

А. П. Тамадян

Об одной теореме М. В. Келдыша

Пусть $h(z) > 0$ — ограниченная функция в произвольной конечной односвязной области D , расположенной в плоскости z .

Отнесем к классу $H_2(h, D)$ все аналитические в D функции $f(z)$, для которых существует интеграл

$$\iint_D h(z) |f(z)|^2 dx dy.$$

Если для произвольной функции $f(z) \in H_2(h, D)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\{P_n(z)\}} \iint_D h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy = 0,$$

где $\{P_n(z)\}$ — всевозможные полиномы, степени которых не выше n , то говорим, что система полиномов полна в области D при весе $h(z)$.

Мы будем говорить, что функция $h(z)$ удовлетворяет условию А, если при весе $h[z(w)]$ (где $z = z(w)$ конформно отображает круг $|w| < 1$ на D) система полиномов полна в единичном круге.

М. В. Келдыш доказал [1], что:

Если весовая функция $h(z)$ удовлетворяет условию и неравенству

$$\liminf_{d \rightarrow 0} \frac{\lg \lg \lg \frac{1}{h(z)}}{\lg \frac{1}{d(z)}} > 2,$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до границы D , то система полиномов полна в области D при весе $h(z)$.

В настоящей работе сформулированная теорема уточняется и доказывается иным методом.

Известно, что вопрос о полноте в классе функций, аналитических в D и интегрируемых с квадратом модуля при весе $h(z)$, который удовлетворяет условию А, сводится к полноте специальной счетной системы функций.

Это следует из леммы:

Лемма 1 [1]. Если вес $h(z)$ удовлетворяет условию А и при любом $m \geq 0$ для функции $[w(z)]^m w'(z)$, где $w=w(z)$ —функция, отображающая D на круг $|w| < 1$, выполняются условия

$$\inf_{\{P(z)\}} \iint_D h(z) | [w(z)]^m w'(z) - P(z) |^2 dx dy = 0,$$

то система полиномов полна в области D при весе $h(z)$.

Методом вывода полюсов, впервые примененным М. В. Келдышем к вопросам полноты, можно установить следующее:

Лемма 2. Пусть D —произвольная область, расположенная в круге $|z| < R$, точка ζ находится вне D , причем эту точку можно соединить с окружностью $|z| = 2R + 1$, спрямляемой кривой длины l так, что δ —окрестность этой кривой расположена вне D . Пусть $P_{n_0} \left(\frac{1}{z-\zeta} \right)$ —полином от $\frac{1}{z-\zeta}$ степени n_0 , максимум которого в области $|z-\zeta| \geq \delta$ равен M_0 .

Для любого целого n существует полином $P_{n,\zeta}(z)$ степени n , такой, что

$$1) \quad \max_{\substack{z \in \bar{D} \\ |z-\zeta| \geq \delta}} \left| P_{n_0} \left(\frac{1}{z-\zeta} \right) - P_{n,\zeta}(z) \right| < \left[\exp(-e^{-c_1 \frac{l}{\delta}}) \right]^n, \quad (1)$$

$$2) \quad \max_{|z| < R} |P_{n,\zeta}(z)| < \exp(e^{c_2 \frac{l}{\delta}}), \quad (2)$$

где постоянные c_1 и c_2 не зависят от l и δ .

Обозначим через D_δ множество тех точек D , расстояние которых до границы Γ области D больше 2δ .

Для каждого положительного числа δ ($\delta > 0$) множество D_δ принадлежит D и состоит из конечного числа замкнутых жордановых областей, ограниченных спрямляемыми кривыми. Границу D_δ обозначим через Γ_δ .

Пусть $\zeta \in \Gamma_\delta$, и $L_{\zeta,\delta}$ та компонента Γ_δ , которой принадлежит точка ζ .

Покажем, что существует жорданова спрямляемая кривая

$S_{\zeta,\delta} \subset \bar{D}_\delta$, соединяющая ζ с окружностью $|z| = 2R + 1$, такая, что

$$\text{длина } S_{\zeta,\delta} \leq \frac{\eta(\delta)}{\delta}, \quad (3)$$

где $\eta(\delta) > 0$ стремится к нулю, когда $\delta \rightarrow 0$, причем δ —окрестность этой линии расположена вне D_δ .

Действительно, обозначим через ζ_1 ту точку $L_{\zeta,\delta}$ или одну из тех ее точек t , для которых $\operatorname{Re} t$ достигает своего максимума. Из точки ζ_1 проведем луч, параллельный оси ox и направленный в

сторону возрастания x . Пусть ζ'_1 — ближайшая к ζ , точка пересечения этого луча с $\Gamma_{\delta/2}$, $L_{\zeta,\delta}$ — та компонента $\Gamma_{\delta/2}$, которой принадлежит ζ'_1 , ζ_2 — та точка $L_{\zeta,\delta}$ или одна из тех ее точек, для которых $\operatorname{Re} t$ достигает своего максимума на компоненте $L_{\zeta,\delta}$. Повторяя конечное число раз эти рассуждения, мы можем соединить любую точку $\zeta \in \Gamma_{\delta/2}$ с помощью конечного числа дуг, принадлежащих $\Gamma_{\delta/2}$, и отрезков $\Delta_{k,\delta} = [\zeta_k, \zeta'_k]$ ($k=1, 2, \dots, p$) параллельных оси ox , с окружностью $|z| = 2R+1$.

Обозначим через $S_{\zeta,\delta}$, жорданову спрямляемую кривую, составленную таким образом из той части $L_{\zeta_k,\delta}^*$ кривой $L_{\zeta_k,\delta}^*$, которая расположена между точками ζ'_{k-1} , ζ_k , и из отрезков $\Delta_{k,\delta}$, параллельных оси ox ($k=1, 2, \dots, p$):

$$S_{\zeta,\delta} = \sum_{k=1}^p L_{\zeta_k,\delta}^* + \sum_{k=1}^p \Delta_{k,\delta}.$$

Очевидно, что δ — окрестность кривой $S_{\zeta,\delta}$ — расположена вне $\bar{D}_\delta$. Для оценки длины $S_{\zeta,\delta}$ заметим, что

$$\text{длина } S_{\zeta,\delta} = \sum_{k=1}^p \text{дл. } L_{\zeta_k,\delta}^* + \sum_{k=1}^p \text{дл. } \Delta_{k,\delta},$$

$$\text{где } \sum_{k=1}^p \text{дл. } L_{\zeta_k,\delta}^* < \text{дл. } \Gamma_{\delta/2},$$

$$\text{а } \sum_{k=1}^p \text{дл. } \Delta_{k,\delta} < 2(2R+1).$$

Пусть ζ — любая точка Γ_δ . Из определения Γ_δ следует, что существует окружность $|z - z_\zeta| = \delta$ ($z_\zeta \in D$), проходящая через ζ и касающаяся Γ в точке ζ^* , такая, что круг $|z - z_\zeta| < \delta$ не содержит точек Γ_δ и Γ . Легко видеть, что для разных точек $\zeta_1, \zeta_2 \in \Gamma_\delta$ интервалы (ζ_1, ζ_1^*) и (ζ_2, ζ_2^*) не пересекаются, поэтому, так как все круги $|z - z_\zeta| < \delta$ расположены в области $D - D_\delta$, то $\delta \cdot \text{дл. } \Gamma_\delta \leq \text{пл. } (D - D_\delta)$, т. е. $\text{дл. } \Gamma_\delta \leq \frac{\eta(\delta)}{\delta}$,

где $\eta(\delta) = \text{пл. } (D - D_\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема. Если весовая функция $h(z)$ определена в произвольной конечной и односвязной области D , удовлетворяет условию A и неравенству

$$\lim_{d \rightarrow 0} \inf [d(z)]^2 \lg \lg \frac{1}{h(z)} > 0,$$

где $d(z)$ — расстояние точки z до границы D , то система полиномов полна в области D при весе $h(z)$.

Доказательство. Пусть область D расположена в круге $|z| < R$. Если $w = w(z)$ отображает D на круг $|w| < 1$, то в силу леммы 1 для доказательства теоремы достаточно доказать весовую полноту системы полиномов относительно функции вида $f(z) = [w(z)]^m w'(z)$ ($m = 0, 1, 2, \dots$).

Оценим модуль функции $f(z)$. Представляя $[f(z)]^2$ в виде интеграла Коши по окружности радиуса δ с центром $\zeta \in \Gamma_{\delta/2}$:

$$[f(\zeta)]^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\zeta + \delta e^{i\varphi})]^2 d\varphi,$$

или

$$|f(\zeta)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\zeta + \delta e^{i\varphi})|^2 d\varphi;$$

умножая на $r dr$ и интегрируя от 0 до δ , имеем

$$|f(\zeta)|^2 \frac{\delta^2}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\delta \int_0^{2\pi} |f(\zeta + \delta e^{i\varphi})|^2 r dr d\varphi.$$

Отсюда

$$|f(\zeta)| < \frac{1}{\delta} \text{ при } \zeta \in \Gamma_{\delta/2} \quad (4)$$

Покажем теперь, что можно найти полиномы $P_n(z)$ так, чтобы интеграл

$$\begin{aligned} \iint_D h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy &= \iint_{D_\delta} h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy + \\ &+ \iint_{D-D_\delta} h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy \end{aligned}$$

стремился к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, часть интеграла, распространенную на D_δ , оценим, используя интеграл Коши.

Применим лемму 2 к области $D_{\zeta, \delta}^*$, получаемой удалением из круга $|z| < R$ δ -окрестности кривой $S_{\zeta, \delta}$. Очевидно $D_\delta \subset D_{\zeta, \delta}^*$.

Согласно лемме 2 существует полином $P_{n, \zeta}(z)$, удовлетворяющий, в силу (1), (2) и (3), неравенствам:

$$\max_{z \in \bar{D}_{\delta, \delta}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_{n, \zeta}(z) \right| < \left[\exp \left(-e^{-\frac{\eta}{\delta}} \right) \right]^n, \quad (1^*)$$

$$\zeta \in S_{\delta, \delta} \quad \max_{|z| < R} |P_{n, \zeta}(z)| < \exp \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\eta}{\delta^2}} \right). \quad (2^*)$$

Очевидно, что интеграл

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta, \delta}} f(\zeta) P_{n, \zeta}(z) d\zeta$$

представляет полином относительно z степени n . Составим разность $f(z) - P_n(z)$ при любом $z \in \bar{D}_\delta$:

$$\begin{aligned} |f(z) - P_n(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta, \delta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\delta, \delta}} f(\zeta) P_{n, \zeta}(z) d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} |f(\zeta)| \max_{\substack{z \in \bar{D}_\delta \\ \zeta \in \Gamma_{\delta, \delta}}} \left| \frac{1}{\zeta - z} - P_{n, \zeta}(z) \right|, \text{ для } \Gamma_{\delta, \delta} \end{aligned}$$

Из неравенств (1), (3) и (4) имеем:

$$|f(z) - P_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\delta} \left[\exp \left(-e^{-\frac{\eta}{\delta^2}} \right) \right]^n \cdot \frac{\eta}{\delta},$$

или

$$\max_{z \in \bar{D}_\delta} |f(z) - P_n(z)| < \left[\exp \left(-e^{-\frac{\eta'}{\delta^2}} \right) \right]^n,$$

где η' — произвольное положительное число.

Отсюда следует, что

$$\iint_{D_\delta} h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy < \left[\exp \left(-e^{-\frac{\eta'}{\delta^2}} \right) \right]^n \cdot \iint_D h(z) dx dy$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Часть интеграла, распространенную на $D - D_\delta$, можно оценить используя неравенство Минковского:

$$\begin{aligned} \left\{ \iint_{D - D_\delta} h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} &\leq \left\{ \iint_{D - D_\delta} h(z) |f(z)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}} + \\ &+ \left\{ \iint_{D - D_\delta} h(z) |P_n(z)|^2 dx dy \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

В силу интегрируемости $h(z)|f(z)|^2$ по площади D первый член в правой части этого неравенства стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

С другой стороны, так как расстояние любой точки $D - D_\delta$ до границы D не превосходит 2δ , из условий доказываемой теоремы следует, что существуют $A > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ так, что

$$h(z) < A \cdot \exp \left(-e^{\frac{\varepsilon_0}{2\delta^2}} \right).$$

Второй же член оцениваем с помощью неравенства (3)

$$\iint_{D-D_\delta} h(z)|P_n(z)|^2 dx dy < A \exp \left(-e^{\frac{\varepsilon_0}{2\delta^2}} \right) \cdot \exp \left(e^{\frac{\eta}{2\delta^2}} \right) \text{ площадь } D.$$

Так как $\eta(\delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, то

$$\exp \left(-e^{\frac{\varepsilon_0}{2\delta^2}} \right) \cdot \exp \left(e^{\frac{\eta}{2\delta^2}} \right) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0. \text{ Отсюда}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \iint_{D-D_\delta} h(z)|P_n(z)|^2 dx dy = 0.$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_D h(z) |f(z) - P_n(z)|^2 dx dy = 0.$$

Таким образом теорема доказана полностью.

Сектор математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15 XII 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Келдыш М. В. Математический сборник, т. 16 (58), 1945.

Ա. Պ. Թամադյան

Մ. Վ. ԿԵԼԴՅԻՆԻ ՄԻ ԹԵՈՐԵՄԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածում ճշտվում է և այլ եղանակով ապացուցվում կելդիշի հետևեցող թեորեման՝

Եթե $h(z)$ կշռային ֆունկցիան բավարարում է A պայմանին, այն է՝ $h[z(w)]$ (որտեղ $z = z(w)$ միավոր շրջանակը կոնֆորմ կերպով արտադրական է D տիրույթի վրա) կշռի գեպում բազմանշանների սխեմը

լրիվ է միավոր շրջանում, և $\liminf_{d \rightarrow 0} \frac{\lg \lg \frac{1}{h(z)}}{\lg \frac{1}{d(z)}} > 2$, որտեղ $d(z)$ -ը z կե-

տի հեռավորությունն է D տիրույթի եզրից, ապա բազմանդամների սիս-
տեմը $h(z)$ կշռով լրիվ է D տիրույթում:

Հոդվածում ապացուցվում է, որ թեորեման մնում է ուժի մեջ $h(z)$
ֆունկցիայի նկատմամբ ավելի թույլ սահմանափակումների դեպքում,

այն է՝ $\liminf_{d \rightarrow 0} [d(z)]^2 \lg \lg \frac{1}{h(z)} > 0$.

АСТРОФИЗИКА

Л. В. Мирзоян

Об атмосферной экстинкции

Ослабление света небесного светила земной атмосферой обусловлено процессами рассеяния и поглощения со стороны частиц различного рода на пути луча. Величина ослабления света (экстинкция) изменяется в зависимости от высоты места наблюдения над уровнем моря, а для данного места — от зенитного расстояния светила. Количество теряемого в земной атмосфере света достигает значительной величины и возрастает при переходе к коротким длинам волн.

Учет ослабления света небесных светил земной атмосферой имеет большое значение при всевозможных астрофизических исследованиях. Только освобождая результаты фотометрических наблюдений небесных светил от влияния земной атмосферы можно сравнивать их между собой или с лабораторными источниками света.

Однако в работах по спектрофотометрии и колориметрии звезд атмосферная экстинкция рассматривается как неизбежный элемент редукции, чем в значительной мере ограничивается изучение этого явления, представляющего самостоятельный интерес. Знание закона изменения атмосферной экстинкции с длиной волны может дать возможность изучения свойств частиц земной атмосферы, обуславливающих экстинкцию.

Среди многочисленных работ по атмосферной экстинкции следует указать работы В. Г. Фесенкова [1] и Вемпе [2].

В первой из них, посвященной рассмотрению оптических свойств земной атмосферы, в связи с настоящей статьей представляет интерес полученное выражение оптической толщины атмосферы по наблюдениям выполненным в Алма-Ата: $\tau_\lambda = a\lambda^{-4} + b\lambda^{-n}$ где значение n заключается между 1 и 2, a и b постоянные, а λ — длина волны. Первая составляющая (релеевская), по мнению Фесенкова, обусловлена только сухим воздухом, а вторая — водяными парами и аэрозолями.

В работе Вемпе проведено систематическое исследование зависимости величины экстинкции от длины волны на основе спектрофотометрических измерений этой величины при различных состояниях атмосферы в Иене (Герм.). Показано, что кроме релеевского составляющего в выражение оптической толщины входит составляющая $\text{Const } \lambda^{-\alpha}$ ($\alpha=1,5$), обусловленная водяными парами. Необходимо за-

метить, что согласно многочисленным исследованиям устойчивость атмосферных условий встречается в крайне редких случаях.

В фотографической и визуальной области спектра практическое отсутствие линий поглощения, образованных газами земной атмосферы (теллурические линии), свидетельствует о том, что в этой области основным механизмом ослабления света в земной атмосфере является рассеяние (поглощение твердыми частицами незначительно и им можно пренебречь).

Земная атмосфера представляет собой неоднородную оптическую среду и закон Релея для нее не соблюдается. Кроме релеевского рассеяния в этом случае надо учесть рассеяние мелкими и крупными частицами земной атмосферы.

В первом приближении оптическая толщина атмосферы

$$\tau_\lambda = \int_0^\infty k_\lambda ds \quad (k_\lambda \text{ — коэффициент ослабления, изменяющийся с длиной}$$

волны, а ds —элемент высоты слоя земной атмосферы) может быть задана [3] формулой:

$$\tau_\lambda = a\lambda^{-4} + b\lambda^{-\beta(\lambda)} + c. \quad (1)$$

Первый член справа соответствует чисто релеевскому рассеянию (случай очень мелких диэлектрических частиц), второй член—рассеянию мелкими частицами* а третий член—рассеянию крупными частицами с диаметром значительно превышающим λ (нейтральное рассеяние).

Цель настоящей статьи—исследование зависимости τ_λ от λ на основе наблюдательных данных об оптической толщине земной атмосферы на больших высотах над уровнем моря.

Для этого использованы значения коэффициентов прозрачности для трех станций на различных высотах над уровнем моря: Маунт-Вильсон (1780 м), Арагац (3200 м), и Маунт-Уитней (4420 м).

Как известно, коэффициент прозрачности земной атмосферы называется выражение $p_\lambda = e^{-\tau_\lambda}$, где τ_λ —оптическая толщина атмосферы при прохождении луча нормально к слоям.

Коэффициенты прозрачности земной атмосферы для Арагаца были определены автором [4] спектрофотометрическим способом, а для двух других станций использованы болометрические определения Аббота [5]. Определения Аббота по методике наблюдений считаются наиболее однородными.

На фиг. 1 представлена зависимость $\lg p_\lambda$ от λ^{-1} для всех станций. Прямые представляют решения точек способом наименьших квадратов (для Арагаца учтены веса определений p_λ).

Рассмотрение фиг. 1 позволяет сделать следующие выводы:

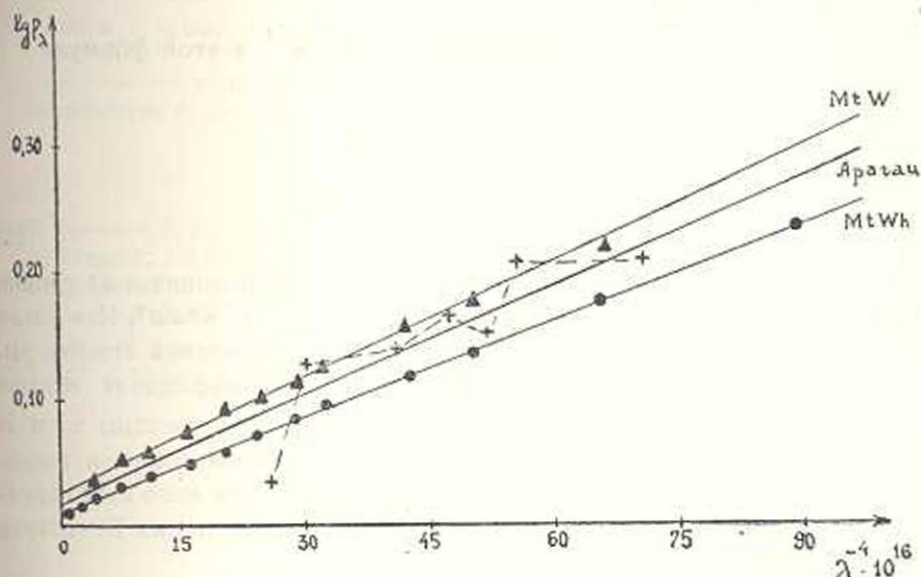
1. Прозрачность земной атмосферы быстро возрастает с увели-

* $\beta(\lambda)$ —зависит от соотношения между радиусом частицы и длиной волны.

чением длины волны, причем тем быстрее, чем меньше высота станции, т. е. чем больше воздушная масса на пути луча.

2. Для всех трех станций зависимость $\lg p_\lambda$ от λ^{-1} в первом приближении прямолинейная (по крайней мере для области $\lambda=3200-7000 \text{ \AA}$), однако, в отличие от случая чисто релеевского рассеяния, прямые не проходят через начало координат.

3. Смещение прямых по оси ординат убывает при увеличении высоты станции над уровнем моря, однако, даже на высоте 4400 м оно не равно нулю.



Фиг. 1.

Таким образом, наблюдательные данные показывают, что в формуле (1) можно пренебречь вторым членом в правой части. А это означает, что в земной атмосфере в рассматриваемых случаях в первом приближении мы имеем дело с комбинацией рассеяний релеевского и крупными нейтрально-рассеивающими частицами. Следовательно, согласно наблюдательным данным, на больших высотах над уровнем моря водяные пары не играют существенной роли в ослаблении света земной атмосферой. Иначе говоря, количество водяных паров на таких высотах практически ничтожно мало, что нельзя сказать в случае малых высот (Фесенков, Вемпе).

Так как $\tau_\lambda \sim \lg p_\lambda$, то формула (1) напишется в виде

$$\tau_\lambda = a\lambda^{-4} + c. \quad (2)$$

По смещениям прямых по оси ординат (фиг. 1) можно вычислить c — нейтральную часть ослабления света вследствие его рассеяния крупными нейтрально-рассеивающими частицами. В таблице 1 приведены полученные таким образом значения постоянной c .

Таблица 1

Станция	$\lg p_A (\lambda=0)$	ϵ
Маунт-Вильсон	-0,022	0,051
Арагац	-0,016	0,037
Маунт-Уитней	-0,010	0,023

Формулу (2) можно использовать для вычисления числа атомов в см^3 земной атмосферы.

Согласно теории [5] коэффициент a при λ^{-4} в этой формуле

$$a = \frac{32}{3} \pi^3 (n_0 - 1)^2 \frac{NB}{N_0 B_0},$$

откуда

$$N_0 = \frac{32}{3} \pi^3 (n_0 - 1)^2 \frac{NB}{a B_0}, \quad (3)$$

где B и B_0 — атмосферное давление на месте наблюдения и на уровне моря, H — высота однородной атмосферы при 0°C и 760 мм^* , N_0 — число молекул в см^3 атмосферы, a — коэффициент преломления атмосферы.

Постоянная a в формуле (2) есть угловой коэффициент прямой зависимости τ_λ от λ^{-4} и легко определяется, если известны τ_λ и ϵ . Коэффициент преломления n_0 зависит как от длины волны и температуры, так и от атмосферного давления B , но для него взято среднее значение: $n_0 - 1 = 0,0002918$, соответствующее линии D — натрия ($\lambda = 5893 \text{ \AA}$) при 0°C и 760 мм [6].

Определенные по формуле (3) значения N_0 приведены в таблице 2. Они находятся в хорошем согласии с результатами Кинга [5]

Таблица 2

Станция	$a \cdot 10^{-16}$	$\frac{B}{B_0}$	$\frac{B}{a B_0} 10^{16}$	N_0
Маунт-Вильсон	0,00724	0,809	111,74	$2,52 \times 10^{19}$
Арагац	0,00567	0,678	101,65	$2,29 \times 10^{19}$
Маунт-Уитней	0,00584	0,580	99,32	$2,24 \times 10^{19}$

(для Маунт-Вильсона $2,28 \times 10^{19}$, а для Маунт-Уитней $\sim 2,26 \times 10^{19}$). Вычисленные значения N_0 находятся в удовлетворительном согласии также с лабораторными определениями Милликена [5]: $2,644 \times 10^{19}$, хотя численно все они меньше лабораторного значения.

В этой связи следует отметить, что согласно исследованию Фоуля [5], учет роли водяных паров в процессах рассеяния в атмосфере (для них справедлив закон $\text{Const.} \lambda^{-2}$) заметно увеличивает число N_0 . Так, например, для Маунт-Вильсона вместо $N_0 = 2,28 \times 10^{19}$

* По многим определениям $H = 8 \text{ км}$ [5].

по Кингу, после поправки на влажность воздуха, Фоуль получил $(2,70 \pm 0,02) \times 10^{19}$ — в отличном согласии с лабораторными определениями Милликена. Естественно, что эта поправка тем больше, чем меньше высота станции над уровнем моря.

В заключение следует указать, что полученные результаты являются средними значениями соответствующих величин для ясных дней, так как использованы средние значения коэффициентов прозрачности земной атмосферы, определенные из наблюдений в ясные дни. В общем же случае эти коэффициенты заметно изменяются даже в течение одного дня.

Бюраканская астрофизическая
обсерватория АН Армянской ССР

Поступило 3 XII 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фесенков В. Г. Астр. журн., 22 (215), 1945.
2. Wempe T. AN 275, 1, 1947.
3. Альбицкий В. А. и др. Курс астрофизики и зв. астрономии, т. I, 500, 1951.
4. Мирзоян Л. В. Сообщ. Бюраканской обсерв., вып. 7, 1951.
5. Abbot C. Ap. J., 34, 203, 1911.
6. Кел Д. и Леви Т. Справочник физика-экспериментатора, Москва, 1949.

Հ. Վ. Միրզոյան

ՄԹՆՈԼՈՐՏԱՅԻՆ ԷՔՍՏԻՆԿՑԻԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտողական տվյալների հիման վրա որոշված է մթնոլորտի τ_λ օպտիկական հաստության կախումը ալիքի λ երկարությունից ծովի մակարդակից տարբեր բարձրությունների վրա գտնվող երեք կայանների համար՝ Մաունտ-Էլբրան (1780 մ), Արագած (3200 մ) և Մաունտ-Ուխտեյ (4420 մ)։ Օգտագործված են Արրոտի և հեղինակի որոշած մթնոլորտի թափանցիկության միջին գործակիցները պարզ օրերի համար։

Ցույց է տրված, որ առաջին մոտավորությամբ τ_λ -ի կախումը λ^{-1} -ից զմային է բոլոր երեք կայանների համար։ Բնչպես երևում է հոդվածում բերված գծադրից, այդ կախումը ներկայացնող ուղիղները չեն անցնում սկզբնականով և հատում են օրգինատների (τ_0) առանցքը։ Այդ նշանակում է, որ քննարկվող դեպքերում, բացի մաքուր սեղանական ցրումից, մթնոլորտում գոյություն ունի չեզոք ցրում ալիքի երկարությունից մեծ արամազիմ ունեցող մասնիկների կողմից։ Գծադրից հետևում է, որ առաջին մոտավորությամբ օպտիկական հաստությունը ներկայացվում է $\tau_\lambda = a\lambda^{-1} + c$ բանաձևով։ Հետևաբար, ծովի մակարդակից մեծ բարձրության վրա գտնվող վայրերում լույսի ինտենսիվության թուլացման մեջ ջրային գոլորշիների գերը չնչին է (նրանք ցրում են $\text{Const } \lambda^{-2}$ օրենքով), մինչդեռ ցածր վայրերում այդ գերն զգալի է (Ֆեսենկով, Վեմպե)։

Հողովածի վերջում Ռեկեյի տեսական բանաձևի օգնությամբ և դիտումներից Ա զործակցի համար ստացված արժեքների հիման վրա հաշվված է համասեռ միջնորդի 1 սմ³-ում գտնվող ատոմների թիվը վերոհիշյալ երեք կայանների համար (աղյուսակ 2): Համաձայնություներ ստացված թվերի միջև, ինչպես նաև այդ թվերի և Միլլիկենի լարորատոր եզանակով ստացված արժեքի միջև բավարար է:

АСТРОФИЗИКА

Г. А. Гурзадян

Об устойчивости формы выброшенных газовых оболочек звезд

§. 1 Постановка проблемы

Имеется целый класс звезд, с поверхности которых происходит истечение газовой материи. В некоторых случаях истечение имеет импульсивный характер: под влиянием сил, действующих практически мгновенно, некоторое количество массы выбрасывается из звезды. В этом случае получается расширяющаяся газовая оболочка. Иногда первоначальный выброс сопровождается дальнейшим истечением газовой материи.

Звезды, у которых выброс газовой материи имеет импульсивный характер, представляют огромный космогонический интерес. Сюда входят, в первую очередь, все новые, сверхновые и новоподобные звезды, а также планетарные туманности. Что выброс газовой материи у новых имеет импульсивный характер это очевидно. То же самое, однако, нельзя без доказательства утверждать о планетарных туманностях. До сих пор не наблюдалось образование планетарной туманности в результате мгновенного выброса газовой материи из центральной звезды. Однако структура и динамическое состояние планетарных туманностей требуют именно выброса, а не непрерывного истечения. С этой точки зрения планетарные туманности и оболочки новых звезд похожи друг на друга—и те и другие являются результатом выброса некоторого количества газовой материи. Разница только в величинах физических параметров; масса планетарных туманностей в несколько сот раз превосходит массу оболочек новых, скорость же расширения—в сто раз меньше.

Однако имеется еще одно обстоятельство, отличающее оболочки новых от планетарных туманностей: последние имеют более или менее хорошо выраженную геометрическую форму—сферическую или почти сферическую, в центре которой находится освещающая звезда. Между тем, оболочка, выброшенная новой, лишена правильной формы; она очень быстро превращается (когда ее удастся наблюдать) в бесформенную туманность. Это имеет чрезвычайно важное значение: в одном случае оболочка сохраняет свою форму, а в другом—она деформируется и распадается на части.

Условимся в дальнейшем называть оболочку устойчивой, когда она во время расширения сохраняет или мало меняет свою первоначальную форму, и, наоборот, неустойчивой, когда она сравнительно

но быстро разрушается. Это означает, что в случае планетарных туманностей мы будем иметь устойчивые оболочки, в случае новых звезд — неустойчивые. Поскольку эти оболочки характеризуются различными значениями физических и динамических параметров, отсюда следует, что, например, устойчивая оболочка может образоваться только тогда, когда эти параметры удовлетворяют определенному комплексу условий. В противном случае оболочка будет неустойчивой. Если нам удастся связать эти параметры с некоторой числовой величиной, характеризующей степень устойчивости («коэффициент неустойчивости»), то тем самым мы получим возможность предугадать дальнейшую судьбу выброшенных газовых оболочек всевозможного типа. В частности, мы можем констатировать тот тип выброса, при котором образование планетарной туманности становится возможным. Таким образом, представляется возможность выяснить роль новых звезд в процессе образования планетарных туманностей — вопрос, который так часто дискутируется.

Оболочка, удаляясь от звезды, попадает в межзвездную среду, которая имеет определенную, далеко непренебрежимую плотность. Эта среда должна оказывать сопротивление движущейся оболочке, вследствие чего скорость последней уменьшается. Иначе говоря, движение оболочки в окружающей среде сопровождается отрицательным ускорением. Поскольку плотность оболочки значительно больше, чем плотность сопротивляющейся среды, то теоретически ее движение может длиться бесконечно долго, а скорость становится равной нулю лишь на бесконечности. Это утверждение будет доказано ниже. В течение этого длительного периода непрерывного движения и при наличии сопротивления со стороны среды, поверхность раздела между наружной границей оболочки и средой не может долго оставаться устойчивой. Самая незначительная неравномерность на наружной границе оболочки — неравномерность, которая всегда может иметь место первоначально под влиянием различных причин (например, хотя бы из-за флуктуации величины импульсивной силы), развивается во время движения оболочки и в определенный момент она приводит к полному разрушению оболочки.

Таким образом, проблема сводится к решению следующей физической задачи: через газовую среду определенной плотности движется газовая оболочка со значительно большей плотностью. Размеры оболочки и первоначальная скорость движения известны. Требуется определить, при каких условиях и на каких этапах расширения оболочка устойчива и при каких она перестает быть устойчивой. Решение этой задачи связано с большими трудностями. Во-первых, мы имеем дело со сжимаемой жидкостью — газом. Во-вторых, скорость движения через сопротивляющуюся среду обычно превышает скорость звука в этой среде. Это приводит, в частности, к необходимости учитывать сжимаемость газа. Оба эти фактора чрезвычайно сильно усложняют математическую трактовку задачи. Од-

нако, для целей получения хотя бы качественных результатов мы можем сжимаемостью жидкости пренебречь.

Заметим, что аналогичная задача возникает во многих отраслях астрофизики. В частности, ряд особенностей формы и структуры диффузных светлых и темных туманностей и межзвездной диффузной материи можно было бы объяснить именно с точки зрения взаимодействия двух облаков (газовых или пылевых), обладающих определенными кинематическими и физическими характеристиками. Подобный пример при особых случаях мы можем иметь при движении протуберанцев и волокон в солнечной атмосфере. Вследствие сопротивления атмосферы Солнца некоторые протуберанцы и волокна могут деформироваться. Имея из ряда последовательных снимков величину деформации по времени и теоретическую связь этой деформации с физическими параметрами, можно определить значение любого из последних. Однако это должно быть предметом специального исследования, которое нетрудно провести на основе нижеприведенных рассуждений.

В связи с этим отметим интересные работы Льюиса [1] и Тэйлора [2], проведенные для жидкостей. Первый экспериментально, а второй теоретически показали, что когда две жидкости разной плотности, лежащие друг на друге, ускоряются в направлении, перпендикулярном к поверхности их раздела, эта последняя будет устойчивой или неустойчивой в зависимости от того, как направлен вектор ускорения—от легкой жидкости к тяжелой, или наоборот.

В настоящей работе дается решение задачи для выброшенных газовых оболочек звезд. Постановка задачи следующая.

Выброшена со скоростью v_0 однородная и сферически-симметричная оболочка, масса которой равна M_0 . Для простоты сперва можно рассмотреть двухмерную задачу, а потом уже реальную—трехмерную. Криволинейностью оболочки будем пренебрегать. Примем далее, что оболочка имеет достаточную толщину. Процесс дальнейшего истечения газовой материи после выброса оболочки существенно не меняет получаемые результаты. Поэтому его учитывать не будем. Впрочем, нетрудно рассмотреть и задачу с учетом непрерывного истечения.

Но основной, имеющей принципиальное значение, трудностью является законность применения результатов классической гидродинамики в условиях космических объектов. Известно, что даже в самых плотных газовых туманностях и облаках плотность материи ничтожно мала в сравнении с той, для которой были выведены основные уравнения классической гидромеханики. Об экспериментальных проверках нечего и говорить, так как осуществление подобных экспериментов в современном уровне техники невозможно. Кроме того, в большинстве случаев приходится иметь дело с объектами, газовая материя которых находится во взаимодействии с полем изучения соседних звезд.

Тем не менее есть основание полагать, что законы обычной

гидромеханики применимы и для космических объектов. Существенным при этом являются масштабы явления и размеры объектов в сравнении с длиной свободного пробега частиц в них. Мы можем утверждать, что до тех пор, пока расстояние d между двумя такими точками, в которых значения параметров движения (например, скоростей) заметно отличаются друг от друга, будет значительно больше длины среднего свободного пробега частицы l , т. е. когда имеет место условие

$$\frac{d}{l} \gg 1,$$

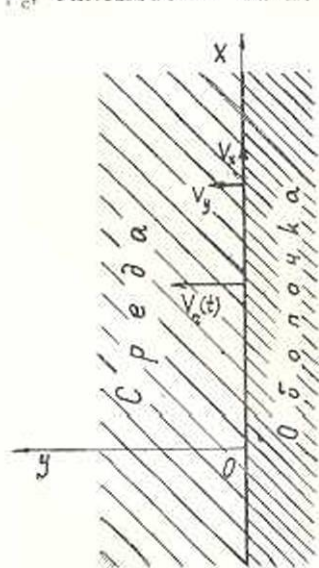
для таких объектов справедливы основные уравнения гидродинамики.

По вычислениям Спитцера [3] даже в межзвездных водородных облаках, обладающих гораздо меньшей плотностью, чем планетарные туманности и оболочки новых, длина свободного пробега частицы составляет всего несколько сотых $a. e.$ Между тем, в интересующих нас случаях мы имеем дело с объектами колоссальных размеров, а расстояния, на которых обнаруживаются заметные различия в состоянии движения, составляют несколько сот и тысяч $a. e.$

Исходя из этих рассуждений, мы можем считать применение основных уравнений классической гидромеханики для космических объектов (в частности для планетарных туманностей) законным.

§ 2. Устойчивость формы газовых оболочек

Движение оболочки в межзвездной среде, имеющей плотность ρ_c , описывается зависимостью между расстоянием внешней границы



Фиг. 1.

оболочки от звезды и временем. Вводим движущуюся с оболочкой координатную систему так, чтобы ось x была направлена по поверхности раздела (по наружной границе оболочки), а ось y — нормально поверхности и наружу. Пока считаем, что движение по z -координате не имеет места. Иначе говоря, мы рассматриваем сперва двухмерную задачу. Реальную, трехмерную задачу рассмотрим ниже, в § 3. Обозначим, наконец, через $v(r)$ скорость движения оболочки на расстоянии r от звезды (фиг. 1), которое является функцией только времени*.

Оболочка во время движения испытывает сопротивление. Иначе говоря, создается некоторое давление на поверхности раздела. Фактически оно складывается из трех величин: динамического давления, газового давления и лучистого давления. Пренебрегая двумя последними, будем учитывать только первое.

* $v(r)$ не следует смешивать с радиальной компонентой скорости, выраженной в полярных координатах.

Среда испытывает динамическое давление со стороны оболочки, величина которого определяется через $P(t) = \frac{\rho}{2} v^2(r)$ (удельное давление). Вектор этого давления направлен от оболочки к среде (фиг. 2а). Однако поскольку нас интересует движение оболочки, то мы можем изучать его, отстраняя среду, но вместо этого прилагая вектор давления от среды к оболочке (фиг. 2б).

Пусть оболочка в какой-нибудь момент (в начальный момент) находилась в покое (т. е. не оказалась в состоянии возмущения). Движение из такого состояния, как известно, потенциально. Тогда, в силу теоремы Томсона (циркуляция скорости вдоль замкнутого контура, передвигающегося вместе с жидкостью, остается неизменной со временем) можем сказать, что движение оболочки будет потенциальным и в дальнейшем, когда она окажется в возмущенном состоянии. Иначе говоря, принимаем, что возмущающее движение в рассматриваемом нами случае безвихровое и, следовательно, ротор от вектора скорости равен нулю.

Вводим эйлеровы координаты v_x, v_y , представляющие компоненты скорости движения частицы в отношении координатной системы xy . Они связаны с потенциалом скоростей φ следующими соотношениями:

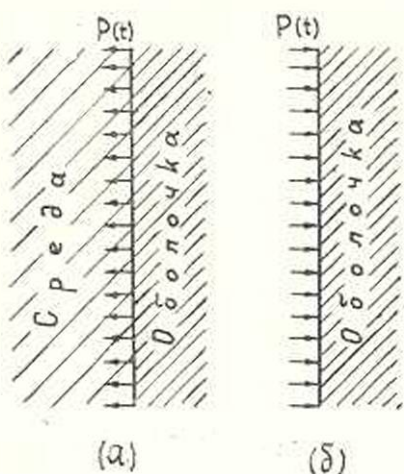
$$v_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (a)$$

Потенциал скоростей удовлетворяет так называемому уравнению неразрывности, которое для потенциального движения несжимаемой жидкости имеет следующий вид (уравнение Лапласа):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (б)$$

В рассматриваемом случае мы имеем дело с неустановившимся движением, так как режим движения, т. е. поле скоростей, поле гидродинамических давлений, поле массовых сил меняются по времени. Иначе говоря, потенциал скорости φ нужно рассматривать как функцию от аргументов x, y и t .

Интеграл уравнения движения в этих условиях дается интегралом Коши-Лагранжа:



Фиг. 2.

$$V + P + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(t). \quad (в)$$

Левая часть этого выражения зависит только от времени и не зависит от координат x и y .

Постоянную интегрирования $F(t)$ можно внести в φ , как это обычно делается в гидромеханике; тогда получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = V + P + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (1)$$

где V — потенциал внешних сил. В нашем случае на частицы газа, находящиеся на расстоянии r от центральной звезды, действует притяжение этой звезды, а также замедление, которое возникает от сопротивления среды. Ускорение, вызванное влиянием притяжения центральной звезды g_0 и ускорение, вызванное сопротивлением среды движению оболочки $g_c(t)$, имеют одинаковый знак и направлены обратно направлению движения. Поэтому, приняв в пределах оболочки g_0 и $g_c(t)$ постоянными, можем написать:

$$V = [g_0 + g_c(t)] y.$$

Здесь g_0 уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния внешней границы оболочки от звезды r ; $g_c(t)$ также зависит от r или от t . Но оба независимы от местных, движущихся с оболочкой координат x и y .

На далеких от звезды расстояниях g_0 будет очень малой величиной в сравнении с $g_c(t)$. Поэтому будем им в дальнейшем пренебрегать и примем V в виде:

$$V = g_c(t) \cdot y. \quad (2)$$

Что же касается P , входящего в уравнение (1) и представляющего собой удельное давление, то в случае несжимаемой жидкости оно пишется просто $P = \frac{p}{\rho} = P(t)$.

Окончательно, с учетом всех этих выкладок, интеграл Коши-Лагранжа, в применении к нашему случаю, примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g_c(t) y + P(t) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right], \quad (3)$$

причем

$$g_c(t) = \frac{dv(t)}{dt}. \quad (4)$$

Член в квадратной скобке правой части уравнения (3) представляет собой скорость возмущенного движения. Мы будем предполагать это движение настолько медленным, чтобы в (3) им можно было бы пренебречь. Тогда (3) примет следующий вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = g_c(t) \cdot y + P(t). \quad (5)$$

Вводим вместо φ новое переменное Φ следующим образом:

$$\Phi = \varphi - \int P(t) \cdot dt. \quad (6)$$

Тогда уравнение (5) напишется в следующей форме:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} - g_c(t) \cdot y = 0. \quad (7)$$

Нетрудно убедиться, что функция $\Phi = \Phi(x, y, t)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Если вызванное возмущение формы границы оболочки не особенно велико (в сравнении с размером самой оболочки), то, обозначая значение y для точек поверхности через η , можно написать для наружной границы оболочки ($y = 0$):

$$\frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial t} - g_c(t) \cdot \eta = 0, \quad (9)$$

где принято приблизительно $\Phi(x, \eta, t) = \Phi(x, 0, t)$.

Отсюда

$$\eta = \frac{1}{g_c(t)} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y=0}. \quad (10)$$

По этой формуле можно, зная потенциал скоростей (в дальнейшем, ради краткости, потенциалом скоростей будем называть функцию $\Phi(x, y, t)$), определить вид наружной поверхности оболочки.

Между функцией η и потенциалом Φ существует следующее приближенное соотношение:

$$v_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (11)$$

имеющее место на поверхности, т. е. при $y = 0$. Это выражение дает проекцию скорости частицы на ось y . Подставляя η из (10) в (11), получим следующее граничное условие задачи:

$$\frac{1}{g_c(t)} \left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right|_{y=0} + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{y=0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{g_c(t)} = - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=0}. \quad (12)$$

Кроме этого имеются еще следующие граничные условия. В очень глубоких от поверхности оболочки слоях вертикальное колебательное движение отсутствует*, т. е.

* При этом принимаем, что оболочка обладает достаточно большой толщиной в сравнении с амплитудой колебания.

$$v_y = - \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=-\infty} = 0,$$

или, имея в виду (6), получим:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=-\infty} = 0. \quad (13)$$

Наконец, допускаем, что имеет место симметрия задачи, и что частицы, лежащие на линии $x=0$, т. е. проходящие через один из гребней образующейся волны, по всей глубине, не могут сделать перемещение по x , т. е.

$$v_x = - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0,$$

или

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0. \quad (14)$$

Уравнения (12), (13) и (14) являются граничными условиями нашей задачи. О начальных условиях речь будет идти ниже.

Теперь переходим к отысканию функции $\Phi(x, y, t)$. Она должна удовлетворять уравнению Лапласа (8) и граничным условиям (12), (13) и (14).

Решение, удовлетворяющее уравнению (8), имеет следующий вид:

$$\Phi(x, y, t) = [a(t) \cos kx + b(t) \sin kx] [A(t) \cdot e^{ky} + B(t) \cdot e^{-ky}], \quad (15)$$

где a , b , A , B — произвольные функции от времени, k — постоянная. Поскольку для определения этих четырех функций и одной постоянной располагаем соответственным количеством условий, то в рассмотренном нами случае уравнение Лапласа должно иметь только одно решение. Нашей ближайшей задачей является — найти это единственное решение.

Условия (13) и (14) дают:

$$A(t) = 0; \quad b(t) = 0.$$

Тогда (15) запишется так:

$$\Phi(x, y, t) = a_0(t) \cdot e^{-ky} \cdot \cos kx. \quad (16)$$

Здесь y считается положительным внутрь от поверхности; $a_0(t)$ есть новая функция, заменяющая произведение $a(t) \cdot B(t)$.

Коэффициент $a_0(t)$ будем определять из граничного условия (12). Подставляя (16) в (12), получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{g_c(t)} \cdot \frac{d^2 a_0(t)}{dt^2} + \frac{da_0(t)}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{g_c(t)} - a_0(t) k = 0. \quad (17)$$

Для решения этого уравнения надо иметь вид функции $g_c(t)$. Этот вид мы найдем из следующих рассуждений. Во время расши-

рения оболочки попадающие в нее (радиально и равномерно со всех сторон) частицы межзвездной среды должны увлекаться самой оболочкой, так как толщина ее значительно превосходит длину свободного пробега частицы. При этом часть количества движения оболочки передается этим новым частицам. Вследствие этого масса оболочки все время растет, а скорость расширения уменьшается. Этим и обусловлено торможение оболочки.

Напишем условие сохранения количества движения системы оболочки—среды. Имеем:

$$v_0 M_0 = v(r) \cdot M_0 + v(r) \cdot \frac{4}{3} \pi r^2 \cdot \rho_c, \quad (18)$$

где первый член правой части уравнения относится к оболочке, второй член—к дополнительной массе, полученной от среды. Поскольку эта последняя увлекается оболочкой, она должна иметь в каждый момент ту же самую скорость движения, что и оболочка, т. е. $v(r)$.

Из (18), для скорости движения оболочки на расстоянии r от центральной звезды, получим:

$$v(r) = v_0 \frac{1}{1 + \sigma r^3}, \quad (19)$$

где обозначено:

$$\sigma = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho_c}{M_0}. \quad (20)$$

Учитывая, что левая часть уравнения (19) представляет собой производную от r и интегрируя (с начальным условием $r=0$ при $t=0$), найдем уравнение движения оболочки:

$$r + \frac{\sigma}{4} r^4 = v_0 t. \quad (21)$$

На близких к звезде расстояниях, где $\sigma r^3 \ll 1$, среда практически не оказывает никакого торможения и движение происходит почти равномерно, без ускорения. Следовательно, в течение этого периода поверхность раздела практически не подвергается никаким деформациям. В самом деле, из (7) видно, что при $g_c = 0$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

в пределах $0 < r < R$, где R определяется из условия (22') (см. ниже). Отсюда имеем:

$$\Phi(x, y, t) = \text{const.} \quad (0 < r < R).$$

В частности, если в начальный момент скорость возмущения настолько мала, что можно было бы принять $v_y = 0$, то она будет равна нулю по всему пространству $0 < r < R$. Иначе говоря, в интервале $0 < r < R$ имеет место условие

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = v_y = 0.$$

Отсюда

$$\eta = \text{const.} \quad (0 < r < R),$$

т. е. поверхность оболочки сохраняет свою форму неизменной в течение всего периода времени, пока она находится внутри сферы радиуса R . Существенное изменение начинается лишь тогда, когда

$$\sigma r^2 > 1. \quad (22)$$

Поэтому, мы будем заниматься изучением устойчивости оболочки, начиная с момента, когда она переходит границу R , определяемую условием

$$\sigma R^2 = 1. \quad (22')$$

В силу этого мы можем (19) и (21) написать приближенно в следующем виде:

$$v(r) = \frac{v_0}{\sigma r^2}, \quad (23)$$

$$r = \left(\frac{4v_0}{\sigma} t \right)^{1/4}. \quad (24)$$

Комбинируя эти формулы, найдем:

$$v(r) = \frac{n}{4} \frac{1}{t^{3/4}}, \quad (25)$$

где через n обозначено

$$n = \left(\frac{4v_0}{\sigma} \right)^{1/4}. \quad (25')$$

Подставляя (25) в (4), получим для $g_c(t)$:

$$g_c(t) = -\frac{3}{16} \frac{n}{t^{7/4}}. \quad (26)$$

Формулы (24)–(26) справедливы при условии $t \geq t_0$, где t_0 — время, в течение которого оболочка расширяется до радиуса R .

Внося найденное значение $g_c(t)$ в (17), получим окончательно следующее дифференциальное уравнение для $a_0(t)$:

$$t^{7/4} \frac{d^2 a_0(t)}{dt^2} + \frac{7}{4} t^{3/2} \frac{da_0(t)}{dt} - \frac{3kn}{16} a_0(t) = 0. \quad (27)$$

Переходя от t к r с помощью соотношения $r = n \cdot t^{1/4}$, это уравнение можно привести к более простому виду

$$r \frac{d^2 a_0(r)}{dr^2} + 4 \frac{da_0(r)}{dr} - 3k a_0(r) = 0. \quad (28)$$

Целесообразно вместо k подставить (об этом см. ниже):

$$k = \frac{6\pi}{m\alpha_0}, \quad (29)$$

где m — некоторая безразмерная величина, α_0 — величина, имеющая размерность длины. Тогда получим окончательно

$$r \frac{d^2 a_0(r)}{dr^2} + 4 \frac{da_0(r)}{dr} - \frac{6\pi}{m\alpha_0} a_0(r) = 0. \quad (30)$$

Решение этого уравнения представляется с помощью бесселевых функций мнимого аргумента и получается в следующем виде:

$$a_0(r) = C_1 r^{-3/2} I_3 \left[2 \sqrt{\frac{6\pi}{m}} \left(\frac{r}{\alpha_0} \right)^{1/2} \right] + C_2 r^{-3/2} K_3 \left[2 \sqrt{\frac{6\pi}{m}} \left(\frac{r}{\alpha_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (31)$$

Для простоты обозначим через ν аргумент функций (безразмерная величина), т. е.

$$\nu = 2 \sqrt{\frac{6\pi}{m}} \left(\frac{r}{\alpha_0} \right)^{1/2}, \quad (32)$$

или, имея в виду (51), можем написать:

$$\nu = 2 \sqrt{6\pi \frac{r}{\lambda}}. \quad (32')$$

Тогда (31) напишется в виде

$$a_0(r) = C_1 r^{-3/2} I_3(\nu) + C_2 r^{-3/2} K_3(\nu). \quad (33)$$

Подставляя (33) в (16) получим для потенциала скоростей

$$\Phi(x, y, r) = r^{-3/2} [C_1 I_3(\nu) + C_2 K_3(\nu)] e^{-ky} \cos kx. \quad (34)$$

Нас интересует форма наружной поверхности оболочки, где $y=0$, а также закон изменения этой формы во времени. Для этой цели надо воспользоваться формулой (10), подставляя в нее значение функции $\Phi(x, y, t)$ из (34) и $g_c(t)$ из (25). В результате получим:

$$\eta(x, r) = -\frac{4}{3} \frac{r^{3/2}}{n^4} \left\{ \left(\frac{r}{\alpha_0} \right)^{1/2} [C_1 I_3(\nu) + C_2 K_3(\nu)] \sqrt{\frac{6\pi}{m}} - \frac{3}{2} [C_1 I_3(\nu) + C_2 K_3(\nu)] \right\} \cos kx, \quad (35)$$

где подставлено $y=0$.

Отсюда видно, что поверхность раздела представляет собой синусоидальную непериодическую волну, длиной

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (36)$$

и непрерывно меняющейся в зависимости от времени (или расстояния r) амплитудой, равной:

$$A_0(r) = \frac{4}{3} \frac{r}{n^4} \left\{ \left(\frac{r}{z_0} \right)^{1/2} \left[C_1 I_3(\nu) + C_2 K_3(\nu) \right] \sqrt{\frac{6\pi}{m}} - \frac{3}{2} \left[C_1 I_3(\nu) + C_2 K_3(\nu) \right] \right\}. \quad (37)$$

Допустим, что в начальный момент, когда $r = R$, поверхность раздела между наружной границей оболочки и окружающей ее средой приобрела под влиянием мгновенно действующего импульса крайне незначительную неравномерность, которую можно аппроксимировать функцией вида:

$$\eta(x, R) = \alpha_0 \cdot \cos kx, \quad (38)$$

где α_0 — первоначальная амплитуда в момент $t = 0$ ($r = R$) и предполагается величиной очень малой в сравнении с длиной волны. С другой стороны, примем начальную скорость возмущения равной нулю, т. е.

$$v_r(R) = - \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{r=R} = 0. \quad (39)$$

Условия (38) и (39) позволяют определить постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Система уравнений, определяющая C_1 и C_2 , получается, таким образом, в виде

$$\begin{aligned} C_1 I_3(\nu_0) + C_2 K_3(\nu_0) &= 0, \\ - \frac{4}{3} \frac{R^{3/2}}{n^4} \left\{ \nu_0 [C_1 I_3(\nu_0) + C_2 K_3(\nu_0)] - \frac{3}{2} [C_1 I_3(\nu_0) + C_2 K_3(\nu_0)] \right\} &= \alpha_0, \end{aligned} \quad (40)$$

где через ν_0 обозначено

$$\nu_0 = 2 \sqrt{\frac{6\pi}{m}} \cdot \left(\frac{R}{z_0} \right)^{1/2} = 2 \sqrt{6\pi \cdot \frac{R}{\lambda}}. \quad (41)$$

Отсюда находим:

$$C_1 = -A(\nu_0) \frac{3}{4} \frac{n^4}{R^{3/2}} \frac{\alpha_0}{\nu_0}, \quad (42)$$

$$C_2 = B(\nu_0) \frac{3}{4} \frac{n^4}{R^{3/2}} \frac{\alpha_0}{\nu_0}, \quad (43)$$

где через $A(\nu_0)$ и $B(\nu_0)$ обозначены:

$$A(\nu_0) = \frac{K_3(\nu_0)}{I_3(\nu_0)K_3(\nu_0) - I_3(\nu_0)K_3(\nu_0)}, \quad (44)$$

$$B(\nu_0) = \frac{I_3(\nu_0)}{I_3(\nu_0)K_3(\nu_0) - I_3(\nu_0)K_3(\nu_0)}. \quad (45)$$

Подставляя (42) и (43) в (35), получим для уравнения поверхности наружной границы оболочки следующее выражение

$$\eta(x, r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[q_1(r) - q_2(r) \right] \cos kx, \quad (46)$$

где для краткости обозначены:

$$q_1(r) = A(v_0)I_3(v) - B(v_0)K_3(v); \quad (47)$$

$$q_2(r) = \frac{3}{2} \left[A(v_0)I_3(v) - B(v_0)K_3(v) \right] \frac{1}{v_0} \left(\frac{R}{r} \right)^{1/2}. \quad (48)$$

Уравнение (46) есть уравнение гармоничной, но не периодической волны. Нас интересует, конечно, не абсолютное, а относительное значение приращения амплитуды волны с течением времени, т. е. при расширении оболочки. Поэтому, для относительной амплитуды $\delta(r)$, которую будем называть „коэффициентом неустойчивости“, имеем по (46) (приняв в нем $x = 0$):

$$\delta(r) = \frac{\eta(0, r)}{\alpha_0} = \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[q_1(r) - q_2(r) \right], \quad (49)$$

причем R определяется из (22'):

$$R = \left(\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\rho_c}{M_0} \right)^{-1/3}. \quad (50)$$

В уравнение (46) входит через m неизвестное k . В обычных задачах гидромеханики, связанных с изучением волновых движений жидкостей, это неизвестное определяют из того условия, что известна величина первоначального импульса. В нашем случае величина этого импульса не поддается определению. Это является, между прочим, одной из трудностей задачи. Выход из этого положения можно найти, подойдя к этому вопросу с другой точки зрения.

Хотя нам не известна величина первоначального импульса, все же известно *следствие* этого импульса, а именно, образование волны с очень малой амплитудой. Иначе говоря, нам известен порядок отношения длины волны к ее амплитуде. Это и является исходным пунктом для определения постоянной k .

Итак, первоначальную амплитуду α_0 , мы предполагаем величиной очень малой по отношению к длине волны. Другими словами, мы наперед зададим такое отношение между λ и α_0 , при котором поверхность можно было бы принять невозмущенной, т. е. практически лишенной волнообразности. Обозначая это отношение через m , можем написать:

$$m = \frac{\lambda}{\alpha_0}, \quad (51)$$

или

$$k = \frac{2\pi}{m\alpha_0}, \quad (52)$$

где m можно взять, например, равным 10—20.

Выражения (38), (39) и (51) фактически являются начальными условиями нашей задачи.

В формулах (44)—(49) входит, через v_0 , безразмерная величина $\frac{R}{\lambda}$, т. е. отношение радиуса туманности к длине волны. Мы можем

задавать разные значения $\frac{R}{\lambda}$ („начальное отношение“), например, 1, 5, 10 и т. д. и определить соответственные значения коэффициента неустойчивости. Чем больше отношение $\frac{R}{\lambda}$, тем больше будет количество волн, помещающихся по длине окружности, т. е. тем меньше будет длина волны.

Теперь переходим к численному вычислению коэффициента неустойчивости $\delta(r)$, даваемого формулой (49). Для этого сперва нужно вычислить величины функций $q_1(r)$ и $q_2(r)$ с помощью формул (47) и (48) для различных значений аргумента. Значения производных от бесселевых функций $I_3(v)$ и $K_3(v)$, входящих в эти формулы, вычисляются по известным соотношениям:

$$I_3'(v) = I_4(v) + \frac{3}{v} I_3(v), \quad (53)$$

$$K_3'(v) = -K_4(v) + \frac{3}{v} K_3(v). \quad (54)$$

Значения же самых бесселевых функций можно брать из таблиц. Однако при больших значениях аргумента (порядка 10 и больше) можно использовать асимптотические выражения бесселевых функций, обладающих, помимо простоты формы, тем свойством, что значения функций слабо зависят от ее индекса. Асимптотические формулы бесселевых функций мнимого аргумента с точностью до третьего члена ряда имеют следующий вид;

$$I_n(v) = e^v \sqrt{\frac{1}{2\pi v}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8v} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8v)^2} \right], \quad (55)$$

$$K_n(v) = e^{-v} \sqrt{\frac{\pi}{2v}} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1! 8v} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2! (8v)^2} \right]. \quad (56)$$

Для примера были произведены конкретные вычисления для трех значений постоянного $\frac{R}{\lambda}$, а именно, 1, 5, и 10 (чему соответствует количество волн, помещающихся на длине окружности туманности, равное приблизительно 6, 30 и 60 соответственно). Определяя сперва v_0 по формуле (41), были вычислены значения постоянных $A(v_0)$ и $B(v_0)$ по формулам (44) и (45) для каждого случая отдельно. Постоянные r взяты в единицах R ($\frac{r}{R} = 1$ в момент $t = t_0$).

После этого по формуле (49) были вычислены значения коэффициента неустойчивости $\delta(r)$ при различных размерах оболочки (т. е. в различных моментах расширения). Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1

$\frac{r}{R}$	$\delta(r)$		
	$\frac{R}{\lambda}=1$	$\frac{R}{\lambda}=5$	$\frac{R}{\lambda}=10$
1	1	1	1
1,25	2	6	19
1,5	6	68	376
1,75	18	576	8660
2	60	4196	129200

Как видно из таблицы 1, коэффициент неустойчивости сильно растет с увеличением размеров оболочки после ее выхода из сферы, радиус которой равен R . Уже при двукратном увеличении размеров первоначальная амплитуда поверхностной „волны“ увеличивается в несколько тысяч раз. Иначе говоря, при принятых значениях постоянных, амплитуда, или глубина волны, получается даже больше ее длины. Такое сильное увеличение амплитуды, понятно, должно привести к раздроблению наружной границы оболочки, и в дальнейшем к полному разрушению последней.

Заметим, что устойчивость оболочки сильно зависит от того, каким было взято отношение $\frac{R}{\lambda}$. Чем больше это отношение, т. е. чем меньше длина волны, тем быстрее теряет оболочка свою устойчивость.

Формула (49) применима для всякой оболочки. В тех случаях, когда δ не превосходит единицу значительно, оболочка будет устойчивой. Когда же δ становится достаточно больше единицы, оболочка будет неустойчивой; ее поверхность принимает очень сильно выраженную волнообразную форму, дальнейшее усиление которой приводит, для реальных оболочек, к разрыву и распаданию на части. Тем самым теряется первоначальная форма оболочки.

Коэффициент при $\left(\frac{r}{R}\right)^2$ в формуле (49) всегда больше единицы; минимальное его значение равно 1 (первый член в квадратных скобках представляет собой возрастающую функцию от аргумента γ , второй член также возрастает, но медленнее). Иначе говоря, мы можем выражение

$$\delta(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (57)$$

принять в качестве нижней границы значения коэффициента неустойчивости. В некоторых случаях вопрос о неустойчивости оболочки может быть разрешен путем вычисления только этой нижней границы.

Комбинируя формулы (50), (24) и (20), получим для приближенной формулы коэффициента неустойчивости как функции массы оболочки, плотности межзвездной среды, скорости расширения и времени, следующее выражение:

$$\delta(t) = 2 \sqrt{v_0 \left(\frac{4\pi \rho_c}{3 M_0} \right)^{1/2} t}, \quad (58)$$

причем $t > t_0$. Напомним, что t_0 есть промежуток времени, в течение которого оболочка расширяется до радиуса R , после чего начинается нарушение ее устойчивости. В течение всего этого времени она остается в пределах сферы устойчивости. Поэтому целесообразно (58) написать в виде:

$$\delta(t) = 2 \sqrt{v_0 \left(\frac{4\pi \rho_c}{3 M_0} \right)^{1/2} (t_0 + t)}, \quad (59)$$

где t уже считается с момента выхода оболочки из границы сферы устойчивости. В частности, когда $t = 0$, имеем $\delta(0) = 1$, т. е. на самой границе она еще устойчива. Поэтому перепишем (59) в следующем виде:

$$\delta^2(t) = 1 + 4 v_0 \left(\frac{4\pi \rho_c}{3 M_0} \right)^{1/2} t. \quad (59')$$

Из (59') видно, что, во-первых, оболочка тем устойчивее, чем меньше скорость ее расширения; во-вторых, массивные оболочки более устойчивы в сравнении с оболочками небольшой массы. В-третьих, устойчивость уменьшается с увеличением плотности межзвездной среды. Однако влияние этих последних двух факторов не особенно сильно, так как эти величины входят под кубический корень. Наконец, для данной комбинации параметров v_0 , ρ_c и M_0 устойчивость падает пропорционально корню от времени.

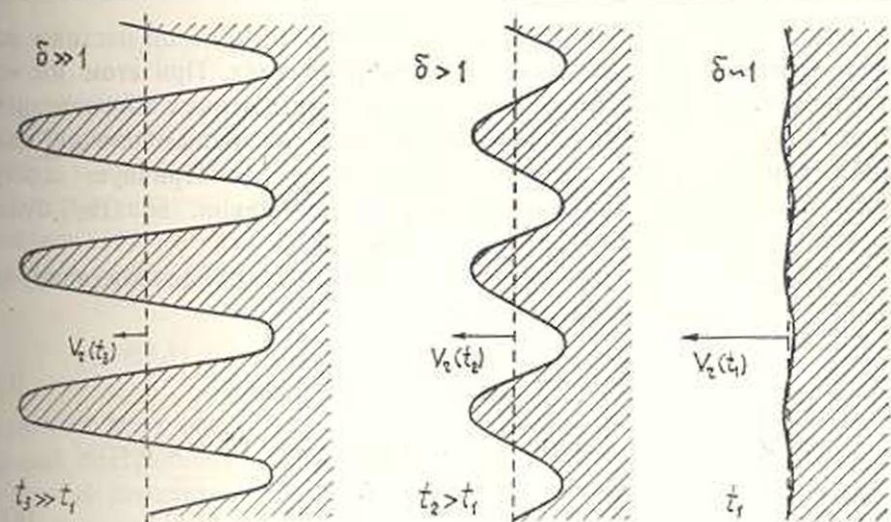
Подставляя значение k из (52) в (46) получим окончательно следующее уравнение для поверхности наружной границы оболочки:

$$\eta(x, r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[q_1(r) - q_2(r) \right] \cos \frac{2\pi x}{m \alpha_0}. \quad (60)$$

На фиг. 3 схематично показано развитие волны по времени или по r , вычисленное по формуле (60) (в произвольных единицах параметров и радиуса или времени). Одновременно указан порядок величины коэффициента неустойчивости δ для каждого случая отдельно.

Итак, всякая оболочка, если она после выброса была устойчива, остается приблизительно устойчивой до расстояния R , даваемого формулой (50), или же до момента времени t_0 , равного приблизительно $\frac{v_0}{R}$. Начиная с этого расстояния устойчивость нарушается, т. е. уве-

личивается δ , вследствие чего появляется волнообразность, которая при достаточно больших t усиливается экспоненциальным образом от радиуса. Таким образом, для каждой оболочки имеется некоторая область, которую будем называть „сферой устойчивости“, радиус которой равен R . В пределах этой сферы оболочка устойчива, а вне — неустойчива.



Фиг. 3.

В устойчивости формы оболочки очень большую роль играет, кроме сопротивления среды, еще один фактор. Дело в том, что в рассмотренном вопросе значительную роль могут играть процессы расширения газовых масс, скорость которых пропорциональна термической скорости частиц газа. Роль этих процессов заключается в следующем. Вследствие сопротивления среды, как мы видели, образуются волны или прожилки на наружной границе оболочки. Однако, поскольку мы рассматриваем газовую оболочку, то вследствие термических движений частиц газа может иметь место расширение прожилков. При значительном расширении соседние прожилки могут, соприкасаясь в своих нижних и средних частях друг с другом, слиться и в результате этого до некоторой степени восстановится правильная форма оболочки, т. е. уменьшится коэффициент неустойчивости. Степень восстановления зависит от продолжительности процесса расширения.

Учет упомянутого фактора в устойчивости формы газовых оболочек представляет собой совершенно отдельную задачу, на которой здесь останавливаться не будем.

§ 3. Трехмерная задача

Выше была рассмотрена двумерная задача, т. е. когда делается допущение возможности движения частицы только по двум направлениям — по x и по y . Полученная таким образом волнообразная поверхность имела в третьем направлении бесконечную протяженность. Это равносильно допущению, что первоначальный импульс, приводящий к возмущению поверхности, распределен в прямоугольном отрезке, имеющем в одном направлении бесконечную длину.

В действительности, однако, импульсы действуют в пределах некоторой замкнутой области, контур которой приблизительно можно

принять за окружность. Под влиянием этих импульсов частицы могут получать перемещение во всех направлениях. При этом мы можем принять, что характер движения частицы в двух направлениях, перпендикулярных к направлению общего движения оболочки, одинаков. Иначе говоря, мы рассматриваем осесимметричную задачу. Полученная же поверхность области возмущения, понятно, будет представлять собой поверхность вращения.

Уравнение непрерывности при сделанных предположениях запишется в следующей форме:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (61)$$

Если перейти к функции Φ , то вместо (61) будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0. \quad (61')$$

Остальные же уравнения (граничные условия), т. е. выражения (12), (13) и (14) сохраняют свою силу.

Решение, удовлетворяющее уравнению (61'), имеет следующую форму:

$$\Phi(x, y, t) = [a(t)I_0(kx) + b(t) \cdot K_0(kx)] [A(t)e^{-ky} + B(t) \cdot e^{ky}], \quad (62)$$

где $I_0(kx)$ — бесселева функция нулевого порядка, $K_0(kx)$ — бесселева функция нулевого порядка и второго рода. Остальные величины имеют свои прежние значения.

Условие (13) дает

$$A(t) = 0.$$

Условие же (14) дает

$$a(t) [I'_0(kx)]_{x=0} + b(t) [K'_0(kx)]_{x=0} = 0,$$

или, поскольку

$$I'_0(kx) \sim \frac{\partial I_0(kx)}{\partial x} = -I_1(kx) \cdot k,$$

$$K'_0(kx) \sim -\frac{\partial K_0(kx)}{\partial x} = -K_1(kx) \cdot k,$$

получим:

$$a(t) [I_1(kx)]_{x=0} + b(t) [K_1(kx)]_{x=0} = 0.$$

Но $I_1(0) = 0$, $K_1(0) = \infty$. Поэтому в результате применения условия (14) находим, как и раньше

$$b(t) = 0.$$

Решение (62) тогда примет следующую форму:

$$\Phi(x, y, t) = a_0(t) e^{-ky} I_0(kx). \quad (63)$$

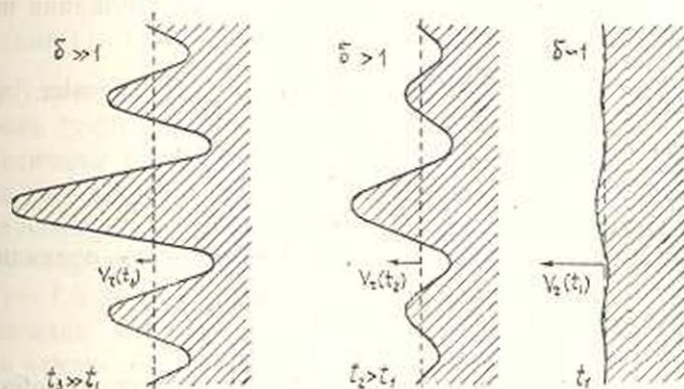
Наконец, воспользовавшись условием (12), получим для функции $a_0(t)$ то же самое дифференциальное уравнение (17) или (28). Поэтому окончательно для определения потенциала скоростей $\Phi(x, y, t)$ будем иметь:

$$\Phi(x, y, t) = r^{-3/2} [C_1 I_2(\nu) + C_2 K_3(\nu)] e^{-ky} I_0(kx). \quad (64)$$

Это выражение отличается от (34) только тем, что там поверхность определялась функцией $\cos kx$, а теперь — функцией $I_0(kx)$. Благодаря этому коэффициент неустойчивости, даваемый формулой (60) для двумерного случая, сохраняет свою силу и в этом случае. Разница заключается только в форме поверхности центрального сечения, которая в этом случае имеет вид:

$$\eta(x, r) = \alpha_0 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \left[q_1(r) - q_2(r) \right] I_0 \left(\frac{2\pi}{m} \frac{x}{\alpha_0} \right), \quad (65)$$

где все величины имеют свои прежние значения. Схематическая форма центрального сечения этой поверхности для произвольных значений параметров приведена на фиг. 4. Сама же поверхность представляет собой поверхность вращения и получается вращением этого сечения вокруг центральной оси.



Фиг. 4.

§ 4. Об учете сжимаемости жидкости

Движения газовых масс в космических объектах — межзвездной среде, диффузных и планетарных туманностях, атмосферах звезд и т. д. — происходят с колоссальной скоростью, порядка нескольких десятков и даже нескольких сот км/сек. В большинстве случаев эти скорости превосходят скорость звука в данной среде. В связи с этим необходимо учитывать также эффект сжимаемости. В некоторых случаях, когда среда обладает плотностью, по порядку величины сравнимой с плотностью движущейся через эту среду газовой массы, приходится учитывать также возможное влияние ударных волн.

В рассмотренном нами случае газовые оболочки движутся со скоростью порядка нескольких десятков км/сек в случае планетарных туманностей и порядка тысячи км/сек в случае оболочек новых звезд. Скорость звука в планетарных туманностях порядка 20 км/сек,

в оболочке новых звезд—несколько больше*. Таким образом, движение оболочек происходит в действительности со скоростью порядка или больше скорости звука. В силу этого приходится учитывать сжимаемость газа.

Однако нетрудно убедиться, что в рассматриваемой нами задаче устойчивости газовых оболочек скорость движения самой оболочки не имеет значения. Нас интересует не движение самой оболочки в целом, а развитие первоначального возмущения. Поэтому можем утверждать, что до тех пор, пока скорость развития возмущения остается меньше скорости звука, влиянием эффекта сжимаемости можно пренебречь.

Скорость возмущения по y -координате определяется следующим образом:

$$v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}. \quad (66)$$

Подставляя сюда значение Φ из (34), а также имея в виду выражения (42)—(45) и (48), получим для скорости возмущения на поверхности оболочки ($y=0$):

$$v_y = r^{-3/2} \frac{3}{4} \left[A(v_0) I_3(v) - B(v_0) K_3(v) \right] \frac{n^4}{R^{3/2}} \frac{\alpha_0}{v_0} k \cdot \cos kx.$$

или, сравнивая с (48), получим:

$$v_y = q_2(r) \frac{n^4}{R^2 r} \frac{\pi}{m} \cos kx. \quad (67)$$

Усредненная по одной полуволне величина скорости, очевидно, будет:

$$\bar{v}_y = q_2(r) \frac{n^4}{R^2 r} \frac{\pi}{m} \overline{\cos kx}. \quad (68)$$

Отсюда, подставляя $\overline{\cos kx} = \frac{1}{2}$, после некоторых преобразований, учитывая (25) и (29), получим:

$$\bar{v}_y = q_2(r) \frac{2v_0}{\sigma R^3} \frac{R}{r} \frac{\pi}{m}. \quad (69)$$

Но, по условию, $\sigma R^3 = 1$ (формула (22')). Поэтому

$$\bar{v}_y = v_0 \frac{2\pi}{m} \frac{R}{r} q_2(r), \quad (70)$$

или

$$\frac{\bar{v}_y}{v_0} = \frac{2\pi}{m} \frac{R}{r} q_2(r), \quad (71)$$

где v_0 —скорость движения оболочки.

В первоначальный момент, т. е. когда $r=R$, имеем: $q_2(R)=0$ и следовательно, $\bar{v}_y=0$. С возрастанием r возрастает отношение $\frac{\bar{v}_y}{v_0}$.

* Скорость звука определяется формулой $c = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, где T —температура среды, m —масса частицы, k —постоянная Больцмана.

В таблице 2 приведены вычисленные по формуле (71) значения $\frac{\bar{v}_y}{v_0}$ для случая $m=20$ и для различных значений $\frac{R}{\lambda}$ и расстояний $\frac{r}{R}$.

Выше и левее от жирной линии $\frac{\bar{v}_y}{v_0}$ меньше единицы. В среднем, уже

Таблица 2

$\frac{r}{R}$	$\frac{\bar{v}_y}{v_0}$		
	$\frac{R}{\lambda}=1$	$\frac{R}{\lambda}=5$	$\frac{R}{\lambda}=10$
1	0	0	0
1,25	0,09	0,17	0,27
1,5	0,19	0,95	3,5
1,75	0,46	4,8	
2	0,60		

на расстоянии $r=1,5R$ отношение $\frac{\bar{v}_y}{v_0}$ получается порядка единицы.

Это значит, что скорость развития возмущения, например, в случае планетарных туманностей ($v_0 \sim 20-30$ км/сек) уже при $r=1,5R$ достигает величины порядка скорости звука, а в случае оболочек новых звезд ($v_0 \sim 1000$ км/сек) она превосходит скорость звука. В силу этого, полученные в предыдущих параграфах количественные результаты будут справедливы для планетарных туманностей до расстояний порядка $r=1,5R$, а в случае оболочек новых звезд — для еще меньших расстояний. Качественно же картина существенно не меняется, так как в случае сверхзвукового движения также будет иметь место развитие неустойчивости, но уже с другой скоростью. Мы не будем рассматривать случай сверхзвукового движения, так как хотя он и может представлять значительный интерес, но качественно это ничего нового не может прибавить ко всему уже полученному. Для нас достаточно было доказать, что во время движения оболочек их устойчивость должна теряться. Соответственно этому были получены количественные характеристики подобного рода нарушения устойчивости до того момента, когда скорость возмущения остается меньшей скорости звука. Очевидно, потерянная устойчивость не может быть восстановлена ввиду того, что скорость возмущения превзойдет скорость звука.

Более важное значение имеет следующее обстоятельство. Как видно из формулы (71), скорость возмущения непрерывно растет с увеличением r . На бесконечности v_y также становится бесконечной. Это, конечно, невозможно: на бесконечности, вообще, скорость движения оболочки равна нулю (в нашей схеме задачи, т. е. без учета притяжения центральной звезды). В действительности сначала скорость возмущения должна увеличиваться с расстоянием. Однако, на-

чина с определенного момента она должна уменьшаться, стремясь к нулю. Между тем формула (71) не удовлетворяет второму из этих условий. Причина этого заключается в следующем. При выводе наших формул (§ 2), вернее, при выводе функции потенциала скоростей $\Phi(x, y, t)$, мы сделали допущение о малости возмущений, вследствие чего полученное выражение функции $\Phi(x, y, t)$ будет правильным только при небольших значениях η . Соответственно этому допущению при выводе формулы (10) принято

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(x, 0, t). \quad (72)$$

Это условие ограничивает применение полученных результатов на больших расстояниях, т. е. для больших y -ов (или же при больших η — на поверхности).

Точное решение задачи при больших возмущениях (большие η) связано с непреодолимыми пока трудностями. Для примера рассмотрим второе приближение. Разлагая функцию $\Phi(x, \eta, t)$ в ряд Тейлора, получим:

$$\Phi(x, \eta, t) = \Phi(x, 0, t) + \eta \frac{\partial \Phi(x, 0, t)}{\partial y}. \quad (73)$$

Подставляя это в (7) или в (9), получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \eta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - g_c(t) \cdot \eta = 0. \quad (74)$$

Но на поверхности имеет место условие (11), т. е.

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Поэтому будем иметь из (76):

$$\eta = \frac{\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right|}{\left| g_c(t) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t} \right|_{y=0}}. \quad (75)$$

Один только вид этой функции исключает всякие надежды на решение задачи хотя бы даже во втором приближении для больших η . Решение задачи уже в первом приближении дает достаточно ясное представление о поведении расширяющейся оболочки, а качественные результаты находятся в хорошем согласии с наблюдениями.

В заключение отметим, что скорости расширения различных частей разрушающейся оболочки, в силу всего сказанного, должны быть различными. В самом деле, выступы (прожилки) должны иметь несколько большую скорость, чем скорость расширения самой оболочки. Если v_0 есть скорость оболочки, то скорость выступов (прожилков) v_1 должна быть

$$v_1 = v_0 + \left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| > v_0. \quad (76)$$

В случае Крабовидной туманности, например, это и наблюдается. Согласно измерениям Дункана, Мейелла и других [4, 5], скорость расширения оболочки порядка $v_0 = 1050$ км/сек, между тем скорость эрозилок несколько больше и равна $v_0 = 1300$ км/сек.

Бюраканская астрофизическая обсерватория

АН Армянской ССР

Поступило 3 XII 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Lewis D. Proc. Roy. Soc. A, 202, 81, 1950.
2. Taylor G. Proc. Roy. Soc. A, 201, 192, 1950.
3. Problems of Cosmical Aerodynamics, p. 31, Dayton (1951).
4. Duncan J. Ap. J. 89, 482, 1939.
5. Mayall N. P. A. S. P. 49, 103, 1937.

Գ. Ս. Գուրգադյան

ԱՍՏՂԵՐԻ ԴՈՒՐՍ ՆԵՏՎԱԾ ԳԱԶԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԶԵՎԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Մ. Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Աստղերի դուրս նետված դազային թաղանթների շարժումը (լայնացումը) ընդհանուր դեպքում տեղի է ունենում աստղը շրջապատող միջատառային դազի կամ փոշու դիմադրող միջավայրում: Միջավայրի դիմադրության փաստը բերում է այն բանին, որ տվյալ հատկանիշներն ունեցող թաղանթը որոշ մոմենտից սկսում է կորցնել իր սկզբնական կանոնավոր ձևը: Այս դեպքում թաղանթի արտաքին շերտում առաջանում է ալիքավորություն, որի ամպլիտուդան, ժամանակի ընթացքում արագորեն աճելով, բերում է թաղանթի լրիվ քայքայմանը: Խնդիրը հետևյալն է. գտնել թաղանթի ձևի կայունության աստիճանի կապը թաղանթի և միջավայրի ֆիզիկական հատկանիշների հետ: Ներկա հոգվածում բերված է այդ խնդրի լուծումը՝ ընդհանուր դեպքի համար:

Թաղանթի ձևի կայունությունը բնորոշելու համար մտցված է «անկայունության գործակից» (δ) հասկացողությունը, որը հանդիսանում է ալիքավորման տվյալ մոմենտի ամպլիտուդայի և սկզբնական ամպլիտուդայի հարաբերությունը: Եթե $\delta \sim 1$, ապա թաղանթը կայուն է, եթե $\delta > 1$, թաղանթն սկսում է կորցնել իր կայունությունը, իսկ եթե $\delta \gg 1$, ապա թաղանթն ամբողջությամբ կորցնելով իր կանոնավոր ձևը, վեր է ածվում անկանոն զանգվածի: Բացի դրանից, ցույց է տրված, որ յուրաքանչյուր տիպի թաղանթի և միջավայրի համար գոյություն ունի հատուկ միջավայր, որին տրված է «կայունության ոլորտ» անվանումը: Դրա ֆիզիկական իմաստը հետևյալն է. քանի դեռ թաղանթը գտնվում է այդ ոլորտի սահմաններում, նա կայուն է, Հենց որ նա դուրս է գալիս այդ ոլորտից, նրա ձևն սկսում է աղճատվել ու քայքայվել: Կայունության ոլորտի շառավիղը կախված է թաղանթի զանգվածի մեծությունից և դիմադրող միջավայրի խտությունից:

Ստացված տեսական արդյունքները հնարավորություն են տալիս լուծելու գաղափարն թաղանթների և միջատաղային նյութի ուսումնասիրության հետ կապված մի ամբողջ շարք խնդիրներ: Բացի դրանից, բոլորովին նոր հնարավորություն է ընձեռվում մոլորակած և միգամածությունների առաջացման, ինչպես և դրանում նոր աստղերի ունեցած գերի հարցը պարզելու համար: Նախատեսվում է այդ խնդիրների վրա կանգ առնել առանձին:

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Л. Б. Бунятян

Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала

1. В работе рассматривается устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала исходя из теории В. З. Власова [1], а именно принимается, что:

- а) контур сечения недеформируемый;
- б) деформации сдвига срединной поверхности равны нулю;
- в) модуль упругости материала меняется во времени, т. е.

$$E = E(t);$$

г) мера ползучести материала подчиняется закону [2]:

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \quad (1.1)$$

где $\varphi(\tau)$ — монотонно убывающая функция,

τ — возраст материала,

t — время,

γ — некоторая физическая постоянная материала;

д) коэффициенты Пуассона для упругой и ползучей части деформаций равны друг другу, т. е.

$$\nu_1(\tau) = \nu_2(t, \tau) = \nu = \text{const.};$$

е) деформации и напряжения материала стержня подчиняются уравнениям теории ползучести, предложенным Н. Х. Арутюняном [2].

Для двухосного напряженного состояния эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1(t) &= \frac{\sigma_1(t) - \nu \sigma_2(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \left[\sigma_1(\tau) - \nu \sigma_2(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau, \\ \varepsilon_2(t) &= \frac{\sigma_2(t) - \nu \sigma_1(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^t \left[\sigma_2(\tau) - \nu \sigma_1(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau, \\ \gamma_{1,2}(t) &= 2 \left\{ \frac{(1 + \nu) \tau_{1,2}(t)}{E(t)} - (1 + \nu) \int_{\tau_1}^t \tau_{1,2}(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

где $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$ — относительные удлинения стержня в продольном и поперечном направлениях, $\gamma_{1,2}(t)$ — деформация сдвига, а $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$ и $\tau_{1,2}(t)$ — соответствующие нормальные и касательные напряжения, $C(t, \tau)$ определяется соотношением (1.1).

В силу гипотезы о недеформируемости контура $\varepsilon_2(t) = 0$, поэтому:

$$\sigma_2(t) - \nu \sigma_1(t) = 0, \text{ или } \sigma_2(t) = \nu \sigma_1(t). \quad (1.3)$$

Учитывая (1.3), уравнение (1.2) можно записать в форме

$$\varepsilon(t) = \frac{(1-\nu^2)\sigma(t)}{E(t)} - (1-\nu^2) \int_{\tau_1}^t \sigma(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (1.4)$$

Дифференцируя уравнение (1.4) дважды по t и пользуясь соотношением (1.1), после некоторых преобразований получим:

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \gamma \dot{\varepsilon}(t) = \left[\frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E(t)} \right] + f(t) \frac{\dot{\sigma}_1(t)}{E(t)}, \quad (1.5)$$

$$\text{где } f(t) = \gamma[1 + \varphi(t)E(t)], \quad \sigma_1(t) = (1 - \nu^2)\sigma(t). \quad (1.6)$$

Решение уравнения (1.5) будет:

$$\sigma_1(t) = \frac{E(t)}{1-\nu^2} \varepsilon(t) + \int_{\tau_1}^t \frac{\varepsilon(\tau)}{1-\nu^2} R(t, \tau) d\tau, \quad (1.7)$$

где $R(t, \tau)$ есть резольвента ядра

$$K(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E(\tau)} + \varphi(\tau) \left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right] \right\}. \quad (1.8)$$

Преобразуем третье из уравнений (1.2) учитывая, что при чистом кручении имеют место соотношения

$$H = G I_d \theta', \quad \tau_{xz} = \frac{H \psi(x, y)}{I_d} \text{ и } \gamma_{xz} = \psi(x, y) \theta', \quad (1.9)$$

где H — крутящий момент, I_d — момент инерции при чистом кручении, равный для тонкостенных профилей $I_d = \frac{\alpha}{3} \Sigma h \delta^3$ (h — ширина грани профиля, δ — его толщина, а α — эмпирический коэффициент), $\psi(x, y)$ — некоторая функция от координат точек сечения и θ' — производная от угла закручивания по z .

Подставляя (1.9) в уравнение (1.2), получим:

$$\theta'(t) = \frac{2(1+\nu)H(z, t)}{E(t)} - \frac{2(1+\nu)}{I_d} \int_{\tau_1}^t H(z, \tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau. \quad (1.10)$$

Решая это уравнение относительно $H(t)$, получим:

$$H(t) = G(t)I_d \theta'(t) + I_d \int_{\tau_1}^t \frac{\theta'(\tau)}{2(1+\nu)} R(t, \tau) d\tau. \quad (1.11)$$

Выражения (1.10) и (1.11) удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\ddot{\theta}(t) + \gamma \dot{\theta}(t) = \left[\frac{\dot{H}(t)}{G(t)} \right] + f(t) \frac{H(t)}{G(t)}, \quad (1.12)$$

где
$$G(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}.$$

2. *Интегро-дифференциальные уравнения устойчивости тонкостенного стержня открытого профиля с учетом ползучести материала.* Пусть по концам тонкостенного стержня с открытым профилем приложены продольные силы N и моменты M .

Следуя В. З. Власову [1], уравнения устойчивости стержня с учетом ползучести материала в этом случае могут быть написаны в виде:

$$\left. \begin{aligned} E_1(t)I_y \xi^{IV}(t) + I_y \int_{\tau_1}^t \frac{\xi^{IV}(\tau)}{1-\nu^2} R(t, \tau) d\tau + N \xi''(t) + (M_x + a_y N) \theta''(t) &= 0, \\ E_1(t)I_x \eta^{IV}(t) + I_x \int_{\tau_1}^t \frac{\eta^{IV}(\tau)}{1-\nu^2} R(t, \tau) d\tau + N \eta''(t) + (M_y - a_x N) \theta''(t) &= 0, \\ E_1(t)I_m \theta^{IV}(t) + I_m \int_{\tau_1}^t \frac{\theta^{IV}(\tau)}{1-\nu^2} R(t, \tau) d\tau - G(t)I_d \theta''(t) - \\ - I_d \int_{\tau_1}^t \frac{\theta''(\tau)}{2(1+\nu)} R(t, \tau) d\tau + (M_x + a_y N) \xi''(t) + (M_y - a_x N) \eta''(t) + \\ + (r^2 N + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x) \theta''(t) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

где
$$E_1(t) = \frac{E(t)}{1-\nu^2}.$$

Учитывая (1.11) и (1.12) уравнения (2.1) можно привести к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 E_1(t)I_y \ddot{\xi}^{IV}(t) + \gamma E_1(t)I_y \ddot{\xi}^{IV}(t) + N \ddot{\xi}''(t) + (M_x + a_y N) \ddot{\theta}(t) + \\
 + F(t)[N \ddot{\xi}''(t) + (M_x + a_y N) \ddot{\theta}(t)] = 0, \\
 E_1(t)I_x \ddot{\eta}^{IV}(t) + \gamma E_1(t)I_x \ddot{\eta}^{IV}(t) + N \ddot{\eta}''(t) + (M_x - a_x N) \ddot{\theta}(t) + \\
 + F(t)[N \ddot{\eta}''(t) + (M_y - a_x N) \ddot{\theta}(t)] = 0, \\
 E_1(t)I_{\omega} \ddot{\theta}^{IV}(t) + \gamma E_1(t)I_{\omega} \ddot{\theta}^{IV}(t) - G(t)I_d \ddot{\theta}''(t) - \gamma G(t)I_d \ddot{\theta}''(t) + (M_x + \\
 + a_y N) \ddot{\xi}''(t) + (M_y - a_x N) \ddot{\eta}''(t) + (r^2 N + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x) \ddot{\theta}(t) + \\
 + F(t)[(M_x + a_y N) \ddot{\xi}''(t) + (M_y - a_x N) \ddot{\eta}''(t) + (r^2 N + \\
 + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x) \ddot{\theta}(t)] = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Рассмотрим стержень, у которого перемещения ξ и η и поворот θ в плоскости концевых сечений отсутствуют. В этом случае граничные условия будут:

$$\left. \begin{aligned}
 \text{при } z=0 \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0, \\
 \text{при } z=l \quad \xi = \eta = \theta = 0, \quad \xi'' = \eta'' = \theta'' = 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Условиям (2.3) удовлетворяют функции

$$\left. \begin{aligned}
 \xi(t) &= A(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \\
 \eta(t) &= B(t) \sin \frac{k\pi z}{l}, \\
 \theta(t) &= C(t) \sin \frac{k\pi z}{l},
 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — некоторые функции только от t ($k=1, 2, 3, \dots$).

После подстановки (2.4) в уравнение (2.2) и некоторых преобразований получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 [P_y(t) - N] \ddot{A}(t) + \gamma [P_y(t) - F(t)N] \dot{A}(t) - (M_x + a_y N) \ddot{C}(t) - \\
 - \gamma F(t)(M_x + a_y N) \dot{C}(t) = 0, \\
 [P_x(t) - N] \ddot{B}(t) + \gamma [P_y(t) - F(t)N] \dot{B}(t) - (M_y - a_x N) \ddot{C}(t) - \\
 - \gamma F(t)(M_y - a_x N) \dot{C}(t) = 0, \\
 [r^2 P_{\omega}(t) - r^2 N - 2\beta_x M_y + 2\beta_y M_x] \ddot{C}(t) + \gamma [r^2 P_{\omega}(t) - F(t)(r^2 N + \\
 + 2\beta_x M_y - 2\beta_y M_x)] \dot{C}(t) - (M_x + a_y N) \ddot{A}(t) - \gamma F(t)(M_x + \\
 + a_y N) \dot{A}(t) - (M_y - a_x N) \ddot{B}(t) - \gamma F(t)(M_y - a_x N) \dot{B}(t) = 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где} \quad P_y(t) &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 E_1(t) I_y, \\ P_x(t) &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 E_1(t) I_x, \\ P_\omega(t) &= \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 E_1(t) I_\omega + G I_d \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Рассмотрим решение системы уравнений (2.5) для случаев, когда поперечное сечение стержня: а) имеет две оси симметрии, б) имеет одну ось симметрии, в) не имеет осей симметрии, при центральном приложении продольных сил.

3. *Стержень имеет две оси симметрии поперечного сечения и нагружен центрально-приложенными продольными силами.* Для этого случая имеет $M_x = M_y = 0$, $a_x = a_y = 0$, тогда система уравнений (2.5) распадается на три отдельных уравнения вида

$$\left. \begin{aligned} [P_y(t) - N] \dot{A}(t) + \gamma [P_y(t) - F(t)N] \dot{A}(t) &= 0, \\ [P_x(t) - N] \dot{B}(t) + \gamma [P_x(t) - F(t)N] \dot{B}(t) &= 0, \\ [P_\omega(t) - N] \dot{C}(t) + \gamma [P_\omega(t) - F(t)N] \dot{C}(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Решение первого из уравнений (3.1) будет:

$$A(t) C_1 = \int_{t_1}^t e^{-\gamma \int_{t_1}^t \frac{P_y(t) - F(t)N}{P_y(t) - N} dt} dt, \quad (3.2)$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Два другие уравнения (3.1) будут иметь аналогичное решение.

Примем для устойчивости следующий критерий: *какова бы ни была продолжительность воздействия нагрузки, бесконечно малая деформация, приданная стержню в момент загрузки, должна оставаться ограниченной, т. е. не возрастать во времени.*

Чтобы удовлетворить этому условию показатель степени подинтегрального выражения (3.2) должен быть отрицательным, т. е. должно иметь место неравенство:

$$P_y(t) - F(t)N > 0. \quad (3.3)$$

Действительно, если будет иметь место неравенство (3.3), то знаменатель показателя будет больше нуля, т. е.

$$P_y(t) - N > 0, \quad (3.4)$$

и так как $F(t) > 1$, то и показатель степени e будет отрицательным.

Таким образом, при значении N , удовлетворяющем неравенству (3.3), стержень не потеряет устойчивости.

Если неравенство (3.3) превратится в равенство, т. е.

$$P_y(t) - F(t)N = 0, \quad (3.5)$$

$$\text{то} \quad N_y = \frac{P_y(t)}{F(t)}, \quad (3.6)$$

$$\text{и тогда} \quad A(t) = C_1(t - \tau_1). \quad (3.7)$$

Выражение (3.7) показывает, что если значение приложенной продольной силы N будет изменяться по закону (3.6), то деформация стержня с возрастанием продолжительности действия нагрузки будет расти, т. е. стержень с течением времени будет терять устойчивость. Значение этой силы будем называть *критической силой длительной устойчивости*.

При равенстве нулю знаменателя показателя степени подинтегрального выражения (3.2), т. е.

$$P_y(t) - N = 0, \text{ или } N = P_y(t), \quad (3.8)$$

деформация стержня $A(t)$ мгновенно становится бесконечно большой, т. е. стержень мгновенно теряет устойчивость. Действительно, при (3.8) числитель показателя степени будет:

$$P_y(t) - F(t)N = P_y(t)[1 - F(t)] < 0, \quad (3.9)$$

так как всегда $F(t) > 1$, и при условии (3.8) будет бесконечно большим.

Значение продольной силы, определенное из условия (3.8), будем называть *критической силой мгновенной устойчивости*.

Таким образом, критические силы длительной устойчивости для стержня будут:

$$\left. \begin{aligned} N_x &= - \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t) I_x}{1 + \varphi(t)E(t) - \frac{E'(t)}{\gamma E(t)}}, \\ N_y &= - \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t) I_y}{1 + \varphi(t)E(t) - \frac{E'(t)}{\gamma E(t)}}, \\ N_z &= - \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1(t) I_z + G(t) I_d}{\left[1 + \varphi(t)E(t) - \frac{E'(t)}{\gamma E(t)}\right] r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

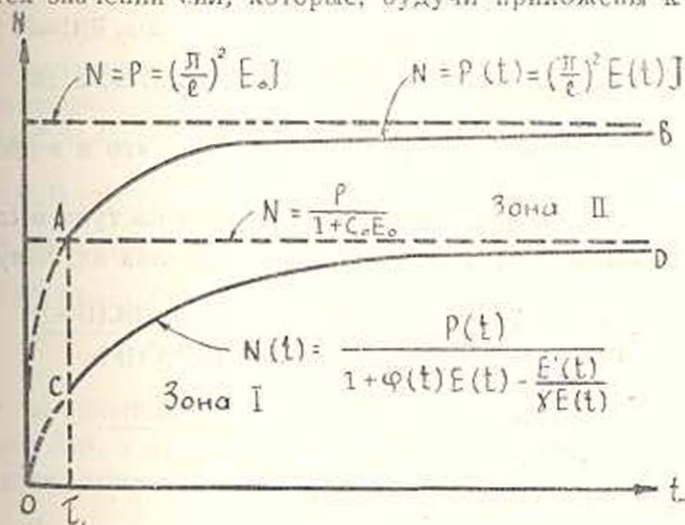
причем расчетной будет наименьшая из них.

Критические силы мгновенной устойчивости в зависимости от возраста материала будут:

$$\left. \begin{aligned} P_x(t) &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 E_1(t) I_x, \\ P_y(t) &= \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 E_1(t) I_y, \\ P_\omega(t) &= \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\pi}{l} \right)^2 E_1(t) I_\omega + G(t) I_d \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Из анализа выражений (3.10) и (3.11) следует, что возраст материала существенно влияет на значение критической силы.

На фиг. 1 приведен график изменения критической силы длительной устойчивости в зависимости от возраста материала по формуле (3.10) и кривая изменения мгновенной критической силы по формуле (3.11). Кривая $N(t)$ разбивает область мгновенной устойчивости $\tau_1 AB$ на две зоны. Зона I — $\tau_1 CD$ представляет собою всё многообразие тех значений сил, которые, будучи приложены к стержню,



Фиг. 1.

не вызывают потери его устойчивости при любой продолжительности воздействия. Эту зону назовем *зоной длительной устойчивости*. В этой зоне силы могут меняться во времени по любому закону, лишь бы их значения не переходили границы зоны CD и тогда длительная устойчивость будет обеспечена. Все те значения сил, которые находятся во второй зоне, могут действовать только временно, ибо при их длительном воздействии стержень неминуемо теряет устойчивость, поэтому эту зону будем называть *зоной мгновенной устойчивости* или *зоной неустойчивости*, если речь идет о длительной устойчивости.

Из фигуры 1 видно, что по мере старения материал упрочняется и его несущая способность возрастает и в пределе при $t \rightarrow \infty$, Известия VI, № 2—4

т. е. для старых материалов достигает величин $N_x(\infty) = \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1 I_2}{1 + C_0 E_0}$
и $P_x(\infty) = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 E_1 I_1$ [3].

Особенно сильно влияние возраста материала на значение критической силы длительной устойчивости сказывается в молодом возрасте.

4. *Устойчивость центрально-сжатого стержня, имеющего одну ось симметрии поперечного сечения.* В этом случае в уравнениях (2.5) нужно положить $a_y = 0$ и $M_x = M_y = 0$, тогда уравнения устойчивости примут вид:

$$\left. \begin{aligned} [P_y(t) - N] \dot{A}(t) + \gamma [P_y(t) - F(t)N] \dot{A}(t) &= 0, \\ [P_x(t) - N] \ddot{B}(t) + \gamma [P_x(t) - F(t)N] \ddot{B}(t) + a_x N \ddot{C}(t) + F(t) a_x \dot{C}(t) &= 0, \\ r^2 [P_{xx}(t) - N] \ddot{C}(t) + \gamma [P_{xx}(t) - F(t)N] \ddot{C}(t) + a_x N \ddot{B}(t) + F(t) a_x \dot{B}(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Таким образом, первое уравнение отделится, а два остальные уравнения (4.1) составят систему.

Первое уравнение имеет то же решение, что и в предыдущем случае.

Для решения двух остальных уравнений поступаем следующим образом: исключая $\ddot{B}(t)$ и $\ddot{C}(t)$ из (4.1) и разделив их, получаем:

$$\frac{\ddot{B}(t)}{\ddot{C}(t)} = \frac{\gamma [r^2 (P_{xx} - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2] F(t) \dot{C}(t) +}{[r^2 (P_{xx} - N)(P_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t) +} + \frac{\gamma^2 F^2(t) [r^2 (N_{xx} - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t)}{+ \gamma F(t) [r^2 (N_{xx} - N)(P_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t)} \quad (4.2)$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$\ddot{B}(t) = C_1 \int \left\{ \exp \int - \frac{\gamma [r^2 (P_{xx} - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2] F(t) \dot{C}(t) +}{[r^2 (P_{xx} - N)(P_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t) +} \right. \\ \left. - \frac{\gamma^2 F^2(t) [r^2 (N_{xx} - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t)}{\gamma F(t) [r^2 (N_{xx} - N)(P_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t)} dt \right\} dt. \quad (4.3)$$

Из определения критической силы длительной устойчивости следует, что числитель подынтегрального выражения (4.3) должен равняться нулю, т. е.

$$[r^2 (P_{xx} - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t) + \gamma F(t) [r^2 (N_{xx} - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2] \dot{C}(t) = 0. \quad (4.4)$$

Отделяя переменные в (4.4), после интегрирования, получим:

$$C(t) = C_2 \int_{\tau_1}^t \left\{ \exp \int_{\tau}^t - \frac{F(t) \gamma [r^2(N_\infty - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2]}{r^2(P_\infty - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2} dt \right\} dt. \quad (4.5)$$

В силу условия длительной устойчивости имеем:

$$r^2(N_\infty - N)(N_x - N) - a_x^2 N^2 = 0, \quad (4.6)$$

откуда

$$N_{1,2} = \frac{(N_x + N_\infty)r^2 \pm \sqrt{(N_x - N_\infty)^2 r^4 - 4N_x N_\infty r^2(r^2 - a_x^2)}}{2(r^2 - a_x^2)}, \quad (4.7)$$

где N_x и N_∞ определяются по формулам (3.10).

В этом случае также можно написать связь между критическими силами длительной и мгновенной устойчивости в форме:

$$N_{1,2} = \frac{P_{1,2}}{1 + \tau(t)E(t) - \frac{E'(t)}{\gamma E(t)}}. \quad (4.8)$$

5. Устойчивость центрально-сжатого стержня, не имеющего осей симметрии поперечного сечения. В этом случае, полагая в уравнении (2.5) $M_x = M_y = 0$, получим уравнения устойчивости в виде:

$$\left. \begin{aligned} (P_y - N)\ddot{A}(t) + \gamma[P_y - F(t)N]\dot{A}(t) - a_y N\ddot{C}(t) - \gamma F(t)a_y N\dot{C}(t) &= 0, \\ (P_x - N)\ddot{B}(t) + \gamma[P_x - F(t)N]\dot{B}(t) + a_x N\ddot{C}(t) + \gamma F(t)a_x N\dot{C}(t) &= 0, \\ r^2(P_x - N)\ddot{C}(t) + \gamma r^2[P_\infty - F(t)N]\dot{C}(t) - a_y N\ddot{A}(t) - \gamma F(t)a_y \dot{A}(t) + \\ + a_x N\ddot{B}(t) + \gamma F(t)a_x \dot{B}(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Для решения системы (5.1) из первого и третьего уравнений определяем $\ddot{A}(t)$, а затем $\dot{A}(t)$.

Разделив полученные результаты и интегрируя, получим:

$$A(t) = C_1 \int_{\tau_1}^t \left\{ \exp \int_{\tau}^t - \frac{F(t)M_1(P_\infty, N_y, N)\ddot{C}(t) + F^2(t)M_2(N_\infty, N_y, N)\dot{C}(t) -}{M_3(P_\infty, P_y, N)\ddot{C}(t) + F(t)M_4(N_\infty, P_y, N)\dot{C}(t) -} \right. \\ \left. - \frac{Q_1(N_y, N)F(t)[\ddot{B}(t) - F(t)\dot{B}(t)]}{-Q_2(P_y, N)[\ddot{B}(t) - F(t)\dot{B}(t)]} dt \right\} dt, \quad (5.2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_1(P_\infty, N_y, N) &= r^2(N - P_\infty)(N - N_y) - a_y^2 N^2, \\ M_2(N_\infty, N_y, N) &= r^2(N - N_\infty)(N - N_y) - a_y^2 N^2, \\ Q_1(N_y, N) &= a_x N(N - N_y), \\ M_3(P_\infty, P_y, N) &= r^2(N - P_\infty)(N - P_y) - a_y^2 N^2, \\ M_4(N_\infty, P_y, N) &= r^2(N - N_\infty)(N - P_y) - a_y^2 N^2, \\ Q_2(P_y, N) &= a_x N(N - P_y). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Применяя критерий длительной устойчивости из выражения (5.2), получим:

$$M_1(P_\infty, N_y, N)\ddot{C}(t) + F(t)M_2(N_\infty, N_y, N)\dot{C}(t) - \\ - Q_1(N_y, N)[\ddot{B}(t) - F(t)\dot{B}(t)] = 0. \quad (5.4)$$

Исключая из (5.4) и второго из уравнений системы (5.1) $\ddot{B}(t)$ и $\dot{B}(t)$, после интегрирования находим:

$$B(t) = C_2 \int_{\tau_1}^t \left\{ \exp \int_{\tau}^t - \frac{F(t)M^I(P_\infty, N_x, N_y, N)\dot{C}(t) +}{M^{III}(P_\infty, P_x, N_y, N)\dot{C}(t) +} \right. \\ \left. \frac{+ F^2(t)M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)\dot{C}(t)}{+ F(t)M^{IV}(N_\infty, N_y, P_x, N)\dot{C}(t)} dt \right\} dt, \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } M^I(P_\infty, N_x, N_y, N) &= r^2(N - P_\infty)(N - N_x)(N - N_y) - \\ &- a_y^2 N^2(N - N_x) - a_x^2 N^2(N - N_y), \\ M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N) &= r^2(N - N_\infty)(N - N_x)(N - N_y) - \\ &- a_y^2 N^2(N - N_x) - a_x^2 N^2(N - N_y), \\ M^{III}(P_\infty, P_x, N_y, N) &= r^2(N - P_\infty)(N - P_x)(N - N_y) - \\ &- a_y^2 N(N - P_x) - a_x^2 N(N - N_y), \\ M^{IV}(N_\infty, N_y, P_x, N) &= r^2(N - N_\infty)(N - N_y)(N - P_x) - \\ &- a_y^2 N(N - P_x) - a_x^2 N(N - N_y). \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Пользуясь условием длительной устойчивости из (5.5), получим уравнение, содержащее только функцию $C(t)$:

$$M^I(P_\infty, N_x, N_y, N)\ddot{C}(t) + F(t)M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)\dot{C}(t) = 0, \quad (5.7)$$

интеграл которого есть

$$C(t) = C_3 \int_{\tau_1}^t \left\{ \exp \int_{\tau}^t - \frac{M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N)}{M^I(P_\infty, N_x, N_y, N)} F(t) dt \right\} dt, \quad (5.8)$$

откуда имеем следующее уравнение для определения критической силы длительной устойчивости:

$$M^{II}(N_\infty, N_x, N_y, N) = r^2(N - N_\infty)(N - N_x)(N - N_y) - \\ - a_y^2 N^2(N - N_x) - a_x^2 N^2(N - N_y) = 0. \quad (5.9)$$

В этом уравнении N_∞, N_x, N_y определяются по формулам (3.10).

Таким образом, зная значение критической силы мгновенной

устойчивости, критическую силу длительной устойчивости можно определить по формуле:

$$N = \frac{P}{F(t)} = \frac{P}{1 + \varphi(t)E(t) - \frac{E'(t)}{\gamma E(t)}}, \quad (5.10)$$

где N —критическая сила длительной устойчивости,

P —критическая сила мгновенной устойчивости, определяемая методом строительной механики [1],

$F(t)$ —коэффициент, определяющий влияние на критическую силу длительной устойчивости возраста и свойств ползучести материала.

Армянский научно-исследовательский
институт гидротехники
и мелиорации

Поступило 26 II 1953

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Госстройиздат, 1940.
2. Арутюнян Н. Х. Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести. ПММ, т. XIII, 1942.
3. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем деформирующихся во времени. Изд. техн.-теор. литер., 1949.

Լ. Բ. Բուճիարյան

ՆՐԲԱՊԱՏ ԶՈՂԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ՝ ՆՅՈՒԹԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ

Աշխատության մեջ քննարկվում է նրբապատ ձողերի կայունության խնդիրը՝ նյութի սողքի հաշվառումով:

Որպես հիմնական երակետային տվյալներ ընդունված են Վ. Զ. Վլասովի տեսության մեջ դարգացված նախադրյալները, այն է՝ ձողի եզրագծի անփոփոխելիությանը, սկիտարիալ մակերևույթների օրենքը և այլն:

Հուլի օրենքի փոխարեն օգտագործված է նյութի ծերացման ժառանգական տեսության օրենքը, վերջինս արտահայտվում է նրանում, որ լարման և դեֆորմացիաների միջև կգտնվի կապը արվում է ինտեգրալ կախման ձևով, մի կախում, որը հաշվի է առնում ինչպես նյութի սողքը, այնպես էլ նրա առաձգականության մոդուլի փոփոխականությունը:

Կրիտիկական ուժի համար (որի դեպքում կորչում է կայունությունը) գտնվում է արտահայտություն՝ նյութի հասակից կախված:

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. Аракелян

Расчет балок на сплошном грунтовом основании

1. *Интегро-дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.*
Рассмотрим горизонтальный призматический упругий брус, опирающийся по всей длине на податливое водонасыщенное и однородное грунтовое основание.

Нагруженная балка деформирует грунтовое основание в каждой ее точке. Соответственно этому, в каждой точке балки действует реакция основания, интенсивность которой в общем случае меняется от точки к точке.

При определении интенсивности реакции грунтового основания будем отличать перемещение, вызванное мгновенным воздействием нагрузки, от перемещения, получаемого в результате продолжительного действия нагрузки.

В первом случае, как показали исследования Я. А. Мачерета [1] и В. А. Флорина [2], в самый момент приложения нагрузки, грунтовую массу (водонасыщенные глинистые грунты) можно рассматривать как линейно деформирующуюся среду с коэффициентом Пуассона $\mu = 0,5$.

Поэтому можно принять реакцию основания пропорциональной осадке основания в данной точке.

Будем рассматривать мгновенную осадку как упругую, и обозначим ее через $\delta(x, 0)$.

Механизм осадки основания при продолжительном действии нагрузки по разному был моделирован отдельными исследователями.

Т. Э. Проктор, принимая грунтовое основание как упругое тело, сводит решение задачи об изгибе балки к решению некоторого интегрального уравнения.

Связь балки с основанием Б. Н. Жемочкин [3] заменяет несколькими абсолютно жесткими стержнями, усилия в которых определяются методом сил; при этом усилия принимаются как реакции грунтового основания.

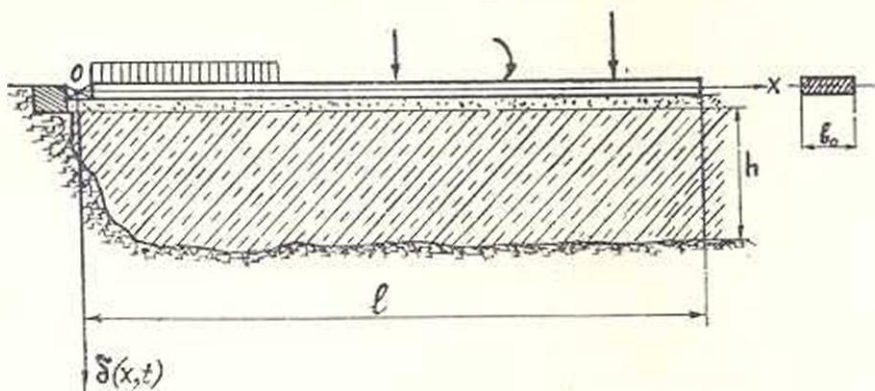
Расчетная схема грунтового основания М. М. Филоненко-Бородичем [4] представлена в виде ряда вертикальных пружин, которые поверху соединяются горизонтальной нерастяжимой нитью с постоянной натяженностью. При определении перемещения основания он исходит из дифференциального уравнения равновесия указанной нити.

В действительности же деформации водонасыщенных глинистых пород далеко не выражаются вышеприведенными расчетными схемами.

Деформации грунтового основания можно определить исходя из теории прямолинейной консолидации грунтовой массы, что и положено в основу нашей расчетной схемы для изгиба балок на грунтовом основании.

Положим, что внешние силы действуют в вертикальной плоскости симметрии сечения балки и, что реакции основания возникают также при отрицательных перемещениях балки. Силами трения или сцеплением между основанием и балкой пренебрегаем ввиду их незначительности.

Расположение координатных осей, размеры балки, внешние силы и схема основания показаны на фиг. 1.



Фиг. 1.

При $t > 0$ интенсивность реакции основания зависит от времени t и координаты x . Обозначим ее через $q(x, t)$.

Тогда перемещение произвольной точки поверхности грунта основания или оси балки в любой момент времени t определяется формулой [6]:

$$\delta(x, t) = \frac{\delta k_0}{\gamma h b_0} \int_0^t q(x, \xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi + \delta(x, 0), \quad (1.1)$$

где k_0 —коэффициент фильтрации грунта основания,
 b_0 —ширина балки,
 γ —удельный вес фильтруемой воды,
 h —высота уплотняемого грунта основания,
 c —коэффициент консолидации грунта основания.

Для определения интенсивности реакции основания исходим из дифференциальной зависимости между перемещениями оси балки и интенсивностью сплошной нагрузки. Интенсивность внешней сплошной нагрузки и жесткость балки обозначим через $q_0(x)$ и EI .

Тогда будем иметь:

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\bar{z}(x, t)] = q_0(x) - q(x, t). \quad (1.2)$$

Исходя из (1.1) и (1.2) и заметив при этом, что

$$EI \frac{\partial^4}{\partial x^4} [\bar{z}(x, 0)] = q_0(x) - q(x, 0),$$

преобразуя найдем

$$q(x, t) = q(x, 0) - \frac{8EI k_0}{\gamma h b_0} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} [q(x, \xi)] \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi. \quad (1.3)$$

Таким образом, определение интенсивности реакции основания сводится к решению интегро-дифференциального уравнения типа (1.3). Под действием мгновенной нагрузки задача сводится к изгибу балки на упругом основании.

2. *Общий интеграл интегро-дифференциального уравнения (1.3).* Будем искать решение уравнения (1.3) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x , а другая только от t :

$$q(x, t) = X(x)T(t). \quad (2.1)$$

Внеся (2.1) в (1.3), получим:

$$X(x)T(t) = X(x)T(0) - \frac{8EI k_0}{\gamma h b_0} X^{IV}(x) \int_0^t T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi.$$

Отделив переменные, будем иметь:

$$\frac{X(x)}{X^{IV}(x)} = \frac{\frac{8EI k_0}{\gamma h b_0} \int_0^t T(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi}{T(0) - T(\xi)}. \quad (2.2)$$

Здесь левая часть зависит только от x , а правая — только от t . Очевидно, это возможно, когда левая и правая части уравнения (2.2) в отдельности равны одной и той же постоянной величине, которую обозначим через $\frac{l^4}{\alpha^4}$.

Тогда из (2.2) имеем:

$$X^{IV}(x) - \frac{\alpha^4}{l^4} X(x) = 0, \quad (2.3)$$

$$T(t) = T(0) - \frac{8EI k_0 \alpha^4}{\gamma h b_0 l^4} \int_0^t T(\xi) e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi. \quad (2.4)$$

Соответственно бесконечным значениям параметра α_i неизвестные функции $X(x)$ и $T(t)$ получают свои соответственные $X_i(x)$ и $T_i(t)$ значения, каждое из которых представляет собой частное решение уравнения (1.3). Взяв сумму бесконечного числа частных решений, получим общий интеграл (1.3) в виде:

$$q(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(t). \quad (1.5)$$

Отсюда при $t = 0$, т. е. для упруго-мгновенной задачи, имеем:

$$q(x,0) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(0).$$

Для упругого основания, как известно, принимается

$$q(x,0) = k\delta(x,0),$$

где k — так называемый мгновенный коэффициент постели грунтового основания.

Тогда из последних двух соотношений получим:

$$\delta(x,0) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x) T_i(0). \quad (2.6)$$

Отсюда следует, что условие для определения произвольных постоянных функции $X_i(x)$ совпадает с теми граничными условиями функции $\delta(x,0)$, при которых значения последней или ее производных обращаются в нуль.

Таким образом, решение интегро-дифференциального уравнения (1.3) сводится к решению обыкновенного уравнения (2.3) и интегрального уравнения Вольтерра (2.4).

Общий интеграл линейного дифференциального уравнения (2.3), как известно, будет:

$$X(x) = c_1 \sin \frac{\alpha x}{l} + c_2 \cos \frac{\alpha x}{l} + c_3 \operatorname{sh} \frac{\alpha x}{l} + c_4 \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{l}. \quad (2.6)$$

Здесь c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные, а α — некоторый параметр.

Для определения постоянных c_1, c_2, c_3, c_4 и параметра α следует использовать граничные условия балки в каждом случае. Эти условия зависят от способа крепления и нагрузок концов балки.

Например, в том случае, когда оба конца балки защемлены (заделаны) на жестких опорах, граничные условия выражаются отсутствием прогибов и поворотов сечений на опорах, т. е. имеем:

$$\begin{aligned} \delta(0,t) &= 0, & \frac{\partial}{\partial x} [\delta(0,t)] &= 0, \\ \delta(l,t) &= 0, & \frac{\partial}{\partial x} [\delta(l,t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Условиям (2.7) должно удовлетворить уравнение (2.1) в любой момент времени. Поэтому

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [X(0)] = 0, \\ X(l) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [X(l)] = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

На основании этих соотношений, из (2.6) находим:

$$\begin{aligned} c_2 + c_4 &= 0, \\ c_1 + c_3 &= 0, \\ c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha + c_3 \operatorname{sh} \alpha + c_4 \operatorname{ch} \alpha &= 0, \\ c_1 \cos \alpha - c_2 \sin \alpha + c_3 \operatorname{ch} \alpha + c_4 \operatorname{sh} \alpha &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решая эту систему однородных уравнений относительно произвольных постоянных, получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_3 = 1, \\ c_2 &= -c_4 = \frac{\sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha}{\cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha}. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений (2.8), исключая произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 и c_4 , найдем

$$\cos \alpha \cdot \operatorname{ch} \alpha = 1.$$

Это трансцендентное уравнение и служит для определения значений параметра α . Значения корней этого уравнения обозначим:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, \infty). \quad (2.10)$$

В соответствии с этими корнями будем иметь следующую систему фундаментальных функций

$$X_i(x) = c_{1i} \sin \frac{\alpha_i x}{l} + c_{2i} \cos \frac{\alpha_i x}{l} + c_{3i} \operatorname{sh} \frac{\alpha_i x}{l} + c_{4i} \operatorname{ch} \frac{\alpha_i x}{l}. \quad (2.11)$$

При этом из (2.4) следует

$$T_i(t) = \frac{8EI k_0 \alpha_i^4}{\gamma h b_0 l^4} \int_0^1 T_i(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi + T_i(0). \quad (2.12)$$

Функции (1.11) и (2.12) являются решениями уравнения (1.3) при произвольных значениях постоянных $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ и α_i . Сумма таких решений также будет решением уравнения (1.3). Поэтому, как уже было указано, общий интеграл уравнения (1.3) можно написать в виде:

$$q(x, t) = \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} X_i(x) T_i(t). \quad (2.13)$$

Покажем ортогональность функций (2.11) при различных комбинациях условий закрепления концов балки. Как известно, при этом должно иметь место соотношение:

$$\int_0^l X_i(x)X_j(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j. \quad (2.14)$$

Функции $X_i(x)$ и $X_j(x)$ удовлетворяют уравнению (2.3), т. е.

$$X_k^{IV}(x) - \frac{z_k}{l^4} X_k(x) = 0. \quad (k = i, j).$$

Внеся эти значения в интеграл (2.14), получим:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{z_j^4}{l^4} - \frac{z_i^4}{l^4} \right) \int_0^l X_i(x)X_j(x)dx = \\ & = \int_0^l \left[X_i(x) \cdot X_j^{IV}(x) - X_j(x)X_i^{IV}(x) \right] dx. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Интегрируя по частям первый член подынтегрального выражения, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[X_i(x) - X_j^{IV}(x) - X_j(x)X_i^{IV}(x) \right] dx = & \left[X_i(x)X_j'''(x) - X_i'(x)X_j''(x) + \right. \\ & \left. + X_i''(x)X_j(x) - X_i'''(x)X_j(x) \right]_0^l. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Как при вышеуказанном, так и при других возможных условиях закрепления концов балки, все члены правой части (2.16) обращаются в нуль.

Таким образом, фундаментальные функции (2.6), удовлетворяющие возможным граничным условиям, являются ортогональными.

При $t=0$, т. е. при мгновенном действии нагрузки, решение уравнения (1.3) должно совпасть с известным решением упруго-мгновенной задачи. Из этого следует, что значение функции

$$q(x, 0)$$

нам задано или может быть получено в результате упругого расчета. Согласно (2.6), имеем:

$$k\delta(x, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)T_i(0). \quad (2.17)$$

Умножая обе части этого равенства на $X_i(x)$ и интегрируя в пределах от 0 до l , в силу соотношений (2.14), получим:

$$k \int_0^l \delta(x,0) X_i(x) dx = T_i(0) \int_0^l X_i^2(x) dx,$$

откуда

$$T_i(0) = \frac{k \int_0^l \delta(x,0) X_i(x) dx}{\int_0^l X_i^2(x) dx}. \quad (2.18)$$

Непосредственное вычисление интеграла, входящего в знаменатель (2.18), в некоторых случаях требует громоздких выкладок; в этих случаях, как известно [5], удобнее пользоваться следующей формулой:

$$\int_0^l X_i^2(x) dx = \frac{l}{4} \left\{ \left[X_i(x) \right]^2 - 2X_i'''(x) + \left[X_i''(x) \right]^2 \right\}_{x=0}^{x=l}. \quad (2.19)$$

Теперь соотношение (2.18) окончательно запишется в виде:

$$T_i(0) = \frac{k \int_0^l \delta(x,0) X_i(x) dx}{\frac{l}{4} \left\{ \left[X_i(x) \right]^2 - 2X_i'''(x) + \left[X_i''(x) \right]^2 \right\}_{x=0}^{x=l}}. \quad (2.20)$$

Таким образом, определяя величину $T_i(0)$ и подставляя в (2.12), можно получить решение интегрального уравнения Вольтерра (2.12).

Обозначая постоянный коэффициент этого уравнения через

$$\beta_i = \frac{8EI k_0 \alpha_i^4}{\gamma h b_0 l^4}, \quad (2.21)$$

получим:

$$T_i(t) = T_i(0) + \beta_i \int_0^t T_i(\xi) \sum_{v=1,3,\dots}^{\infty} e^{-v^2 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 c(t-\xi)} d\xi. \quad (2.22)$$

Как известно [6], решение этого интегрального уравнения Вольтерра есть:

$$T_i(t) = T_i(0) \left[\frac{1}{1 + b_i} + 2 \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left(1 - \frac{b_i}{b_i + \cos^2 \lambda_{ni}} \right) e^{-\lambda_{ni}^2 \frac{4ct}{h^2}} \right], \quad (2.23)$$

$$\text{где} \quad b_i = \frac{\beta_i h^2}{8c}, \quad c = \frac{k_0(1 + \varepsilon)}{\gamma a}, \quad (2.24)$$

λ_{ni} — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = - \frac{\lambda}{b_1}.$$

Общий интеграл интегро-дифференциального уравнения (1.3) запишется в виде:

$$q(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(0) \left[c_{1j} \sin \frac{\alpha_j x}{l} + c_{2j} \cos \frac{\alpha_j x}{l} + c_{3j} \operatorname{sh} \frac{\alpha_j x}{l} + c_{4j} \operatorname{ch} \frac{\alpha_j x}{l} \right] \left[\frac{1}{1+b_j} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b_j}{b_j + \cos^2 \lambda_{nj}} \right) e^{-\lambda_{nj}^2 \frac{4ct}{h^2}} \right]. \quad (2.25)$$

Здесь произвольные постоянные определяются в соответствии с граничными условиями изгибаемой балки. При этом, как не трудно заметить, влияние внешней нагрузки выражается через функцию $\bar{z}(x, 0)$, входящую в соотношение (2.20).

3. *Определение произвольных постоянных.* Рассмотрим практически возможные граничные условия закрепления концов балки. Начало координат совместим с каким-либо концом балки так, чтобы абсциссы начала и конца балки были $x=0$ и $x=l$, где l — длина балки.

I случай — балка на сплошном грунтовом основании с шарнирно закрепленными концами на жестких опорах. При этом перемещения в опорных сечениях и изгибающие моменты на опорах равны нулю, что накладывает на фундаментальную функцию следующие условия:

$$\begin{aligned} X_i(0) &= 0, & X_i''(0) &= 0, \\ X_i(l) &= 0, & X_i''(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Внеся эти условия в (2.5), найдем:

$$\begin{aligned} c_1 &\neq 0 \quad \text{примем} \quad c_1 = 1 \\ c_2 &= c_3 = c_4 = 0, \\ \sin \alpha_i &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Корни последнего уравнения будут

$$\alpha_i = i\pi, \quad (i = 1, 2, \dots, \infty). \quad (3.3)$$

В соответствии с (3.2) и (3.3) в этом случае фундаментальные функции будут:

$$\begin{aligned} X_i(l) &= \sin \frac{i\pi x}{l} \\ (i &= 1, 2, \dots, \infty). \end{aligned} \quad (3.4)$$

II случай — балка на сплошном грунтовом основании с защемленными концами на жестких опорах. Перемещения и поворот концевых сечений равняются нулю, что приводит к условиям

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0, & X_1'(0) &= 0, \\ X_1(l) &= 0, & X_1'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

На основании этого находим:

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_2 = 1, \\ c_2 &= -c_1 = \frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{2i+1}{2} \pi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тогда

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1} \left(\cos \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 x}{l} \right). \quad (3.7)$$

III случай—балка со сводными концами лежит на сплошном грунтовом основании; это означает отсутствие перерезывающей силы и изгибающего момента на концах балки. Фундаментальные функции должны удовлетворить условиям

$$\begin{aligned} X_1'''(0) &= 0, & X_1''(0) &= 0, \\ X_1'''(l) &= 0, & X_1''(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В силу этого будем иметь:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_2 = 1, \\ c_2 &= c_1 = -\frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1}, \\ \alpha_1 &= \frac{2i+1}{2} \pi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\sin \alpha_1 - \operatorname{sh} \alpha_1}{\cos \alpha_1 - \operatorname{ch} \alpha_1} \left(\cos \frac{\alpha_1 x}{l} + \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 x}{l} \right). \quad (3.10)$$

IV случай—балка лежит на сплошном грунтовом основании; один конец шарнирно закреплен на жесткой опоре, а другой—защемлен также на жесткой опоре. Отсутствуют: перемещения и изгибающий момент на одной опоре, перемещения и поворот сечения—на другой. Эти граничные условия приводят к следующим соотношениям

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0, & X_1''(0) &= 0, \\ X_1(l) &= 0, & X_1'(l) &= 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

При этом для произвольных постоянных и параметра α_1 получаются следующие значения

$$c_1 = 1,$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= c_1 = 0, \\
 c_3 &= -\frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1}, \\
 \alpha_1 &= \frac{4i-1}{4} \pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Фундаментальные функции будут:

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1} \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l}. \tag{3.13}$$

V случай—балка лежит на сплошном грунтовом основании с одним свободным и другим заземленным концами на жесткой опоре. Поместим начало координат на заземленном конце. Граничные условия для фундаментальной функции дают

$$\begin{aligned}
 X_1(0) &= 0, \quad X_1'(0) = 0, \\
 X_1''(l) &= 0, \quad X_1'''(l) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.14}$$

Для произвольных постоянных и параметра α_1 , получим:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= -c_3 = 1, \\
 c_2 &= -c_4 = \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 - \sin \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1 + \cos \alpha_1}, \\
 \alpha_1 &= \frac{2i-1}{2} \pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Фундаментальные функции в этом случае будут:

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l} - \frac{\operatorname{sh} \alpha_1 - \sin \alpha_1}{\operatorname{ch} \alpha_1 - \cos \alpha_1} \left(\cos \frac{\alpha_1 x}{l} - \operatorname{ch} \frac{\alpha_1 x}{l} \right). \tag{3.16}$$

VI случай—балка с одним свободным и другим шарнирно-закрепленным концом на жесткой опоре.

Поместим начало координат на шарнирном конце. Граничные условия приводят к уравнениям

$$\begin{aligned}
 X_1(0) &= 0, \quad X_1''(0) = 0, \\
 X_1(l) &= 0, \quad X_1'(l) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Произвольные постоянные и параметр α_1 получаются

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 1, \quad c_3 = \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1}, \\
 c_2 &= c_4 = 0, \\
 \alpha_1 &= \frac{2i-1}{2} \pi.
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

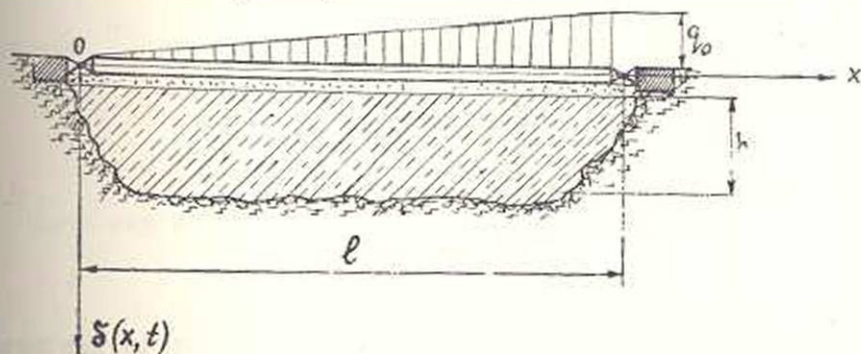
Фундаментальные функции будут

$$X_1(x) = \sin \frac{\alpha_1 x}{l} + \frac{\sin \alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1} \operatorname{sh} \frac{\alpha_1 x}{l}. \quad (3.19)$$

Таким образом, в любом случае граничных условий для определения независимых произвольных постоянных получаем систему однородных уравнений. Приравнявая нулю детерминант этой системы получаем трансцендентное характеристическое уравнение для определения параметра α_1 , корнями которого в каждом случае определяются фундаментальные функции.

Примененные здесь фундаментальные функции поперечных колебаний балок впервые были использованы для расчета призматических оболочек произвольного очертания В. З. Власовым [7].

4. Шарнирно-опертая балка под действием треугольной нагрузки. Балка на сплошном грунтовом основании с шарнирно-закрепленными концами на жестких опорах нагружена сплошной треугольной нагрузкой (фиг. 2).



Фиг. 2.

Интенсивность нагрузки меняется линейно:

$$q = q_0 \frac{x}{l}. \quad (4.1)$$

В этом случае решение упруго-мгновенной задачи будет [8]

$$\delta(x, 0) = \frac{q_0}{k} \left[\frac{x}{l} - \frac{V_1(\alpha_0 l) V_3(\alpha_0 x) - V_3(\alpha_0 l) V_1(\alpha_0 x)}{V_1^2(\alpha_0 l) - V_3^2(\alpha_0 l)} \right], \quad (4.2)$$

где k — коэффициент постели упругого основания при мгновенном действии нагрузки, V — функции Пузыревского, имеющие следующие значения

$$V_1(\alpha_0 l) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l + \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \right), \quad (4.3)$$

$$V_3(\alpha_0 l) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l - \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \right),$$

$$V_1(\alpha_0 x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x + \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x \right), \quad (4.3)$$

$$V_2(\alpha_0 x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x - \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x \right).$$

Здесь
$$\alpha_0 = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}.$$

Внеся (4.3) в (4.2), после преобразований получим:

$$\delta(x, 0) = \frac{q_0}{k} \left[\frac{x}{l} - \frac{2(\operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l \cdot \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x + \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \cdot \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x)}{\operatorname{sh} 2 \alpha_0 l \cdot \sin 2 \alpha_0 l} \right]. \quad (4.4)$$

Фундаментальные функции в этом случае будут (3.4):

$$X_1(x) = \sin \frac{i\pi x}{l}.$$

Согласно (2.17), для $T_1(0)$ имеем:

$$T_1(0) = \frac{\int_0^l \delta(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx}. \quad (4.5)$$

Вычислив входящие сюда интегралы, для знаменателя будем иметь:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{l}{i\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{i\pi x}{l} - \frac{1}{4} \sin 2 \frac{i\pi x}{l} \right]. \quad (4.6)$$

Для числителя получим:

$$\int_0^l \delta(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{q_0}{k} \left[\frac{x}{l} - \frac{2(\operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l \cdot \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x + \operatorname{sh} \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \cdot \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x)}{\operatorname{sh} 2 \alpha_0 l \cdot \sin 2 \alpha_0 l} \right] \sin \frac{i\pi x}{l} dx.$$

Введем обозначения

$$I_0 = \int_0^l x \sin \frac{i\pi x}{l} dx,$$

$$I_1 = \int_0^l \operatorname{ch} \alpha_0 x \cdot \sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx + \\ + \frac{1}{2} \int_0^l e^{-\alpha_0 x} \sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} (I_1 + I_2), \quad (4.7)$$

$$I_2 = \int_0^l \operatorname{sh} \alpha_0 x \cdot \cos \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \cos \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx - \\ - \frac{1}{2} \int_0^l e^{-\alpha_0 x} \cos \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} (I_3 - I_4).$$

Находим:

$$\int_0^l \delta(x, 0) \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{q_0}{k} \left\{ \frac{I_0}{l} - \frac{1}{\operatorname{sh} 2\alpha_0 l \cdot \sin 2\alpha_0 l} \left[(I_1 + I_2) \operatorname{ch} \alpha_0 l \cdot \sin \alpha_0 l + \right. \right. \\ \left. \left. + (I_3 - I_4) \sin \alpha_0 l \cdot \cos \alpha_0 l \right] \right\}. \quad (4.8)$$

Далее имеем:

$$I_0 = \int_0^l x \sin \frac{i\pi x}{l} dx = \left[-\frac{l}{i\pi} x \cos \frac{i\pi x}{l} + \right. \\ \left. + \frac{l}{i\pi} \sin \frac{i\pi x}{l} \right]_0^l = (-1)^i \frac{l^2}{i\pi}. \quad (4.9)$$

Заметив, что

$$\sin \alpha_0 x \cdot \sin \frac{i\pi x}{l} = \frac{1}{2} \left[\cos \left(\alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) x - \cos \left(\alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) x \right], \quad (4.10)$$

получим:

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \cos \left(\alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) x dx - \frac{1}{2} \int_0^l e^{\alpha_0 x} \cos \left(\alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) x dx, \\ I_1 = \frac{1}{2} e^{\alpha_0 l} \left[\frac{\left(\alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) \sin \left(\alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right) x + \alpha_0 \cos \left(\alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right)}{\alpha_0^2 + \left(\alpha_0 + \frac{i\pi}{l} \right)^2} - \right.$$

$$I_1 = \frac{\left(\alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) \sin \left(\alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right) x + \alpha_0 \cos \left(\alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right)}{\alpha_0^2 + \left(\alpha_0 - \frac{i\pi}{l} \right)^2} \Bigg|_0^l, \\ I_1 = \frac{i\pi}{l \left[\left(2\alpha_0^2 - i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left(2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]} \left\{ 2\alpha_0^2 + \right. \\ \left. + (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left[\left(4\alpha_0^2 + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} - 4\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right) \sin \alpha_0 l - 4\alpha_0^2 \cos \alpha_0 l \right] \right\}. \quad (4.11)$$

Аналогичным образом получим:

$$I_2 = \frac{i\pi}{l \left[\left(2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left(2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]} \left\{ -2\alpha_0^2 + (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left[\left(4\alpha_0^2 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} - 4\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right) \sin \alpha_0 l + 4\alpha_0^2 \cos \alpha_0 l \right] \right\}. \quad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) находим:

$$I_1 + I_2 = \frac{2(-1)^l i\pi \left[\left(2\alpha_0^2 - 2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} - i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right) \sin \alpha_0 l + 2\alpha_0^2 \cos \alpha_0 l \right] \operatorname{ch} \alpha_0 l}{l \left[\left(2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left(2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}. \quad (4.13)$$

Зная, что

$$\sin \alpha_0 x \sin \frac{i\pi x}{l} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\alpha_0 + i \frac{\pi}{l} \right) x - \sin \left(\alpha_0 - i \frac{\pi}{l} \right) x \right], \quad (4.14)$$

для двух остальных интегралов получим:

$$I_3 = \frac{i\pi \left[i^2 \frac{\pi^3}{l^3} - (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left(4\alpha_0^2 \sin \alpha_0 l + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \alpha_0 l \right) \right]}{l \left[\left(2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left(2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}, \quad (4.15)$$

$$I_4 = \frac{i\pi \left[i^2 \frac{\pi^3}{l^3} + (-1)^l \frac{e^{-\alpha_0 l}}{2} \left(4\alpha_0^2 \sin \alpha_0 l + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \alpha_0 l \right) \right]}{l \left[\left(2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left(2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}. \quad (4.16)$$

Откуда

$$I_2 - I_4 = \frac{(-1)^l i\pi \left[4\alpha_0^2 \sin \alpha_0 l + 2i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos \alpha_0 l \right] \operatorname{ch} \alpha_0 l}{l \left[\left(2\alpha_0^2 + i^2 \frac{\pi^2}{l^2} \right)^2 - \left(2\alpha_0 i \frac{\pi}{l} \right)^2 \right]}. \quad (4.17)$$

Внося (4.6), (4.9), (4.13) и (4.16) в (4.8) после некоторых преобразований окончательно получим:

$$T_1(0) = (-1)^i \pi q_0 \left\{ \frac{l^3}{8\alpha_0^4 l^4 + 2\pi^4 i^4} \left[\left(\frac{2\alpha_0 i \pi}{l} + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} - 2\alpha_0^2 \right) \operatorname{cth} \alpha_0 l \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 l + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \operatorname{ctg} \alpha_0 l - 2\alpha_0^2 \operatorname{cth} \alpha_0 l + 2\alpha_0^2 \right] - \frac{l}{\pi^2 i^2} \right\}. \quad (4.18)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае окончательное выражение интенсивности реакции основания, согласно (2.24), будет:

$$q(x,t) = \pi q_0 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \left\{ \frac{l^3}{8\alpha_0^4 l^4 + 2\pi^4 i^4} \left[\left(\frac{2\alpha_0 i \pi}{l} + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} - 2\alpha_0^2 \right) \operatorname{cth} \alpha_0 l \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 l + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \operatorname{ctg} \alpha_0 l - 2\alpha_0^2 \operatorname{cth} \alpha_0 l + 2\alpha_0^2 \right] - \frac{l}{\pi^2 i^2} \right\} \left[\frac{1}{1+b_i} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{b_i}{b_i + \cos^2 \lambda_{ni}} \right) e^{-\frac{4\lambda_{ni}^2 c t}{h^2}} \right] \sin \frac{\pi i x}{l}, \quad (4.19)$$

где
$$b_i = \frac{E l k_0 h \alpha_i^4}{\pi^4 \gamma c b_0 l^4}, \quad c = \frac{k_0 (1+\varepsilon)}{\gamma a},$$

λ_{ni} — корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \lambda = -\frac{\lambda}{b_i}.$$

Исходя из полученного значения $q(x,t)$ легко определить остальные элементы изгиба балки.

Опорные реакции левой и правой опоры

$$A(t) = \frac{q_0 l}{6} + l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} (\sin \pi i - \pi i) T_1(t), \quad (4.20)$$

$$B(t) = \frac{q_0 l}{3} - l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} (\sin \pi i - \pi i \cos \pi i) T_1(t), \quad (4.21)$$

поперечная сила

$$Q(x,t) = \frac{q_0 l}{6} - \frac{q_0 x^2}{2l} - l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} \left(\sin \pi i - \pi i \sin \frac{\pi i x}{l} \right) T_1(t), \quad (4.22)$$

изгибающий момент

$$M(x,t) = \frac{q_0 l}{6} x - \frac{q_0}{6l} x^3 + l \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 i^2} \left(x \sin \pi i - l \sin \frac{\pi i x}{l} \right) T_1(t). \quad (4.23)$$

Используя граничные условия

$\delta(0,t) = 0$ и $\delta(l,t) = 0$ получаем угол наклона

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{7}{360} q_0 l^2 - \frac{1}{12} q_0 l x^2 + \frac{1}{24} q_0 \frac{x^4}{l} - \frac{l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left[\left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{6} \right) \sin \pi i - \frac{l^2}{\pi i} \cos \frac{i \pi x}{l} \right] T_i(t) \right\}. \quad (4.24)$$

Перемещения балки

$$\delta(x,t) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{7}{360} q_0 l^2 x - \frac{1}{36} q_0 l x^3 + \frac{1}{120} q_0 \frac{x^5}{l} - \frac{6l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} \left[\left(x^3 - \frac{l^3}{3} \right) \sin \pi i - \frac{l^3}{\pi^2 i^2} \sin \frac{i \pi x}{l} \right] T_i(t) \right\}. \quad (4.25)$$

Примеры, подобно приведенному, можно разнообразить, при условии, чтобы для них существовали решения упруго-мгновенной задачи.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 18 VI 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мачерет Я. А. Распределение мгновенных напоров и давлений в грунтовой массе, вызванных мгновенных нагрузкой. ВИОС, 1934.
2. Флорин В. А. К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе. ГОНТИ, 1938.
3. Жемочкин Б. Н. Плоская задача расчета балок на полупространстве и полуплоскости. ВИА, 1937.
4. Филоненко-Бородич М. М. Некоторые приближенные теории упругого основания. Учен. зап. Московского государственного университета. Механика, вып. 45, 1940.
5. Крылов А. Н. О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики. Изд. пятое, 1950.
6. Арутюнян Н. Х. К исследованию статически неопределимых систем с опорами, смещающимися во времени. ПММ, том XIII, в. 6, 1949.
7. Власов В. З. Строительная механика тонкостенных пространственных систем. Стройиздат, 1939.
8. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля. Часть I, том II. Изд. „Морской транспорт“, 1947.

Թ. Տ. Արաքելյան

ԳՐՈՒՆՏԱՅԻՆ ՀԱՄԱՏԱՐԱԾ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Հոգիածուծ տրված է գրունտային համատարած հիմնատակի վրա դրված հեծանների հաշվարկը:

Դիտարկելով ջրով հագեցած և նստվածքի ենթակա հիմնատակի գրունտի վրա ամբողջ երկարությամբ հենված պրիզմատիկ առաձգական

հեծանի ծոռումը, հեղինակը տարրերում է հեծանի և գրունտի տեղափոխումները բնութագրելով ռ. տեղական ազդեցության դեպքում:

Փորձերը ցույց են տվել [1], [2], որ առաջին դեպքում գրունտային մասան կարելի է դիտել որպես դժայնորեն դեֆորմացվող միջավայր:

Ընդունվում է, որ երկֆազ հիմնատակի գրունտի դեֆորմացիա առկա հատկությունը իրականությունն առավել մոտ կարելի է բնութագրել բևեռայնորված առաձգական հեծանի ազդեցության տակ նրա ուղղագծային կոնսոլիդացիայով:

Ընդունելով վերոհիշյալ ենթադրությունները, հիմնատակի հակազդման ինտենսիվությունը որոշելու համար ստացվում է (1.3) ինտերգր-դիֆերենցիալ հավասարումը:

Անջատելով փոփոխականները, այս հավասարման լուծումը վերածվում է մի չորրորդ կարգի համասեռ սովորական դիֆերենցիալ հավասարման (2.3) և մի ինտեգրալ հավասարման (2.4) լուծումներին:

Անհնարով (2.3) հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը, հեծանի սահմանային պայմաններից որոշվում են լուծման կամայական հաստատունները: Իսկ α պարամետրը գտնվում է (2.3) հավասարման լուծումը ներկայացնող (2.5) ֆունկցիանալ ֆունկցիաներից ստացվող խարակտերիստիկ հավասարումից: Այնուհետև որոշվում է նաև (2.4) ինտեգրալ հավասարման $T_1(0)$ անդամը և տրվում է նրա (2.20) ընդհանուր ինտեգրալը:

Այսպիսով, հետազոտվող (1.3) ինտեգր-դիֆերենցիալ հավասարման ընդհանուր ինտեգրալը ներկայացվում է (2.25) տեսքով:

Հոդվածում բերված են նաև հեծանի զանազան սահմանային պայմանների դեպքում կամայական հաստատունների և α պարամետրի արժեքները: Վերջում տրված է եռանկյունի բևեռով բևեռավորված, կոշտ հենարանների վրա հողակապելով ամրացված, գրունտային համատարած հիմնատակ ունեցող հեծանի հաշվարկը:

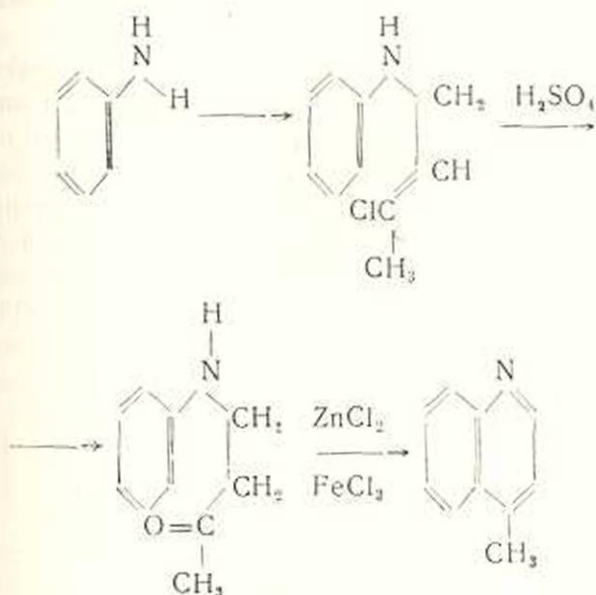
Այդ օրինակից պարզվում է, որ արտաքին բնի ներգործությունն արտահայտվում է նույն խնդրի առաձգական ակնթարթային լուծման միջոցով: Ընդ որում հեծանի ծոման հաշվարկային մեծությունները ստացվում են՝ կախված ժամանակից և հեծանի հիմնատակի գրունտի ֆիզիկոմեխանիկական հատկություններից:

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

А. Т. Бабаян, Нина П. Гамбарян

Синтез 4,7-диметилхинолина

В работах А. Т. Бабаян и Н. П. Гамбарян [1, 2] был предложен новый путь синтеза соединений хинолинового ряда по схеме:



Наряду с другими производными хинолинового ряда этим путем, исходя соответственно из N-(γ-хлоркротил)-о- и -п-толуидина, были получены 4,8- и 4,6-диметилхинолины. Причем, как и следовало ожидать, циклизация пара-изомера, для которого возможны два направления циклизации, идет с большим выходом (выход 4,6-диметилхинолина 82% теории, а 4,8-диметилхинолина—72%). Казалось, что в случае мета-изомера, где замыкание кольца должно облегчаться направляющим влиянием метильной группы, циклизация произойдет еще легче. С целью проверки этого предположения и была начата настоящая работа.

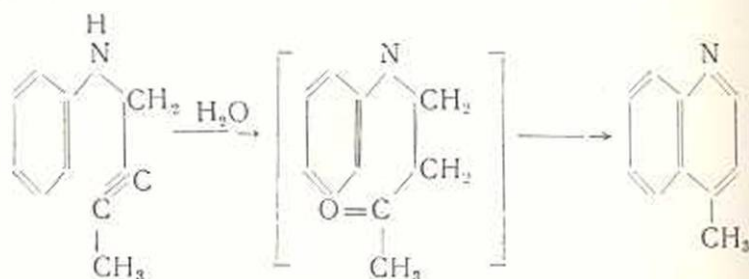
Оказалось, что в результате сернокислотного гидролиза N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина получается не ожидаемый 4-(м-толиламино)-бутанон-2, а непосредственно диметилхинолин (выход 16,9%). По-видимому, ход реакции остается таким же, как и в случае о- и

п-изомеров, т. е, промежуточно образуется 4-(м-толиламино)-бутанон-2, который не удается обнаружить из-за его быстрой циклизации уже в условиях сернокислотного гидролиза.

Промежуточное образование кетона подтверждается тем, что в условиях, способствующих именно циклизации, а не гидролизу, N-(γ-хлоркротил)-м-толуидин дает только следы диметилхинолина.

В результате циклизации в условиях сернокислотного гидролиза, наряду с диметилхинолином, ввиду отсутствия окислителя, должен образоваться примерно в таком же количестве также и тетрагидродиметилхинолин. Однако его выделение было затруднено тем, что он не дает в наших условиях пикрата (выход диметилхинолина определялся по пикрату). Наличие в реакционной смеси также и тетрагидродиметилхинолина подтверждается тем, что после окисления смеси содержание в ней диметилхинолина (по пикрату) почти удвоилось (выход 27,5%).

Выход диметилхинолина в случае N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина, когда ход реакции оказался необычным, низок; основная часть N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина осталась неизменной. Авторы надеялись получить диметилхинолин с лучшим выходом, воспользовавшись другим, также указанным в работе (1) путем, а именно, дегидрохлорировать исходный N-(γ-хлоркротил)-м-толуидин, а затем гидратацией ацетиленового амина получить 4-(м-толиламино)-бутанон-2, или же, как это и имело место в случае N-бутилиланилина



непосредственно продукт его циклизации — диметилхинолин.

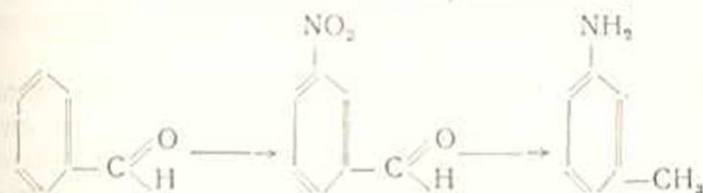
Гидратация N-бутил-м-толуидина дала диметилхинолин с выходом 44,8% теорет.

Относительно направления замыкания кольца у м-замещенных анилинов в литературе имеются разноречивые указания: Rist [3] утверждал, что всегда получается 7-производное, а Decker и Remfry [4] считали, что циклизация идет двумя возможными путями, причем преобладает 5-производное.

В нашем случае замыкание кольца как в условиях сернокислотного гидролиза, так и в условиях гидратации, происходит в паре положение к имеющейся в ядре метильной группе, что было подтверждено определением температуры плавления стифната полученного диметилхинолина. Было выбрано именно это производное потому, что температуры плавления стифнатов обоих возмож-

ных изомеров диметилхинолина резко разнятся между собой (стифнат 4,7-диметилхинолина плавится при 272° , а 4,5-диметилхинолина при 227°). Впрочем, возможно наличие следов и другого изомера, так как температуры плавления стифната (267°) и пикрата (227°) у нас несколько ниже указанных в литературе [5].

Исходный м-толуидин был получен не обычным многостадийным путем, а недавно предложенным методом Minlon'a [6]



с некоторым изменением его прописи. Было взято вдвое меньшее количество гидразина, причем в виде его сернокислой соли, а не гидрата. Это изменение прописи не снизило выхода.

Экспериментальная часть

Получение N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина. а. Смесь 77,6 г (0,3 моля) хлористого диметил-ди-(γ-хлоркротил)-аммония и 64,2 г (0,6 моля) м-толуидина нагревалась в течение 10 ч. при $130-140^\circ$. Затем добавлен раствор 25 г едкого кали. Верхний слой отделен, высушен, дважды перегнан.

Получено 30,4 г (75,9%) диметил-(γ-хлоркротил)-амин, 38,5 г м-толуидина и 42,3 г маслянистой жидкости, кипящей при $128-128,5^\circ$ (6,5 мм).

d_4^{20} 1,0807, n_D^{20} 1,5662. Найдено: MR_D 58,612.

$C_{11}H_{14}NCl$ $[\alpha]_D^{20}$. Вычислено: MR_D 58,487.

0,1046 г веш: 6,8 мл N_2 (674 мм, 19°)

Найдено %: N 6,71.

$C_{11}H_{14}NCl$. Вычислено %: N 7,16.

Выход N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина, считая на соль четырех-замещенного основания, — 72%, считая на израсходованный м-толуидин — 90%.

б. К смеси 60,6 г м-толуидина и 34,9 г 1,3-дихлорбутена-2 прибавлен раствор 25 г едкого кали. На следующий день верхний слой отделен, высушен, перегнан. Получено 36,2 г не вошедшего в реакцию м-толуидина и 36,0 г (66%) N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина с. т. кип. $128-129^\circ$ (6,5 мм).

Сернокислотный гидролиз N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина. К 12,1 г N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина добавлено, при охлаждении и перемешивании, 40 мл конц. серной кислоты. Выделение хлористого водорода слабое. После 12 дневного перемешивания реакционная смесь нейтрализована содой и экстрагирована эфиром. После отгонки эфира осталось 11 г жидкости, не дающей осадка с семикарба-

зидом и содержащий 15% (по пикрату) диметилхинолина. Выход диметилхинолина 16,9% теоретического.

Пикрат, дважды перекристаллизованный из ацетона, плавится при 227° (по литературным данным [5], для пикрата 4,7-диметилхинолина—230°, а 4,5-диметилхинолина—233°).

0,1022 г вещ.: 0,1984 г CO_2 0,0360 г H_2O

Найдено %: С 52,94 Н 3,91

$\text{C}_{17}\text{H}_{14}\text{N}_4\text{O}_7$. Вычислено %: С 52,85 Н 3,63

Температура плавления стифната, перекристаллизованного из нитробензола,—267°, (по литературным данным [5], для стифната 4,7-диметилхинолина—272°, а 4,5-диметилхинолина—227°).

0,98 г жидкости, получившейся при сернокислотном гидролизе N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина, подвергли окислению, для чего 10 ч. нагревали на водяной бане в смеси с 0,15 г хлористого цинка, 1,25 г хлорного железа, 0,5 мл конц. соляной кислоты и 11 мл спирта. Затем реакционную смесь охладил, подщелачил и перегнал с водяным паром. Перегон экстрагировали эфиром. После отгонки эфира осталась жидкость, давшая с пикриновой кислотой 0,59 г пикрата с т. пл. 227°. Общий выход диметилхинолина—27,5% теории.

Непосредственная циклизация N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина. Смесь 0,98 г N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина, 0,15 г хлористого цинка, 1,25 г хлорного железа, 0,5 мл конц. соляной кислоты и 11 мл спирта 10 ч. нагревали на водяной бане. Затем реакционную смесь охладил, подщелачил и перегнал с водяным паром. Перегон экстрагировали эфиром. После отгонки эфира оставшаяся жидкость дала с пикриновой кислотой 0,02 г пикрата с т. пл. 227°. Общий выход диметилхинолина—1% теории.

Получение N-бутинил-м-толуидина. Смесь 13,3 г N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина, 11 г едкого кали и 15 мл абсолютного спирта в течение 16 ч. нагревалась на водяной бане. Затем, разбавив реакционную смесь водой, экстрагировали ее эфиром. После отгонки эфира продукт перегнан в вакууме. Получено 7,25 г (67%) жидкости, кипящей при 134° (4,5 мм).

d_4^{20} 1,0025, n_D^{20} 1,5620. Найдено: M_{R_D} 51,434

$\text{C}_{11}\text{H}_{13}\text{N}$ $\left| \begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \end{smallmatrix} \right|_3 \left| \begin{smallmatrix} - \\ - \\ - \end{smallmatrix} \right|_1$. Вычислено: M_{R_D} 52,100.

0,1017 г вещ.: 9,2 мл N_2 (681 мм, 20,5°).

Найдено %: N 9,44.

$\text{C}_{11}\text{H}_{13}\text{N}$. Вычислено %: N 8,81.

Гидратация N-бутинил-м-толуидина. Смесь 1,4 г N-бутинил-м-толуидина, 0,54 г нитробензола, 0,64 мл конц. серной кислоты, 0,2 г окиси ртути и 8 мл метилового спирта 14 ч. нагревали на водяной бане. Отгнав метиловый спирт, смесь промыли эфиром. Остаток после отгонки эфира дал с пикриновой кислотой 1,52 г осадка. Выход диметилхинолина по пикрату 44,8% теории.

Пикрат, перекристаллизованный из ацетона, плавится при 227°. В смеси с пикратом диметилхинолина, полученного сернокислотным гидролизом N-(γ-хлоркротил)-м-толуидина, не дает депрессии.

В ы в о д ы

1. N-(γ-хлоркротил)-м-толуидин, в отличие от других изомеров, образует продукт циклизации уже в условиях сернокислотного гидролиза.

2. Гидратацией N-бутирил-м-толуидина получен 4,7-диметилхинолин с выходом 44,8% теории.

3. Замыкание кольца, как в условиях сернокислотного гидролиза, так и в условиях гидратации, происходит в основном в паре-положение к имеющейся в ядре метильной группе.

4. Впервые синтезированы N-(γ-хлоркротил)-м-толуидин и N-бутирил-м-толуидин.

Химический институт
АН Армянской ССР

Поступило 30 XII 1952

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бабаян А. Т. и Гамбарян Н. П. ЖОХ, 1952 (в печати).
2. Бабаян А. Т. и Гамбарян Н. П. Изв. АН Армянской ССР (Физ.-мат. естеств. и техн. наук), т. III, № 6, 1950.
3. Rist. Ber. **23**, 3483, 1890.
4. Decker и Remfry. Ber. **38**, 2773, 1905.
5. Manske, Marion и Leger. Ch. Abs. 6160, 1942.
6. Huang-Minton. Am. Soc. **70**, 2802, 1948.

Ա. Թ. Բաբայան, Ն. Բ. Գամբարյան

4,7-ԴԻՄԵԹԻԼԻՈԼԻՆԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Մետատուրիդինի փոխազդեցությամբ ինչպես 1,3-դիքլոր-բուտեն-2-ի, այնպես էլ դիմեթիլ-դի (γ-քլորիդրոտիլ) ամոնիում քլորիդի հետ, ստացված է N-(γ-քլորիդրոտիլ)-մետատուրիդին: Ցույց է տրված, որ վերջինս, ծծմբաթթվական հիդրոլիզի պայմաններում, ի տարբերություն N-(γ-քլորիդրոտիլ)-օրոտի և պարատուրիդինների, ապրիս է ոչ թե համապատասխան 4-(արիլամինո)-բութանոն-2, այլ նրա ցիկլիզացիայի արդյունք հանդիսացող դիմեթիլլիսինոլին: Ըստ Ստեֆանտի հալման կետի, հիմնականում ստացվել է 4,7-դիմեթիլլիսինոլին, այսինքն՝ ցիկլիզացիան կատարվել է, գլխավորապես, արոմատիկ օդակում էղած մեթիլ-խմբի պարագիր-

քում: նույն արդյունքն է ստացվել նաև N-(γ-քլորկրոտիլ)-մեամառուլու-
րիդինի դեհլորոքլորացմամբ ստացված N-քուտինիլ-մեամա-ռուլուրիդինի
հիդրոլիզից:

Ստացված նյութերից N-(γ-քլորկրոտիլ)-մեամա-ռուլուրիդինը և N-
քուտինիլ-մեամա-ռուլուրիդինը նկատագրվում են առաջին անգամ:

СТРОИТЕЛЬНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

К. С. Карапетян

Ползучесть бетона при высоких напряжениях

Известно, что если напряжения бетона не превышают определенного предела— $0,3-0,4 R$ (R —предел прочности бетона,) то деформации ползучести при сжатии изменяются пропорционально напряжениям. С увеличением напряжения между напряжением и деформациями ползучести наблюдается более сложная зависимость [5, 6, 7]. В существующих методах расчета бетонных и железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона в пределах напряжений $0,5 R$ принимается линейная зависимость между деформации ползучести и соответствующими напряжениями [1, 5, 7].

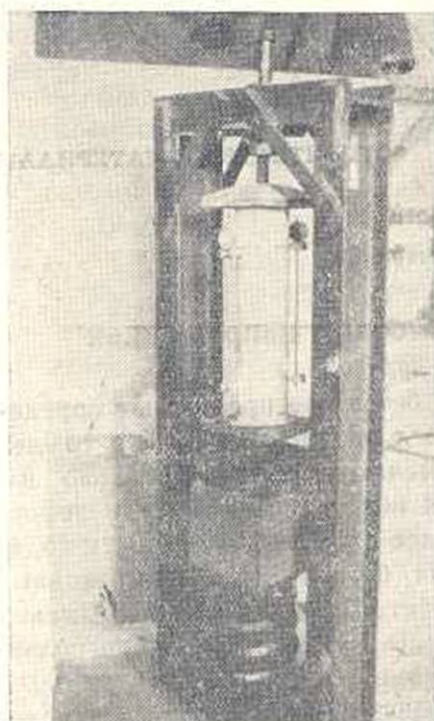
В настоящее время Н. Х. Арутюняном развита ранее предложенная им теория ползучести бетона для более широкого диапазона изменений напряжений, при котором линейная зависимость между величиной напряжения и деформацией ползучести нарушается [2].

Нами были поставлены опыты по исследованию ползучести тяжелого бетона при сжатии, причем исследовалась ползучесть бетона при относительно высоких напряжениях (до $0,7 R$) для трех возрастов бетона к моменту нагружения. Как известно, получить деформации ползучести бетона опытным путем в чистом виде не удастся. В нагруженных образцах замеряются деформации, которые представляют сумму деформаций усадки и ползучести. Чтобы определить деформации ползучести, параллельно, на ненагруженных образцах из того же бетона определяют усадочные деформации, что дает возможность путем исключения их из суммарных деформаций получить деформации ползучести.

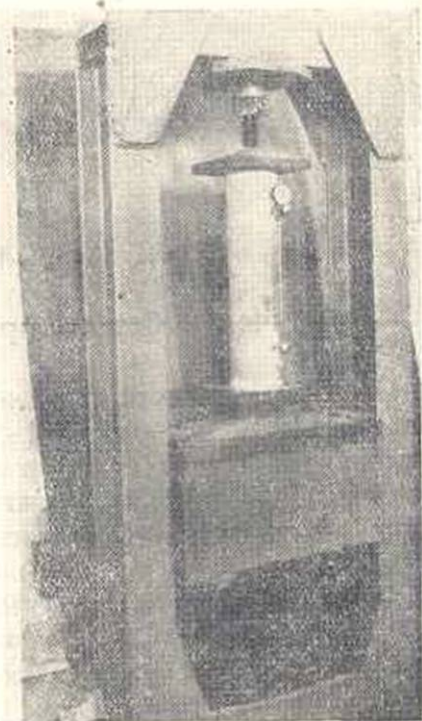
Для исследования ползучести бетона под длительной, постоянно сжимающей нагрузкой, были использованы специальные приспособления, показанные на фиг. 1 и 2.

Измерение деформаций цилиндрических бетонных образцов, как нагруженных, так и предназначенных для определения усадочных деформаций, проводилось с помощью индикаторов часового типа с удлиненной базой. Указанные приборы устанавливались на образцах стационарно с начала опытов на весь период длительного испытания. Каждый образец был снабжен двумя такими приборами.

Характеристика бетона приводится в таблице 1.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Таблица 1

Состав бетона по весу	Расход материалов на 1 м³ бетона в кг				Объемный вес свеже уложенного бетона в т/м³	Объемный вес бетона в насыщенном состоянии в т/м³	Осадка конуса в см	Кубиковая прочность на сжатие в насыщенном состоянии в кг/см²	Модуль упругости в насыщенном состоянии при $\sigma = 0,5 R_n$
	цемент	песок	щебень	вода					
1:2,54:3,53	272	692	965	241	2,17	2,075	3	146	130000

В качестве заполнителей для бетона были применены базальтовый щебень и кварцевый песок. В качестве вяжущего был применен портландцемент активностью 340 кг/см².

Бетонирование цилиндрических образцов, а также кубиков 20×20×20 см, производилось в металлических формах. Образцы освобождались от форм на третий день. Приготовление бетона производилось вручную, уплотнение — путем вибрирования. Образцы с момента освобождения от форм и в период последующего испытания хранились в помещении с $t = 21 \pm 7^\circ \text{C}$, $P = 50 \pm 10\%$.

Образцы были нагружены в возрасте 7, 14 и 32 дней. При этом в каждом возрасте образцы были установлены под длительную

нагрузку при относительных напряжениях¹ $\frac{\sigma}{R_n} = 0,25, 0,5$ и $0,7$ (R_n — цилиндрическая прочность бетона в соответствующем возрасте). Таким образом, относительное напряжение в момент нагружения было одинаковым для всех возрастов.

В таблице 2 приведены данные о количестве загруженных образцов в различных возрастах и при различных напряжениях.

Таблица 2

Возраст бетона в днях	Цилиндрическая прочность бетона в кг/см^2	Фактическое напряжение в кг/см^2	Относительное напряжение	Количество загруженных образцов
7	40	10	0,25	1
		20	0,50	2
		28	0,70	2
14	46	11,5	0,25	1
		23	0,50	2
		32	0,70	2
32	72	18	0,25	1
		36	0,50	2
		50	0,70	2

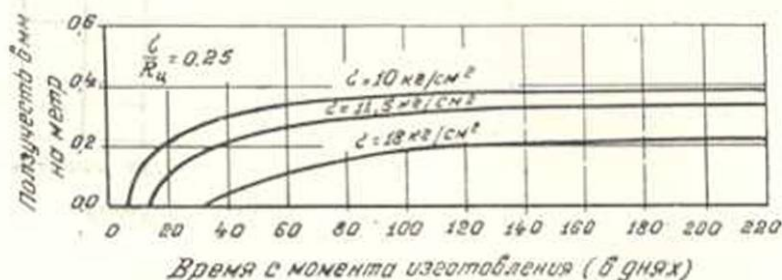
После шестимесячного наблюдения за деформациями образцов, исключением усадочных деформаций были получены кривые ползучести бетона.

Опыты различных исследователей [4, 5, 6] показывают, что с увеличением возраста бетона к моменту нагружения деформации ползучести уменьшаются. В этих опытах, обычно, бетон нагружался при одном и том же напряжении, независимо от его возраста. В силу этого относительное напряжение в момент нагружения было не одинаково для всех возрастов, а падало с увеличением возраста бетона к моменту нагружения. Поскольку в наших опытах исследовалась ползучесть бетона при различных возрастах, при напряжении до $0,7 R_n$, которое для возраста 32 дня составляло $\sigma = 50 \text{ кг/см}^2$, то, естественно, нельзя было загружать бетон в возрасте 7 и 14 дней тем же напряжением, так как указанное напряжение для возрастов 7 и 14 дней составляло больше их предела прочности на сжатие. Исходя из этого было принято одинаковое относительное напряжение для всех возрастов бетона к моменту нагружения.

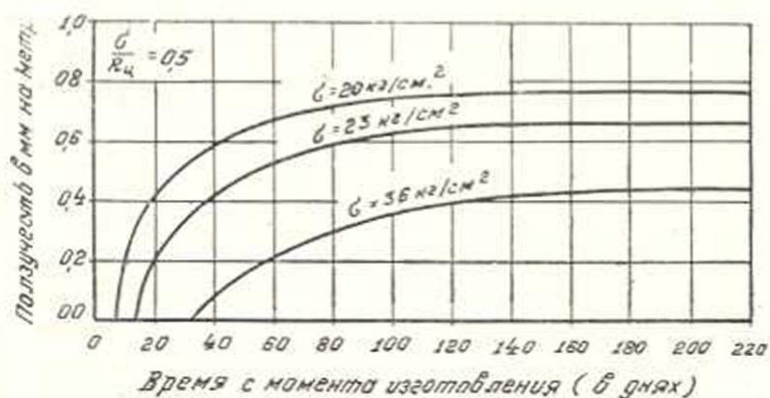
На фиг. 3 и 4 приведены полученные нами кривые ползучести бетона, загруженного в различных возрастах при напряжении $0,25$ и $0,5 R_n$, откуда видно, что чем моложе бетон к моменту нагружения, тем больше интенсивность нарастания деформации ползучести в начальный период загрузки. С увеличением длительности нагружения интенсивность нарастания ползучести падает. При этом, чем

¹ Относительным напряжением $\frac{\sigma}{R_n}$ нами условно названо отношение фактического сжимающего напряжения в бетоне σ к пределу прочности бетона R_n на сжатие к моменту нагружения образца.

моложе бетон к моменту нагружения, тем быстрее падает интенсивность нарастания деформации ползучести благодаря последующему интенсивному нарастанию прочности бетона и, в связи с этим, падению относительного напряжения во времени. По этой причине кривая ползучести бетона, нагруженного в возрасте 7 дней, достигает своего предельного значения раньше остальных.



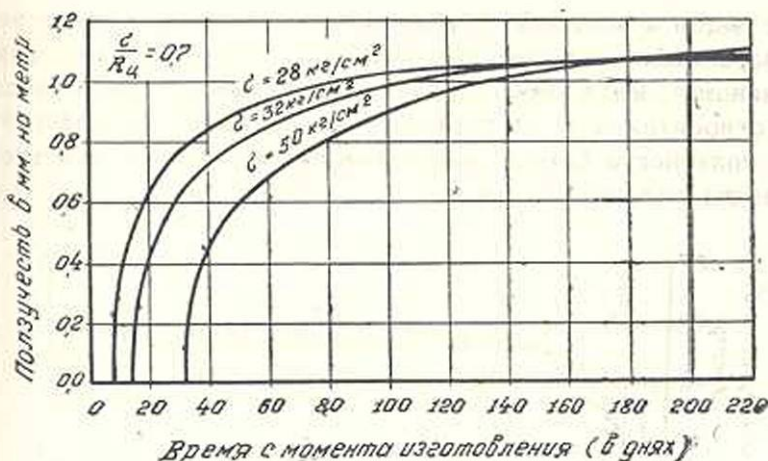
Фиг. 3



Фиг. 4

На фиг. 5 нанесены кривые ползучести бетонных образцов, нагруженных в тех же возрастах при напряжении $0,7 R_k$. Здесь также, чем моложе бетон, тем интенсивнее развиваются деформации ползучести в начальный период нагружения и тем быстрее достигают они своего предельного значения. В начальный период нагружения эти кривые почти параллельны, но далее, постепенно приближаясь, пересекают друг друга. В итоге, после определенной длительности нагружения, кривая ползучести бетона, нагруженного в возрасте 32 дней, располагается выше остальных, кривая ползучести в возрасте 7 дней — ниже всех, кривая ползучести в возрасте 14 дней занимает промежуточное положение.

Существуют различные мнения о механизме ползучести бетона. Одни авторы ползучесть бетона в основном объясняют вязкостью

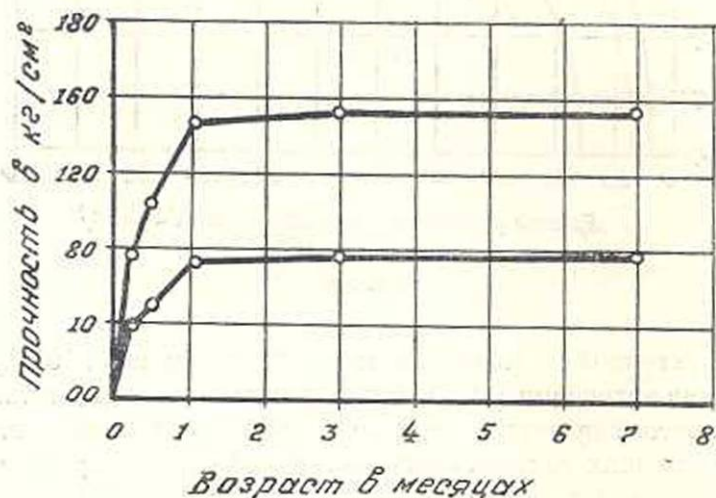


Фиг. 5

гелевой структурной составляющей цементного камня [7, 10], другие — капиллярными явлениями [9]. Некоторые исследователи считают, что ползучесть бетона является следствием обоих этих факторов. Кроме этого, при высоких напряжениях — выше 0,55–0,6 от предела прочности бетона, — в бетоне появляются разрывы, микротрещины, развитие которых также приводит к ползучести [3, 8]. О. Я. Берг на основании своих опытов пришел к выводу, что основной причиной ползучести бетона при высоких ступенях нагрузки является появление и развитие микрощелей [3]. Конечно, это положение верно при кратковременных испытаниях бетона, так как развитие деформаций ползучести за счет вязкости геля и капиллярных явлений в большей мере зависит от длительности нагружения и возраста бетона к моменту приложения нагрузки. При этом следует полагать, что чем больше возраст бетона к моменту длительного нагружения, тем больше будет деформация ползучести за счет появления и развития микротрещин и меньше — за счет вязкости геля и капиллярных явлений. Хотя наши опыты и не сопровождались соответствующими наблюдениями за развитием микротрещин на поверхности нагруженных бетонных образцов, однако результаты этих опытов приводят нас к этому выводу. Дело в том, что деформации ползучести бетона, нагруженного в старом возрасте напряжением более 0,55–0,6 R_n , в основном обусловлены появлением и развитием микротрещин благодаря незначительному росту прочности бетона, и, в связи с этим, незначительного падения относительного напряжения в процессе длительного нагружения. По этой же причине, при напряжениях, близких к пределу прочности бетона, развитие микротрещин может привести к разрушению бетона.

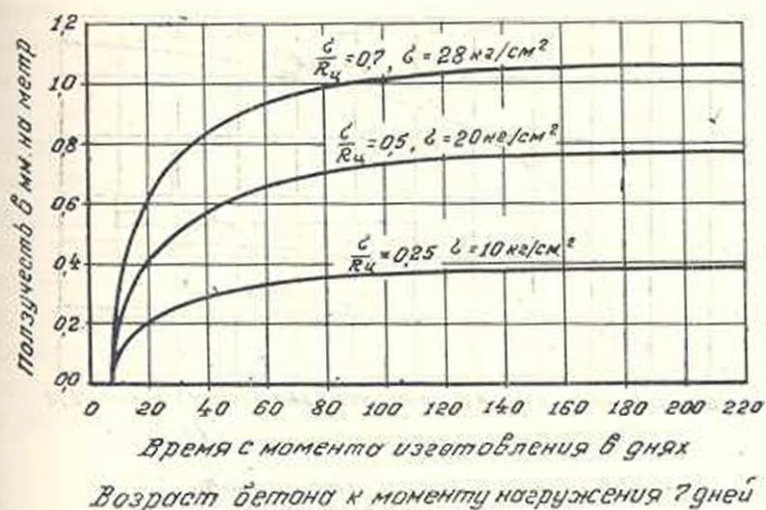
Совсем иначе обстоит дело при нагружении бетона длительной нагрузкой в молодом возрасте, напряжением выше 0,55–0,6 R_n .

В этом случае деформации бетона гораздо в большей мере зависят от вязкости геля и капиллярных явлений. А такой фактор, как развитие макротрещин имеет существенное значение лишь в начальный период загрузки, так как благодаря интенсивному нарастанию прочности бетона после нагружения, относительное напряжение в бетоне быстро падает. Это наглядно видно из фиг. 6, на которой приведе-

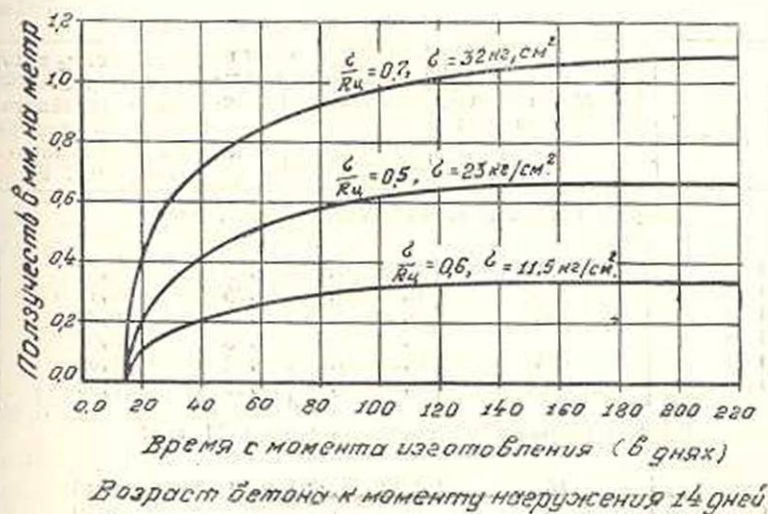


Фиг. 6

ны две кривые, из коих верхняя—кривая нарастания кубиковой прочности бетона во времени, а нижняя—кривая нарастания цилиндрической прочности бетона. Когда бетон с 7-дневного возраста достигает месячного возраста, прочность его почти удваивается, в то время как после месячного возраста нарастание прочности незначительно. Таким образом, благодаря нарастанию прочности бетона, нагруженного в молодом возрасте, относительное напряжения соответственно быстро падает и тем самым образование новых трещин и развитие старых должно прекратиться. Появление новых трещин, повидимому, прекратится в тот момент, когда относительное напряжение, благодаря росту прочности бетона, станет меньше $0,55-0,6 R_n$, так как при этом обычно начинают появляться трещины ввиду достижения в бетоне предельной деформации при растяжении, которое сопровождается соответствующими поперечными деформациями [3]. С наступлением этого момента дальнейшие деформации ползучести бетона будут в основном обусловлены вязкостью гелевой структурной составляющей цементного камня, а также капиллярными явлениями. На фиг. 7, 8, 9 приведены кривые ползучести бетона при напряжениях 0,25, 0,5 и 0,7 от предела прочности бетона в каждом возрасте. В таблице 3 приведены деформации ползучести при различных возрастах бетона к моменту нагружения и различных значениях длительности нагружения и напряжения. Как видно из таб-

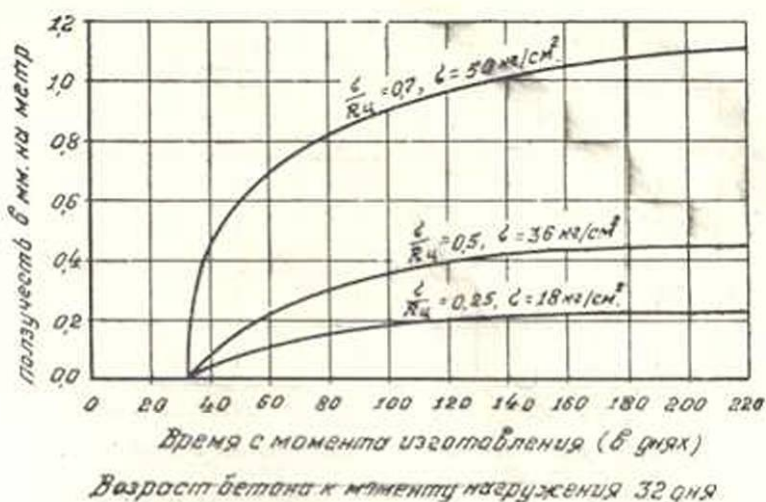


Фиг. 7



Фиг. 8

лины, для бетона в возрасте 7 и 14 дней при $0 \leq \frac{\sigma}{R_u} \leq 0.5$ имеется линейная зависимость между деформациями и соответствующими напряжениями. Линейная зависимость при $0.7 R_u$ нарушается, в особенности, в начальный период нагружения. В дальнейшем, по мере увеличения длительности нагружения, эта нелинейность постепенно уменьшается. В результате этого, для бетона, нагруженного в возрасте 7 дней, наступает момент (при длительности нагружения примерно 3 месяца), после которого наблюдается линейная зависимость даже



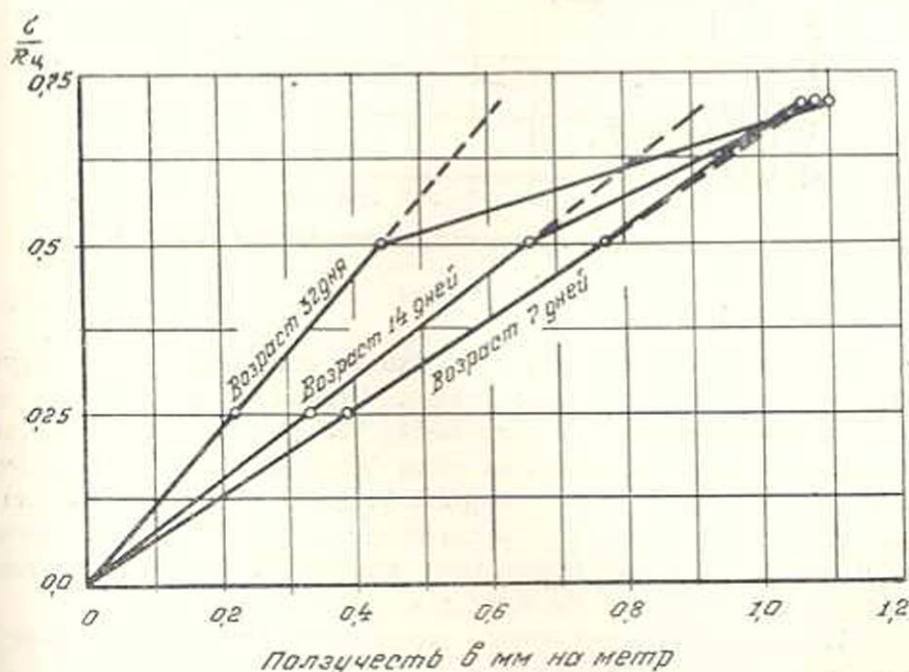
Фиг. 9

Таблица 3

Возраст бетона с момента изготовления образцов в днях	Длительность нагружения в днях	Ползучесть ε_2 в мм на м по кривым ползучести при напряжениях			Ползучесть ε_2 в мм на м в предположении линейного изменения деформации до напряжения $0,7 R_{ch}$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ в мм на м
		$0,25 R_{ch}$	$0,5 R_{ch}$	$0,7 R_{ch}$ ε_1		
Возраст бетона к моменту нагружения 7 дней						
20	13	0,20	0,40	0,62	0,57	0,05
30	23	0,25	0,50	0,75	0,71	0,04
40	33	0,29	0,58	0,83	0,80	0,03
60	53	0,33	0,66	0,93	0,92	0,01
100	93	0,36	0,72	1,02	1,02	0
220	213	0,38	0,76	1,06	1,08	0,02
Возраст бетона к моменту нагружения 14 дней						
30	16	0,17	0,34	0,61	0,46	0,15
40	26	0,21	0,42	0,72	0,59	0,13
60	46	0,26	0,52	0,84	0,72	0,12
100	86	0,31	0,62	0,98	0,87	0,11
220	206	0,33	0,66	1,08	0,93	0,15
Возраст бетона к моменту нагружения 32 дня						
40	8	0,04	0,08	0,43	0,11	0,33
60	28	0,11	0,22	0,67	0,29	0,38
100	68	0,18	0,36	0,89	0,49	0,40
220	188	0,22	0,44	1,10	0,62	0,48

при напряжении $0,7 R_{ch}$. Уменьшение степени нелинейности с увеличением времени нахождения бетона под нагрузкой в основном является следствием уменьшения во времени относительного напряжения благодаря росту прочности бетона и, в связи с этим, уменьшения де-

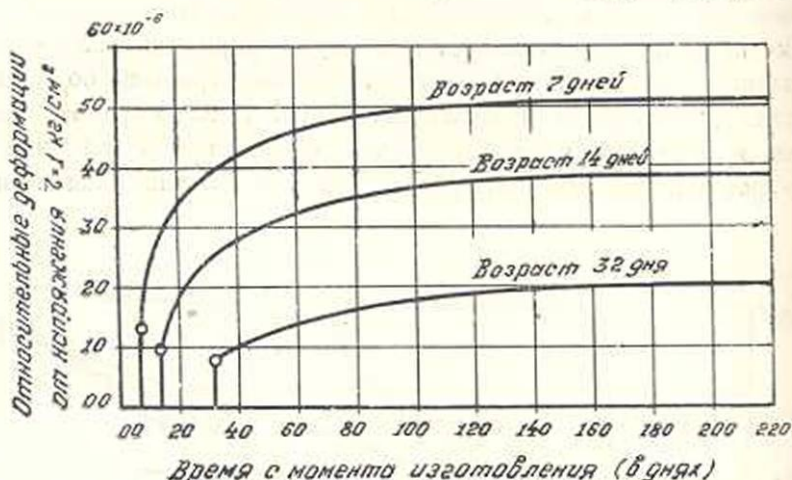
формаций от образования и развития микротрещин. Иная картина получается при нагружении бетона в месячном возрасте (см. таблицу 3). Здесь также в пределах напряжений $0,5 R_n$ наблюдается линейная зависимость между деформациями и напряжениями. Однако при напряжении $0,7 R_n$ линейность сильно нарушается. При этом с увеличением длительности нагружения степень нелинейности возрастает. Это вполне закономерно, так как ввиду незначительного роста прочности бетона после месячного возраста, относительное напряжение падает незначительно, а поэтому деформации ползучести, обусловленные образованием и развитием микротрещин, во времени не затухают, а наоборот, продолжают расти. Таким образом, чем старше бетон к моменту нагружения, тем существеннее влияние указанного фактора на его ползучесть. На фиг. 10 нанесены кривые из-



Фиг. 10

менения ползучести бетона в зависимости от напряжения при длительности нагружения 190 дней. Кривые соответствуют возрасту бетона в момент нагружения 7, 14 и 32 дня. Из рассмотрения этих кривых видно, что линейная зависимость между деформациями и напряжениями, независимо от возраста бетона, имеет место при напряжениях, не превышающем $0,5 R_n$. Далее, с увеличением напряжения, линейность нарушается тем сильнее, чем больше возраст бетона к моменту нагружения. Степень нелинейности отчетливо видна на фигуре, где условно, пунктирными линиями, линейность распространена до предела напряжений $0,7 R_n$.

На фиг. 11 приведены кривые ползучести бетона с соответствующими мгновенно упругими деформациями при $\sigma = 1 \text{ кг/см}^2$ исходя из линейной зависимости между деформациями и напряжениями в пределах до $0,5 R_n$. Рассматривая кривые ползучести бетона от единичного напряжения, т. е. кривые меры ползучести, мы замечаем, что после достижения бетоном возраста 2 месяцев, эти кривые разных возрастов загрузки параллельны друг другу. Дефор-



Фиг. 11

мации ползучести на много превосходят соответствующие упругие деформации при нагружении бетона. Отношение деформаций ползучести при длительности нагружения 190 дней к соответствующим упругим деформациям для возраста бетона к моменту нагружения 7 дней составляет 3,1, для возраста 14 дней—3,0 и для возраста 32 дня—1,5. Таким образом, с увеличением возраста бетона к моменту нагружения отношение деформаций ползучести к соответствующим упругим деформациям уменьшается.

На основании проведенных экспериментальных исследований могут быть сделаны следующие выводы:

1. При относительном напряжении менее 0,5:

а) опытами подтверждается линейная зависимость между деформациями ползучести и соответствующими сжимающими напряжениями;

б) отношение деформаций ползучести к мгновенным деформациям, при одинаковой длительности загрузки, уменьшается с увеличением возраста бетона к моменту нагружения.

2. При относительном напряжении 0,7:

а) деформации ползучести бетона, нагруженного в молодом возрасте (7 дней), по сравнению с деформациями бетона, нагруженного в более позднем возрасте (32 дня) скорее достигают своего предельного значения;

б) между деформациями и напряжениями имеется нелинейная зависимость; отклонение от линейного закона увеличивается с увеличением возраста бетона к моменту нагружения.

Институт строительных материалов и
сооружений АН Армянской ССР

Поступило 18 XII 1952

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. А. Теория упругого напряженного состояния бетона с учетом ползучести. ПММ, том XIII, вып. 6, 1949.
2. Арутюнян Н. А. Некоторые вопросы теории ползучести. ДАН Армянской ССР, том XII, № 3, 1951.
3. Берг О. Я. К вопросу о прочности и пластичности бетона. ДАН СССР, том XII, № 4, 1950.
4. Карапетян К. С. О ползучести туфобетона. Известия АН Армянской ССР (серия ФМЕТ наук), том V, № 4, 1952.
5. Столяров Я. В. Введение в теорию железобетона. Стройиздат, 1941.
6. Сатакин А. В. Ползучесть бетона. Сборник „Прочность, упругость и ползучесть бетона“ под ред. проф. Н. М. Белыева. Стройиздат Наркомстроя, 1941.
7. Улицкий И. И. Ползучесть бетона. Гостехиздат Украины, 1948.
8. Улицкий И. И. Расчет бетонных и железобетонных арочных и комбинированных конструкций с учетом длительных процессов. Гостехиздат Украины, 1950.
9. Фрейсине Е. Переворот в технике бетона. ОНТИ, 1938.
10. Шейкин А. Е. К вопросу прочности, упругости и пластичности бетона. Труды МИИТ, вып. 69, Трансжелдориздат, 1946.

Կ. Ս. Նարարեղյան

ԲԵՏՈՆԻ ՍՈՂՔԸ ԲԱՐՁՐ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԴԵՓՈՐՄԱՆ

Ա. Մ. Փ. Ո. Փ. Ո. Մ.

Հոդվածում բերված են ծանր բետոնի սողքի էքսպերիմենտալ հետազոտությունների արդյունքները՝ բետոնի ամրության սահմանի 0,25, 0,5 և 0,7 մասերը կազմող լարումների դեպքում:

Պարզված է, որ

1. 0,5-ից ցածր հարաբերական լարման դեպքում՝

ա) փորձերով հաստատվում է գծային կախումը սողքի դեֆորմացիաների և սեղմման համապատասխան լարումների միջև:

բ) բեռնավորման միևնույն անողուն լարումների դեպքում սողքի և ակնթարթային դեֆորմացիաների հարաբերությունն այնքան ավելի փոքր է, որքան մեծ է բետոնի հասակը բեռնավորման մոմենտին:

2. 0,7 հարաբերական լարման դեպքում՝

ա) Վաղ հասակում (7 օր) բեռնավորված բետոնի սողքի դեֆորմացիաները, ավելի ուշ հասակում (32 օր) բեռնավորված բետոնի սողքի դեֆորմացիաների համեմատությամբ ավելի շուտ են հասնում իրենց սահմանային արժեքին:

բ) դեֆորմացիաների ու լարումների միջև գոյություն ունի ոչ-գրգռային կախում: Շեղումը գծային օրենքից այնքան ավելի մեծ է, որքան մեծ է բետոնի հասակը բեռնավորման մոմենտին: