] – [15].

Задача Дирихле в единичном круге для весовых функций, RO-меняющихся в особых точках, рассмотрена в [13]. В полуплоскости эта задача для степенных весовых функций вида $O(|x - x_0|^{\alpha})$, где α – неотрицательное целое число, была рассмотрена в [14]. Случай весовых функций, RO-меняющихся в бесконечности, исследован в [15].

В настоящей статье доказывается, что для весовых функций, RO-меняющихся в бесконечности, задача (1.2) нормально разрешима, т.е. функции, для которых данная задача разрешима, образуют замкнутое подпространство в $L^1(\rho)$, и получены явные выражения для решений однородной и неоднородной задачи.

Будем пользоватся следующими обозначениями : если функция $\Phi(z)$ определена на Π^+ и Π^-, то через $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ будем обозначать сужения функции $\Phi(z)$ на Π^+ и Π^- соответственно. Обратное, если функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$ определены на Π^+ и Π^-, то под $\Phi(z)$ будем понимать функцию

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), & \text{для } z \in \Pi^+, \\ \Phi^-(z), & \text{для } z \in \Pi^-. \end{cases}$$

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $\kappa = ind\, a(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$. Так как

$$ind\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\kappa} = -\kappa,$$

то обозначив

$$a_1(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\kappa} a(t),$$

будем иметь $ind\, a_1(t) = 0$, $a_1(-\infty) = a_1(+\infty) = 1$. Из условий, налагаемых на функцию $a(t)$ следует, что $\ln a_1(t)$ непрерывна на $(-\infty; +\infty)$ и удовлетворяет неравенству $|\ln a_1(t)| < |t|^{-\mu}$, $|t| > A$ для некоторого $A > 0$.

Положим

$$S^+(z) = \exp(\varphi(z)), \quad z \in \Pi^+,$$

$$S^-(z) = \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\kappa} \exp(\varphi(z)), \quad z \in \Pi^-, \tag{2.1}$$

где

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln a_1(t)\, dt}{t-z}, \quad z \in \Pi^+ \cup \Pi^-.$$

Применяя формулы Сохоцкого-Племеля, получим $a(x) = S^+(x)/S^-(x)$.

Лемма 1. a) *Функции $S^+(z)$ и $(S^+(z))^{-1}$ ограничены в Π^+,*

b) *функции $S^-(z)$ и $(S^-(z))^{-1}$ ограничены в $-2^{-1} \le Imz \le 0$, причем в точке $z = -i$ функция $S^-(z)$ имеет ноль порядка κ, если $\kappa \ge 1$ и полюс порядка $|\kappa|$, если $\kappa \le -1$.*

Доказательство. Из определения $S^+(z)$ имеем

$$|S^+(z)| = \exp\left(Re\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln a_1(t)\,dt}{t-z}\right) = \exp\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\ln a_1(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}\right).$$

Поэтому

$$|S^+(z)| \le e^M, \quad M = \max\ln a_1(t),$$

и данное неравенство верно для функции $\left(S^+(z)\right)^{-1}$. Так как

$$0 < c_0 < \left|\frac{z+i}{z-i}\right| < C_0,$$

при $-2^{-1} \le Im\, z \le 0$, то можно применить выше приведённые рассуждения для доказательства утверждения b). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для некоторого постоянного A справедлива следующая оценка*

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| < \frac{Ay^\mu}{|x+i|^{2\mu}}.$$

Доказательство. В силу (2.1) имеем

$$|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \le$$

$$\le B|S^+(x+iy)|\left|1-\exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y\ln a_1(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2}+\ln a_1(x)\right)\right|.$$

Учитывая Лемму 1 и оценки $|1-e^z| < A|z|$, $|z| < M$, где A – постоянная, зависящая от M, получаем

$$|x+i|^{2\mu}|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| \le C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|x+i|^{2\mu}|\ln a_1(t)-\ln a_1(x)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt \le$$

$$\le C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|x+i|^\mu|t-x|^\mu}{|t+i|^\mu((t-x)^2+y^2)}\,dt \le C(I_1(x,y)+I_2(x,y)),$$

где

$$I_1(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|t-x|^\mu}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$I_2(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{y|t-x|^{2\mu}}{|t+i|^\mu((t-x)^2+y^2)}\,dt.$$

Функцию $I_1(x,y)$ представим в виде $I_1(x,y) = I_1'(x,y) + I_1''(x,y)$, где

$$I_1'(x,y) = \int_{|t-x|<y}\frac{y|t-x|^\mu}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$I_1''(x,y) = \int_{|t-x|>y}\frac{y|t-x|^\mu}{(t-x)^2+y^2}\,dt.$$

Поскольку

$$|I_1'(x,y)| \le \left|\int_{-y}^{y}\frac{y^{1+\mu}}{y^2}\,dt\right| = 2y^\mu, \quad |I_1''(x,y)| < \left|\int_{|t|>y}\frac{yt^\mu}{t^2}\,dt\right| = 2y^\mu,$$

получим $|I_1(x,y)| < 2Cy^\mu$. Аналогично, $|I_2(x,y)| < Cy^\mu$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть $\gamma \geq 1$, а κ – целое число. Тогда*

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\,\frac{A_1 y}{|x+i|}. \tag{2.2}$$

Если $x > 2\gamma y$, то

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \geq |x+iy|^{\gamma}\,\frac{A_2 y}{|x+i|}, \tag{2.3}$$

где A_1 и A_2 – положительные постоянные.

Доказательство. Пусть $\kappa \geq 0$. Имеем

$$I(x,y) = \left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\left|\left(\frac{x+iy}{x+iy+i}\right)^{\kappa} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{x-iy}{x-iy+i}\right)^{\kappa}\right| + |x+iy|^{\gamma}\left|\frac{x-iy}{x-iy+i}\right|^{\kappa}\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right|.$$

Так как

$$\left|\left(\frac{x+iy}{x+iy+i}\right)^{\kappa} - \left(\frac{x-iy}{x-iy+i}\right)^{\kappa}\right| \leq \frac{B_1 y}{|x+i|^2},$$

$$\left|\frac{x-iy}{x-iy+i}\right|^{\kappa}\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right| \leq \frac{B_2 y}{|x+i|},$$

то получаем

$$I(x,y) \leq |x+iy|^{\gamma}\frac{A_1 y}{|x+i|}.$$

Если $\kappa < 0$, то

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\left|\left(\frac{x+iy+i}{x+iy}\right)^{|\kappa|} - \left(\frac{x-iy+i}{x-iy}\right)^{|\kappa|}\right| +$$

$$+ |x+iy|^{\gamma}\left|\frac{x-iy+i}{x-iy}\right|^{|\kappa|}\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right| \leq |x+iy|^{\gamma}\frac{A_1 y}{|x+i|},$$

откуда следует (2.2). Чтобы доказать (2.3) заметим, что

$$\left|\left(\frac{x+iy}{x+iy+i}\right)^{\kappa} - \left(\frac{x-iy}{x-iy+i}\right)^{\kappa}\right| \leq \frac{B_2 y}{|x+i|^2},$$

а при $|x| > 2\gamma y$ (см. [15])

$$\left|1-\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^{\gamma}\right| > \frac{By}{|x+iy|}.$$

Следовательно, для некоторого постоянного $A_2 > 0$, будем иметь

$$\left|\frac{(x+iy)^{\kappa+\gamma}}{(x+iy+i)^{\kappa}} - \frac{(x-iy)^{\kappa+\gamma}}{(x-iy+i)^{\kappa}}\right| \geq \frac{1}{2}|x+iy|^{\gamma}\frac{By}{|x+i|} = |x+iy|^{\gamma}\frac{A_2 y}{|x+i|}.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $f(x) \in L^1(\rho)$ и $\Phi(z) \in B$ удовлетворяет условию (1.2).*

a) Если $\kappa + \gamma \geq 0$, то функция $\Phi(z)$ представима в виде (2.1), где $Q(z) \equiv 0$, и

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^{+}(t)(t+i)^{\gamma}} \frac{dt}{t-z} + S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma} \left(Q(z) + P(z)\right), \tag{2.4}$$

где $\gamma = [\alpha]$, $Q(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi(z)\left(S^{-}(z)\right)^{-1}(z+i)^{-\gamma}$ в точке $z = -i$, $P(z)$ – некоторый многочлен, а $S^{\pm}(z)$ определяются по формуле (2.1).

b) Если $\kappa + \gamma < 0$, то функцию $\Phi(z)$ можно представить в виде (2.4), где $Q(z) \equiv 0$, и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^{+}(t)(t+i)^{\gamma+k+1}}\, dt + P^{(k)}(-i) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, -(\gamma+\kappa) - 1.$$

Доказательство. Пусть $|\Phi(z)| < A|z|^m$, $Im\ z > y_0 > 0$. Положим

$$\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy) = f_y(x), \tag{2.5}$$

откуда вытекает $f_y(x) \in L^1(\rho)$ и $f_y(x) \to f(x)$ в $L^1(\rho)$, при $y \to +0$. Умножая (2.5) на $(x+i)^{-\gamma}$, получим

$$\frac{\Phi^{+}(x+iy)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}} - \frac{\Phi^{-}(x-iy)}{S^{-}(x)(x+i)^{\gamma}} = \frac{f_y(x)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}}.$$

Полагая

$$\Phi_y^{+}(z) = \frac{\Phi^{+}(z+iy)}{S^{+}(z)(z+i)^{\gamma}}, \quad z \in \Pi^{+},$$

$$\Phi_y^{-}(z) = \frac{\Phi^{-}(z-iy)}{S^{-}(z)(z-i)^{\gamma}}, \quad z \in \Pi^{-},$$

можно записать

$$\Phi_y^{+}(x) - \Phi_y^{-}(x) = \frac{f_y(x)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}}. \tag{2.6}$$

Если $\kappa + \gamma \geq 0$, то функция $\Phi_y^{-}(z)$ имеет полюс порядка $\kappa + \gamma$ в точке $z = -i$. Представим (2.6) в виде

$$\Phi_y^{+}(x) - \widetilde{\Phi}_y^{-}(x) = \frac{f_y(x)}{S^{+}(x)(x+i)^{\gamma}} + Q_y(x), \tag{2.7}$$

где $Q_y(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi_y^{-}(z)$ в точке $z = -i$,

$$Q_y(z) = \frac{A_1(y)}{z+i} + \cdots + \frac{A_{\kappa+\gamma}(y)}{(z+i)^{\kappa+\gamma}},$$

а $\widetilde{\Phi}_y^-(z) = \Phi_y^-(z) - Q_y(z)$. Так как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f_y(x)|}{|S^+(x)||x+i|^\gamma} \frac{dx}{1+|x|} < \infty,$$

то в силу (2.7) имеем

$$\Phi_y^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_y(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z} + P_y(z) + Q_y(z), \tag{2.8}$$

где $P_y(z)$ – некоторый многочлен, который определяется однозначно через $\Phi_y(z)$. Переходя к пределу в (2.8) при $y \to +0$, получим

$$\frac{\Phi^\pm(z)}{S^\pm(z)(z+i)^\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z} + P(z) + Q(z),$$

где $Q(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi^-(z)\left(S^-(z)(z+i)^\gamma\right)^{-1}$ в точке $z = -i$.

Если $\kappa + \gamma < 0$, то $\Phi_y^-(z)$ голоморфна в Π^-, поэтому ее главная часть обращается в нуль, т.е. $Q(z) \equiv 0$. С другой стороны, функция $\Phi(z)\left(S^-(z)\right)^{-1}(z+i)^{-\gamma}$ имеет ноль порядка $|\kappa+\gamma|$ в точке $z = -i$. Следовательно, $f(x)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^{\gamma+k+1}}\, dt + P^{(k)}(-i) = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, -(\gamma+\kappa) - 1.$$

Лемма 4 доказана.

Функция $g(x)$, заданная на интервале (a,b), называется **почти монотонно возрастающей**, если существует постоянное $A > 0$ такое, что $g(x') < Ag(x'')$ для любых $x' < x''$ из (a,b). Почти монотонно убывающая функция определяется аналогично.

Лемма 5. *Пусть $\rho(x) \in R_\alpha$ и α – нецелое число. Существуют действительные числа $\delta_1 \in (0, 1 - \{\alpha\})$ и $\delta_2 > 0$, и некоторые неотрицательные постоянные a и A такие, что*

$$a|x+i|^{-\delta_1} < \bar{\rho}(x) < A|x+i|^{\delta_2}.$$

Доказательство. Второе неравенство следует из определения α (см. (1.3)). Чтобы доказать первое неравенство отметим, что число $\delta_1 \in (0, 1 - \{\alpha\})$ можно выбрать так, чтобы функция $|x+i|^{\delta_1}\bar{\rho}(x)$ почти монотонно возрастала на $(0,\infty)$ и почти монотонно убывала на $(-\infty, 0)$ (см. [15]). Полагая $\inf|x+i|^{\delta_1}\bar{\rho}(x) = a > 0$, завершаем доказательство.

Лемма 6. *Пусть* $\beta \in [0,1)$ *и*

$$I(t,y) = |t+i|^{\beta} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}}{|t-x+iy|} \frac{dx}{|x+i|^{\mu+\beta}}.$$

Тогда

$$\sup_{-\infty<t<\infty} I(t,y) < \infty.$$

Доказательство. Функцию $I(t,y)$ запишем в виде $I(t,y) = I_1(t,y) + I_2(t,y)$, где

$$I_1(t,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}}{|t-x+iy|} \frac{dx}{|x+i|^{\mu}},$$

$$I_2(t,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}(|t+i|^{\beta} - |x+i|^{\beta})}{|t-x+iy||x+i|^{\mu+\beta}}\, dx.$$

Так как

$$\sup_{0<y<1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{(|x|+y)^{1+\mu}} < \infty,$$

то в силу неравенства

$$\frac{1}{a^{\alpha} b^{\beta}} < \frac{1}{a^{\alpha+\beta}} + \frac{1}{b^{\alpha+\beta}},$$

получаем

$$I_1(t,y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{|t-x+iy|^{1+\mu}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{|x+i|^{1+\mu}} \le$$

$$\le A\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{(|t-x|+y)^{1+\mu}}\right) < A_1,$$

$$I_2(t,y) \le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}|x-t|^{\beta}\, dx}{|t-x+iy||x+i|^{\mu+\beta}} \le A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{|t-x+iy|^{1-\beta}|x+i|^{\mu+\beta}} \le$$

$$\le A\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{|t-x+iy|^{1+\mu}} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{|x+i|^{1+\mu}}\right) \le$$

$$\le A\left(1 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}\, dx}{(|t-x|+y)^{1+\mu}}\right) < A_1.$$

Лемма 6 доказана.

Рассмотрим

$$I(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^{\mu}}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)\, dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}}.$$

Лемма 7.

$$\sup_{-\infty<t<\infty} I(t,y) < \infty.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\sup I(t,y) < \infty$ при $|t| > 1$. В случае $t > 1$ имеем

$$I(t,y) = I_1(t,y) + I_2(t,y) + I_3(t,y) + I_4(t,y),$$

где

$$I_k(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{R_k} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}}, \quad k = 1,2,3,4,$$

и

$$R_1 = (-\infty, 0), \quad R_2 = (0, 2^{-1}t), \quad R_3 = (2^{-1}t, 2t), \quad R_4 = (2t, \infty).$$

По Лемме 5 $\widetilde{\rho}(x) < C|x+i|^\delta$, где $\delta > 0$, поэтому имеем

$$I_1(t,y) \le C\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^0 \frac{y^\mu\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}+1-\delta}} < C\frac{y^\mu}{\widetilde{\rho}(t)|t+i|^{2\mu-\delta}}.$$

Выбирая $\delta < 2\mu - 1$ и учитывая Лемму 5, получим $\sup I_1(t,y) < \infty$, $t \in [1,\infty)$. Далее, для некоторого $0 < \delta < 1 - \{\alpha\}$, функция $|x+i|^\delta \widetilde{\rho}(x)$ почти монотонна на $(0,\infty)$, (см. [15]). Следовательно

$$I_2(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_0^{2^{-1}t} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{|x+i|^\delta \widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}+\delta}}\,dx \le$$

$$\le \frac{|t+i|^{\{\alpha\}+\delta}}{|t+i|} \int_0^{2^{-1}t} \frac{y^\mu\,dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}+\delta}} < \frac{Ay^\mu}{|t+i|^{2\mu}}.$$

Отсюда следует $\sup I_2(t,y) < \infty$, $t \in [1,\infty)$.
Так как (см. [15])

$$\widetilde{\rho}(x) - \widetilde{\rho}(t) < C\widetilde{\rho}(t)|x-t||t|^{-1}, \quad x \in (2^{-1}t, 2t),$$

то имеем

$$I_3(t,y) \le |t+i|^{\{\alpha\}} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}} + A|t+i|^{\{\alpha\}} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y^\mu}{|t||x+i|^{2\mu+\{\alpha\}}} \le$$

$$\le A_1\left(1 + \frac{y^\mu}{|t+i|^{2\mu}}\right) < \frac{A_2 y^\mu}{|t+i|^{2\mu}}.$$

Теперь выберем $\delta \in (-\{\alpha\}, 0)$ так, чтобы функция $|x+i|^{-\delta}\widetilde{\rho}(x)$ почти монотонно убывает на $(0,\infty)$. Следовательно,

$$I_4(t,y) = \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{2t}^{\infty} \frac{y^\mu}{|t-x+iy|} \frac{|x+i|^{-\delta}\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}-\delta}}\,dx \le$$

$$\le \frac{|t+i|^{\{\alpha\}-\delta}}{|t+i|} \int_{2t}^{\infty} \frac{y^\mu dx}{|x+i|^{2\mu+\{\alpha\}-\delta}} < \frac{Ay^\mu}{|t+i|^{2\mu}}.$$

Таким образом $\sup I(t,y) < \infty$, $t > 1$. Аналогично можно доказать, что $I(t,y) < \infty$, $t < -1$. Лемма 7 доказана.

§3. ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Пусть α определена в (1.3). Будем говорить, что функция $\rho(x)$ принадлежит классу R_0, если выполняется хотя бы одно из следующих условий : a) $\alpha < 1$, b) α – нецелое число, c) $\alpha \geq 1$ – целое число и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{1+|x|}\, dx < \infty. \tag{3.1}$$

Теорема 1. a) *Если $\kappa + \gamma \geq 0$ и $\rho(x) \in R_0$, то общее решение однородной задачи можно представить в виде*

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma} \sum_{k=0}^{\kappa+\gamma} \frac{A_k}{(z+i)^k}, \tag{3.2}$$

где A_k, $k = 1, ..., (\kappa+\gamma)$ – произвольные комплексные числа. Если $\rho(x) \notin R_0$, то общее решение однородной задачи можно представить в виде (3.2). где $A_0 = 0$.
b) *Если $\kappa + \gamma < 0$, то $\Phi(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Пусть $f(x) \equiv 0$. Из Леммы 4 следует, что функция $\Phi(z)$, удовлетворяющая однородному условию (1.2) :

$$\lim_{y\to+0} \|\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy)\|_{L^1(\rho)} = 0,$$

может быть представлена в виде

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)(z+i)^{\gamma}\left(Q(z) + P(z)\right), \tag{3.3}$$

где $P(z)$ – некоторый многочлен, а $Q(z)$ – главная часть разложения Лорана функции $\Phi(z)(S^{-}(z))^{-1}(z+i)^{-\gamma}$ в точке $z = -i$.
Нам следует установить, что если $\Phi(z)$ удовлетворяет однородному условию, то $P(z) = Const$. Действительно, из (3.3) имеем

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)(z+i)^{-\kappa} \sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m} A_k (z+i)^k,$$

где A_k – некоторые комплексные числа. Так как

$$\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy) = I_1(x,y) + I_2(x,y),$$

где

$$I_1(x,y) = \left(S^{+}(x+iy) - a(x)S^{-}(x-iy)\right) \sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m} A_k (x+iy+i)^{k-\kappa},$$

$$I_2(x,y) = a(x)S^-(x-iy)\sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m} A_k\left((x+iy+i)^{k-\kappa}-(x-iy+i)^{k-\kappa}\right),$$

в силу Леммы 2, получим

$$|I_1(x,y)| < \frac{Cy^\mu}{|x+i|^{2\mu}}|x+iy+i|^{\gamma+m} \le Cy^\mu|x+i|^{\gamma+m-2\mu}.$$

Далее положим $I_2(x,y) = I_2'(x,y) + I_2''(x,y)$, где

$$I_2'(x,y) = a(x)S^-(x-iy)\left((x+iy+i)^{\gamma+m}-(x-iy+i)^{\gamma+m}\right),$$

$$I_2''(x,y) = a(x)S^-(x-iy)\sum_{k=0}^{\kappa+\gamma+m-1} A_k\left((x+iy+i)^{k-\kappa}-(x-iy+i)^{k-\kappa}\right).$$

По Лемме 3,

$$|I_2'(x,y)| < A_1y|x+i|^{\gamma+m-1}, \quad x\in(-\infty;+\infty),$$

$$|I_2'(x,y)| > A_2y|x+i|^{\gamma+m-1}, \quad |x|>2(m+\gamma),$$

$$|I_2''(x,y)| < A_3y|x+i|^{\gamma+m-2}, \quad x\in(-\infty;+\infty).$$

Следовательно, для любого $m\ge 0$ и $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$A_1y|x+i|^{\gamma+m-1} < |\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)| < A_2y|x+i|^{\gamma+m-1}.$$

Отметим, что функция $\Phi(z)$ удовлетворяет однородному условию (1.2) тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x+i|^{\gamma+m-1}\rho(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}|x+i|^{\gamma+m-1-\alpha}\widetilde{\rho}(x)dx \tag{3.4}$$

сходится. Из Леммы 5 следует, что

$$a|x+i|^{\gamma+m-1-\alpha}\widetilde{\rho}(x) < A|x+i|^{m-1-\{\alpha\}+\delta_2},$$

где $\delta_1\in(0,1-\{\alpha\})$, $\delta_2>0$. Теперь, если $m\ge 1$, то $m-1-\{\alpha\}-\delta_1 > -\{\alpha\}-(1-\{\alpha\}) > -1$ и интеграл (3.4) расходится. Если $m=0$, то $m-1-\{\alpha\}+\delta_2<-1$ при $\delta_2<\{\alpha\}$ и интеграл (3.4) сходится. Это доказывает утверждение a) в случае, когда α есть нецелое число.

Пусть теперь α целое число. Выше приведенными рассуждениями получим

$$A_1y|x+i|^{m-1}\widetilde{\rho}(x) < |\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)|\rho(x) < A_2y|x+i|^{m-1}\widetilde{\rho}(x).$$

Если $m\ge 0$, то соответствующий интеграл в (3.4) не сходится. При $m=0$ сходимость интеграла в (3.4) равносильно (3.1). Этим завершается доказательство утверждения a). Утверждение b) следует из (3.3), так как в случае $Q(z)\equiv 0$, $P(z)=Const$ и $\Phi(z)$ имеет полюс в точке $z=-i$. Теорема 1 доказана.

§4. НЕОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 8. *Пусть $f(x) \in \mathbf{C}^{\alpha}(-\infty;\infty)$ и $f(x) = 0$, если $|x| \geq A > 0$. Тогда*

$$\lim_{y\to+0} \|\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy) - f(x)\|_{L^{1}(\rho)} = 0.$$

Доказательство. Функцию $\Phi(z)$ можно представить в виде

$$\Phi^{\pm}(z) = S^{\pm}(z)F(z), \quad F(z) = \frac{(z+i)^{\gamma}}{2\pi i}\int_{-A}^{A}\frac{f(t)}{S^{+}(t)(t+i)^{\gamma}}\frac{dt}{t-z}.$$

Следовательно,

$$\Phi^{+}(x+iy) - a(x)\Phi^{-}(x-iy) - f(x) = I_1(x,y) + I_2(x,y) - f(x),$$

где

$$I_1(x,y) = (S^{+}(x+iy) - a(x)S^{-}(x-iy))F^{+}(x+iy),$$

$$I_2(x,y) = a(x)S^{-}(x-iy)(F^{+}(x+iy) - F^{-}(x-iy)).$$

По формуле Сохоцкого–Племеля имеем

$$S^{+}(x+iy) - a(x)S^{-}(x-iy) \to 0$$

равномерно на $(-2A, 2A)$ при $y \to 0$. Так как

$$\int_{-2A}^{2A}|I_1(x,y)|\rho(x)\,dx \leq C\int_{-2A}^{2A}|I_1(x,y)|\,dx \leq$$

$$\leq C_1\int_{-2A}^{2A}|S^{+}(x+iy) - a(x)S^{-}(x-iy)|\,dx,$$

то имеем

$$\lim_{y\to+0}\int_{-2A}^{2A}|I_1(x,y)|\rho(x)\,dx = 0.$$

Аналогично, поскольку равномерно на $(-2A, 2A)$

$$F^{+}(x+iy) - F^{-}(x-iy) \to \frac{f(x)}{S^{+}(x)}, \quad y \to 0,$$

имеем

$$\lim_{y\to+0}\int_{-2A}^{2A}|I_2(x,y)|\rho(x)\,dx = 0.$$

Пусть теперь $|x| > 2A$, тогда $F_n(z) = c_1 z^{\gamma-1} + c_2 z^{\gamma-2} + \cdots$ и по Леммее 2

$$\int_{|x|>2A} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx \le \int_{|x|>2A} \frac{Ay^\mu}{|x+i|^{2\mu}}|x+iy|^{\gamma-1}\rho(x)\,dx \le$$

$$\le Ay^\mu \int_{|x|>2A} \frac{|x+iy|^{\gamma-1}}{|x+i|^{2\mu}}\rho(x)\,dx \le Ay^\mu \int_{|x|>2A} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{1+2\mu+\{\alpha\}}}\,dx \to 0,$$

так как последний интеграл сходится.

Далее, при $|x| > 2A$,

$$|F^+(x+iy) - F^-(x-iy)| \le C|(x+iy)^{\gamma-1} - (x-iy)^{\gamma-1}| \le Cy|x+i|^{\gamma-2}.$$

Следоватеельно, по Лемме 1,

$$\int_{-2A}^{2A} |I_2(x,y)|\rho(x)\,dx \le C_1 \int_{-2A}^{2A} |F^+(x+iy) - F^-(x-iy)|\rho(x)\,dx \le$$

$$\le Cy \int_{-2A}^{2A} |x+i|^{\gamma-2} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^\alpha}\,dx \le Cy \int_{-2A}^{2A} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x|^{2+\{\alpha\}}}\,dx \to 0.$$

Лемма 8 доказана.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) \in R_\alpha$, и*

$$\Phi^\pm(z) = \frac{S^\pm(z)(z+i)^\gamma}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-z}.$$

Тогда

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy)\|_{L^1(\rho)} \le A\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Доказательство. Так как $\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy) = I_1(x,y) + I_2(x,y)$, где

$$I_1(x,y) = \frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)^\gamma}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{2iy}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$I_2(x,y) = \frac{S^+(x+iy)(x+iy+i)^\gamma - a(x)S^-(x-iy)(x-iy+i)^\gamma}{2\pi i} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-x+iy},$$

то имеем

$$\|\Phi^+(x+iy) - a(x)\Phi^-(x-iy)\|_{L^1(\rho)} \le \|I_1(x,y)\|_{L^1(\rho)} + \|I_2(x,y)\|_{L^1(\rho)}.$$

Теперь докажем неравенство $\|I_k(x,y)\|_{L^1(\rho)} \le C_k\|f\|_{L^1(\rho)}$, $k=1,2$. Поскольку (см. [15])

$$\sup_{t\in(-\infty;+\infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{\{\alpha\}}}\,dx < \infty,$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |I_1(x,y)|\rho(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S^+(x+iy)||x+iy+i|^\gamma}{\pi} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{y\rho(x)\,dt\,dx}{(t-x)^2+y^2} \right| \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{|S^+(t)|} \frac{\rho(t)}{|t+i|^\gamma\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|S^+(x+iy)||x+iy+i|^\gamma y}{(t-x)^2+y^2}\rho(x)\,dx\,dt \le$$

$$\le C\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\rho(t) \left(\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t-x)^2+y^2} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{\{\alpha\}}}\,dx \right) dt \le C_1\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

В силу Леммы 2

$$|S^+(x+iy)(x+iy+i)^\gamma - a(x)S^-(x-iy)(x-iy+i)^\gamma| \le$$

$$\le |x+iy+i|^\gamma|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| +$$

$$+|x+iy+i|^\gamma|a(x)S^-(x-iy)| \left| 1 - \left(\frac{x-iy+i}{x+iy+i}\right)^\gamma \right| \le$$

$$\le |x+iy+i|^\gamma \left(|S^+(x+iy) - a(x)S^-(x-iy)| + \frac{A_1 y}{|x+i|} \right) \le$$

$$\le A(y|x+i|^{\gamma-1} + y^\mu|x+i|^{\gamma-2\mu}).$$

Следовательно, полагая

$$I_2'(x,y) = Ay|x+i|^{\gamma-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-x+iy},$$

$$I_2''(x,y) = Ay^\mu|x+i|^{\gamma-2\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma} \frac{dt}{t-x+iy},$$

можно записать $|I_2(x,y)| \le |I_2'(x,y)| + |I_2''(x,y)|$. Далее, поскольку (см. [15])

$$\sup_{t\in(-\infty;+\infty)} \frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{|t-x+y|} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha\}}}\,dx < \infty,$$

имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |I_2'(x,y)|\rho(x)\,dx \le A\int_{-\infty}^{+\infty} y|x+i|^{\gamma-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{|S^+(t)||t+i|^\gamma} \frac{dt\,\rho(x)\,dx}{|t-x+iy|} \le$$

$$\le A_1\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{-\gamma}}{\rho(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y|x+i|^{\gamma-1}}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^\alpha}\,dx\,dt =$$

$$= A_1\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\rho(t) \left(\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\widetilde{\rho}(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{|t-x+iy|} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha\}}}dx \right)\,dt \le A_2\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

В силу Леммы 7, аналогично можно доказать, что $\|I_2''(x,y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f\|_{L^1(\rho)}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть $f(x)\in L^1(\rho)$.*

a) Если $\kappa+\gamma\geq 0$, то общее решение задачи (1.2) можно представить в виде

$$\Phi(z)=\frac{S(z)(z+i)^\gamma}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma}\frac{dt}{t-z}+\Phi_0(z), \tag{4.1}$$

где $\Phi_0(z)$ – общее решение однородной задачи (1.2).

b) Если $\kappa+\gamma<0$, то задача (1.2) разрешима тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)dt}{S^+(t)(t+i)^{\gamma+k+1}}=0, \tag{4.2}$$

где $k=0,1,\cdots,-(\kappa+\gamma)-1$, когда $\rho\notin R_0$ и $k=1,2,\cdots,-(\kappa+\gamma)-1$, когда $\rho\in R_0$. Общее решение можно представить в виде (4.1) с $\Phi_0(z)=0$, когда $\rho\notin R_0$ и $\Phi_0(z)=Const$, когда $\rho\in R_0$.

Доказательство. Учитывая Теорему 1, достаточно рассмотреть функцию (4.1) с $\Phi_0(z)=0$. Пусть $f_n(x)\in C^\alpha(-\infty;+\infty)$ – последовательность финитных функций, стремящихся к $f(x)$ по метрике $L^1(\rho)$. Полагая

$$\Phi_n(z)=\frac{S(z)(z+i)^\gamma}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f_n(t)}{S^+(t)(t+i)^\gamma}\frac{dt}{t-z},\qquad z\in\Pi^+\cup\Pi^-,$$

в силу Теоремы 2 имеем

$$\|\Phi^+(x+iy)-a(x)\Phi^-(x-iy)-f(x)\|_{L^1(\rho)}\leq$$

$$\leq\|\Phi^+(x+iy)-\Phi_n^+(x+iy)-a(x)(\Phi^-(x-iy)-\Phi_n^-(x-iy))\|_{L^1(\rho)}+$$

$$+\|f(x)-f_n(x)\|_{L^1(\rho)}+\|\Phi_n^+(x+iy)-a(x)\Phi_n^-(x-iy)-f_n(x)\|_{L^1(\rho)}\leq$$

$$\leq A\|f-f_n\|_{L^1(\rho)}+\|\Phi_n^+(x+iy)-a(x)\Phi_n^-(x-iy)-f_n(x)\|_{L^1(\rho)}.$$

Поскольку $\|f-f_n\|_{L^1(\rho)}\to 0$, то применением Леммы 8 завершаем доказательство утверждения a).

Для доказательства утверждения b) выберем последовательность финитных функций $f_n(x)\in C^\alpha(-\infty;+\infty)$ так, чтобы каждая функция удовлетворяла условию (4.2) и последовательность сходится к $f(x)$ по метрике $L_1(\rho)$. Аналогичными рассуждениями доказывается утверждение b). Теорема 3 доказана.

Abstract. The paper considers Hilbert boundary value problem in the half-plane for weighted spaces. Assuming that the weight function is RO-varying, the problem is shown to be normally solvable. Explicit expressions for solutions of the corresponding homogeneous and non-homogeneous problems are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Сенета, Правильно Меняющиеся Функции, Наука, Москва, 1985.
2. Г. М. Айрапетян, "Граничная задача сопряжения со смещением в классе L^1", Изв. АН АрмССР, Математика, том 22, № 3, стр. 238 – 252, 1987.
3. Г. М. Айрапетян, В. Ш. Петросян, "Граничная задача Гильберта в полуплоскости в смысле L^1-сходимости", Изв. НАН Армении, Математика, том 33, № 5, стр. 14 – 26, 1998.
4. Б. В. Хведелидзе, "О разрывной задаче Римана–Привалова для нескольких функций", Сообщение АН Груз.ССР, том 17, № 10, стр. 865 – 872, 1956.
5. M. Rosenblum, "Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$", TAM Soc., vol. 165, pp. 326 – 342, 1962.
6. Н. Е. Товмасян, "О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе", Сиб. мат. журн., том 2, № 2, стр. 25 – 57, 1961.
7. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, Введение в Теорию Одномерных Сингулярных Интегральных Операторов, Кишинев, 1973.
8. R. A. Hunt, B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden, "Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 176, pp. 227 – 251, 1973.
9. Б. В. Хведелидзе, "Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной", Совр. проблемы математики, том 7, Москва, 1975.
10. С. Прёсдорф, Некоторые Классы Сингулярных Уравнений, Москва, 1979.
11. Дж. Гарнетт, Ограниченные Аналитические Функции, Москва, Мир, 1984.
12. K. S. Kazarian, "Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals", Studia. Math., vol. 86, pp. 97 – 130, 1987.
13. Г. М. Айрапетян, "Задача Дирихле в пространствах с весом", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 3, стр. 12 – 35, 2001.
14. Г. М. Айрапетян, "О задаче Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости", Изв. НАН Армении, Математика, том 36, № 6, стр. 7 – 15, 2001.
15. Г. М. Айрапетян, "О разрешимости задачи Дирихле в пространствах с весом", Электронный журнал "Исследовано в России", http ://zhurnal.ape.relcrn.ru/articles/2002145.pdf, том 145, стр. 1620 – 1628, 2002.

Поступила 28 апреля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 33–38

ОПЕРАТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОГОЗНАЧНЫМИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

В. А. Арзуманян

Институт математики НАН Армении

E-mails : vicar@instmath.sci.am ; victorar@ mtu-net.ru

Резюме. В работе представлены введение и краткий обзор теории операторных алгебр, ассоциированных с полугрупповыми динамическими системами, включая недавние результаты. Особое внимание уделено наиболее общему случаю алгебр, построенных по полиморфизмам (многозначным отображениям стандартных пространств с мерой).

0. Введение. Стандартным путём получения новых алгебр из более простых компонент является **прямое произведение** алгебры и группы её автоморфизмов. Замена групповой операции на полугрупповую операцию является перспективным обобщением по крайней мере по двум причинам : более общая теория содержит новые интересные примеры, причём полугрупповые динамические системы позволяют изучать невозвратные физические процессы. Первый параграф настоящей заметки даёт обзор традиционной теории (групповая операция). Второй параграф посвящён случаю эндоморфизмов, а третий – построению операторных алгебр ассоциированных с **полиморфизмами** (многозначные отображения).

1. Групповое измеримое построение (взаимно однозначный случай). Алгебраический подход к теории измеримых динамических систем был предложен Ф. Муреем и Дж. фон Нейманом в серии работ начиная с [16]. Этот подход приводит к слабо замкнутым $*$-алгебрам операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах (теперь называемым **алгебрами фон Неймана**). **Фактор** (т.е. алгебра фон Неймана с тривиальным центром) $\mathcal{W}(X, \mu, G)$, порождённый операторами скрещенных сдвигов и мультипликаторами ассоциирован с любой динамической системой вида (X, μ, G), где G – счётна и эргодична. Кроме того, была предложена классификация факторов на **типы** I, II_1, II_∞ ("покорный") и III ("дикий") с соответствующими примерами. Тип фактора $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ определяется свойствами исходной динамической системы. Для заданной топологической динамической системы (X, G), алгебра $\mathcal{W}(X, \mu, G)$ может быть описана как слабое замыкание образа **регулярного** представления (соответствующего мере μ на X) C^*-алгебры $\mathcal{C}(X, G)$, канонически ассоциированной с заданной динамической системой. Аксиоматическое описание этой алгебры (называемой прямым произведением коммутативной C^*-алгебры $C(X)$ и группы G) является частью общей теории (см. [20]). Структура алгебр тесно связана с теорией траекторий, предложенной Дью в работе [8]. Разбиение пространства X на траектории ассоциирована с групповой операцией. Затем такие свойства как эргодичность и существование конечной инвариантной меры суть инварианты **траекторного изоморфизма** (слабая эквивалентность по Дью). В теории траекторий, В. Кригер [13] исследовал алгебры, полученные из динамических систем, обладающих квази-инвариантными мерами и показал, что траекторный изоморфизм двух эргодических автоморфизмов эквивалентен изоморфизму соответствующих факторов. А. Вершик в работе [18] рассмотрел общие неизмеримые разбиения (такие как траектории) и описал класс **покорных** разбиений определив понятие полуалгебры **Картана**, настоящее которых характеризуется факторами, ассоциированными с динамическими системами. Отметим, что свободно действующая группа автоморфизмов с инвариантной мерой является почти конечной, если его траекторное разбиение является покорным (как и траекторное разбиение единственного автоморфизма с квази-инвариантной мерой). Фельдман и Мур [11] предложили инвариантную конструкцию операторных алгебр, ассоциированных с динамическими системами, непосредственно связывающую их с разбиениями (т.е. с измеримыми отношениями эквивалентности). Топологический случай в этой постановке детально был изучен Дж. Ренаултом в [17]. **Гиперконечные** множители, порождённые возрастающей последовательностью полных матричных алгебр, были введены Ф. Муреем и Дж. фон Нейманом, которые сформулировали теорему (позже доказанную Дью) : для счётно коммутативной, свободно действующей эргодической группы, меру сохраняющих автоморфизмов, соответствующий фактор является гиперконечным. Было также доказано, что все гиперконечные II_1 факторы суть изоморфны, что даёт первоначальную классификацию гиперконечных факторов. А. Конн рассмотрел подтипы III_λ, $\lambda \in [0, 1]$ III факторов и позднее доказал в работе [5], что для каждого $\lambda \in]0, 1[$, инъективные III_λ факторы изоморфны. Для III_1 факторов аналогичный факт был доказан в [12]. В работе [14] В. Кригер свёл классификацию III_0 факторов к задаче классификации эргодических потоков.

2. Случай эндоморфизмов (многозначно–однозначный случай). Аналогичная программа для "полугрупповой меры" была предложена А. Вершиком и реализована А. Вершиком и автором в работе [1]. Алгебра фон Неймана $\mathcal{W}(X,\mu,T)$ соответствует эндоморфизму T с инвариантной мерой т.е. соответствует полугруппе $\mathbf{Z}_+$, или, более точно, бициклической полугруппе являющейся фактором, если эндоморфизм эргодичен, т.е. порождён подходящим образом выбранной группой автоморфизмов. Основным результатом является существование канонического условного математического ожидания для максимально коммутативной (картановской) полуалгебры, благодаря некоторой вспомогательной (некоммутативной) подалгебре $\mathcal{W}_\infty(X,\mu,T)$, играющей роль диагональной подалгебры. Так как в случае полугруппы, сопряжённый оператор не соответствует геометрическому объекту, то необходимо использование теории траекторий : $\mathcal{W}(X,\mu,T)$ является изоморфной алгебре фон Неймана, полученной с помощью конструкции Фельдмана-Мура, опирающейся на измеримое отношение эквивалентности, соответствующее траекторному разбиению. Кроме того, алгебра $\mathcal{W}_\infty(X,\mu,T)$ изоморфна алгебре фон Неймана, полученной аналогичным путём, опираясь на отношение эквивалентности, соответствующее так называемому **хвостовому** разбиению ($T^n x = T^n y;\ x,y \in X,\ n \in \mathbf{Z}_+$). Гиперконечность является следствием теоремы А. Вершика : траекторное разбиение эндоморфизма является покорным. Если эндоморфизм с инвариантной (конечной) мерой необратим, то соответствующий фактор является "диким" (в противоположность случаю автоморфизма, где фактор всегда имел тип II_1). Все типы III_λ, $\lambda \in]0,1]$ могут быть реализованы для одностороннего дискретного бернуллиевского сдвига при подходящем выборе вероятностного распределения на образующей. Эргодический эндоморфизм **алгебраического типа** определяется как тип соответствующего фактора, который инвариантен относительно траекторного изоморфизма и не зависит от энтропии : существует пара бернуллиевских сдвигов с конечным (но различным) числом состояний (или пара двух состояний марковских сдвигов), имеющих одинаковую энтропию, но различные алгебраические типы (см. [3]). Это и является причиной того, что описанное построение может быть получено для эндоморфизмов с квази-инвариантной мерой (см. [3]). Другая проблема – распространение этих построений на топологические динамические системы. Имеется много способов обойти трудность, что инволюция геометрически не порождается (см. статью А. Вершика и автора [2]). Другие методы суть локализации А. Кумджана [15] и группоиды Дж. Ренаулта [19] (см. работу В. Диакони [7]). Другая точка зрения развита в работе Р. Эксела [9]. В работе Р. Эксела и А.

Вершика [10] детально были исследованы, в частности, вышеописанные алгебры (включая такие задачи, как точность и простота ковариантного представления). Имеется очевидное соотношение между упомянутыми построениями и алгебрами Кунца $\mathcal{O}_n$ (см. [6]). А именно, алгебра $\mathcal{W}(X, \mu, T)$, (где T – односторонний бернуллиевский сдвиг с равномерно распределёнными n состояниями), является точным представлением алгебры $\mathcal{O}_n$.

3. Случай полиморфизмов (многозначно–многозначный случай). Следующий естественный шаг является обобщением построений на случай многозначных преобразований. Этот вопрос впервые был упомянут в работе [1] и непосредственно был поставлен автору статьи [1] профессором А. Вершиком в 1989. Отметим, что случай "однозначно-многозначный" по существу является аналогичным "многозначно–однозначному" случаю, так как если соответствующий полиморфизм является сопряжённым к эндоморфизму (называемому **эксоморфизмом**), то он порождает ту же самую полугруппу. Ниже, с незначительными упрощениями, следует концепция многозначного отображения (= полиморфизма) предложенная А. Вершиком в работе [19].

Пусть (X, μ) – лебегово пространство с конечной мерой, и пусть π_1 и π_2 суть координатные проекции пространства $X \times X$ на первый и второй факторы. Полиморфизм $\Pi = \Pi(\nu)$, где ν – мера на $X \times X$, является диаграммой $X \xleftarrow{\pi_1} (X \times X) \xrightarrow{\pi_2} X$ такой, что $\pi_i(\nu) = \mu$; $i = 1, 2$. Несомненно этот полиморфизм полностью определяется по соответствующей бистохастической мере ν.

Если X конечно, то бистохастическая мера определяется по так называемой стохастической матрице. Другим важным примером является следующий. Пусть S^1 – единичный круг с нормированной мерой Лебега. Полиморфизм $\Pi_{n,m}$ определяется соотношением $x^n = y^m$; $x, y \in \mathrm{S}^1$; $n, m \in \mathbf{Z}_+$ с равномерными мерами на прообразах. Траекторное разбиение это операции может быть интерпретировано как изгибание единичных циклов.

Композиция (произведение) $\Pi_2\Pi_1$ двух полиморфизмов $\Pi_1 = \Pi(\nu_1)$, $\Pi_2 = \Pi(\nu_2)$ определяется посредством единственной меры ν на $X \times X$ такой, что условные меры ν^x определяются для почти всех $x \in X$ по формуле

$$\nu^x(E) = \int \nu_2^y(E) d\nu_1(y)$$

для любого измеримого множества $E \subset X$. Полиморфизм $\Pi^* = \Pi(\nu^*)$ сопряжённый к $\Pi = \Pi(\nu)$ определяется мерой $\nu^*(E \times F) = \nu(F \times E)$ для измеримых E, $F \subset X$. Тогда множество всех полиморфизмов образует $*$-полугруппу с единичным элементом I, (определяемым мерой $\nu(E \times F) = \nu(E \cap F)$) и нулевым элементом Θ (определяемым мерой $\nu = \mu \times \mu$)). Эндоморфизм T может рассматриваться полиморфизм Π_T с мерой $\nu(E \times F) = \mu(E \cap T^{-1}F)$. Следовательно, $\Pi_T \Pi_T^* = I$, и автоморфизмы определяются соотношением $\Pi_T^* = \Pi_{T^{-1}}$. Теперь перейдём к конструкции. Пусть $\Pi = \Pi(\nu)$ является полиморфизмом, а $(U_\Pi f)(x) = \int f(y) d\nu^x(y)$ – оператор, действующий на $L_2(X, \mu)$. Тогда имеем $U_{\Pi_1 \Pi_2} = U_{\Pi_2} U_{\Pi_1}, U_{\Pi^*} = U_\Pi^*$. Полиморфизм Π является эргодичным, если из $U_\Pi \chi^E = \chi^E$ вытекает $\mu(E) = 0$ или $\mu(E) = 1$, где χ^E – индикатор множества $E \subset X$. Пусть $\mathcal{M}$ – полуалгебра мультипликаторов на $L^2(X, \mu)$ по функциям из $L^\infty(X, \mu)$, а $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X, \mu, \Pi)$ – равномерно замкнутая $*$-алгебра операторв на $L^2(X, \nu)$, порождённая по $\mathcal{M}$, причём $U = U_\Pi$. Полуалгебра $\mathcal{C}_\infty(X, \mu, \Pi)$, содержащая $\mathcal{M}$ и порождённая операторами, в которых суммы степеней для U и U^* равны, играют роль картановой полуалгебры и сводятся к $\mathcal{M}$, если Π – автоморфизм. Важным классом полиморфизмов является класс $\Pi = \Pi_S^* \Pi_T$, порождённый коммутирующей парой эндоморфизмов T и S, т.е. произведение эксоморфизма и эндоморфизма. Для простоты мы предположим, что "прообразы" конечны (условные меры на слоях суть дискретны и конечны). Если $\Pi = \Pi_S^* \Pi_T$ эргодично, то на алгебре $\mathcal{A}$ существует условное математическое ожидание $\mathcal{P}$ по подалгебре $\mathcal{M}$. Отметим, что из эргодичности T и S вытекает эргодичность Π. Поэтому регулярное представление $\pi = \pi_\varphi$ алгебры $\mathcal{A}$ можно определить как GNS-представление, соответствующее состоянию $\varphi(a) = \int \mathcal{P}(a)(x) d\mu(x)$. Наконец, алгебра $\mathcal{W}(X, \mu, \Pi)$ является слабым замыканием алгебры $\pi(\mathcal{A})$.

Теорема. *Для эргодического полиморфизма* $\Pi = \Pi_S^* \Pi_T$ *алгебра* $\mathcal{W}(X, \mu, \Pi)$ *является гиперконечным фактором.*

Отметим, что существует измеримое отношение эквивалентности R на $X \times X$ (порождённое отношением $x \sim y \Leftrightarrow Tx = Sy$) такое, что $\mathcal{W}(X, \mu, \Pi)$ является пространственно изоморфным алгебре $W(R)$, полученной по конструкции Фельдмана-Мура. Используя соответствующую модулярную функцию, можно вычислить тип фактора. Например, если $\Pi = \Pi_{n,m}$, где n, m взаимно простые, $m > n$, тогда $\mathcal{W}(X, \nu, \Pi)$ является $\mathrm{III}_{n/m}$-фактором. Поэтому соответствующий C^*-прообраз аналогичен фрактальной алгебре Кунца $\mathcal{O}_{n/m}$. Вариант топологического подхода присутствует в совместной статье Дж.Реналта и автора [4].

Автор выражает благодарность профессору А. Вершику за постановку задач и полезные дискуссии.

Abstract. An introduction to and a short survey of the theory of operator algebras, associated with semigroup dynamical systems are presented. The main attention is given to the general case of polymorphisms (many-valued mappings of standard measure space).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Арзуманян, А. Вершик, "Факторные представления прямого произведения коммутативной C^*-алгебры с её эндоморфизмной полугруппой", Доклады АН СССР, том 19, № 1, 1978.
2. V. Arzumanian, A. Vershik, "Star-algebras associated with endomorphisms", Operator algebras and group representations, Proc. Int. Conf., vol. I, Pitman Press, Boston, pp. 17 – 27, 1984.
3. В. А. Арзуманян, "Операторные алгебры, ассоциированные с невырожденными эндоморфизмами лебегова пространства", Известия АН Арм.ССР, том 21, № 6, стр. 81 – 102, 1986.
4. V. Arzumanian, J. Renault, "Examples of pseudogroups and their C*-algebras", Operator algebras and quantum field theory, Int. Press, Cambridge, Mass., pp. 93 – 104, 1997.
5. A. Connes, "Classification of injective factors", Ann. Math., vol. 104, no. 1, pp. 73 – 115, 1976.
6. J. Cuntz, "Simple C^*-algebras generated by isometries", Comm. Math. Phys., vol. 57, pp. 173 – 185, 1977.
7. V. Deaconu, "Groupoids associated with endomorphisms", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 347, no. 5, pp. 1779 – 1786, 1995.
8. H. Dye, "On groups of measure preserving transformations I, II", Amer. J. Math., vol. 81, no. 1, pp. 119 – 159, 1959; vol. 85, no. 4, pp. 551 – 576, 1963.
9. R. Exel, "A new look at the crossed-product of a C^*-algebra by an endomorphism", preprint, 2000.
10. R. Exel, A. Vershik, "C^*-algebras of irreversible systems", preprint, 2002.
11. J.Feldman, C. Moore, "Ergodic equivalence relations, cohomologies, von Neumann algebras", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 234, no. 2, pp. 289 – 359, 1977.
12. U. Haagerup, "Conne's bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III", Odense Univ., preprint no. 10, 1984.
13. W. Krieger, "On non-singular transformations of a measure space", Z. Wahr. Verw. Geb., vol. 11, pp. 83 – 119, 1969.
14. W. Krieger, "On ergodic flows and the isomorphism of factors", Math. Ann., vol. 223, pp. 19 – 70, 1976.
15. A. Kumjian, "On localizations and simple C^*-algebras", Pacific J. Math., vol. 112, pp. 141 – 192, 1984.
16. F. Murray, J. Von Neumann, "On rings of operators", Ann. of Math., vol. 37, pp. 116 – 229, 1936.
17. J. Renault, "A groupoid approach to C^*-algebras", Lecture Notes in Mathematics, vol. 793, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1980.
18. А. Вершик, "Неизмеримые разбиения, теория траекторий, алгебры и операторы", Доклады АН СССР, том 199, № 5, стр. 1004 – 1007, 1971.
19. А. Вершик, "Многозначные отображения (полиморфизмы), сохраняющие меру и операторы Маркова", Зап. Науч. Сем. ЛОМИ, том 72, стр. 26 – 61, 1977.
20. G. Zeller-Meier, "Produits croises d'une C^*-algebre par une groupe d'automorphismes", J. Math.Pures et Appl., vol. 47, pp. 101 – 239, 1968.

Поступила 12 сентября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 39-48

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ

А. О. Бабаян

Армянский государственный инженерный университет

Резюме. В статье изучается задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения порядка $2n$ с постоянными коэффициентами в единичном круге. Решение ищется в классе функций $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в открытом круге и удовлетворяющих условию Гёлдера вместе с производными до порядка n вплоть до границы.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ – открытый единичный круг в комплексной плоскости с границей $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$. В D рассмотрим эллиптическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^k \partial y^{2n-k}} = 0, \quad (x, y) \in D, \tag{1}$$

где A_k – некоторые комплексные постоянные. Решение u ищем в классе функций, $2n$ раз непрерывно дифференцируемых в D, которые вместе с производными до порядка n удовлетворяют условию Гёлдера в $D \cup \Gamma$. На границе Γ функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям Дирихле :

$$\left.\frac{\partial^k u}{\partial r^k}\right|_{\Gamma} = f_k(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \tag{2}$$

где $f_k(x, y) \in C^{(n-1-k,\alpha)}(\Gamma)$, а $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ здесь и в дальнейшем означают производные по модулю и аргументу комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ соответственно. Предположим, что уравнение (1) правильно эллиптическое, т.е. корни λ_k, $k = 1, ..., 2n$

характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \lambda^{2n-k} = 0, \tag{3}$$

удовлетворяют соотношению

$$\Im\lambda_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n; \quad \Im\lambda_i < 0, \quad i = n+1, \ldots, 2n. \tag{4}$$

Известно (см. [1]), что задача (1), (2) фредгольмова. В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость задачи (1), (2). При $n = 1$ однозначная разрешимость задачи (1), (2) выполняется для произвольных корней λ_i, удовлетворяющих (4) (см. [2]). В случае $n = 2$ необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) были найдены в [3] – [5]. Для произвольного n и простых корней λ_k, необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1), (2) были найдены в [6] и [7]. В данной работе результаты статьи [7] обобщаются на случай кратных корней.

Перепишем уравнение (1) и граничные условия (2) в комплексной форме. Для этого положим

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Уравнение (1) примет вид

$$\prod_{k=1}^{p}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z} - \mu_k\frac{\partial}{\partial z}\right)^{l_k}\prod_{j=1}^{q}\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_j\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)^{m_j} u = 0, \tag{5}$$

где

$$\mu_k = \frac{i - \lambda_k}{i + \lambda_k}, \quad \nu_j = \frac{i + \lambda_{n+j}}{i - \lambda_{n+j}}$$

суть различные числа, а l_k и m_j – кратности корней λ_k и λ_{n+j} соответственно (λ_s – корни уравнения (3)). Из условий (4) следует

$$|\mu_k| < 1, \quad |\nu_j| < 1, \quad \sum_{k=1}^{p} l_k = \sum_{j=1}^{q} m_j = n. \tag{6}$$

Учитывая, что при всех $z = re^{i\varphi} \neq 0$,

$$z\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right), \quad \bar z\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial}{\partial r} + i\frac{\partial}{\partial \varphi}\right),$$

граничные условия (2) приводятся к эквивалентной форме

$$\left.\frac{\partial^{n-1}u}{\partial z^k \partial \bar{z}^{n-k-1}}\right|_{\Gamma} = F_{k,n-k-1}(x,y) \equiv F_k(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^{i+k}u}{\partial z^i \partial \bar{z}^k}(1,0) = F_{i,k}(1,0), \quad 0 \le i+k \le n-1. \tag{8}$$

Функции $F_{i,k}(x,y) \in C^{(n-1-i-k,\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по граничным функциям f_k, например,

$$F_{1,0}(x,y) = \frac{x-iy}{2}\left(f_1 - i\frac{\partial f_0}{\partial \varphi}\right), \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Введем следующие обозначения. Если μ_k имеет кратность l_k, а ν_j имеет кратность m_j, то n-мерные векторы-столбцы a_k^{s+1} и b_j^{t+1} определяются по формулам

$$a_k^{s+1} = (C_{n-1}^s \mu_k^{n-s-1}, C_{n-2}^s \mu_k^{n-s-2}, \dots, C_{s+1}^s \mu_k, C_s^s, 0, \dots, 0)^{\top}, \tag{9}$$

$$b_j^{t+1} = (0, \dots, 0, C_t^t, C_{t+1}^t \nu_j, \dots, C_{n-2}^t \nu_j^{n-t-2}, C_{n-1}^t \nu_j^{n-t-1})^{\top}, \tag{10}$$

где $0 \le s \le l_k - 1$, $k = 1, \dots, p$ и $0 \le t \le m_j - 1$, $j = 1, \dots, q$. Пусть A и B – $n \times n$ матрицы

$$A = (a_1^1 \dots a_1^{l_1} a_2^1 \dots a_2^{l_2} \dots a_p^1 \dots a_p^{l_p}), \quad B = (b_1^1 \dots b_1^{m_1} \dots b_q^1 \dots b_q^{m_q}), \tag{11}$$

а M и N – жордановы матрицы :

$$M = diag(J_{l_1}(\mu_1) \dots J_{l_p}(\mu_p)), \quad N = diag(J_{m_1}(\nu_1) \dots J_{m_q}(\nu_q)). \tag{12}$$

Здесь $J_k(\lambda)$ – жорданова клетка порядка k с диагональными элементами λ. Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Задача (1), (2) однозначно разрешима тогда и только тогда, когда матрица (см. (11) и (12))*

$$D_l = \begin{pmatrix} A & BN^l \\ AM^l & B \end{pmatrix} \tag{13}$$

невырождена при $l = n+1, n+2, \dots$, т.е.

$$\Delta_l = \det D_l \ne 0, \quad l = n+1, n+2, \dots. \tag{14}$$

Если для некоторого $k_0 \ge n+1$, $\Delta_{k_0} = 0$, *то однородная задача (1), (2) (т.е. случай* $f_k \equiv 0$ *при всех* $k = 0, 1, \dots, n-1$) *имеет нетривиальное решение, являющееся многочленом порядка* $n + k_0 - 1$.

Замечание 1. В условиях теоремы, μ_k и ν_j суть различные числа, удовлетворяющие условию (6). Следовательно, $\Delta_l \to \det A \det B \neq 0$ при $l \to \infty$, т.е. условие (14) выполняется при достаточно больших l.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для доказательства Теоремы 1 нам понадобятся некоторые факты, которые будут приведены в этом параграфе. Пусть η – комплексное число, $|\eta| < 1$. Через $D(\eta)$ и $D_1(\eta)$ обозначим образы единичного круга при отображениях $z + \eta\bar{z}$ и $\bar{z} + \eta z$ соответственно :

$$D(\eta) = \{z + \eta\bar{z} : \ |z| < 1\}, \quad D_1(\eta) = \{\bar{z} + \eta z : \ |z| < 1\}.$$

Лемма 1. *Пусть $\mu \neq 0$ – комплексное число, $|\mu| < 1$. Тогда общее решение уравнения*

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^k u = 0 \tag{15}$$

можно представить в виде

$$u = \sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^m \Phi_m(z + \mu\bar{z}), \tag{16}$$

где $\Phi_m(\zeta)$ аналитические в области $D(\mu)$ функции.

Доказательство. Утверждение Леммы верно при $k = 1$ (см. [8]). Допустим, что утверждение верно для некоторого k. Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^{k+1} u = 0.$$

Используя лемму при $k = 1$, представим последнее уравнение в эквивалентной форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^k u = \Phi_k(z + \mu\bar{z}), \tag{17}$$

где $\Phi_k(\zeta)$ аналитична в $D(\mu)$. Решение уравнения (17) есть $u = u_0 + u^*$, где u_0 – решение соответствующего однородного уравнения (т.е. при $\Phi_k \equiv 0$), а u^* – некоторое решение уравнения (17). По предположению индукции u_0 допускает представление (16). Частное решение u^* будем искать в виде

$$u^* = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^k F(z + \mu\bar{z}),$$

где аналитичная в $D(\mu)$ функция $F(\zeta)$ подлежит определению. Подставим u^* в (17) и выполним замену переменной $\zeta = z + \mu\bar{z}$. Используя соотношения

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}} - \mu\frac{\partial}{\partial z} = (1-|\mu|^2)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi} = i(1-|\mu|^2)^{-1}\left(((1+|\mu|^2)\zeta - 2\mu\bar{\zeta})\frac{\partial}{\partial\zeta} - ((1+|\mu|^2)\bar{\zeta} - 2\bar{\mu}\zeta)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right),$$

для неизвестной функции $F(\zeta)$ получим уравнение :

$$i^k\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)^k\left(((1+|\mu|^2)\zeta - 2\mu\bar{\zeta})\frac{\partial}{\partial\zeta} - ((1+|\mu|^2)\bar{\zeta} - 2\bar{\mu}\zeta)\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\right)^k F(\zeta) = \Phi_k(\zeta).$$

Поскольку $F(\zeta)$ аналитична, последнее уравнение приводится к следующему равенству

$$(-2i\mu)^k k! F^{(k)}(\zeta) = \Phi_k(\zeta),$$

из которого определяем неизвестную функцию

$$F(\zeta) = \frac{1}{k!(-2i\mu)^k}G_k(\zeta), \quad G_k^{(k)}(\zeta) = \Phi_k(\zeta).$$

Таким образом, решение уравнения (17) допускает представление

$$u = \sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^m \Phi_m(z+\mu\bar{z}) + \frac{1}{k!(-2i\mu)^k}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^k G_k(z+\mu\bar{z}),$$

т.е. имеет вид (16). Таким образом, утверждение леммы справедливо и при $k+1$. Лемма 1 доказана.

Аналогично доказывается, что общее решение уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^k u = 0, \tag{18}$$

при $\nu \neq 0$ можно представить в виде

$$u = \sum_{m=0}^{k-1}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^m \Phi_m(\bar{z}+\nu z), \tag{19}$$

где $\Phi_m(\zeta)$ – аналитические в области $D_1(\nu)$ функции. При $\mu = 0$ будем использовать представление общего решения уравнения (15) из [1] :

$$u = \sum_{m=0}^{k-1}(1-z\bar{z})^m\Phi_m(z), \tag{20}$$

где $\Phi_m(z)$ – аналитические в D функции. Аналогично, заменив в (20) функцию $\Phi_m(z)$ на $\Phi_m(\bar{z})$, получим общее решение уравнения (18) при $\nu = 0$. Общее решение уравнения (1) есть сумма слагаемых вида (16), (19) и (20).

Замечание 2. В представлении общего решения уравнения (1) функции Φ_k и Ψ_k определяются с точностью до многочлена порядка $2n-2$.

Будем использовать представления функций $\Phi(z+\mu\bar{z})$ и $\Psi(\bar{z}+\nu z)$ в окрестности единичной окружности аналитическими в D функциями. Пусть μ и ν – комплексные числа такие, что $|\mu|<1$ и $|\nu|<1$. Известно (см. [1]), что при $|z|=1$ функции Φ и Ψ допускают представление

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega(z)+\omega(\mu\bar{z}),\quad \Psi(\bar{z}+\nu z)=\rho(\bar{z})+\rho(\nu z), \tag{21}$$

где ω и ρ аналитические в единичном круге функции. Если известны функции ω и ρ, то можно восстановить Φ и Ψ по формулам :

$$\Phi(z+\mu\bar{z})=\omega\left(\frac{1}{2}(z+\mu\bar{z}+\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu})\right)+\omega\left(\frac{1}{2}(z+\mu\bar{z}-\sqrt{(z+\mu\bar{z})^2-4\mu})\right)$$

$$\Psi(\bar{z}+\nu z)=\rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z}+\nu z+\sqrt{(\bar{z}+\nu z)^2-4\nu})\right)+\rho\left(\frac{1}{2}(\bar{z}+\nu z-\sqrt{(\bar{z}+\nu z)^2-4\nu})\right),$$

где $|z|<1$. Здесь выбираем ту ветвь $\sqrt{\zeta^2-4\mu}$, которая аналитически продолжается вне сегмента $[-2\sqrt{\mu},2\sqrt{\mu}]$ и удовлетворяет условию

$$\zeta^{-1}\sqrt{\zeta^2-4\mu}\to 1,\quad \zeta\to\infty.$$

В заключение приведем два утверждения, которые доказываются прямым вычислением.

Лемма 2. *Пусть $P_l(z,\bar{z})$ – многочлен порядка l, удовлетворяющий условиям*

$$\frac{\partial^k P_l}{\partial r^k}|_\Gamma=0,\quad k=0,1,\ldots,n-1. \tag{22}$$

Тогда P_l допускает представление

$$P_l(z,\bar{z})=(z\bar{z}-1)^n P_{l-2n}(z,\bar{z}),\quad l\geq 2n,$$

где $P_{l-2n}(z,\bar{z})$ – многочлен порядка $l-2n$. В случае $l<2n$ имеем $P_l(z,\bar{z})\equiv 0$.

Лемма 3. *Дифференциальные операторы $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ и $\frac{\partial}{\partial\varphi}$ удовлетворяют соотношению*

$$\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar{z}^m}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^l=\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+(k-m)iI\right)^l\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial\bar{z}^m}, \tag{23}$$

где k,l,m – целые неотрицательные числа.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Так как задача (1), (2) фредгольмова, достаточно показать, что соответствующая однородная задача не имеет ненулевых решений тогда и только тогда, когда выполняются условия (14). Для простоты, сделаем подробное вычисление для случая $n = 3$. Предположим, что μ_1 имеет кратность $l_1 = 3$, а ν_1 и ν_2 имеют кратности $m_1 = 2$ и $m_2 = 1$ соответственно. В общем случае доказательство аналогично.

Используя Лемму 1, можно представить общее решение уравнения (1) в виде

$$u = \Phi_1(z+\mu_1\bar z) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi_2(z+\mu_1\bar z) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\Phi_3(z+\mu_1\bar z) +$$

$$+\Psi_1(\bar z+\nu_1 z) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_2(\bar z+\nu_1 z) + \Psi_3(\bar z+\nu_2 z), \qquad (24)$$

где функции Φ_j аналитичны в $D(\mu_1)$, Ψ_1 и Ψ_2 аналитичны в $D_1(\nu_1)$, а Ψ_3 – в $D_1(\nu_2)$.

Теперь, подставим функцию (24) в однородные граничные условия

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^k\partial\bar z^{2-k}}|_\Gamma = 0, \quad k = 0,1,2.$$

Используя Лемму 3, при $k = 0$ получаем граничное уравнение

$$\mu_1{}^2\Phi_1''(z+\mu_1\bar z) + \mu_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)\Phi_2''(z+\mu_1\bar z) + \mu_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)^2\Phi_3''(z+\mu_1\bar z) +$$

$$+\Psi_1''(\bar z+\nu_1 z) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - 2iI\right)\Psi_2''(\bar z+\nu_1 z) + \Psi_3''(\bar z+\nu_2 z)\big|_\Gamma = 0. \qquad (25)$$

Аналогично, при $k = 1$ или 2 получаем соответственно :

$$\mu_1\Phi_1''(z+\mu_1\bar z) + \mu_1\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Phi_2''(z+\mu_1\bar z) + \mu_1\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)^2\Phi_3''(z+\mu_1\bar z) +$$

$$+\nu_1\Psi_1''(\bar z+\nu_1 z) + \nu_1\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\Psi_2''(\bar z+\nu_1 z) + \nu_2\Psi_3''(\bar z+\nu_2 z)\big|_\Gamma = 0, \qquad (26)$$

$$\Phi_1''(z+\mu_1\bar z) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)\Phi_2''(z+\mu_1\bar z) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)^2\Phi_3''(z+\mu_1\bar z) +$$

$$+\nu_1{}^2\Psi_1''(\bar z+\nu_1 z) + \nu_1{}^2\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + 2iI\right)\Psi_2''(\bar z+\nu_1 z) + \nu_2{}^2\Psi_3''(\bar z+\nu_2 z)\big|_\Gamma = 0. \qquad (27)$$

На границе Γ функции Ψ_k'' и Φ_k'' можно представить в виде

$$\Psi_k{}''(\bar z+\nu_1 z) = \omega_k(\bar z) + \omega_k(\nu_1 z), \quad k = 1,2, \quad \Psi_3''(\bar z+\nu_2 z) = \omega_3(\bar z) + \omega_3(\nu_2 z),$$

$$\Phi_k''(z + \mu_1 \bar{z}) = \Omega_k(z) + \Omega_k(\mu_1 \bar{z}), \quad k = 1, 2, 3, \tag{28}$$

где Ω_k и ω_k аналитичны в единичном круге. Уравнения (28) выполняются при всех $|z| = 1$, поэтому можно дифференцировать обе части этих уравнений по φ, например

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\Psi_3(\bar{z} + \nu_2 z) = -i\bar{z}\omega_3'(\bar{z}) + i\nu_2 z\omega_3'(\nu_2 z).$$

Далее, разложим функции Ω_k и ω_k в ряд Тейлора

$$\Omega_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} A_{kj} z^j, \quad \omega_k(z) = \sum_{j=0}^{\infty} B_{kj} z^j, \quad k = 1, 2, 3, \tag{29}$$

и подставим эти разложения в (28), а затем в (25) – (27). Используя формулы

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + imI\right)^j z^N = (iN + im)^j z^N, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + imI\right)^j \bar{z}^N = (-iN + im)^j \bar{z}^N,$$

уравнение (25) приводим к виду

$$\mu_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} z^j + \sum_{j=0}^{\infty} A_{1j} {\mu_1}^{j+2} \bar{z}^j + i{\mu_1}^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(j-2) z^j - i\sum_{j=0}^{\infty} A_{2j}(j+2){\mu_1}^{j+2}\bar{z}^j -$$

$$-\mu_1^2 \sum_{j=0}^{\infty} A_{3j}(j-2)^2 z^j - \sum_{j=0}^{\infty} A_{3j}(j+2)^2 {\mu_1}^{j+2}\bar{z}^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j}\bar{z}^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{1j}\nu_1^j z^j -$$

$$-i\sum_{j=0}^{\infty} B_{2j}(j+2)\bar{z}^j + i\sum_{j=0}^{\infty} B_{2j}(j-2){\nu_1}^j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j}\bar{z}^j + \sum_{j=0}^{\infty} B_{3j}{\nu_2}^j z^j\Big|_\Gamma = 0.$$

Аналогично преобразуются (26) и (27). Приравнивая в полученных трёх равенствах коэффициенты при одинаковых степенях z и $\bar{z}$, получим линейную систему для определения коэффициентов A_{kj} и B_{kj} :

$${\mu_1}^2 A_{1j} + i(j-2){\mu_1}^2 A_{2j} + i^2(j-2)^2{\mu_1}^2 A_{3j} + {\nu_1}^j B_{1j} + i(j-2){\nu_1}^j B_{2j} + {\nu_2}^j B_{3j} = 0, \tag{30}$$

$$\mu_1 A_{1j} + ij\mu_1 A_{2j} + i^2 j^2 \mu_1 A_{3j} + {\nu_1}^{j+1} B_{1j} + ij{\nu_1}^{j+1} B_{2j} + {\nu_2}^{j+1} B_{3j} = 0, \tag{31}$$

$$A_{1j} + i(j+2)A_{2j} + i^2(j+2)^2 A_{3j} + {\nu_1}^{j+2} B_{1j} + i(j+2){\nu_1}^{j+2} B_{2j} + {\nu_2}^{j+2} B_{3j} = 0, \tag{32}$$

$${\mu_1}^{j+2} A_{1j} - i(j+2){\mu_1}^{j+2} A_{2j} + i^2(j+2)^2{\mu_1}^{j+2} A_{3j} + B_{1j} - i(j+2)B_{2j} + B_{3j} = 0, \tag{33}$$

$${\mu_1}^{j+1} A_{1j} - ij{\mu_1}^{j+1} A_{2j} + i^2 j^2 {\mu_1}^{j+1} A_{3j} + \nu_1 B_{1j} - ij\nu_1 B_{2j} + \nu_2 B_{3j} = 0, \tag{34}$$

$${\mu_1}^j A_{1j} - i(j-2){\mu_1}^j A_{2j} + i^2(j-2)^2{\mu_1}^j A_{3j} + {\nu_1}^2 B_{1j} - i(j-2){\nu_1}^2 B_{2j} + {\nu_2}^2 B_{3j} = 0. \tag{35}$$

Рассмотрим детерминант основной матрицы этой системы :

$$G_j = \begin{vmatrix} \mu_1^2 & i(j-2)\mu_1^2 & i^2(j-2)^2\mu_1^2 & \nu_1{}^j & i(j-2)\nu_1{}^j & \nu_2{}^j \\ \mu_1 & ij\mu_1 & i^2j^2\mu_1 & \nu_1^{j+1} & ij\nu_1{}^{j+1} & \nu_2^{j+1} \\ 1 & i(j+2) & i^2(j+2)^2 & \nu_1^{j+2} & i(j+2)\nu_1^{j+2} & \nu_2^{j+2} \\ \mu_1^{j+2} & -i(j+2)\mu_1{}^{j+2} & i^2(j+2)^2\mu_1{}^{j+2} & 1 & -i(j+2) & 1 \\ \mu_1{}^{j+1} & -ij\mu_1{}^{j+1} & i^2j^2\mu_1{}^{j+1} & \nu_1 & -ij\nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1{}^j & -i(j-2)\mu_1{}^j & i^2(j-2)^2\mu_1^j & \nu_1^2 & -i(j-2)\nu_1{}^2 & \nu_2^2 \end{vmatrix}.$$

Преобразуя по столбцам и используя известное тождество для биномиальных коэффициентов (см. [9])

$$C_p^0 C_{n-p}^m + C_p^1 C_{n-p}^{m-1} + \ldots + C_p^m C_{n-p}^0 = C_n^m,$$

получим, что G_j отличается от Δ_j только ненулевым сомножителем.

Система (30) – (35) позволяет определить коэффициенты A_{kj} и B_{kj}, зная которые по формулам (24), (28), (29) можно получить решение u однородной задачи (1), (2). Если выполняются условия (14), то все коэффициенты матрицы A_{kj} и B_{kj} при $j \geq 3$ (в общем случае при $j \geq n$) равны нулю. Действительно, $\Delta_j \neq 0$ при $j > 3$ ($j > n$) в силу условий (14), а $\Delta_3 \neq 0$ ($\Delta_n \neq 0$) так как является обобщённым определителем Вандермонда с различными элементами.

Таким образом, решение u является многочленом относительно z и $\bar{z}$, степень которого меньше 5 (в общем случае $2n-1$). Но из Леммы 2 следует, что порядок нетривиального многочлена, удовлетворяющего однородным условиям (2) должен быть не меньше 6 (в общем случае $2n$). Следовательно, однородная задача (1), (2) имеет только нулевое решение, то есть условия (14) достаточны для однозначной разрешимости задачи (1), (2).

Для доказательства необходимости этих условий отметим, что если $\Delta_{j_0} = 0$ при $j_0 > 3$ ($j_0 > n$), то соответствующая однородная система (30) – (35) имеет ненулевое решение A_{kj_0}, B_{kj_0}. Учитывая Замечание 2 получим, что это решение порождает ненулевое решение $u_{j_0}(z, \bar{z})$ однородной задачи (1), (2). Эта функция является многочленом относительно z и $\bar{z}$ порядка j_0+2 (в общем случае j_0+n-1). Таким образом, если не выполнены условия (14), то задача (1), (2) не является однозначно разрешимой.

Замечание 3. Из доказательства теоремы следует, что если ранг матрицы D_k равен r_k, то однородная задача (1), (2) имеет

$$L = \sum_{k=n+1}^{\infty} (2n - r_k)$$

линейно независимых решений. Согласно Замечанию 1, число ненулевых слагаемых в последней сумме конечно.

Abstract. The paper studies unique solvability in the open unit disk of the Dirichlet problem for properly elliptic equation of order $2n$ in the class of $2n$ times continuously differentiable functions, which with up to n-th order derivatives satisfy Hölder condition in the closed disk. The necessary and sufficient conditions for unique solvability are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. E. Tovmasyan, Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields, World Scientific, Singapore, 1998.
2. L. Bers, F. John, M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience Publishers, N.Y. - London - Sydney, 1964.
3. А. О. Бабаян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений четвертого порядка", Изв. НАН Армении, Математика, том 34, № 5, стр. 1 – 15, 1999.
4. А. О. Бабаян, Л. З. Закарян, "Об однозначной разрешимости задачи Дирихле для одного класса эллиптических уравнений четвёртого порядка", Сборник материалов годичной конференции АГИУ, Ереван, стр. 7 – 9, 2000.
5. Е. А. Буряченко, "О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях", Нелинейные граничные задачи, Донецк, том 10, стр. 44 – 49, 2000.
6. Н. Е. Товмасян, В. С. Закарян, "Задача Дирихле для правильно эллиптических уравнений в многосвязных областях", Изв. НАН Армении, Математика, том 37, № 6, стр. 8 – 35, 2002.
7. A. O. Babayan, "On unique solvability of Dirichlet problem for one class of properly elliptic equation", in Topics in Analysis and its Applications. Proceedings of NATO Conference, Yerevan, 2002, ser. II, vol. 147, pp. 287 – 295, Kluwer, 2004.
8. А. В. Бицадзе, Краевые Задачи для Эллиптических Уравнений Второго Порядка, Наука, Москва, 1966.
9. Н. Я. Виленкин, Комбинаторика, Наука, Москва, 1969.

Поступила 28 апреля 2003

Известия НАН Армении. Математика, **38**, № 6, 2003, 49-62

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И ВЛОЖЕНИЯ ОБОБЩЁННЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА НИКОЛЬСКОГО-БЕСОВА

А. Г. Багдасарян

Ереванский государственный университет

Резюме. Обобщённые пространства типа Никольского-Бесова $B^s_{p,q}(\mu)$ обычно изучаются при предположении, что функция $\mu(\xi)$, определяющая гладкость функций из этих пространств, удовлетворяет соотношению $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \mu(\xi) = \infty$. В данной статье изучаются обобщённые пространства типа Никольского-Бесова без этого предположения и приводятся интерполяционные теоремы и теоремы вложения.

ВВЕДЕНИЕ

В [1], [2] дано систематическое изложение теории классических пространств Никольского–Бесова. Позже в [3] – [6], опираясь на идею покрытия $\mathbb{R}^n$ прямоугольными параллелепипедами со сторонами, параллельными координатным осям, были исследованы различные обобщения пространств типа Никольского–Бесова. Обзор, посвящённый обобщённым пространствам типа Никольского–Бесова, можно найти в дополнении к монографии [7].

Гладкость функций из обобщенных пространств типа Соболева–Лиувилля рассмотренная в [8], [9], определялась некоторой функцией $\mu(\xi)$ полиномиального роста, которую в дальнейшем будем называть **порождающей функцией**. В заметках [10], [11] были введены обобщённые пространства типа Никольского–Бесова $B^s_{p,q}(\mu)$, для которых функция $\mu(\xi)$ определялась вершинами некоторого полного многогранника. При конкретном выборе порождающей функции $\mu(\xi)$, пространства $B^s_{p,q}(\mu)$ из [10], [11] совпадают с классическими пространствами Никольского–Бесова. Поэтому пространства $B^s_{p,q}(\mu)$ в дальнейшем будем называть пространствами типа Никольского–Бесова.

Одним из основных требований, накладываемых на порождающую функцию $\mu(\xi)$, является условие

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \mu(\xi) = \infty. \tag{0}$$

Это условие мотивируется представлением $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \Omega_k$, где

$$\Omega_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \mu(\xi) \le 2\}, \quad \Omega_k = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{k-1} \le \mu(\xi) \le 2^{k+1}\}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В заметках [12], [13], используя интерполяционный подход, были рассмотрены пространства типа Никольского–Бесова, для порождающих функций которых условие (0) может не выполняться. Пространства типа Никольского–Бесова определялись посредством интерполяции пар соответствующих пространств типа Соболева–Лиувилля. Основополагающим обстоятельством является свойство "квазилинеаризуемости" (см. [14] – [16]) пары пространств типа Соболева–Лиувилля, которое даёт возможность получить двустороннюю оценку K-функционала Петре.

В настоящей статье доказываются интерполяционные формулы и теоремы вложения для обобщённых пространств типа Никольского–Бесова. Приведём некоторые частные случаи рассматриваемых пространств :

A. При $\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$ пространство $B^s_{p,q}(\mu)$ совпадает с классическим пространством Никольского–Бесова.

B. При $\mu(\xi) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (1 + \xi_i^2)^{\lambda_i}\right)^{1/2}$, где λ_i – положительные числа, пространство $B^s_{p,q}(\mu)$ совпадает с анизотропным пространством Никольского–Бесова.

C. При $\mu(\xi) = \left(1 + \sum\limits_{j=1}^{M} \xi^{2\alpha^j}\right)^{1/2}$, где α^j – векторы с неотрицательными целыми компонентами, являющиеся вершинами некоторого полного многогранника, получаем пространства типа Никольского–Бесова из [10], [11].

D. При $\mu(\xi_1, \xi_2) = (1+\xi_1^2)^{1/2}(1+\xi_2^2)^{1/2}$ получаем аппроксимационные пространства из [17] (см. Предложение 5 из [17]).

E. При $\mu(\xi) = \left(1 + \prod\limits_{j=1}^{n} \xi_i^2\right)^{1/2}$ получаем аппроксимационные пространства из [18] (см. Следствие 3.3 из [18]).

Все вышеперечисленные пространства являются интерполяционными пространствами, полученные методом "вещественной" интерполяции для соответствующих пар пространств типа Соболева–Лиувилля и, следовательно, совпадают с рассматриваемыми пространствами типа Никольского–Бесова (см. Определение

2 и Теорему 5). Отметим, что представления пространств типа Никольского–Бесова, полученные в этой статье, являются новыми и для классических пространств.

Будем пользоватся следующими обозначениями :

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово пространство,

$\mathbb{Z}_+^n$ – множество мультииндексов, т.е. векторов с неотрицательными целыми компонентами,

S – пространство Шварца основных функций,

M_p – пространство мультипликаторов Фурье типа (p,p),

$\mathbf{C}$ – пространство непрерывных функций, определённых в $\mathbb{R}^n$.

Символ "$\sim$" означает наличие двусторонней оценки, а символ "*" обозначает сопряжённое пространство. Далее одной и той же буквой c будем обозначать, вообще говоря, разные постоянные.

§1. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ РАЗНОЙ АНИЗОТРОПИИ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ

Пусть G_+ – множество положительных функций $\mu \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ таких, что для любого $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с компонентами 0 или 1 имеет место неравенство

$$|\xi^\alpha D^\alpha \mu(\xi)| \le c\mu(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \prod_{i=1}^n \xi \neq 0. \tag{1}$$

Из теоремы Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [19]) и оценки (1) следует, что ограниченные в $\mathbb{R}^n$ функции из G_+ являются мультипликаторами Фурье.

Определение 1. При $1 < p < \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_+$ определим **пространства типа Соболева–Лиувилля** следующим образом

$$H_p^s(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv H_p^s(\mu) = \left\{ f \in S' : \ \|f\|_{H_p^s(\mu)} = \|F^{-1}\{\mu^s F f\}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}.$$

Пространства $H_p^s(\mu)$ рассмотрены в [8], [9]. При $\mu(\xi) = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ эти пространства совпадают с классическими пространствами Соболева–Лиувилля. Если положить

$$I_{\mu^s}(\cdot) = F^{-1}\{\mu^{-s}F(\cdot)\}, \quad \mu \in G_+, \quad -\infty < s < \infty, \tag{2}$$

то определение пространств типа Соболева- Лиувилля можно записать в виде $H_p^s(\mu) = I_{\mu^s}(L_p)$.

Для того, чтобы определить B-пространства типа Никольского–Бесова, порождённые функциями из G_+, воспользуемся интерполяционными парами соответствующих пространств типа Соболева–Лиувилля.

Определение 2. Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < s < \infty$, $\mu \in G_+$. Определим **пространства типа Никольского–Бесова** следующим образом :

$$B^0_{p,q}(\mu, \mathbb{R}^n) \equiv B^0_{p,q}(\mu) = \left(H^1_p(\mu), H^{-1}_p(\mu)\right)_{1/2,q}, \quad B^s_{p,q}(\mu) = I_\mu \cdot B^0_{p,q}(\mu).$$

Как непосредственное следствие "вещественной" интерполяции (см. [14], [15]) и свойств пространств типа Соболева–Лиувилля (см. [8], [9]), находим, что пространства типа Никольского–Бесова являются баноховыми пространствами, а S плотно в этих пространствах, если второй нижний индекс отличен от бесконечности. Далее, по Теореме 3.7.1 из [15] имеем

$$\left(B^0_{p,q}(\mu)\right)^* = \left(H^{-1}_{p'}(\mu), H^1_{p'}(\mu)\right)_{1/2,q'} = \left(H^1_{p'}(\mu), H^{-1}_{p'}(\mu)\right)_{1/2,q'} = B^0_{p',q'}(\mu), \tag{3}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 1 \le q < \infty.$$

Заметим, что (3) верно также при $q = \infty$, если заменить $B^0_{p,\infty}(\mu)$ на замыкание S в $B^0_{p,\infty}(\mu)$ (см. Замечание 3.7.1 из [15]).

Следующий результат об интерполяции пространств разной анизотропии является следствием свойства "квазилинеаризуемости" пар пространств типа Соболева–Лиувилля.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $\lambda, \rho \in G_+$, $0 < \theta < 1$. *Тогда*

$$\left(H^1_p(\lambda), H^1_p(\rho)\right)_{\theta,q} = \left\{ f \in S' : \|f\|^*_{(H^1_p(\lambda), H^1_p(\rho))_{\theta,q}} = \right.$$

$$\left. = \left(\int_0^\infty t^{-\theta q} \left\| F^{-1}\left\{ \frac{t\lambda\rho}{\lambda + t\rho} Ff \right\} \right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Доказательство : В [16] доказано, что пара $\{H^1_p(\lambda), H^1_p(\rho)\}$ квазилинеаризуема с помощью операторов

$$V_0(t) = F^{-1}\left(\frac{t\rho}{\lambda + t\rho} F\right), \quad V_1(t) = F^{-1}\left(\frac{\lambda}{\lambda + t\rho} F\right).$$

Следовательно, по Лемме 1.8.4 из [14], для K-функционала Петре имеем

$$K(t, f; H^1_p(\lambda), H^1_p(\rho)) \sim \left\| F^{-1}\left\{ \frac{t\lambda\rho}{\lambda + t\rho} Ff \right\} \right\|_{L_p}. \tag{4}$$

Теперь утверждение теоремы следует из определения K-метода "вещественной" интерполяции (см. [14], [15]). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$. Тогда*

$$a)\quad B^s_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|^{(1)}_{B^s_{p,q}(\mu)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + t} Ff \right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

$$b)\quad B^s_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|^{(2)}_{B^s_{p,q}(\mu)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\| F^{-1} \frac{2^{k/2}\mu^{1+s}}{\mu^2 + 2^k} Ff \right\|^q_{L_p} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

с обычными видоизменениями при $q = \infty$.

Доказательство. Утверждения теоремы вытекают из Определения 2, Теоремы 1 при $\lambda = \mu$, $\rho = 1/\mu$ и метода "вещественной" интерполяции (см. [14], [15]), а в доказательстве утверждения b) используется дискретный K–метод (см. Лемму 3.1.3 из [15]).

Замечание 1. Если в Определении 2 положить $\mu(\xi) = 1$, то для произвольного q, $1 \leq q \leq \infty$, получим $B^0_{p,q}(1) = L_p$. Таким образом, рассматриваемые пространства типа Никольского–Бесова содержат в себе и пространство L_p, $1 < p < \infty$.

Замечание 2. Используя равенство Парсеваля, непосредственным вычислением получим $B^0_{2,2}(\mu) = L_2$, $\mu \in G_+$. Действительно, из утверждения a) Теоремы 2 имеем

$$\|f\|_{B^0_{2,2}(\mu)} \sim \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2 + t} Ff \right\|^2_{L_2} \frac{dt}{t} \right)^{1/2} \sim$$

$$\sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu^2 (Ff)^2 \int_0^\infty \frac{dt}{\mu^4 + t^2}\, d\xi \right)^{1/2} \sim \left(\int_{\mathbb{R}^n} (Ff)^2(\xi)\, d\xi \right)^{1/2} \sim \|f\|_{L_2}.$$

Теорема 3. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$, $0 < \theta < 1$. Тогда*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left\{ f \in S' : \|f\|^{(3)}_{B^s_{p,q}(\mu)} = \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1} \frac{t^{1-\theta}\mu^{\theta+s}}{\mu + t} Ff \right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему при $s = 0$. Общий случай может быть получен применением оператора, определённого в (2). Сначала докажем, что при $\theta = a/(a+b)$ $(a, b > 0)$ имеет место равенство

$$\left(H^a_p(\mu), H^{-b}_p(\mu)\right)_{\theta,q} = B^0_{p,q}(\mu). \tag{5}$$

Полагая $\nu = \mu^{a+b}$, по Теореме 1 получим

$$\|f\|^q_{(H^a_p(\mu),H^{-b}_p(\mu))_{\theta,q}} \sim \int_0^\infty t^{-\theta q}\left\|F^{-1}\frac{t\mu^{a-b}}{\mu^a+t\mu^{-b}}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{t^{1-\theta}\mu^a}{\mu^{a+b}+t}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu+t}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t}. \tag{6}$$

Выберем число $m > 0$ так, чтобы имели место неравенства $(2m)^{-1} < \theta$ и $(2m)^{-1} < 1-\theta$. Проверим, что имеет место оценка

$$\frac{u^{m(1-\theta)}\nu^\theta}{\nu+u^m} \le c\frac{u^{1/2}\nu^{1/(2m)}}{\nu^{1/m}+u}, \quad u>0, \quad c>0. \tag{7}$$

Для этого положим $\alpha = 1-\theta-(2m)^{-1}$ и $\beta = 1-\theta+(2m)^{-1}$. Так как $(2m)^{-1} < \theta$, $(2m)^{-1} < 1-\theta$, то имеем $0<\alpha,\beta<1$. Неравенство (7) перепишем в виде

$$u^{m(1-\theta)}\nu^{\theta+1/m} + u^{m(1-\theta)+1}\nu^\theta \le cu^{1/2}\nu^{1/(2m)}(\nu+u^m). \tag{8}$$

Имеем

$$u^{m(1-\theta)}\nu^{\theta+1/m} + u^{m(1-\theta)+1}\nu^\theta = u^{1/2}\nu^{1/(2m)}\nu^{1-\alpha}u^{m\alpha} + u^{1/2}\nu^{1/(2m)}\nu^{1-\beta}u^{m\beta} =$$

$$= u^{1/2}\nu^{1/(2m)}(u^{m\alpha}\nu^{1-\alpha}+u^{m\beta}\nu^{1-\beta}) \le cu^{1/2}\nu^{1/(2m)}(\nu+u^m).$$

Отсюда в силу (8) вытекает (7).

Делая замену переменных $t = u^m$ в последнем интеграле в (6), используя (7) и Теорему 1 из [13] (т.е. равенство $B^0_{p,q}(\mu) = B^0_{p,q}(\mu^a)$, $a \ne 0$), получим

$$\int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu+t}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t} \sim \int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{u^{m(1-\theta)}\nu^\theta}{\nu+u^m}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{du}{u} \le$$

$$\le c\int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{u^{1/2}\nu^{1/(2m)}}{\nu^{1/m}+u}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{du}{u} \sim \|f\|^q_{B^0_{p,q}(\nu^{1/2m})} \sim \|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)}.$$

Из (6) имеем

$$(H^a_p(\mu), H^{-b}_p(\mu))_{\theta,q} \supset B^0_{p,q}(\mu).$$

Обратное вложение следует из свойства дуальности (см. (3) и Теорему 3.7.1 из [15]). Равенство (5) доказано. Теперь из (5) и (6) имеем

$$\|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)} \sim \int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu+t}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t}. \tag{9}$$

Наконец, в силу Теоремы 1 из [13] и (9), получаем

$$\|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)} \sim \|f\|^q_{B^0_{p,q}(\mu^{1/(a+b)})} \sim \int_0^\infty \left\|F^{-1}\frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu+t}Ff\right\|^q_{L_p}\frac{dt}{t}.$$

Теорема 3 доказана.

Используя Теорему 3, можно характеризовать интерполяционные пространства для пар пространств типа Соболева–Лиувилля в терминах исследуемых пространств типа Никольского–Бесова.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $\lambda, \rho \in G_+$, *а* I *– оператор, определённый в (2). Тогда*

$$\left(H_p^1(\lambda), H_p^1(\rho)\right)_{\theta,q} = I_{\lambda^{1-\theta}\rho^\theta} B^0_{p,q}(\lambda/\rho).$$

Доказательство : В силу Теорем 1 и 3 имеем

$$\|f\|^q_{(H_p^1(\lambda),H_p^1(\rho))_{\theta,q}} \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1-\theta}\lambda\rho}{\lambda + t\rho} Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1-\theta}(\lambda/\rho)^\theta}{\frac{\lambda}{\rho} + t} \lambda^{1-\theta}\rho^\theta Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \sim \|F^{-1}\{\lambda^{1-\theta}\rho^\theta Ff\}\|^q_{B^0_{p,q}(\lambda/\rho)}.$$

Теорема 4 доказана.

§2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ ТИПА СОБОЛЕВА–ЛИУВИЛЛЯ И НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G_+$ *и* $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$. *Тогда для* $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$ *имеем*

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(H_p^{s_0}(\mu), H_p^{s_1}(\mu)\right)_{\theta,q}.$$

Доказательство. Будем считать для определённости, что $s_0 > s_1$. По Теореме 1 имеем

$$\|f\|^q_{(H_p^{s_0}(\mu),H_p^{s_1}(\mu))_{\theta,q}} \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1-\theta}\mu^{s_0+s_1}}{\mu^{s_0} + t\mu^{s_1}} Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} =$$

$$= \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1-\theta}\mu^{\theta(s_0-s_1)}\mu^s}{\mu^{s_0-s_1} + t} Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t}. \tag{10}$$

Полагая $\nu = \mu^{s_0-s_1}$ и используя Теорему 3 и Теорему 1 из [13], получим

$$\|f\|^q_{(H_p^{s_0}(\mu),H_p^{s_1}(\mu))_{\theta,q}} \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1-\theta}\nu^\theta}{\nu + t} \mu^s Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \sim$$

$$\sim \|F^{-1}\{\mu^s Ff\}\|^q_{B^0_{p,q}(\mu)} = \|f\|^q_{B^s_{p,q}(\mu)}.$$

Теорема 5 доказана.

Используя Теорему 5 и соответствующие результаты для пространств типа Соболева–Лиувилля из [8], [9], можно доказать следующую теорему двойственности (сравни с (3)).

Теорема 6. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$. *Тогда*

$$(B^s_{p,q}(\mu))^* = B^{-s}_{p',q'}(\mu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Отметим, что Теорема 6 верна также при $q = \infty$, если заменить $B^s_{p,\infty}(\mu)$ на замыкание S в $B^s_{p,\infty}(\mu)$. Теорема 5 даёт возможность доказать интерполяционные формулы для пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 7. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 \le q, q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G_+$. *Тогда*

a) *для* $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$,

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q},$$

b) *для* $1/q^* = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$, $-\infty < s < \infty$ *имеем*

$$B^s_{p,q^*}(\mu) = \left(B^s_{p,q_0}(\mu), B^s_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q^*},$$

c) *для* $-\infty < s_0 \ne s_1 < \infty$, $s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1$,

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), H^{s_1}_p(\mu)\right)_{\theta,q}.$$

Доказательство. Чтобы доказать a), применим Теорему 5 и теорему реитерации (см. Теорему 3.5.3 из [15]). Получаем

$$\left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q} = \left(\left(H^{m_0}_p(\mu), H^{m_1}_p(\mu)\right)_{\theta_0,q_0}, \left(H^{m_0}_p(\mu), H^{m_1}_p(\mu)\right)_{\theta_1,q_1}\right)_{\theta,q} =$$
$$= \left(H^{m_0}_p(\mu), H^{m_1}_p(\mu)\right)_{\eta,q} = B^s_{p,q}(\mu),$$

где

$$\eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1, \quad s_i = (1-\theta_i)m_0 + \theta_i m_1, \quad i = 0, 1.$$

Чтобы доказать b), применим Теорему 5 и Теорему 3.5.4 из [15]. Получим

$$\left(B^s_{p,q_0}(\mu), B^s_{p,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q^*} = \left(\left(H^{m_0}_p(\mu), H^{m_1}_p(\mu)\right)_{\eta,q_0}, \left(H^{m_0}_p(\mu), H^{m_1}_p(\mu)\right)_{\eta,q_1}\right)_{\theta,q^*} =$$
$$= \left(H^{m_0}_p(\mu), H^{m_1}_p(\mu)\right)_{\eta,q^*} = B^s_{p,q^*}(\mu).$$

Чтобы доказать c), применим Теорему 5 и Теорему реитерации 3.5.3 из [15]. Получим

$$\left(B^{s_0}_{p,q_0}(\mu), H^{s_1}_p(\mu)\right)_{\theta,q} = \left(\left(H^{s_1}_p(\mu), H^{s_2}_p(\mu)\right)_{\eta,q_0}, H^{s_1}_p(\mu)\right)_{\theta,q} =$$
$$= \left(H^{s_1}_p(\mu), H^{s_2}_p(\mu)\right)_{\eta(1-\theta),q} = B^s_{p,q}(\mu),$$

где $s_0 = (1-\eta)s_1 + \eta s_2$, $\quad 0 < \eta < 1$. Теорема 7 доказана.

Чтобы доказать другие интерполяционные формулы, включая формулу "комплексной" интерполяции, воспользуемся следующим представлением пространств типа Никольского-Бесова.

Теорема 8. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le q < \infty$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s < \infty$, и пусть число a такое, что $a > 2|s|$. Тогда $B^s_{p,q}(\mu) =$*

$$= \left\{ f \in S' : \|f\|^{(4)}_{B^s_{p,q}(\mu)} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \left\| F^{-1} \left(\frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{\mu + 2^k} \right)^a Ff \right\|^q_{L_p} \right]^{1/q} < \infty \right\}.$$

При $q = \infty$ результат имеет место с обычными видоизменениями.

Доказательство. Так как $a > 2|s|$, имеем $0 < \theta < 1$, где $\theta = \frac{1}{2} - \frac{s}{a}$. Применяя Теорему 5, получим

$$B^s_{p,q}(\mu) = \left(H^{a/2}_p(\mu), H^{-a/2}_p(\mu)\right)_{\theta,q}. \tag{11}$$

Для описания интерполяционного пространства в (11), воспользуемся дискретным K–методом. По Лемме 3.1.3 из [15], для $b > 1$, имеем

$$\|f\|^q_{B^s_{p,q}(\mu)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^{-kq\theta} K^q\left(b^k, f, H^{a/2}_p(\mu), H^{-a/2}_p(\mu)\right), \tag{12}$$

K-функционал в (12) может быть оценен с помощью (4). Имеем

$$\|f\|^q_{B^s_{p,q}(\mu)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b^{-kq(\frac{1}{2}-\frac{s}{a})} \left\| F^{-1} \frac{b^k \mu^{a/2}}{\mu^a + b^k} Ff \right\|^q_{L_p}. \tag{13}$$

Полагая $b = 2^a$ в (13), получаем

$$\|f\|^q_{B^s_{p,q}(\mu)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kqs} \left\| F^{-1} \frac{2^{ka/2}\mu^{a/2}}{\mu^a + 2^{ka}} Ff \right\|^q_{L_p} \sim$$

$$\sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{ksq} \left\| F^{-1} \left(\frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{\mu + 2^k} \right)^a Ff \right\|^q_{L_p}.$$

Теорема 8 доказана.

Теорема 9. *Пусть $1 < p_0, p_1 < \infty$, $1 \le q_0, q_1 \le \infty$, $0 < \theta < 1$, $\mu \in G_+$, $-\infty < s_0, s_1 < \infty$ и*

$$s = (1-\theta)s_0 + \theta s_1, \quad \frac{1}{p^*} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q^*} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Тогда

$$B^s_{p^*,q^*}(\mu) = \left[B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu)\right]_\theta,$$

а для $p^* = q^*$,

$$B^s_{p^*,q^*}(\mu) = \left(B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu)\right)_{\theta,q^*}.$$

Доказательство. По Теореме 8 для $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $-\infty < m < \infty$ и $a > 2|s|$, получаем

$$\|f\|^q_{B^m_{p,q}(\mu)} \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{kqm} \left\| F^{-1}\left(\frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{\mu+2^k}\right)^a Ff \right\|^q_{L_p} \sim$$

$$\sim \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kqm} \left\| F^{-1}\left\{\left(\frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{\mu+2^k} + \frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{1+2^k\mu}\right)^a Ff\right\}\right\|^q_{L_p}. \tag{14}$$

Обозначим $G = G(f) = \{g_k\}$, где

$$g_k = F^{-1}\left(\frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{\mu+2^k} + \frac{2^{k/2}\mu^{1/2}}{1+2^k\mu}\right)^a Ff, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Тогда (14) можно переписать в виде

$$\|f\|_{B^m_{p,q}(\mu)} \sim \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{kqm}\|g_k\|^q_{L_p}\right)^{1/q} = \|G\|_{l^m_q(L_p)}. \tag{15}$$

Отсюда следует, что $G \in L(B^m_{p,q}(\mu), l^m_q(L_p))$. В (15) положим $p = p_i$, $q = q_i$, $m = s_i$, $i = 0, 1$ и выберем число a так, чтобы $a > 2|s_i|$, $i = 0, 1$. Используя интерполяционное свойство “комплексного” метода Теоремы 5.6.3 и 5.1.1 из [15], получаем

$$\|f\|_{B^s_{p^*,q^*}(\mu)} \sim \|G\|_{l^s_{q^*}(L_p)} \le c\|f\|_{[B^{s_0}_{p_0,q_0}(\mu), B^{s_1}_{p_1,q_1}(\mu)]_\theta}.$$

Обратная оценка получается из соображений двойственности. Этим доказывается первое утвержение Теоремы 9. Второе утверждение доказывается аналогично, с использованием (15) и Теорем 5.6.2 и 5.2.1 из [15]. Теорема 9 доказана.

§3. ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ

По Определению 2 и Теореме 1 из [13], для $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $s \ne 0$, $\mu \in G_+$ имеем

$$B^s_{p,q}(\mu) = I_{\mu^s} B^0_{p,q}(\mu) = I_{\mu^s} B^0_{p,q}(\mu^s) = B^1_{p,q}(\mu^s).$$

Поэтому достаточно рассмотреть пространства типа Никольского-Бесова с верхним индексом, равным нулю или единице.

Теорема 10. *Пусть $1 < p < \infty$, $\mu, \nu \in G_+$. Тогда*

$$B^0_{p,1}(\mu) \subset L_p \subset B^0_{p,\infty}(\nu). \tag{16}$$

Доказательство. Докажем правое вложение. Учитывая, что $\dfrac{t^{1/2}\nu}{\nu^2+t} \in M_p$, в силу (4) получим

$$\|f\|_{B^0_{p,\infty}(\nu)} = \|f\|_{(H^1_p(\nu), H^{-1}_p(\nu))_{1/2,\infty}} \sim \sup_t \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\nu}{\nu^2+t} Ff\right\}\right\|_{L_p} < c\|f\|_{L_p}.$$

Чтобы доказать левое вложение в (16) воспользуемся J–методом "вещественной" интерполяции (см. [14], [15]). Пусть $f \in B^0_{p,1}(\mu) = (H^1_p(\mu), H^{-1}_p(\mu))_{1/2,1}$. Тогда f представляется в виде

$$f = \int_0^\infty u(t)\,\frac{dt}{t}. \tag{16'}$$

Имеем

$$\|f\|_{L_p} \le \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left\|F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}\frac{\mu^2+t}{\mu} Fu(t)\right\}\right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \le$$

$$\le c\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left\|F^{-1}\left\{\frac{\mu^2+t}{\mu} Fu(t)\right\}\right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \le$$

$$\le c'\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \left(\|u(t)\|_{H^1_p(\mu)} + t\|u(t)\|_{H^{-1}_p(\mu)}\right) \frac{dt}{t} \sim$$

$$\sim \int_0^\infty t^{-1/2} J\big(t, u(t); H^1_p(\mu), H^{-1}_p(\mu)\big)\,\frac{dt}{t}.$$

Вычисляя нижнюю грань по всем предсталениям (16′), получим второе вложение из (16). Теорема 10 доказана.

Теорема 11. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $\mu, \nu \in G_+$. Для того, чтобы имело место вложеение*

$$B^1_{p,q}(\mu) \subset B^1_{p,q}(\nu) \tag{17}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\nu(\xi) \le c\mu(\xi), \quad c > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{18}$$

Доказательство. Допустим, что имеет место оценка (18). Тогда

$$\frac{\nu^2}{\nu^2+t} \le c'\frac{\mu^2}{\mu^2+t}, \quad c' > 0, \quad t > 0.$$

Применяя теорему Лизоркина о мультипликаторах Фурье (см. [19]), Определение 2 и Теорему 2, получаем

$$\|f\|^q_{B^1_{p,q}(\nu)} \sim \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\nu^2}{\nu^2+t} Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq c'' \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu^2}{\mu^2+t} Ff\right\}\right\|^q_{L_p} \frac{dt}{t} \sim \|f\|^q_{B^1_{p,q}(\mu)}.$$

Пусть имеет место вложение (17). Убедимся, что тогда имеет место и вложение

$$H^2_p(\mu) \subset H^2_p(\nu). \tag{19}$$

В противном случае, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся последовательность $\{f_N\}$ такая, что

$$\|f_N\|_{H^2_p(\mu)} < \varepsilon \|f_N\|_{H^2_p(\nu)}.$$

Используя Теорему 5 и Теорему 3.1.2 из [15], интерполяцией получаем

$$\|f_N\|_{B^1_{p,q}(\mu)} \sim \|f_N\|_{(H^2_p(\mu),L_p)_{1/2,q}} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f_N\|_{(H^2_p(\nu),L_p)_{1/2,q}} \sim \sqrt{\varepsilon}\|f_N\|_{B^1_{p,q}(\nu)}.$$

Полученная оценка противоречит (19). С другой стороны, (19) равносильно включению $(\nu/\mu)^2 \in M_p$ (см. [8]), что в свою очередь приводит к (18). Теорема 11 доказана.

Теорема 12. *Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\mu \in G_+$. Для того, чтобы имело место вложение*

$$B^1_{p,q}(\mu) \subset C \tag{20}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$F^{-1}\frac{1}{\mu} \in B^0_{p',q'}(\mu), \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = \frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1. \tag{21}$$

Если $q=\infty$, то в (20) вместо $B^1_{p,\infty}(\mu)$ надо взять пополнение S в $B^1_{p,\infty}(\mu)$.

Доказательство. Допустим, что имеет место (20). Тогда

$$|f(0)| \leq c\|f\|_{B^1_{p,q}(\mu)}, \quad f \in S(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно δ-функция принадлежит сопряжённому пространству $(B^1_{p,q}(\mu))^*$, которое по Теореме 6 совпадает с $B^{-1}_{p',q'}(\mu)$. Имеем

$$\|\delta\|_{B^{-1}_{p',q'}(\mu)} \sim \|I_\mu \delta\|_{B^0_{p',q'}(\mu)} \sim \left\|F^{-1}\frac{1}{\mu}\right\|_{B^0_{p',q'}(\mu)}.$$

Теперь предположим, что имеет место (21) и $f \in B^1_{p,q}(\mu) = (H^2_p(\mu), L_p)_{1/2,q}$ (см. Теорему 5). Используя J–метод "вещественной" интерполяции, представим f в виде (16). Согласно неравенству Гелдера,

$$|f| \le \int_0^\infty \left| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}\frac{1}{\mu}\right\} * F^{-1}\left\{\frac{\mu^2+t}{t^{1/2}\mu}\mu Fu(t)\right\}\right| \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}\frac{1}{\mu}\right\}\right\|_{L_{p'}} \left\| F^{-1}\left\{\frac{\mu^2+t}{t^{1/2}\mu}\mu Fu(t)\right\}\right\|_{L_p} \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \left(\int_0^\infty \left\| F^{-1}\left\{\frac{t^{1/2}\mu}{\mu^2+t}\frac{1}{\mu}\right\}\right\|^{q'}_{L_{p'}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_0^\infty t^{-q/2}\left\|F^{-1}\{(\mu^2+t)Fu(t)\}\right\|_{L_p}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\le c \left\| F^{-1}\frac{1}{\mu}\right\|_{B^0_{p',q'}(\mu)} \left(\int_0^\infty t^{-1/2} J(t, u(t); H^2_p(\mu), L_p)\frac{dt}{t}\right)^{1/q}.$$

Беря нижнюю грань по всем представлениям (16) и используя Теорему 5, получим

$$|f| \le c \left\| F^{-1}\frac{1}{\mu}\right\|_{B^0_{p',q'}(\mu)} \|f\|_{B^1_{p,q}(\mu)}.$$

Отсюда следует (20). Теорема 12 доказана.

Abstract. Nikolskii–Besov type generalized spaces $B^s_{p,q}(\mu)$ are usually studied under the assumption that the function $\mu(\xi)$, which determines the smoothness of functions from that spaces, satisfies $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} \mu(\xi) = \infty$. The present paper studies various Nikolskii–Besov type generalized spaces without that assumption and presents interpolation and embedding theorems.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Приближение Функций Многих Переменных и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1977.
2. О. В. Бесов, В. Л. Ильин, С. М. Никольский, Интегральные Представления Функций и Теоремы Вложения, Наука, Москва, 1975.
3. Г. А. Калябин, "Теоремы вложения для обобщённых пространств Бесова и Лиувилля", ДАН СССР, том 232, стр. 1245 – 1248, 1977.
4. Г. А. Калябин, "Описание функций из классов типа Бесова–Лизоркина–Трибеля", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 82 – 109, 1980.
5. М. Л. Гольдман, "Метод покрытий для описания общих пространств типа Бесова", Труды МИАН СССР, том 156, стр. 47 – 81, 1980.
6. B. Stockert, H. Triebel, "Decomposition methods for function spaces of $B^s_{p,q}$ type and $F^s_{p,q}$ type", Math. Nachr., vol. 89, pp. 247 – 267, 1979.
7. Х. Трибель, Теория Функциональных Пространств, Мир, Москва, 1986.

8. Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях, “Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения”, УМН, том. 20, № 1, стр. 3 – 74, 1965.
9. H. Triebel, “General function spaces, III”, Analysis Math., vol. 3, pp. 221 – 249, 1977.
10. А. Г. Багдасарян, “Об интерполяции и следах функций из некоторых анизотропных функциональных пространств”, Изв. АН АрмССР. Математика, том 23, № 4, стр. 353 – 365, 1988.
11. А. Г. Багдасарян, “Интерполяция и следы функций из некоторых функциональных пространств”, ДАН АрмССР, том 87, № 5, стр. 207 – 211, 1988.
12. А. Г. Багдасарян, “Интерполяция и следы функций из некоторых пространств типа Соболева-Лиувилля”, Изв. НАН Армении. Математика, том 36, № 5, стр. 14 – 22, 2001.
13. А. Г. Багдасарян, “Об обобщённых пространствах типа Никольского-Бесова”, ДНАН Армении, том 102, № 1, стр. 11 – 15, 2002.
14. Х. Трибель, Теория Интерполяции, Функциональные Пространства, Дифференциальные Операторы, Мир, Москва, 1980.
15. Й. Берг, Й. Лефстрем, Интерполяционные Пространства, Введение, Мир, Москва, 1980.
16. А. Г. Багдасарян, “Об интерполяционных свойствах некоторых квазилинеаризуемых пар”, Мат. сборник, том 189, № 2, стр. 73 – 80, 1998.
17. H.-J. Schmeisser, W. Sickel, “Spaces of functions of mixed smoothness approximation from hyperbolic crosses”, Jenaer Schriften zur Math., 2002.
18. R. A. De Vore, S. V. Konyagin, V. N. Temlyakov, “Hyperbolic wavelet approximation”, Constr. Approx., vol. 14, pp. 1 – 26, 1998.
19. П. И. Лизоркин, “(L_p, L_q)-мультипликаторы интегралов Фурье”, ДАН СССР, том 152, стр. 808 – 811, 1963.

Поступила 1 апреля 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 63–82

О СТЕПЕНИ ПРЕВАЛИРОВАНИЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОЧЛЕНОВ И ОБ ИХ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ

О. Р. Габриелян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье приводится метод определения числа Хермандера гипоэллиптичности данного многочлена. Введено понятие превалирования одного многочлена над другим. Для таких многочленов доказано существование положительного числа превалирования в $\mathbb{R}^2$. Исходя из этого числа мы определяем число Хермандера гипоэллиптичности данного гипоэллиптического оператора от двух переменных.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие гипоэллиптичности дифференциальных операторов было введено Л. Хермандером как естественное обобщение понятия эллиптичности операторов (см. [1], [2]). Условия гипоэллиптичности сформулированы в терминах поведения в бесконечности характеристического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, соответствующего данному дифференциальному оператору $P(D) = P(D_1, \dots, D_n)$. В частности, характеристический многочлен $P(\xi)$ гипоэллиптического оператора $P(D)$ должен удовлетворять следующему условию : $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, где $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$.

Тем не менее, условия гипоэллиптичности, полученные Л. Хермандером, трудно поддаются проверке, и поэтому усилия многих авторов были направлены на изыскание более простых и легко проверяемых алгебраических условий гипоэллиптичности. Первые попытки в этом направлении были предприняты самим Л. Хермандером, Б. Мальгранжом, Ф. Тревом, Б. Пини, Л. Каттабрига, В. И. Буренковым и др. (см. [3] – [7]), а другие результаты можно найти в [8] – [12]. В частности, в работе [8] В. П. Михайлов ввёл класс невырождающихся многочленов $P(\xi)$, модули которых стремятся к ∞ при неограниченном росте аргумента. Этот класс содержит класс регулярных гипоэллиптических многочленов.

В работах [10], [11] получены некоторые необходимые и достаточные условия гипоэллиптичности вырождающихся многочленов, причём в работах [12], [13] совпадающие необходимые и достаточные условия.

Целью настоящей работы является нахождение числа гипоэллиптичности для двумерных гипоэллиптических многочленов. С этой целью мы вводим понятие превалирования многочленов и представляем необходимые и достаточные условия превалирования одного многочлена над другим. Кроме того, в §3 мы указываем метод определения степени превалирования, позволяющий найти число гипоэллиптичности, которое играет решающую роль в описании поведения решений гипоэллиптических уравнений.

Начнём с обозначений. Пусть $P(\xi)$ – многочлен, представленный в виде суммы однородных многочленов :

$$P(\xi) = \sum_{i=0}^{M_P} P_i(\xi) = \sum_{i=0}^{M_P} \sum_{|\alpha|=d_i^P} \gamma_\alpha^P \xi^\alpha, \tag{1.1}$$

где $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$, $d_0^P > d_1^P > \cdots > d_{M_P}^P \geq 0$. Положим

$$\begin{aligned} \Sigma_0(P) &= \left\{\eta : \eta \in R^2, |\eta| = 1, P_0(\eta) = 0\right\}, \\ \Sigma_j(P) &= \{\eta : \eta \in \Sigma_{j-1}, P_j(\eta) = 0\}, \ \ j = 1, \ldots, M_P. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Пусть $0 \neq \eta \in R^2$ – нуль многочлена P_i ; обозначим через $\ell_i^P = \ell_i^P(\eta)$ порядок η, если $\eta \in \Sigma_i(P)$ и $\ell_i^P(\eta) = 0$, если $\eta \notin \Sigma_i(P)$ $(0 \leq i \leq M_P)$. Обозначим через $\chi(\delta) = \chi(P, \eta, \delta)$ характеристическую функцию, определённую следующим образом :

$$\chi(P, \eta, \delta) = \max_{0 \leq i \leq M_P} \left\{d_i^P - \ell_i^P(\eta) \cdot \delta\right\}, \quad \delta \in [0; \infty). \tag{1.3}$$

Для точки $\eta \in \Sigma_0(P)$ через $A(P, \eta)$ обозначим множество точек $\delta > 0$ таких, что существуют индексы i, j, $i \neq j$, $0 \leq i$, $j \leq M_P$, такие, что $d_i^P - \ell_i^P(\eta)\delta = d_j^P - \ell_j^P(\eta)\delta = \chi(P, \eta, \delta) > 0$. Положим $J(P, \eta, \delta) = \left\{j : 0 \leq j \leq M_P, d_j^P - \ell_j^P(\eta) \cdot \delta = \chi(P, \eta, \delta)\right\}$. Очевидно, что для многочлена P от двух переменных множества $\Sigma_0(P)$ и $A(P, \eta)$ конечны.

Для $0 \neq \eta \in R^2$ обозначим через $k(P, \eta)$ наименьшее число i, $0 \leq i \leq M_P$, для которого $\eta \notin \Sigma_i(P)$ и $k(P, \eta) = M_P + 1$, если $\eta \in \Sigma_{M_P}$. Пусть число $\sigma = \sigma(P, \eta)$ – наименьшее решение уравнения $\chi(P, \eta, \delta) = 0$ и пусть $\sigma(P, \eta) = \infty$, если $\chi(P, \eta, \delta) > 0$ для всех $\delta \geq 0$.

Каждой точке $\eta \in \Sigma_0(P)$ мы сопоставляем единичный вектор $\tau = \tau(\eta) \in R^2$ такой, что $(\tau, \eta) = 0$. Легко заметить, что

$$D_\tau^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) = \sum_{|\alpha|=\ell_i^P(\eta)} \frac{D^\alpha P_i(\eta)}{\alpha!} \cdot \tau^\alpha \neq 0. \tag{1.4}$$

Наконец, для пары $(\eta^0, \delta_0) \in B_0(P) \equiv \{(\eta, \delta) : \eta \in \Sigma_0(P), \delta \in A(P, \eta)\}$ обозначим

$$r(x, P) = r(x, P, \eta^0, \delta_0) = \sum_{i \in J(P, \eta^0, \delta_0)} D_\tau^{\ell_i^P(\eta^0)} P_i(\eta^0) \cdot x^{\ell_i^P(\eta^0)}, \tag{1.5}$$

$$\xi(t, x) = \xi(t, x, \eta^0, \delta_0) = t\left(\eta + t^{-\delta_0} x \cdot \tau\right), \quad t \in (0; \infty), \tag{1.6}$$

$$\theta_0^P(\eta^0, \delta_0) = \frac{1}{2} \min_{(\eta, \delta) \in B_0(P)} \{|x| : x \neq 0, r(x, P, \eta, \delta) = 0\}, \tag{1.7}$$

$$\theta_1^P(\eta^0, \delta_0) = 2 \cdot \max_{(\eta, \delta) \in B_0(P)} \{|x| : x \neq 0, r(x, P, \eta, \delta) = 0\} \tag{1.8}$$

и положим $\theta_0^P(\eta^0, \delta_0) = \frac{1}{2}$ и $\theta_1^P(\eta^0, \delta_0) = 2$, если $r(x, P, \eta^0, \delta_0) \neq 0$ для $x \neq 0$. Для многочленов P и Q вида (1.1) обозначим $\theta_0(\eta^0, \delta_0) = \min\{\theta_0^P(\eta^0, \delta_0), \theta_0^Q(\eta^0, \delta_0)\}$, $\theta_1(\eta^0, \delta_0) = \max\{\theta_1^P(\eta^0, \delta_0), \theta_1^Q(\eta^0, \delta_0)\}$, $\theta_0 = \min\{\theta_0(\eta, \delta)\}$, $\theta_1 = \max\{\theta_1(\eta, \delta)\}$, где минимум (соответственно максимум) берётся по всем парам $(\eta, \delta) \in B_0(P)$.

Лемма 1.1. ([13], Лемма 1.2). *Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \xi_2)$ – однородный многочлен степени $d > 0$, $\eta \in \Sigma(R) \equiv \left\{\xi : \xi \in R^2, |\xi| = 1, R(\xi) = 0\right\}$ и пусть $\ell = \ell(\eta)$ – порядок η. Тогда существует $\varepsilon = \varepsilon(\eta, R) > 0$ такое, что*

$$\frac{1}{2} \cdot \left|D_\tau^\ell R(\eta)\right| \cdot |(\eta, \xi)|^{d-\ell} \cdot |(\tau, \xi)|^\ell \leq |R(\xi)| \leq \frac{3}{2} \cdot \left|D_\tau^\ell R(\eta)\right| \cdot |(\eta, \xi)|^{d-\ell} \cdot |(\tau, \xi)|^\ell$$

$$\xi \in D_\varepsilon(\eta) \equiv \left\{z : z \in R^2, |(z, \tau)| \leq \varepsilon \cdot |(z, \eta)|\right\}.$$

§2. ОТНОШЕНИЕ ПРЕВАЛИРОВАНИЯ МЕЖДУ ДВУМЯ МНОГОЧЛЕНАМИ

Определение 2.1. Будем говорить, что многочлен P превалирует над многочленом Q и будем писать $Q \ll P$, если

$$R_{P,Q}(\xi) = \frac{|Q(\xi)|}{1 + |P(\xi)|} \to 0, \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Будем говорить, что многочлен P превалирует над многочленом Q относительно $\eta \in \Sigma_0(P)$, и будем писать $Q \ll_\eta P$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $M(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$R_{P,Q}(\xi) < \varepsilon, \quad \text{для любого} \quad \xi \in D_\varepsilon(\eta), \quad |\xi| \geq M(\varepsilon). \tag{2.2}$$

Очевидно, что

1. $Q \ll P$, когда $d_0^Q < d_0^P$ и $\Sigma_0(P) = \emptyset$,
2. $Q \ll P$ тогда и только тогда, когда $Q \ll_\eta P$ для всех $\eta \in \Sigma_0(P)$.

С другой стороны, ясно, что P не может превалировать над Q, если $d_0^Q \geq d_0^P$. Следовательно, в дальнейшем мы предполагаем, что $d_0^Q < d_0^P$ и $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$.

Лемма 2.1. *Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_\eta P$. Тогда*

$$\chi(Q,\eta,\delta) < \chi(P,\eta,\delta) \quad \text{для всех} \quad \delta \in [0,\sigma(P,\eta)]\,. \tag{2.3}$$

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует $\delta_0 \in [0,\sigma(P,\eta))$ такое, что $\chi(Q,\eta,\delta_0) \geq \chi(P,\eta,\delta_0) > 0$. Исследуем поведение многочленов P и Q на последовательности $\{\xi^s = s\,(\eta + \ x_0\tau s^{-\delta_0})\}$, где x_0 выбирается таким образом, чтобы $r(x_0,Q,\delta_0) \neq 0$. Тогда по формуле Тейлора для $i = 0,1,\ldots,M_P$

$$P_i\,(\xi^s) = s^{d_i^P} \sum_{\alpha \geq 0} x_0^{|\alpha|} s^{-\delta_0|\alpha|} \frac{D^\alpha P_i(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha =$$

$$= \left[\sum_{|\alpha| = \ell_i^P(\eta)} \frac{D^\alpha P_i(\eta)}{\alpha!}\tau^\alpha\right] x_0^{\ell_i^P(\eta)} s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)} + o\left(s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)}\right) = \tag{2.4}$$

$$= D_\tau^{\ell_i^P(\eta)} x_0^{\ell_i^P(\eta)} s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)} + o\left(s^{d_i^P - \delta_0 \ell_i^P(\eta)}\right)$$

при $s \to \infty$. Следовательно,

$$|P(\xi^s)| \leq C s^{\chi(P,\eta,\delta_0)} + o\left(s^{\chi(P,\eta,\delta_0)}\right),$$

$$|Q(\xi^s)| \geq |r(x_0,Q)|\, s^{\chi(Q,\eta,\delta_0)} + o\left(s^{\chi(Q,\eta,\delta_0)}\right)$$

при $s \to \infty$. Так как $\chi(Q,\eta,\delta_0) \geq \chi(P,\eta,\delta_0) > 0$ и $r(x_0,Q,\delta_0) \neq 0$, для достаточно больших s мы имеем $R_{Q,P}(\xi^s) \geq C > 0$, что противоречит предположению $Q \ll_\eta P$.

Пусть теперь неравенство (2.3) нарушено при $\delta_0 = \sigma(P,\eta)$. Тогда $\chi(Q,\eta,\delta_0) \geq \chi(P,\eta,\delta_0) = 0$ и в этом случае мы имеем $R_{Q,P} \geq C > 0$, что противоречит предположению $Q \ll_\eta P$. Лемма 2.1 доказана.

Следующий результат позволяет нам свести основную задачу к сравнению функций от одной переменной.

Теорема 2.1. *Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и вектор $\tau = \tau(\eta)$ выбран как и выше. Тогда $Q \ll_\eta P$ тогда и только тогда, когда*

1) $\chi(Q,\eta,\delta) < \chi(P,\eta,\delta)$ *для всех* $\delta \in [0,\sigma(P,\eta)]$,

2) $\lim\limits_{t\to\infty} \sup\limits_{|x| \in [\theta_0,\theta_1]} R_{P,Q}\,(\xi(t,x,\eta,\delta)) = 0$ *для всех* $\delta \in A(P,\eta)$, (2.5)

где $\xi(t,x) = \xi(t,x,\eta,\delta) = t\,(\eta + t^{-\delta}x\tau)$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 2.1, а условия 2) – из соотношений $|(\xi(t,x),\eta)| \to \infty$ и $|\xi(t,x),\tau|/\,|\xi(t,x),\eta| \to 0$ при $t \to \infty$.

Достаточность. Предположим обратное : при условиях 1) и 2)

$$R_{P,Q}(\xi^s) > \varepsilon_0 \quad \text{для всех} \quad s \in N \tag{2.6}$$

для некоторого числа $\varepsilon_0 > 0$ и некоторой последовательности $\{\xi^s : \xi^s \in D_{\varepsilon_0}(\eta)$ $(s \in N)\}$, удовлетворяющей $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Мы представляем векторы ξ^s в ортогональном базисе $\{\eta, \tau\}$ в виде $\xi^s = \varphi_s\eta + \psi_s\tau$, $(s \in N)$, причём $|\varphi_s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и $|\psi_s/\varphi_s| \le \varepsilon_0$ для достаточно больших s. Так как вместо η и τ можно взять $-\eta$ и $-\tau$ соответственно, то переходя к подпоследовательности, можно предположить, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s \ge 0$ для всех $s \in N$. Если $\psi_s = 0$ для бесконечно многих s, то можно предположить, что $\psi_s = 0$ для всех $s \in N$. Поэтому при $\eta \in \Sigma_{M_Q}$ будем иметь

$$Q(\xi^s) = Q(\varphi_s \cdot \eta) = \sum_{i=0}^{M_Q} \varphi_s^{d_i^Q} Q_i(\eta) = 0 \quad (s \in N),$$

что противоречит (2.6). Пусть теперь $\eta \notin \Sigma_{M_Q}$ и $k(Q,\eta)$ (соответственно, $k(P,\eta)$) – наименьшее число, для которого $Q_{k(Q,\eta)}(\eta) \ne 0$ (соответственно, $P_{k(P,\eta)}(\eta) \ne 0$). Следовательно,

$$|Q(\xi^s)| = \varphi_s^{d^Q_{k(Q,\eta)}} \cdot \left[\left|Q_{k(Q,\eta)}(\eta) + o(1)\right|\right] \quad \text{при} \quad s \to \infty, \tag{2.7}$$

$$|P(\xi^s)| = \varphi_s^{d^P_{k(P,\eta)}} \cdot \left[\left|P_{k(P,\eta)}(\eta) + o(1)\right|\right] \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{2.8}$$

Так как $\eta \notin \Sigma_{M_Q}$, то согласно условию 1) теоремы $\eta \notin \Sigma_{M_P}$, т.е. $k(P,\eta) \le M_P$ и $d^P_{k(P,\eta)} > d^Q_{k(Q,\eta)}$. Таким образом, (2.7) и (2.8) вместе противоречат (2.6). Таким образом, можно считать, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s > 0$ для всех $s \in N$. Положим

$$\rho_s = 1 - \frac{\ln \psi_s}{\ln \varphi_s}, \quad \text{т.е.} \quad \psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s} \quad (s \in N). \tag{2.9}$$

Не умаляя общности, можно предположить, что $\rho_s \ge 0$ $(s \in N)$. Аналогично мы получаем противоречие, когда $\overline{\lim}\, \rho_s = \infty$. Таким образом, можно считать, что $\{\rho_s\}$ ограничена, и переходя к подпоследовательности, предполагаем, что для некоторого числа $\delta \ge 0$ последовательность $\rho_s \to \delta$ при $s \to \infty$.

Пусть теперь $\sigma(P,\eta) < \infty$ и $\delta > \sigma(P,\eta)$. Согласно условию 1) и определению $\sigma(P,\eta)$, имеем $\chi(Q,\eta,\sigma(P,\eta)) < 0$. Тогда существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $\rho_s > \sigma(P,\eta) + \varepsilon_1$ для достаточно больших s, и по Лемме 1.1 существует число $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{M_Q}) > 0$ такое, что для всех $\xi \in D_{\varepsilon_2}(\eta)$ имеем

$$|Q(\xi)| \le \sum_{i=0}^{M_Q} |Q_i(\xi)| \le \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{M_Q} \left| D_\tau^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta)\right| \cdot |(\eta,\xi)|^{d_i^Q - \ell_i^Q(\eta)} \, |(\tau,\xi)|^{\ell_i^Q(\eta)}.$$

Пусть $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_2\}$. Тогда $\xi^s \in D_{\varepsilon_3}(\eta)$ для достаточно больших s и по Лемме 1.1 имеем

$$|Q(\xi)| \leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{M_Q} \left| D_\tau^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{d_i^Q - \ell_i^Q(\eta)} \psi_s^{\ell_i^Q(\eta)} \leq$$

$$\leq \frac{3}{2} \cdot \sum_{i=0}^{M_Q} \left| D_\tau^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{d_i^Q - \rho_s \ell_i^Q(\eta)} \leq C \cdot \varphi_s^{\chi(Q,\eta,\rho_s)} \leq C \cdot \varphi_s^{\chi(Q,\eta,\sigma(P,\eta))} \to 0,$$

при $s \to \infty$, что противоречит (2.6).

Пусть теперь $\delta \leq \sigma(P, \eta)$. Сначала предположим, что $\delta \notin A(P, \eta)$. Имеем

$$d_i^P - \ell_i^P(\eta) \cdot \delta < d_m^P - \ell_m^P(\eta) \cdot \delta = \chi(P, \eta, \delta), \quad i \in [0, M_P], \quad i \neq m, \tag{2.10}$$

для единственного индекса m, $0 \leq m \leq M_P$.

Согласно Лемме 1.1 выберем число $\varepsilon_4 = \varepsilon_4(P_0, \ldots, P_{M_P}, Q_0, \ldots, Q_{M_Q}) > 0$ и пусть $\varepsilon_5 = \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_4\}$. Очевидно, что $\xi^s \in D_{\varepsilon_5}(\eta)$ для достаточно больших s. Тогда по Лемме 1.1, для достаточно больших s получаем

$$|P_i(\xi^s)| \leq \frac{3}{2} \cdot \left| D_\tau^{\ell_i^P(\eta)} P_i(\eta) \right| \varphi_s^{d_i^P - \ell_i^P(\eta)\rho_s}, \quad m \neq i \in [0, M_P],$$

$$|P_m(\xi^s)| \geq \frac{1}{2} \cdot \left| D_\tau^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \right| \varphi_s^{d_m^P - \ell_m^P(\eta)\rho_s}.$$

Это вместе с (2.10), для достаточно больших s влечёт неравенство

$$|P(\xi^s)| \geq |P_m(\xi^s)| - \sum_{i \neq m} |P_i(\xi^s)| \geq \frac{1}{4} \cdot \left| D_\tau^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{\chi(P,\eta,\rho_s)}. \tag{2.11}$$

Аналогично для многочлена Q имеем

$$|Q(\xi^s)| \leq \frac{3}{2} \cdot \sum \left| D_\tau^{\ell_i^Q(\eta)} Q_i(\eta) \right| \cdot \varphi_s^{d_i^Q - \ell_i^Q(\eta)\rho_s} \leq C \cdot \varphi_s^{\chi(Q,\eta,\rho_s)}. \tag{2.12}$$

Так как $D_\tau^{\ell_m^P(\eta)} P_m(\eta) \neq 0$, то (2.11) и (2.12) вместе с условием 1) теоремы противоречат (2.6), когда $\delta \notin A(P, \eta)$.

Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда $\delta \leq \sigma(P, \eta)$ и $\delta \in A(P, \eta)$. Полагая $x_s = \psi_s \cdot \varphi_s^{-(1-\delta)} = \varphi_s^{\delta - \rho_s}$, имеем $\xi^s = \varphi_s \left(\eta + x_s \cdot \varphi_s^{-\delta}\right)$ $(s \in N)$. В силу (2.5) и (2.6) мы можем предположить, что $|x_s| \notin [\theta_0, \theta_1]$, т.е. $r(x_s, P, \eta, \delta) \neq 0$ и $r(x_s, Q, \eta, \delta) \neq 0$ для всех $s \in N$. По определению чисел $\{x_s\}$ имеем $x_s^n \cdot \varphi_s^{-\varepsilon} \to 0$ при $s \to \infty$ для любых $n > 0$, $\varepsilon > 0$. Поэтому применяя формулу Тейлора для $s \to \infty$, получаем

$$\sum_{i \in J(P,\eta,\delta)} P_i(\xi^s) = \varphi_s^{\chi(P,\eta,\delta)} \cdot [r(x_s, P, \eta, \delta)] + o\left(\varphi_s^{\chi(P,\eta,\delta)}\right),$$

$$\sum_{i\in J(P,\eta,\delta)} P_i(\xi^s) = o\left(\varphi_s^{\chi(P,\eta,\delta)}\right).$$

Отсюда получаем

$$|P(\xi^s)| \ge \frac{1}{2}\cdot\varphi_s^{\chi(P,\eta,\delta)}\,|r(x_s,P,\eta,\delta)|. \tag{2.13}$$

Аналогично, для многочлена Q имеем

$$|Q(\xi^s)| \le \varphi_s^{\chi(Q,\eta,\delta)}\,[|r(x_s,Q,\eta,\delta)| + o(1)]. \tag{2.14}$$

Неравенства (2.13) и (2.14) вместе с условием 1) противоречат (2.6). Теорема 2.1 доказана.

Замечание 2.1. Если $\eta\in\Sigma_0(P)$ и $A(P,\eta)=\emptyset$, то $Q\ll_\eta P$ тогда и только тогда, когда $\chi(Q,\eta,\delta)<\chi(P,\eta,\delta)$ для всех $\varepsilon\,[0,\sigma(P,\eta)] = \left[0,\, d_0^s/\,\ell_0^P(\eta)\right]$.

В [13] доказано, что для любой пары $(\eta,\delta)\in B_0(P)$ функции $f(t,x,\eta,\delta)\equiv P(\xi(t,x,\eta,\delta))$ и $g(t,x,\eta,\delta)\equiv P(\xi(t,x,\eta,\delta))$ могут быть представлены в виде

$$f(t,x,\eta,\delta)\equiv\sum_{i=0}^{M_f} t^{m_f-\frac{i}{q}} r_i^0(x,P,\eta,\delta), \tag{2.15}$$

$$g(t,x,\eta,\delta)\equiv\sum_{i=0}^{M_g} t^{m_g-\frac{i}{q}} r_i^0(x,Q,\eta,\delta). \tag{2.16}$$

Здесь $m_f=\chi(P,\eta,\delta)$, $m_g=\chi(Q,\eta,\delta)$ и $q=q(\delta)$ – наименьшее натуральное число, для которого $q(\delta)\cdot\delta\in N$, числа M_f, M_g и многочлены (от одной переменной $x\in R$) $\left\{r_i^0(x,P)=r_i^0(x,P,\eta,\delta)\right\}$, $\left\{r_i^0(x,Q)=r_i^0(x,Q,\eta,\delta)\right\}$ определяются единственным образом по P, Q, η, δ. В частности, $r_0^0(x,P)=r(x,P,\eta,\delta)$ и $r_0^0(x,Q)=r(x,Q,\eta,\delta)$, где многочлены $r(x,P,\eta,\delta)$ и $r(x,Q,\eta,\delta)$ определены выше формулой (1.5).

Теперь мы определим понятие превалирования между функциями вида (2.15) и (2.16). С этой целью введём некоторые обозначения. Положим

$$X_0(P)=X_0(P,\eta,\delta)=\left\{0\ne x\in R^1:\, r_0(x,P,\eta,\delta)=0\right\},$$

$$X_i(P)=X_i(P,\eta,\delta)\;\bar{=}\;\{x\in X_{i-1}(P):\, r_i(x,P,\eta,\delta)=0\},\quad 1\le i\le M_f,$$

где $\ell_i^f(x)$ – порядок корня $x\in X_i(P)$, $d_i^f=m_f-\frac{i}{q}$.

Для $x\in R^1$, $\Delta\ge 0$ обозначим $E_f=E_f(\eta,\delta)=\left\{i:\,0\le i\le M_f, d_i^f\ge 0\right\}$, $k(x,f)=k(x,f,\eta,\delta)=\max\{i:\, i\in E_f(\eta,\delta), r_i(x,P)\ne 0\}$, если $\{i:\, i\in E_f(\eta,\delta),\, r_i(x,P)\ne 0\}\ne\emptyset$ и $k(x,f)=M_f+1$ в противном случае. Далее $\chi(f,x,\Delta)=\chi(f,x,\eta,\delta,\Delta)=$

$\max\limits_{i\in E_f(\eta,\delta)} \left\{d_i^f - \ell_i^f(x)\cdot\Delta\right\}$, $\Delta \ge 0$. Через $A(f,x)$ обозначим множество чисел $\Delta \ge 0$, для которых существуют индексы $i_1, i_2 \in E_f$, $i_1 \ne i_2$ такие, что $d_{i_1}^f - \ell_{i_1}^f(x) = d_{i_2}^f - \ell_{i_2}^f(x) = \chi(f,x,\Delta) > 0$. Для $\Delta > 0$ обозначим $J(f,x,\Delta) = \left\{i : i \in E_f, d_i^f - \ell_i^f(x) = \chi(f,x,\Delta)\right\}$. Для $x_0 \in X_0(P)$, $\Delta_0 \ge 0$ и $y \in R^1$ введём многочлен

$$r_0^1(y,f) = r_0^1(y,f,x_0,\Delta_0) = \sum_{i\in J(f,x_0,\Delta_0)} D^{\ell_i^f(x_0)} r_i^0(x_0,P)\frac{y^{\ell_i^f(x_0)}}{\ell_i^f(x_0)!}, \tag{2.17}$$

и определим множество $X_0(f) = X_0(f,x_0,\Delta_0) = \left\{0 \ne y : r_0^1(y,f,x_0,\Delta_0) = 0\right\}$. Определим также числа $\theta_0^f = \frac{1}{2}\min\limits_{y\in X_0(f)}|y|$, $\theta_1^f = 2\max\limits_{y\in X_0(f)}|y|$, если $X_0(f) \ne \emptyset$ и $\theta_0^f = \frac{1}{2}$, $\theta_1^f = 2$ в противном случае. Наконец, положим $\theta_0^1 = \min\left\{\theta_0^f, \theta_0^g\right\}$ и $\theta_1^1 = \max\left\{\theta_1^f, \theta_1^g\right\}$.

Определение 2.3. Будем говорить, что f превалирует над g и будем обозначать $g \ll f$, если

$$\sup_{x\in[\theta_0^1,\theta_1^1]} R_{f,g}(t,x) = \sup_{x\in[\theta_0^1,\theta_1^1]} \frac{|g(x,t)|}{1+|f(x,t)|} \to 0 \quad \text{при} \quad t\to\infty.$$

Определение 2.4. Будем говорить, что f превалирует над g относительно точки $x_0 \in R^1$ и будем обозначать $g \ll_{x_0} f$, если

$$\frac{|g(x,t)|}{1+|f(x,t)|} \to 0, \quad \text{когда } t\to\infty \text{ и } x\to x_0.$$

Замечание 2.2. Так как множество $X_0(f)$ состоит из конечного числа элементов, то легко убедиться, что $g \ll f$ тогда и только тогда, когда $g \ll_{x_0} f$ для всех $x_0 \in X_0(P)$. С другой стороны, из построения функций $f(t,x,\eta,\delta)$ и $g(t,x,\eta,\delta)$ следует, что соотношение $Q \ll P$ имеет место в том и только в том случае, когда $g \ll f$ для всех пар $(\eta,\delta) \in B_0(P)$.

Замечание 2.3. Ясно, что f не может превалировать над g, если $m_f \le m_g$ и $g \ll f$, и если $m_f > m_g$ и $X_0(P,\eta,\delta) = \emptyset$.

Следовательно, далее мы предполагаем, что $m_f > m_g$ и $X_0(P,\eta,\delta) \ne \emptyset$ для некоторой пары $(\eta,\delta) \in B_0(P)$.

Лемма 2.2. *Для некоторой пары $(\eta,\delta) \in B_0(P)$, $X_0(P,\eta,\delta) \ne \emptyset$, $x_0 \in X_0(P,\eta,\delta)$ функции $f(t,x,\eta,\delta)$ и $g(t,x,\eta,\delta)$ определены формулами (2.15), (2.16) и $g \ll_{x_0} f$. Тогда*

$$\chi(g,x_0,\Delta) < \chi(f,x_0,\Delta) \quad \text{для всех} \quad \Delta \in [0,\sigma(f,x_0)], \tag{2.18}$$

где число $\sigma = \sigma(f,x_0)$ – минимальное решение уравнения $\chi(f,x_0,\Delta) = 0$ при $k(g,x_0) = M_g + 1$ и $\sigma(f,x_0) = \infty$ в противном случае.

Доказательство. Допустим противное, т.е. существует число $\Delta_0 \geq 0$ такое, что

$$\chi(g, x_0, \Delta_0) \geq \chi(f, x_0, \Delta_0). \tag{2.19}$$

Исследуем поведение f и g на последовательности $(t_s, x_s) = \left(s, x_0 + y_0 s^{-\Delta_0}\right)$ ($s \in N$), где $r_0^1(y_0, g, \Delta_0) \neq 0$ (см. (2.17)). Предположим сначала, что $\Delta_0 < \sigma(f, x_0)$. По формуле Тейлора имеем

$$r_i^0(x_s, P) = \sum_{j \geq \ell_i^f(x_0)} \frac{y_0^j s^{-j\Delta_0}}{j!} D^j r_i^0(x_0, P), \quad i = 0, 1, \ldots, M_f.$$

Следовательно,

$$f(s, x_s) = \sum_{i=0}^{M_f} s^{d_i^f - \ell_i^f(x_0)\Delta_0} \cdot \frac{D^{\ell_i^f(x_0)} r_i^0(x_0, P)}{\ell_i^f(x_0)!} y_0^{\ell_i^f(x_0)} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{M_f} \sum_{j > \ell_i^f(x_0)} s^{d_i^f - j\Delta_0} \cdot \frac{D^j r_i^0(x_0, P)}{j!} y_0^j.$$

Так как $d_i^f - \ell_i^f(x_0) < \chi(f, x_0, \Delta_0)$ для $i \notin J(f, x_0, \Delta_0)$, то отсюда и из (2.15), для достаточно больших s получаем

$$f(s, x_s) \leq C s^{\chi(f, x_0, \Delta_0)}, \quad C > 0. \tag{2.20}$$

Так как $r_0^1(y_0, g, \Delta_0) \neq 0$ для g аналогично получаем

$$g(s, x_s) = s^{\chi(g, x_0, \Delta_0)} r_0^1(y_0, g) + o\left(\chi(g, x_0, \Delta_0)\right). \tag{2.21}$$

Выражения (2.20), (2.21) вместе с предположениями (2.19) и $r_0^1(y_0, g) \neq 0$ противоречат условию $g \ll_{x_0} f$.

Пусть теперь $\sigma(f, x_0) < \infty$ и неравенство (2.18) нарушено при $\Delta_0 = \sigma(f, x_0)$ (т.е. $\chi(f, x_0, \Delta_0) = 0$, см. (2.19)). Тогда $|f(s, x_s)| \leq C_1$ для всех s и $|g(s, x_s)| \geq C_1 > 0$, что также противоречит условию $g \ll_{x_0} f$. Лемма 2.2 доказана.

Теорема 2.2. *Пусть фиксирована пара $(\eta, \delta) \in B_0(P)$, функции f и g определены как и выше и точка $x_0 \in X_0(P, \eta, \delta)$. Тогда $g \ll_{x_0} f$ тогда и только тогда, когда*

1) *имеет место соотношение (2.18),*

2) $$\lim_{t \to \infty} \left[\sup_{y \in [\theta_0^1, \theta_1^1]} \left\{ R_{f,g}\left(t, x_0 + y t^{-\Delta}\right) \right\} \right] = 0 \quad \text{для всех} \quad \Delta \in A(x_0, f). \tag{2.22}$$

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 2.2, а необходимость условия 2) очевидна.

Достаточность. Допустим противное, существуют последовательности $\{x_s\}$, $\{t_s\}$, $x_s \to x_0$, $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и постоянная C такие, что

$$R_{f,g}(x_s, t_s) > C > 0. \tag{2.23}$$

Предположим, что $x_s = x_0$ для бесконечного числа s. Не нарушая общности, можно предположить, что $x_s = x_0$ для всех $s \in N$. Очевидно из (2.23) следует, что $k(g, x_0) < M_g + 1$, и $d^g_{k(g,x_0)} < d^f_{k(f,x_0)}$. Поэтому для некоторой постоянной $C_1 > 0$ и достаточно большого s имеем

$$\begin{aligned} |g(x_s, t_s)| \le \sum_{k(g,x_0)\le i\le M_g} t_s^{d_i^g} \left|r_i^0(x_0, Q)\right| \le t_s^{d^g_{k(g,x_0)}} \left|r^0_{k(g,x_0)}(x_0, Q)\right| + \\ + o\left(t_s^{d^g_{k(g,x_0)}}\right) \le C_1 t_s^{d^g_{k(g,x_0)}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Аналогично, для некоторой постоянной $C_2 > 0$ и достаточно большого s получаем

$$|f(x_s, t_s)| \ge t_s^{d^f_{k(f,x_0)}} \left|r^0_{k(f,x_0)}(x_0, P)\right| + o\left(t_s^{d^f_{k(f,x_0)}}\right) \ge C_2 t_s^{d^f_{k(f,x_0)}}. \tag{2.25}$$

Неравенства (2.24) и (2.25) вместе противоречат (2.23).

Пусть теперь $x_s \ne x_0$ для всех $s \in N$. Не умаляя общности предположим, что $x_s - x_0 > 0$ и $t_s > 1$. Положим $\rho_s = -\ln(x_s - x_0)/\ln t_s$ $(s \in N)$, тогда $x_s = x_0 + t_s^{-\rho_s}$ и можно считать, что $\rho_s > 0$ для всех $s \in N$.

Теперь мы покажем, что $\rho_s < c < \infty$ $(s \in N)$. Предположим противное, т.е. $\rho_s \to \infty$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $k(f, x_0) = M_f + 1$. Благодаря условию 1) имеем $k(g, x_0) = M_g + 1$. Тогда $\ell_i^g(x_0) \ne 0$ для всех $0 \le i \le M_g$, для всех $i = 0, 1, \ldots$ и $s \in N$ имеем

$$r_i^0(x_s, Q) = \sum_{j\ge 0} t_s^{-j\rho_s} \cdot D^j r_i^0(x_0, Q) = \sum_{j\ge \ell_i^g(x_0)} t_s^{-j\rho_s} \cdot D^j r_i^0(x_0, Q).$$

Следовательно,

$$|g(x_s, t_s)| \le \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g} \left|r_i^0(x_0, Q)\right| \le \sum_{i=0}^{M_g} \sum_{j>\ell_i^g(x_0)} t_s^{d_i^g - j\rho_s} \left|D^j r_i^0(x_0, Q)\right|. \tag{2.26}$$

Так как $\ell_i^g(x_0) > 0$ $(i = 0, 1, \ldots, M_g)$ и $\rho_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то $g(x_s, t_s) \to 0$ при $s \to \infty$, что противоречит (2.23).

Случай 2. $k(f,x_0) = M_f$. Так как $d^g_{k(g,x_0)} < d^f_{k(f,x_0)}$ и $\rho_s \to \infty$ при $s \to \infty$, то для достаточно больших s имеем

$$|g(x_s,t_s)| = \left|\sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g} r_i^0(x_s,Q)\right| \le \left|\sum_{i=0}^{k(g,x_0)-1} t_s^{d_i^g} r_i^0(x_s,Q)\right| + \left|t_s^{d^g_{k(g,x_0)}} r^0_{k(g,x_0)}(x_s,Q)\right| +$$
$$+\left|\sum_{k(g,x_0)+1}^{M_g} t_s^{d_i^g} r_i^0(x_s,Q)\right| \le C_3 \sum_{i=0}^{k(g,x_0)-1} t_s^{d_i^g-\rho_s\ell_i^g}\left|\frac{r^0_{k(g,x_0)}(x_s,Q)}{\ell_i^g!}\right| +$$
$$+ C_4 t_s^{d^g_{k(g,x_0)}} + o\left(t_s^{d^g_{k(g,x_0)}}\right) \le C_5 t_s^{d^g_{k(g,x_0)}}, \tag{2.27}$$

где C_3, C_4 и C_5 суть неотрицательные постоянные. Аналогично, для некоторой постоянной $C_6 > 0$ имеем

$$|f(x_s,t_s)| \ge C_6 t_s^{d^f_{k(f,x_0)}}. \tag{2.28}$$

Неравенства (2.27), (2.28) противоречат (2.23). Поэтому можно считать, что $\rho_s \le c < \infty$ $(c \in N)$. Не умаляя общности можно предположить, что $\rho_s \to \Delta_0$ при $s \to \infty$ для некоторого числа $\Delta_0 \in R^1$, $\Delta_0 \le c$.

Теперь покажем, что $\Delta_0 \le \sigma(f,x_0)$. Предположим противное, т.е. $\sigma(f,x_0) < \infty$ и $\Delta_0 > \sigma(f,x_0)$. Тогда согласно условию 1) и определению числа $\sigma(f,x_0)$ имеем $k(g,x_0) = M_g + 1$ и $\chi(g,x_0,\Delta_0) < -\varepsilon$ для некоторого числа $\varepsilon > 0$. Таким образом, $\ell_i^g \ne 0$ для $i = 1,2,\ldots,M_g$ и $d_i^g - \rho_s\ell_i^g < -\varepsilon$ для достаточно больших s. Следовательно, при $s \to \infty$ имеем

$$|g(x_s,t_s)| \le \left|\sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g} \sum_{k\ge 0} \frac{r_i^{0(\ell_i^g+k)}(x_0,Q)}{(\ell_i^g+k)!} t_s^{-\rho_s(\ell_i^g+k)}\right| \le$$
$$\le \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g-\rho_s\ell_i^g}\left[\left|\frac{r_i^{0(\ell_i^g)}(x_0,Q)}{(\ell_i^g)!}\right| + o(1)\right] \to 0, \tag{2.29}$$

что противоречит (2.23). Таким образом, $\Delta_0 \in [0,\sigma(f,x_0)]$.

Теперь покажем, что $\Delta_0 \in A(f,x_0)$. Предположим противное, т.е. $\Delta_0 \notin A(f,x_0)$. Согласно условию 1) имеем $\chi(g,x_0,\Delta_0) < \chi(f,x_0,\Delta_0)$. Поэтому существует индекс i_0, $0 \le i_0 \le M_f$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что

$$d_i^f - \ell_i^f(\Delta_0-\varepsilon) < d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f\Delta_0, \quad d_j^g - \ell_j^g(\Delta_0-\varepsilon) < d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f\Delta_0.$$

для всех i ; $0 \le i \ne i_0 \le M_f$ и j ; $0 \le j \le M_g$. Тогда для достаточно больших s аналогично (2.26) будем иметь

$$\begin{aligned} |g(x_s,t_s)| &\le C_7 \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g - \rho_s \ell_i^g} \left| \frac{r_i^{0(\ell_i^g)}(x_0,Q)}{\ell_i^g!} \right| \le C_8 \sum_{i=0}^{M_g} t_s^{d_i^g - \rho_s \ell_i^g (\Delta_0 - \varepsilon)} = \\ &= o\left(t_s^{d_{i_0}^g - \rho_s \ell_{i_0}^g (\Delta_0 - \varepsilon)} \right), \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\begin{aligned} |f(x_s,t_s)| &\ge C_9 t_s^{d_{i_0}^f - \rho_s \ell_{i_0}^f} \left| \frac{r_i^{0(\ell_{i_0}^f)}(x_0,P)}{\ell_{i_0}^f!} \right| - C_{10} \sum_{i=0, i \ne i_0}^{M_f} t_s^{d_i^f - \rho_s \ell_i^f} \left| \frac{r_i^{0(\ell_i^f)}(x_0,P)}{\ell_i^f!} \right| \ge \\ &\ge C_{11} t_s^{d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0} - o\left(t_s^{d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0} \right) \ge C_{12} t_s^{d_{i_0}^f - \ell_{i_0}^f \Delta_0} \end{aligned} \tag{2.31}$$

для неотрицательных постоянных C_7, C_8 и положительных постоянных C_9, $\dots$, C_{12}. Неравенства (2.30) и (2.31) противоречат (2.23), и доказывают, что $\Delta_0 \in A(f,x_0)$.

Положим $y_s = t^{\Delta_0 - \rho_s}$. Тогда $x_s = x_0 + y_s t^{-\Delta_0}$ и в силу (2.22), (2.23) можно считать, что $y_s \in \left[\theta_0^1, \theta_1^1\right]$ для всех $s \in N$. Следовательно, для достаточно больших s имеем $r_0^1(x_0, f, \Delta_0, y_s) \ne 0$, $r_0^1(x_0, g, \Delta_0, y_s) \ne 0$ и поэтому для $s \to \infty$ получаем

$$\begin{aligned} |f(x_s,t_s)| &= t_s^{\chi(f,x_0,\Delta_0)} \left| \sum_{i \in J(f,x_0,\Delta_0)} \frac{r_i^{0(\ell_i^f)}(x_0,P)}{\ell_i^f!} y_s^{\ell_i^f} \right| + o\left(t_s^{\chi(f,x_0,\Delta_0)} \right) = \\ &= t_s^{\chi(f,x_0,\Delta_0)} \left| r_0^1(x_0, f, \Delta_0, y_s) \right| + o\left(t_s^{\chi(f,x_0,\Delta_0)} \right), \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned} |g(x_s,t_s)| &= t_s^{\chi(g,x_0,\Delta_0)} \left| \sum_{i \in J(g,x_0,\Delta_0)} \frac{r_i^{0(\ell_i^g)}(x_0,Q)}{\ell_i^g!} y_s^{\ell_i^g} \right| + o\left(t_s^{\chi(g,x_0,\Delta_0)} \right) = \\ &= t_s^{\chi(g,x_0,\Delta_0)} \left| r_0^1(x_0, g, \Delta_0, y_s) \right| + o\left(t_s^{\chi(g,x_0,\Delta_0)} \right). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Поскольку $\chi(g,x_0,\Delta_0) < \chi(f,x_0,\Delta_0)$, то (2.32) и (2.33) вместе противоречат (2.23). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.4. Если $A(f,x_0) = \emptyset$, то $g \ll_{x_0} f$ тогда и только тогда, когда $\chi(g,x_0,\delta) < \chi(f,x_0,\delta)$ для всех $\delta \in [0;\sigma(f,x_0)]$.

Таким образом, Теорема 2.2 показывает, что задача для функций $g(x,t)$ и $f(x,t)$ для $x \in [\theta_0,\theta_1]$ сводится к сравнению выражений $g\left(x_0 + xt^{-\Delta}, t\right)$ и $f\left(x_0 + xt^{-\Delta}, t\right)$ для $x \in \left[\theta_0^1, \theta_1^1\right]$, где $x_0 \in X_0^f$ и $\Delta \in A(f,x_0)$.

Функции $f_1(x,t,x_0,\Delta) \equiv f\left(x_0 + xt^{-\Delta}, t\right)$ и $g_1(x,t,x_0,\Delta) \equiv g\left(x_0 + xt^{-\Delta}, t\right)$ можно представить в виде (см. [13])

$$f_1(x,t,x_0,\Delta) = \sum_{i=0}^{M_{f_1}} t^{m_{f_1} - \frac{i}{qq_1}} r_i^1(x,f), \tag{2.34}$$

$$g_1(x,t,x_0,\Delta) = \sum_{i=0}^{M_{g_1}} t^{m_{g_1} - \frac{i}{qq_1}} r_i^1(x,g), \tag{2.35}$$

где $m_{f_1} = \chi(f,x_0,\delta)$, $m_{g_1} = \chi(g,x_0,\delta)$, $m_{g_1} < m_{f_1}$ и $q_1 = q_1(\Delta)$ – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $q \cdot q_1 \cdot \Delta \in N$.

Теорема 2.1 сводит исследование $Q \ll_\eta P$ к исследованию сравнений $g \ll_{x_0} f$ для конечного числа точек $x_0 \in X_0(P)$. Теорема 2.2 сводит исследование $g \ll_{x_0} f$ к исследованию конечного числа сравнений $g_1 \ll_{x_1} f_1$ и т.д. С другой стороны в [14] показали, что этот процесс обрывается через конечное число шагов n при достижении одного из следующих ситуаций :

1. $X_0^{f_n} = \emptyset$. В этом случае согласно Замечанию 2.3 имеем $g \ll f$,
2. $A(f_n, x_0^n) = \emptyset$. В этом случае решение поставленной задачи следует из Замечания 2.4.

Таким образом, описание условий для $Q \ll P$ полностью завершено.

§3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ПРЕВАЛИРОВАНИЯ И ЧИСЛА ХЕРМАНДЕРА

Пусть P и Q определены как и выше и $Q \ll P$. Ниже мы покажем, что существуют положительные постоянные a, C, M такие, что

$$R_{P,Q}(\xi) \le C|\xi|^{-a} \quad \text{для всех} \quad \xi \in R^2,\ |\xi| \ge M. \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Число $a = a(P,Q)$, удовлетворяющее (3.1), называется степенью превалирования P над Q, если существуют последовательность $\{\xi^s\}$, удовлетворяющая $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и постоянная $C_1 > 0$ такие, что для достаточно больших s имеем $R_{P,Q}(\xi^s) \ge C_1|\xi|^{-a}$.

Определение 3.2. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_\eta P$. Число $a(\eta) = a(\eta,P,Q)$ называется степенью превалирования P над Q относительно η, если

a) для любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные C, M такие, что

$$R_{P,Q}(\xi) \le C|\xi|^{-a(\eta)} \quad \text{for all} \quad \xi \in D_\varepsilon(\eta), \quad |\xi| \ge M; \tag{3.2}$$

b) существует последовательность $\xi^s \in D_\varepsilon(\eta)$ $(s \in N)$, $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ такая, что $R_{P,Q}(\xi^s) \ge C|\xi^s|^{-a(\eta)}$.

Легко видеть, что 1) $a = d_0^P - d_0^Q$, если $Q \ll P$ и $\Sigma_0(P) = \emptyset$; 2) $a = \min\limits_{\eta \in \Sigma_0(P)} \{a(\eta)\}$, если $Q \ll P$ и $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$.

Теперь попробуем построить алгоритм для определения чисел $a(\eta)$ при $\eta \in \Sigma_0(P)$. Предположим, что $Q \ll_\eta P$ и введём обозначения

$$\chi(P,Q,\eta,\delta) = \chi(P,\eta,\delta) - \chi(Q,\eta,\delta), \quad b(\eta) = b(\eta,P,Q) = \min_{\delta \in [0,\sigma(P,\eta)]} \{\chi(P,Q,\eta,\delta)\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $Q \ll_\eta P$. Тогда*

$$a(\eta,P,Q) \leq b(\eta,P,Q). \tag{3.3}$$

Доказательство. Допустим обратное, т.е. $a(\eta) > b(\eta)$. Так как функция $\chi(P,Q,\eta,\delta)$ непрерывна и кусочно-линейна по δ, то существуют числа $\delta_0 \in (0,\sigma(P,\eta))$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\delta_0 \notin A(P,\eta)$ и $\chi(P,Q,\eta,\delta_0) < a(\eta) - \varepsilon$. Используя рассуждения доказательства Леммы 2.1 для последовательности $\left\{\xi^s = s\left(\eta + s^{-\delta_0}\tau\right)\right\}$ получаем

$$R_{P,Q}(\xi^s) \geq C s^{-\chi(P,Q,\eta,\delta_0)}, \quad C > 0, \tag{3.4}$$

откуда следует $R_{P,Q}(\xi^s)\,|\xi^s|^{a(\eta)} \geq C s^{-\varepsilon} \to \infty$ при $s \to \infty$. Это противоречие завершает доказательство Леммы 3.1.

Теорема 3.1. *Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$, $Q \ll_\eta P$ и $\xi(t,x) = \xi(t,x,\eta,\delta) = \left(\eta + t^{-\delta} \cdot x \cdot \tau\right)$. Тогда степенью превалирования P над Q относительно η является наименьшее из чисел b, удовлетворяющих условиям*

$$1)\ b \leq \min_{\delta \in [0,\sigma(P,\eta)]} \{\chi(P,Q,\eta,\delta)\},$$

$$2)\ \sup_{\substack{x \in [\theta_0,\theta_1] \\ t>0}} R_{P,Q}[\xi(t,x,\eta,\delta)]\, t^b < C < \infty \quad \text{для всех} \quad \delta \in A(P,\eta). \tag{3.5}$$

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 3.1, а необходимость условия 2) из соотношений $|(\xi(t,x),\eta)| \to \infty$ и $|(\xi(t,x),\tau)| \,/\, |(\xi(t,x),\eta)| \to 0$ при $t \to \infty$.

Достаточность. Предположим обратное, т.е.

$$R_{P,Q}(\xi^s) \cdot |\xi^s|^b \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty, \tag{3.6}$$

где b – наибольшее число, удовлетворяющее условиям 1), 2), а $\{\xi^s\}$ – последовательность, удовлетворяющая $|(\xi^s,\eta)| \to \infty$ и $|(\xi^s,\tau)| \,/\, |(\xi^s,\eta)| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Представляя векторы ξ^s в ортогональном базисе $\{\eta, \tau\}$ в виде $\xi^s = \varphi_s \eta + \psi_s \tau$, получим $\varphi_s \to \infty$ и $\psi_s/\varphi_s \to 0$ при $s \to \infty$.

Так как вместо η и τ можно взять $-\eta$ и $-\tau$, то выбирая подпоследовательность можно предположить, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s \geq 0$ для всех $s \in N$. Если $\psi_s = 0$ для некоторого бесконечного подмножества $\{s\}$, то можно предположить, что $\psi_s = 0$ для всех $s \in N$. Поэтому для $\eta \in \Sigma_{M_Q}$ будем иметь

$$Q(\xi^s) = Q(\varphi_s \cdot \eta) = \sum_{i=0}^{M_Q} \varphi_s^{d_i^Q} Q_i(\eta) = 0 \quad (s \in N),$$

что противоречит (3.6).

Пусть теперь $\eta \notin \Sigma_{M_Q}$ и $k(Q,\eta)$ (соответственно $K(P,\eta)$) есть наименьшее число, для которого $Q_{k(Q,\eta)}(\eta) \neq 0$ (соответственно $P_{k(P,\eta)}(\eta) \neq 0$). Для достаточно больших s имеем

$$|Q(\xi^s)| = \varphi_s^{d^Q_{k(Q,\eta)}} \cdot \left[\left|Q_{k(Q,\eta)}(\eta) + o(1)\right|\right], \tag{3.7}$$

$$|P(\xi^s)| = \varphi_s^{d^P_{k(P,\eta)}} \cdot \left[\left|P_{k(P,\eta)}(\eta) + o(1)\right|\right]. \tag{3.8}$$

По условию 1) теоремы, $b \leq d^P_{k(P,\eta)} - d^Q_{k(Q,\eta)}$. Поэтому (3.7) и (3.8) вместе противоречат (3.6). Таким образом, можно считать, что $\varphi_s > 1$, $\psi_s > 0$ для всех $s \in N$. Положим

$$\rho_s = 1 - \frac{\ln \psi_s}{\ln \varphi_s}, \quad \text{т.е. } \psi_s = \varphi_s^{1-\rho_s} \quad (s \in N). \tag{3.9}$$

Не умаляя общности, можно предположить, что $\rho_s \geq 0$ $(s \in N)$ и $\{\rho_s\}$ ограничен ($\overline{\lim}\, \rho_s = \infty$ приводит к противоречию). Выбирая подпоследовательность, можно предположить, что $\rho_s \to \delta$ при $s \to \infty$ для некоторого $\delta \geq 0$.

Пусть теперь $\sigma(P,\eta) < \infty$ и $\delta > \sigma(P,\eta)$. Используя рассуждения доказательства Теоремы 2.1, получим

$$|Q(\xi^s)| \leq C\varphi_s^{\chi(Q,\eta,\sigma(P,\eta))}. \tag{3.10}$$

Поскольку $b \leq \chi(P,\eta,\sigma(P,\eta)) - \chi(Q,\eta,\sigma(P,\eta)) = -\chi(Q,\eta,\sigma(P,\eta))$, то (3.10) противоречит (3.6). Итак, $\delta \leq \sigma(P,\eta)$. Пусть сначала $\delta \notin A(P,\eta)$, тогда

$$d_i^P - \ell_i^P(\eta) \cdot \delta < d_m^P - \ell_m^P(\eta) \cdot \delta = \chi(P,\eta,\delta); \quad i \in [0; M_P],\ i \neq m$$

для единственного индекса m. Аналогично (2.11) и (2.12) получаем $R_{P,Q}(\xi^s) \leq C\varphi_s^{-\chi(P,Q,\eta,\delta)}$, что вместе с условием 1) теоремы противоречит (3.6).

Таким образом, остаётся рассмотреть случай, когда $\delta \in A(P,\eta)$. Полагая $x_s = \psi_s \cdot \varphi_s^{-(1-\delta)} = \varphi_s^{\delta-\rho_s}$, можно записать $\xi^s = \varphi_s\left(\eta + x_s \cdot \varphi_s^{-\delta} \cdot \tau\right)$ $(s \in N)$. Если (для некоторой подпоследовательности) $|x_s| \in [\theta_0, \theta_1]$ для всех $s \in N$, то получим противоречие с (3.6) в силу условия 2) теоремы. Следовательно, можно предположить, что $|x_s| \notin [\theta_0, \theta_1]$, т.е. $r(x_s, P, \eta, \delta) \neq 0$ и $r(x_s, Q, \eta, \delta) \neq 0$ для всех $s \in N$. Аналогично (2.13) и (2.14) получаем $R_{P,Q}(\xi^s) \leq C\varphi_s^{-\chi(P,Q,\eta,\delta)}$, что вместе с условием 1) теоремы противоречат (3.6). Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. Пусть $\eta \in \Sigma_0(P)$, $Q \ll_\eta P$ и $A(P,\eta) = \emptyset$. Тогда

$$a(\eta) = \min_{\delta \in [0, \sigma(P,\eta)]} \{\chi(P,Q,\eta,\delta)\}.$$

Пусть теперь $A(P,\eta) \neq \emptyset$. Для $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $\delta \in A(P,\eta)$ через $a(\eta,\delta)$ обозначим наибольшее положительное число, удовлетворяющее условиям :

1) $\sup\limits_{\substack{x \in [\theta_0, \theta_1] \\ t > 0}} \left\{R_{P,Q}\left[\xi(t,x,\eta,\delta)t^{a(\eta,\delta)}\right]\right\} < C < \infty$,

2) существуют последовательности $\{x_s\}$ из $[\theta_0, \theta_1]$ и $\{t_s\}$ такие, что $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и $R_{P,Q}(\xi(t_s, x_s)) \geq C t_s^{a(\eta,\delta)}$ для некоторого $C > 0$.

Очевидно, что

$$a(\eta) = \min\left\{b(\eta), \min_{\delta \in A(P,\eta)} \{a(\eta,\delta)\}\right\}.$$

Таким образом, нам достаточно определить числа $a(\eta,\delta)$ для всех $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $\delta \in A(P,\eta)$. Для этого, сначала введём два определения.

Определение 3.3. Пусть f и g – функции типа (2.15), (2.16) и $g \ll f$. Положительное число a_{fg} называется степенью превалирования f над g, если существуют положительные числа C и M такие, что

$$R_{f,g}(x,t) \equiv \frac{|g(x,t)|}{1 + |f(x,t)|} \leq Ct^{-a_{fg}} \quad \text{для всех} \quad x \in [\theta_0, \theta_1],\ t > M,$$

при этом существуют число $C_1 > 0$ и последовательности $\{x_s\}$ из $[\theta_0, \theta_1]$ и $\{t_s\}$ такие, что $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и $R_{f,g}(x_s, t_s) \geq C_1 t_s^{-a_{fg}}$.

Определение 3.4. Пусть f и g – функции типа (2.15), (2.16), $x_0 \in X_0(f)$ и $g \ll_{x_0} f$. Положительное число $a_{fg}(x_0)$ называется степенью превалирования f над g, соответствующее точке x_0, если для всех $\{t_s\}$, $\{x_s\}$ $t_s \to \infty$, $x_s \to x_0$ при $s \to \infty$ имеем

$$R_{f,g}(x_s, t_s) \leq C t_s^{-a_{fg}(x_0)}, \quad C > 0,$$

при этом существует число $C_1 > 0$ и последовательности $\{x_s\}$, $\{t_s\}$, $t_s \to \infty$, $x_s \to x_0$ при $s \to \infty$ такие, что для достаточно больших s

$$R_{f,g}(x_s, t_s) \geq C_1 t_s^{-a_{fg}(x_0)}.$$

Очевидно, что : 1) $a_{fg} = m_f - m_g$, если $g \ll f$ и $X_0(f) = \emptyset$;. 2) $a_{fg} = \min_{x_0 \in X_0(f)} \{a_{fg}(x_0)\}$, если $g \ll f$ и $X_0 \neq \emptyset$. Теперь попробуем определить числа $\{a_{fg}(x_0), x_0 \in X_0(f)\}$.

Лемма 3.2. *Пусть $a_{fg}(x_0)$ – степень превалирования f над g, соответствующая точке $x_0 \in X_0(f)$. Тогда*

$$a_{fg}(x_0) \leq \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\} = \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} [\chi(f, x_0, \Delta) - \chi(g, x_0, \Delta)].$$

Доказательство. Предположим обратное, т.е.

$$a_{fg}(x_0) > \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\}.$$

Так как функция $\chi(f, g, x_0, \Delta)$ непрерывна и кусочно-линейна (относительно Δ), то существуют числа $\Delta_0 \in (0, \sigma(f, x_0))$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\Delta_0 \notin A(f, x_0)$ и $\chi(f, g, x_0, \Delta_0) < a_{fg}(x_0) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $\{(t_s, x_s)\} = \{(s, x_0 + s^{-\Delta_0})\}$, $(s \in N)$. Используя рассуждения доказательства Леммы 2.2, получим $R_{f,g}(t_s, x_s) \geq C s^{\chi(f, g, x_0, \Delta_0)}$. Поэтому $R_{f,g}(t_s, x_s) |t_s|^{a_{fg}(x_0)} \geq C s^{\varepsilon} \to \infty$ при $s \to \infty$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Теорема 3.2. *Пусть $x_0 \in X_0(f)$ и $g \ll_{x_0} f$. Тогда степенью превалирования f над g относительно x_0 является наибольшее из чисел a, удовлетворяющих условиям :*

1) $a \leq \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \chi(f, g, x_0, \Delta)$,

2) $\sup_{\substack{y \in [\theta_0^1, \theta_1^1] \\ t > 0}} R_{f,g}\left(t, x_0 + y^{-\Delta}\right) \cdot t^a < C < \infty$ *для всех* $\Delta \in A(f, x_0)$.

Доказательство. Необходимость условия 1) следует из Леммы 3.2, а необходимость условия 2) очевидна.

Достаточность. Пусть наоборот

$$R_{f,g}(t_s, x_s) t_s^a \to \infty \quad \text{при} \quad s \to \infty, \tag{3.11}$$

где $x_s \to x_0$, $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$, а a – наибольшее число, удовлетворяющее условиям 1)–2). Если $x_s = x_0$ для бесконечного множества $\{s\}$, тогда не умаляя общности можно предположить, что $x_s = x_0$ для всех $s \in N$. В силу (3.11) имеем $k(g, x_0) < M_g + 1$. Аналогично (2.24) и (2.25), для достаточно больших s имеем

$$R_{g,f}(t_s, x_s) \leq C t_s^{d^g_{k(g,x_0)} - d^f_{k(f,x_0)}}. \tag{3.12}$$

Следовательно, из условия 1) $a \le d^g_{k(g,x_0)} - d^f_{k(f,x_0)}$, что вместе с (3.12) противоречит (3.11).

Пусть теперь $x_s \ne x_0$ для всех $s \in N$. Не умаляя общности можно считать, что $x_s - x_0 > 0$ и $t_s > 1$ $(s \in N)$. Полагая $\rho_s = -\ln(x_s - x_0)/\ln t_s$ $(s \in N)$ можно записать $x_s = x_0 + t_s^{-\rho_s}$ и допустим, что $\rho_s > 0$ для всех $s \in N$. Теперь покажем, что $\rho_s < c < \infty$ $(s \in N)$. Допустим обратное, т.е. $\rho_s \to \infty$ при $s \to \infty$ и рассмотрим следующие два случая.

Случай 1). Пусть $k(f, x_0) = M_f + 1$. В этом случае, в силу (2.26) $|g(t_s, x_s)|\, t_s^a \to 0$ при $s \to \infty$ для любого $a > 0$, что противоречит (3.11).

Случай 2). Пусть $k(f, x_0) \le M_f$. Аналогично (2.27) и (2.28) для достаточно больших s имеем

$$R_{g,f}(t_s, x_s) \le C t_s^{d^g_{k(g,x_0)} - d^f_{k(f,x_0)}}.$$

В силу условия 1) это противоречит (3.11). Таким образом, $\rho_s \le c < \infty$ $(s \in N)$. Пусть теперь $\rho_s \to \Delta_0$ при $s \to \infty$ для некоторого числа $\Delta_0 \le c$.

Покажем, что $\Delta_0 \le \sigma(f, x_0)$ при $\sigma(f, x_0) < \infty$. Допустим обратное, т.е. $\Delta_0 > \sigma(f, x_0)$. Тогда $k(f, x_0) = M_f + 1$, откуда следует $\ell^g_i(x_0) \ne 0$ для $i = 1, \dots, M_g$. Аналогично (2.29) для достаточно больших s имеем

$$R_{f,g}(t_s, x_s) \le C t_s^{\chi(g,x_0,\sigma(f,x_0))} = C t_s^{-\chi(f,g,x_0,\sigma(f,x_0))} \le C t_s^{-a},$$

что противоречит (3.11). Следовательно, $\Delta_0 \in [0, \sigma(f, x_0)]$. Теперь покажем, что $\Delta_0 \in A(f, x_0)$. Снова допустим обратное, т.е. $\Delta_0 \notin A(f, x_0)$. По определению функций $\chi(f, x_0, \Delta)$ и $\chi(g, x_0, \Delta)$ существуют индексы i_0, $0 \le i_0 \le M_f$ и j_0, $0 \le j_0 \le M_g$, удовлетворяющие условию

$$d^f_i - \ell^f_i \Delta_0 < d^f_{i_0} - \ell^f_{i_0} \Delta_0, \quad d^g_j - \ell^g_j \Delta_0 \le d^f_{j_0} - \ell^f_{j_0} \Delta_0$$

для всех i, $0 \le i \ne i_0 \le M_f$ и j, $0 \le j \ne j_0 \le M_g$. Аналогично (2.30) и (2.31) для достаточно больших s имеем

$$R_{g,f}(t_s, x_s) \le C t_s^{\left(d^g_{j_0} - \ell^g_{j_0}\Delta_0\right) - \left(d^f_{i_0} - \ell^f_{i_0}\Delta_0\right)} = C t_s^{-\chi(f,g,x_0,\sigma(f,x_0))} \le C t_s^{-a},$$

что снова противоречит (3.11). Итак $\Delta_0 \in A(f, x_0)$.

Представим x_s в виде $x_s = x_0 + y_s \cdot t_s^{-\Delta_0}, y_s = t_s^{\Delta_0 - \rho_s}$. Если $|y_s| \in [\theta^1_0, \theta^1_1]$, то для достаточно больших s, то (3.11) нарушается в силу условия 2) теоремы. Поэтому можно считать, что $|y_s| \notin [\theta^1_0, \theta^1_1]$ для всех $s \in N$. Аналогично (2.32) и (2.33) для достаточно больших s имеем

$$R_{f,g}(t_s, x_s) \le C t_s^{\chi(g,x_0,\sigma(f,x_0)) - \chi(f,x_0,\sigma(f,x_0))} = C t_s^{-\chi(f,g,x_0,\sigma(f,x_0))} \le C t_s^{-a},$$

что противоречит (3.11). Теорема доказана.

Следствие 3.2. Пусть $x_0 \in X_0(f)$, $g \ll_{x_0} f$ и $A(f, x_0) = \emptyset$. Тогда

$$a_{fg}(x_0) = \min_{\Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\}.$$

В §2 показано, что функции $f_1(x, t, x_0, \Delta) \equiv f(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ и $g_1(x, t, x_0, \Delta) \equiv g(x_0 + xt^{-\Delta}, t)$ можно представить в виде (2.15) и (2.16), соответственно. Таким образом показано, что задача определения степени превалирования P над Q сводится к задаче определения степени превалирования f над g, что в свою очередь сводится к аналогичной задаче для f_1 и g_1 и так далее. Этот процесс завершается достижением одного из следующих условий :

1) $\Sigma_0(P) = \emptyset$,
2) $\Sigma_0(P) \neq \emptyset$, $A(P, \eta) = \emptyset$ для всех $\eta \in \Sigma_0(P)$,
3) $A(P, \eta) \neq \emptyset$ для некоторых $\eta \in \Sigma_0(P)$ и $X_0(f, \eta) \equiv \emptyset$,
4) для каждой точки $x_0 \in X_0(f, \eta)$, либо $A(f_1, \eta, x_0) = \emptyset$, либо $X_0(f_1, x_0) = \emptyset$.

Так как $Q \ll P$, 1) – 4) достижимы за конечное число шагов. Обозначим через $Tree(\eta, \delta)$ множество пар f, g, порождённых $(\eta, \delta) \in B_0(P)$. Имеем

$$a(\eta, \delta) = \min_{\substack{(f,g) \in Tree(\eta, \delta) \\ x_0 \in X_0(f) \\ \Delta \in [0, \sigma(f, x_0)]}} \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\} \quad \text{для всех} \quad \eta \in \Sigma_0(P) \quad \text{и} \quad \delta \in A(P, \eta). \tag{3.13}$$

В §2 показано, что если $Q \ll_\eta P$, то $\chi(f, g, x_0, \Delta) > 0$ для всех $(f, g) \in Tree(\eta, \delta)$ и для всех точек $x_0 \in X_0(f)$ и $\delta \in [0, \sigma(f, x_0)]$. Следовательно, $a(\eta, \delta) > 0$, что доказывает существование положительной степени превалирования. Так как функции χ кусочно-линейны, убывают и вогнуты, то (3.13) можно переписать в виде $a(\eta, \delta) = \min \{\chi(f, g, x_0, \Delta)\}$, где минимум берётся по всевозможным $(f, g) \in Tree(\eta, \delta)$, $x_0 \in X_0(f)$, $\Delta \in (A(f, x_0) \cup \{0\}) \cap [0, \sigma(f, x_0)]$.

Также заметим, что оба $a(\eta, \delta)$ и $a(\eta)$ являются рациональными числами. Если P – гипоэллиптический многочлен, то $D^\alpha P \ll P$ (см. [1], Теорема 11.1.3), и существуют положительные числа c и C такие, что $|D^\alpha P(\xi)| / |P(\xi)| \leq C \cdot |\xi|^{-c \cdot |\alpha|}$ для всех $\xi \in R^n$ и α : $|\alpha| > 0$. Наибольшее из чисел c называют числом Хермандера многочлена P. Таким образом, определив степень превалирования $a_\alpha = a_\alpha(P, D^\alpha P)$ многочлена P над $D^\alpha P$ для каждого $\alpha \neq 0$, получим число Хермандера для гипоэллиптического многочлена вида (1.1), задаваемое через $c = \min\limits_{\alpha \in H} a_\alpha / |\alpha|$, где $H = \{\alpha : 0 < \alpha \leq d_0^P\}$.

Abstract. The paper suggests a method for determination of the Hörmander's number of hypoellipticity for a given polynomial. The notion of prevalence of a polynomial over another is introduced. For such polynomials we prove the existence of a positive prevalence number in $\mathbb{R}^2$. The prevalence number determines the Hörmander's number of hypoellipticity for hypoelliptic operators of two variable.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Hörmander, "The analysis of general partial differential operators, Acta Math., vol. 94, pp. 161 – 248, 1955.
2. L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators, II, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983.
3. L. Hörmander, "Hypoelliptic second order equations", Acta Math., vol. 119, no. 3 - 4. pp. 147 – 161, 1967.
4. B. Malgrange, "Sur une classe d'operateurs differentielles hypoelliptiques", Bull. Soc. Math. France, vol. 85, no. 3, pp. 283 – 306, 1957.
5. B. Pini, "Osservazoni Sulla Ipoelliticita", Boll. Union Mat. Ital., ser. 3, vol. 18, no. 3, pp. 420 – 433, 1963.
6. L. Cattabriga, "Su una classe di polinomi ipoellipticita", Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 36, pp. 285 – 309, 1966.
7. В. И. Буренков, "О связи между поведением решений дифференциальных уравнений в частных производных на бесконечности и его дифференциальными свойствами", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, том 89, стр. 56 – 68, 1967.
8. В. П. Михайлов, "О поведении на бесконечности некоторого класса многочленов", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, том 91, стр. 59 – 80, 1967.
9. Л. Р. Волевич, С. Г. Гиндикин, "Об одном классе гипоэллиптических полиномов", Мат. Сб., том 75 (117), стр. 400 – 416, 1968.
10. Г. Г. Казарян, "Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова, вып. 4, pp. 151 – 167, 1981.
11. Г. Г. Казарян, В. Н. Маркарян, "Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов", Тр. Инст. Мат. им. Стеклова. вып. 4, стр. 135 – 150, 1981.
12. H. G. Ghazaryan and M. V. Margaryan, "Behavior at infinity of the polynomials of two variables", Topics in Analysis and Applications, NATO Publication, Kluver, pp. 159 – 186, 2003.
13. M. V. Margaryan and H. G. Ghazaryan, "Behavior of degenerating polynomials at infinity", Complex Analysis, Diff. Equ. and Related Topics, Proc. ISAAC Conf. on Analysis, Yerevan, pp. 52 – 69, 2002.
14. O. R. Gabrielyan, "Comparison of power of polynomials in R^2", Complex Analysis, Diff. Equ. and Related Topics, Proc. ISAAC Conf. on Analysis, Yerevan, pp. 19 – 28, 2002.

Поступила 1 октября 2003

Известия НАН Армении. Математика, 38, № 6, 2003, 83-88

ОБ УСЕЧЁННЫХ ОПЕРАТОРАХ ВИНЕРА-ХОПФА С СИНГУЛЯРНЫМИ СИМВОЛАМИ ТИПА ФИШЕРА-ХАРТВИГА

Л. В. Микаелян

Ереванский государственный университет

Резюме. В статье рассмотрены усечённые операторы Винера-Хопфа с аналитическими символами, допускающими сингулярность в нуле. Получены явные интегральные представления для этих операторов и для их обратных. Показано, что ядрами этих интегральных операторов являются вырожденные гипергеометрические функции.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Сначала напомним некоторые стандартные определения и обозначения (см. [1]). Через P и P_r $(r > 0)$ обозначим проекторы из $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ и $L^2(0;r)$ соответственно, т.е.

$$(Pf)(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty), \quad (Pf)(t) = 0, \quad t \notin \mathbb{R}_+,$$

$$(P_r f)(t) = f(t), \quad t \in (0; r), \quad (P_r f)(t) = 0, \quad t \in (r; \infty).$$

Через J и Q обозначим операторы, действующие в $L^2(\mathbb{R})$ следующим образом :

$$(Jf)(t) = f(-t), \quad t \in \mathbb{R}, \qquad Q = I - P,$$

где I – единичный оператор.

Пусть $\sigma(\lambda)$ – ограниченная функция, определённая на $\mathbb{R}$. Через $m(\sigma)$ и F обозначим соответственно оператор умножения на функцию $\sigma(\lambda)$ и оператор Фурье, действующий в $L^2(\mathbb{R})$. Оператор Винера-Хопфа, порождённый символом $\sigma(\lambda)$ определяется как

$$W(\sigma) = P\,F^{-1}m(\sigma)F\,P,$$

Работа выполнена при поддержке гранта NFSAT # MA 070-02/CRDF # 12011.

а усечённый (на уровне $r > 0$) оператор Винера-Хопфа есть

$$W_r(\sigma) = P_r\, F^{-1} m(\sigma) F\, P_r.$$

Через $H(\sigma)$ и $H(\tilde{\sigma})$ обозначим операторы Ганкеля с символом $m(\sigma)$, т.е.

$$H(\sigma) = P\, F^{-1} m(\sigma) F\, Q\, J\, P, \quad H(\tilde{\sigma}) = J\, Q\, F^{-1} m(\sigma) F\, P,$$

где $\tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma(-\lambda)$. Следующее равенство хорошо известно (см., например, [6])

$$W_r(\sigma_1\sigma_2) = W_r(\sigma_1)W_r(\sigma_2) + P_r H(\sigma_1)H(\tilde{\sigma_2})P_r + Q_r H(\tilde{\sigma_1})H(\sigma_2)Q_r, \qquad (1)$$

где $(Q_r f)(t) = (P_r f)(r - t)$.

Существуют много статей и монографий, посвящённых усечённым операторам Винера-Хопфа. Для знакомства с историей вопроса и для ознакомления с имеющейся литературой рекомендуем энциклопедическую книгу [1].

Много важных моделей в теории вероятностей и статистической физики можно описать, используя операторы Винера-Хопфа с сингулярными символами (см., например [2], [3], [7]). Они соответствуют функциям $\sigma(\lambda)$, обладающим нулями и полюсами на вещественной оси. Типичным примером сингулярного символа является так-называемый символ Фишера-Хартвига (см. [2]).

В настоящей статье рассмотрены операторы Винера-Хопфа с символами

$$\omega_{\pm}^{\alpha}(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda \pm i}\right)^{\alpha}, \qquad (2)$$

где α – комплексное число. Получены явные интегральные представления для этих операторов и для их обратных, и показано, что ядра этих интегральных операторов являются вырожденными гипергеометрическими функциями.

Отметим, что функции ω_{+}^{α} и ω_{-}^{α} допускают аналитические продолжения соответственно в верхнюю и нижнюю полуплоскости, поэтому они называются аналитическими символами. Заметим также, что в зависимости от значений α функции $\omega_{\pm}^{\alpha}(\lambda)$ имеют разного рода сингулярности в точке $\lambda = 0$. Несмотря на то, что функции $\omega_{\pm}^{\alpha}$ являются частными случаями символов Фишера-Хартвига, тем не менее их подробное изучение важно в связи с тем, что $\omega_{\pm}^{\alpha}$, как нам кажется, модельные для общего случая.

Нам понадобятся следующие предложения из [4].

Предложение 1. *Если последовательности $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ удовлетворяют условиям : $b_k > 0$, ряд $\sum\limits_{k=o}^{\infty} b_k\, t^k$ сходится при всех t и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = s$, то ряд $\sum_{k=o}^{\infty} a_k\, t^k$ также сходится при всех t и*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=o}^{\infty} a_k\, t^k}{\sum_{k=o}^{\infty} b_k\, t^k} = s.$$

Предложение 2. *Пусть* $\sum_{k=o}^{\infty} b_k z^k$ *есть всюду сходящийся степенной ряд с суммой* $f(z)$. *Тогда, если* $b_k > 0$, $\lim_{t\to\infty} \frac{\ln[f(t)]}{t^\beta} = b$, $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k k^\alpha} = s$ *и* ($\beta > 0$, $b > 0$, $\alpha, s \in \mathbb{R}$), *то имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=o}^{\infty} a_k t^k}{f(t)(bt^\beta\beta)^\alpha} = s.$$

§2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ $\omega_\pm^\alpha(\lambda)$

Сначала отметим, что функции $\omega_\pm^\alpha$ определённые по (2), можно представить в виде

$$\omega_\pm^\alpha(\lambda) = \exp\left\{\alpha \log \frac{\lambda}{\lambda \pm i}\right\},$$

где берётся главное значение логарифма. Следовательно, функция ω_+^α аналитична на всей комплексной плоскости вне разреза $[0; -i]$, а функция ω_-^α аналитична на всей комплексной плоскости вне разреза $[0; i]$. Таким образом ясно, что ω_+^α аналитична в верхней полуплоскости, а ω_-^α аналитична в нижней.

Учитывая, что $|\frac{i}{\lambda+i}| < 1$ при $Im\ \lambda > 0$, из (2) получим представление

$$\omega_+^\alpha(\lambda) = (\frac{\lambda}{\lambda+i})^\alpha = (1 - \frac{i}{\lambda+i})^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} (\frac{i}{\lambda+i})^k, \quad \mathrm{Im}\lambda > 0, \tag{3}$$

где $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$. Легко проверить, что при $Im\ \lambda \geq 0$ и $k \in \mathbb{N}$

$$(\frac{i}{\lambda+i})^k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} e^{it\lambda}\, dt. \tag{4}$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$\omega_+^\alpha(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \binom{\alpha}{k} \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} e^{it\lambda}\, dt. \tag{5}$$

Теперь покажем, что при $Im\ \lambda > 0$ в (5) суммирование можно производить под знаком интеграла. Действительно, если $\alpha \in \mathbb{N}$, то ряд в (5) превращается в конечную сумму. При не натуральных α имеем равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \binom{\alpha}{k} t^{k-1} = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\alpha+1)}{k!(k+1)!} t^k.$$

Ясно, что последний ряд сходится абсолютно при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\Gamma(k-\alpha+1)|}{k!(k+1)!} t^k, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{6}$$

Легко проверить, что при $k \to \infty$,

$$\frac{|\Gamma(k-\alpha+1)|}{k!(k+1)!} \sim \frac{1}{k!k^{\mathrm{Re}\alpha+1}}. \tag{7}$$

Теперь применив Предложения 1 и 2 к последовательностям

$$a_k = \frac{|\Gamma(k-\alpha+1)|}{k!(k+1)!} \quad \text{и} \quad b_k = \frac{1}{k!},$$

и учитывая (7), получим

$$\varphi(t) \sim \frac{e^t}{t^{\mathrm{Re}\alpha+1}} \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{8}$$

Поэтому мы можем утверждать, что при $Im\,\lambda > 0$ частичные суммы ряда

$$e^{-t}e^{it\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\binom{\alpha}{k}t^{k-1}$$

имеют суммируемую мажоранту $\varphi(t)e^{-tIm\lambda}$. По теореме Лебега, суммирование в (5) можно производить под знаком интеграла. Таким образом, имеем

$$\omega_+^\alpha(\lambda) = 1 + \int_0^\infty \hat{\omega}_+^\alpha(t)e^{it\lambda}\,dt,$$

где

$$\hat{\omega}_+^\alpha(t) = e^{-t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!}\binom{\alpha}{k}t^{k-1}.$$

Функция

$$F_{1,1}(a,c,z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a(a+1)...(a+k-1)}{k!c(c+1)...(c+k-1)}z^k$$

называется вырожденной гипергеометрической функцией (см. [5]). Имеем

$$\hat{\omega}_+^\alpha(t) = -\alpha F_{1,1}(1-\alpha,2,t)e^{-t},$$

где $\hat{\omega}_+^\alpha(t)$ – преобразование Фурье функции $\omega_+^\alpha(\lambda)$.
Таким образом, доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Если $Im\,\lambda > 0$, то*

$$\omega_+^\alpha(\lambda) = 1 - \alpha\int_0^\infty e^{-t}F_{1,1}(1-\alpha,2,t)e^{it\lambda}\,dt.$$

Учитывая $\omega_-^\alpha(-\lambda) = \omega_+^\alpha(\lambda)$ и равенство из Теоремы 1, получим интегральное представление для функции ω_-^α.

Теорема 2. *Если $Im\ \lambda < 0$, то*

$$\omega_-^\alpha(\lambda) = 1 - \alpha \int_{-\infty}^0 e^t F_{1,1}(1-\alpha, 2, -t)\, e^{it\lambda}\, dt.$$

Замечание 1. Из соотношения (8) следует, что Теоремы 1 и 2 остаются в силе также при $Im\ \lambda = 0$, если только $Re\ \alpha > 0$.

Замечание 2. Легко проверить, что при натуральном α, функции $\hat{\omega}_\pm^\alpha(t)$ являются полиномами умноженными на $e^{\pm t}$.

§3. УСЕЧЁННЫЕ ОПЕРАТОРЫ ВИНЕРА-ХОПФА

По определению операторов $W(\sigma)$, $W_r(\sigma)$ и $H(\sigma)$, для символа

$$\sigma(\lambda) = c + \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(t) e^{it\lambda}\, dt, \quad \hat{\sigma} \in L^1(\mathbb{R}),$$

имеем

$$W(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^\infty \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

$$H(\sigma)(f)(t) = \int_0^\infty \hat{\sigma}(t+s) f(s) ds, \quad f \in L^2(\mathbb{R}_+),$$

$$W_r(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^r \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds, \quad f \in L^2(0,r).$$

Следовательно, если $\hat{\sigma}(t) = 0$ при $t < 0$, то $H(\tilde{\sigma}) = 0$ и

$$W(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^t \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds, \qquad W_r(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_0^t \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds.$$

Аналогично, если $\hat{\sigma}(t) = 0$ при $t > 0$, то $H(\sigma) = 0$ и

$$W(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_t^\infty \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds, \qquad W_r(\sigma)(f)(t) = cf(t) + \int_t^r \hat{\sigma}(t-s) f(s) ds.$$

Теперь предположим, что $\hat{\sigma}$ не принадлежит $L^1(\mathbb{R})$, а только локально интегрируемая функция, т.е. $\hat{\sigma} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. В этом случае операторы $W(\sigma)$ и $H(\sigma)$ не определены всюду в $L^2(\mathbb{R}_+)$, тем не менее, усеченные операторы $W_r(\sigma)$ ограничены в $L^2(0,r)$ при всех $r > 0$.

Легко проверить, что равенство (1) остается в силе когда $\hat{\sigma} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, но только для тех функций из $L^2(0,r)$, для которых определены обе части равенства (1). Из (1) в частности следует, что если $\hat{\sigma}_1(t)$ и $\hat{\sigma}_2(t)$ одновременно обращаются в нуль на $\mathbb{R}_+$ или на $\mathbb{R}_-$, то равенство

$$W_r(\sigma_1\sigma_2) = W_r(\sigma_1)\, W_r(\sigma_2) \tag{9}$$

имеет место на всём $L^2(0,r)$.

Из Теорем 1 и 2 следует, что

$$\hat{\omega}_+^\alpha(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_- \quad \text{и} \quad \hat{\omega}_+^\alpha(t) = -\alpha F_{1,1}(1-\alpha, 2, t)e^{-t} \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (10)$$

$$\hat{\omega}_-^\alpha(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{и} \quad \hat{\omega}_-^\alpha(t) = -\alpha F_{1,1}(1-\alpha, 2, -t)e^{t} \quad \text{при } t \in \mathbb{R}_-. \quad (11)$$

В силу (9) – (11) и равенств $\omega_+^\alpha \omega_+^{-\alpha} = 1$, $\omega_-^\alpha \omega_-^{-\alpha} = 1$, $W_r(1) = I$, вытекает следующий результат.

Теорема 3. *Для любого $\alpha \in \mathbb{C}$ и $r > 0$ операторы $W_r(\omega_+^\alpha)$ и $W_r(\omega_-^\alpha)$ обратимы в пространстве $L^2(0,r)$, а $W_r(\omega_+^{-\alpha})$ и $W_r(\omega_-^{-\alpha})$ соответственно их обратные.*

Отметим, что из Теоремы 3 следуют полезные интегральные соотношения для вырожденных гипергеометрических функций $F_{1,1}(1 \pm \alpha, 2, t)$. В частности, имеем

$$F_{1,1}(1+\alpha, 2, t) - F_{1,1}(1-\alpha, 2, t) = \alpha \int_0^t F_{1,1}(1-\alpha, 2, t-s) F_{1,1}(1+\alpha, 2, s)\, ds.$$

Abstract. The paper considers Wiener-Hopf truncated operators with analytical symbols possessing singularities at zero. Explicit integral representations for these operators and their inverses are obtained. The kernels of these integral operators are found to be degenerate hypergeometric functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Beottcher, B. Silbermannn, Analysis of Toeplitz Operators, Springer-Verlag, 1991.
2. M. E. Fisher, R. E. Hartwig, "Toeplitz determinants : some applications, theorems, and conjectures", Adv. Chem. Phys., 15, pp. 333 – 353, 1968.
3. E. Basor, H. Widom, "Toeplitz and Wiener-Hopf determinants with piecewise continuous symbols", J. Fumct. Anal. 50, pp. 387 – 413, 1983.
4. Г. Полиа, Г. Сегё, "Задачи и Теоремы из Анализа", том 1, 2, Наука, Москва, 1978.
5. A. Kratzer, W. Franz, Transzendente Funktionen, Akadem.Verlag, Leipzig, 1960.
6. Л. В. Микаелян, "Асимптотика детерминантов операторов Винера-Хопфа в сингулярном случае", ДАН Арм. ССР, том 82, № 4, стр. 151 – 155, 1986.
7. М. С. Гиновян, Л. В. Микаелян, "Инверсия усеченных операторов Винера-Хопфа и prediction ошибка для АРМА Процессов непрерывного времени", Изв. АН Армении, Математика, том 38, № 2, стр. 14 – 25, 2003.

Поступила 11 сентября 2003

СОДЕРЖАНИЕ

ТОМ 38 НОМЕРА 1 — 6 2003

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

серия Математика

Индекс 77735

ИЗВЕСТИЯ НАН АРМЕНИИ: МАТЕМАТИКА

Том 38, Номер 6, 2003

МАТЕМАТИКА В АРМЕНИИ:

Достижения и Перспективы

Сборник статей

Содержание

IZVESTIYA NAN ARMENII: MATEMATIKA

Vol. 38, No. 6, 2003

MATHEMATICS IN ARMENIA:

Advances and Perspectives

Collection of Papers

Contents