Известия НАН Армении, Математика, том 59, н. 4, 2024, стр. 58 – 72.

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Х. А. ХАЧАТРЯН, А. С. ПЕТРОСЯН

Ереванский государственный университет[1]
Национальный Аграрный Университет Армении
E-mails: *khachatur.khachatryan@ysu.am; Haykuhi25@mail.ru*

Аннотация. Рассматривается бесконечная система интегральных уравнений со степенной нелинейностью на положительной полупрямой. Ряд частных случаев указанной системы возникают во многих направлениях математической физики. В частности системы указанного характера встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в математической теории распространения эпидемических заболеваний, в эконометрике. Доказывается существование неотрицательного (по координатно) нетривиального и ограниченного решения. При дополнительном ограничении на матричное ядро исследуется также асимптотическое поведение на бесконечности. В случае сильной симметричности (симметричность и по координатам и по индексам) матричного ядра доказывается также теорема единственности решения в определенном классе бесконечных и ограниченных вектор-функций. В конце приводятся конкретные примеры бесконечного матричного ядра имеющие прикладной интерес в указанных выше приложениях.

MSC2020 number: 45G15.

Ключевые слова: бесконечная система; итерации; монотонность; ограниченное решение; бесконечная вектор-функция.

1. Введение

1.1. **Постановка задачи.** Настоящая работа посвящена исследованию вопросов существования, единственности, а также асимптотического поведения решения на $+\infty$ следующей бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений на положительной полупрямой:

$$(1.1)\quad f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) f_j^{\alpha}(t)dt, \quad i \in \mathbb{Z}^+ := \{0, 1, \ldots\},\ x \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$$

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 23RL-1A027. Исследование второго автора выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

относительно искомой бесконечной вектор-функции $f(x) := (f_0(x), \dots, f_n(x), \dots)^T$ (T знак транспонирования) из следующего класса:

$$\begin{gathered}\mathbb{B} := \{\varphi(x) := (\varphi_0(x), \dots, \varphi_n(x), \dots)^T : \\ \varphi_j(x) \geq 0, \quad j \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+, \quad \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \varphi_j(x) < +\infty\}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

В системе (1.1) показатель α принимает значения из интервала $(0,1)$, а последовательность функций $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующим основным ограничениям:

a) существует натуральное число N и функции $\{\overset{\circ}{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ со свойствами:

$a_1)$ $\overset{\circ}{K}_m(-x) = \overset{\circ}{K}_m(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$
$\overset{\circ}{K}_{-m}(t) = \overset{\circ}{K}_m(t), \quad t \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty), \quad m \in \mathbb{Z}^+,$

$a_2)$ $\overset{\circ}{K}_m(x) \downarrow$ по x на множестве $\mathbb{R}^+$, $m = -N, \dots, 0, \dots N$,

$a_3)$ $\overset{\circ}{K}_m \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{Z}$, причем $\sum\limits_{m=-N}^{N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{K}_m(x)dx = 1$,

$a_4)$ $\int\limits_0^{\infty} x\overset{\circ}{K}_m(x)dx < +\infty$, $m \in \mathbb{Z}$, причем такие, что

$$K_m(x,t) \geq \overset{\circ}{K}_m(x-t) - \overset{\circ}{K}_m(x+t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{1.3}$$

b) существуют

$$a_i := \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \int_0^{\infty} K_i(x,t)dt, \quad i \in \mathbb{Z}, \tag{1.4}$$

при этом

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 2, \; a_{-i} = a_i > 0, \; i \in \mathbb{Z}^+, \; \int_0^{\infty} K_i(x,t)dt \not\equiv a_i, \; i \in \mathbb{Z}, \; \sum_{i=1}^{\infty} i a_i < +\infty. \tag{1.5}$$

1.2. **Возможные приложения и история вопроса.** Система нелинейных интегральных уравнений (1.1) в ряде частных случаев матричного ядра $(K_{i-j}(x,t))_{i,j=0}^{\infty}$ возникает во многих разделах математического естествознания. В частности, в случае когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| > N$, $m \in \mathbb{Z}$ системы вида (1.1) встречаются в различных направлениях математической физики, эконометрики и математической биологии. Так например, когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$ и $K_0(x,t) = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}}(e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2})$, $c_0 > 0$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, такие задачи возникают в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн для скалярного поля тахионов (см. [1]-[4]). В случае когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| >$

N, $m \in \mathbb{Z}$ и $K_m(x,t) = \int\limits_a^b e^{-|x-t|s} d\sigma_m(s)$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $m = -N, \ldots, 0, \ldots, N$, $\sigma_m(s) \uparrow$ на $[a,b)$, $0 < a < b \leq +\infty$, $\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma_m(s) < +\infty$, $m = -N, \ldots, 0, \ldots, N$, системы такого характера встречаются в теории переноса излучения в спектральных линиях, в кинетической теории газов и в математической теории распределения дохода в рамках нелинейной модифицированной модели Саргана (см. [5]-[8]). Наконец, в том случае когда ядра $K_m(x,t) \equiv a_m K_m^*(t)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}^+$, $m \in \mathbb{Z}$, при этом $K_m^* \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap C_M(\mathbb{R}^+)$, а последовательность чисел a_m, $m \in \mathbb{Z}$ обладает свойством $b)$ и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям, такие системы возникают в математической теории распространения эпидемических заболеваний (см. [9]).

Система интегральных уравнений (1.1) исследовалось в случае когда $K_m(x,t) \equiv 0$, при $|m| > N$, $m \in \mathbb{Z}$ и для ядер $\{K_m(x,t)\}_{m=-N}^{N}$ минорантами (или мажорантами) в смысле М.А. Красносельского служат разностные или суммарно-разностные консервативные ядра (см. [4], [10]-[13]). Соответствующие дискретные аналоги системы (1.1) при различных нелинейностях (не только степенных) достаточно подробно изучались в работах [14]-[17].

1.3. **Сводка основных результатов.** В настоящей работе сперва при условиях $a), b)$ мы докажем существование покомпонентно положительного решения системы (1.1) в классе бесконечных вектор-функций $\mathbb{B}$. Затем, при одном дополнительном ограничении на матричное ядро $(K_{i-j}(x,t))_{i,j=0}^{\infty}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ мы будем доказывать интегральную асимптотику построенного решения. Наконец, используя этот результат при дополнительном условии симметричности ядер $K_m(x,t)$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ (и по индексу и по аргументам) докажем единственность решения в определенном подклассе класса $\mathbb{B}$. В конце работы приведем конкретные прикладные примеры матричных ядер $(K_{i-j}(x,t))_{i,j=0}^{\infty}$ удовлетворяющих всем условиям доказанных теорем.

2. Существование ограниченного решения

Теорема 2.1. *При условиях* $a)$ *и* $b)$ *бесконечная система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в классе* $\mathbb{B}$ *имеет покомпонентно неотрицательное нетривиальное решение:* $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$. *Более того существует* $r > 0$ *такое, что* $\inf\limits_{x \geq r} f_j(x) > 0$, $j \in \mathbb{Z}^+$.

Доказательство. **(I-шаг).** Сперва рассмотрим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$z_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} z_j^{\alpha}, \quad i = \mathbb{Z}^+ \tag{2.1}$$

относительно бесконечного вектора $z = (z_0, z_1, \ldots, z_n, \ldots)^T$ из пространства ограниченных последовательностей m с положительными координатами $z_i, i = 0, 1, \ldots$. Введем следующее обозначение:

$$\tau_i = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} z_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.2}$$

Тогда относительно бесконечного вектора $\tau = (\tau_0, \ldots, \tau_n, \ldots)^T$ система (2.1) примет следующий вид:

$$\tau_i = \sum_{j=0}^{\infty} b_{i-j} \tau_j^{\alpha}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \tag{2.3}$$

где

$$b_i := \frac{1}{2} a_i, \quad i \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

Из результатов работы [14] следует, что система (2.3) имеет покомпонентно положительное решение в пространстве m. Более того справедливи следующие соотношения:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq \tau_i \leq 1, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{i=0}^{\infty} (1 - \tau_i) < +\infty, \tag{2.5}$$

$$\tau_{i+1} \geq \tau_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.6}$$

Из (2.5) и (2.6), в силу (2.2) получаем, что

$$1 \leq z_i \leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad \sum_{i=0}^{\infty} (2^{\frac{1}{1-\alpha}} - z_i) < +\infty, \tag{2.7}$$

$$z_{i+1} \geq z_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.8}$$

Рассмотрим теперь следующие итерации для основной бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений (1.1):

$$\begin{gathered} f_i^{(p+1)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) (f_j^{(p)}(t))^{\alpha} dt, \quad x \in \mathbb{R}^+, \\ f_i^{(0)}(x) \equiv z_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in \mathbb{Z}^+. \end{gathered} \tag{2.9}$$

Индукцией по p несложно проверить, что

$$f_i^{(p)}(x) \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

Докажем, что

$$f_i^{(p)}(x) \downarrow \text{ по } p, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.11}$$

Во-первых в силу (2.1), (2.10), a) и b) из (2.9) имеем

$$f_i^{(1)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t)dt \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} z_j^{\alpha} = z_i = f_i^{(0)}(x), \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Предполагая, что $f_i^{(p)}(x) \leq f_i^{(p-1)}(x), i \in \mathbb{Z}^+,\ x \in \mathbb{R}^+$ при некотором натуральном p из (2.9) в силу $a), b)$ и (2.10) получаем, что $f_i^{(p+1)}(x) \leq f_i^{(p)}(x), i \in \mathbb{Z}^+,\ x \in \mathbb{R}^+$.

(II-шаг). Наряду с системой (1.1) рассмотрим теперь следующую вспомогательную систему нелинейных интегральных уравнений с суммарно-разностным ядром на положительной полупрямой:

$$\psi_i^{\gamma}(x) = \sum_{j=0}^{N} \int\limits_0^{\infty} (\overset{\circ}{K}_{i-j}(x-t) - \overset{\circ}{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.12}$$

относительно искомой измеримой и ограниченной на множестве $\mathbb{R}^+$ вектор-функции $\psi(x) := (\psi_0(x), \ldots, \psi_N(x))^T$ с неотрицательными координатами $\psi_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, N$, $x \in \mathbb{R}^+$, где

$$\gamma := \frac{1}{\alpha} > 1. \tag{2.13}$$

Из результатов работы [10] следует, что система нелинейных интегральных уравнений (2.12) имеет по координатно неотрицательное нетривиальное непрерывное монотонно неубывающее и ограниченное на $\mathbb{R}^+$ решение $\psi(x) = (\psi_0(x), \ldots, \psi_N(x))^T$, причем

$$0 = \psi_i(0) \leq \psi_j(x) \leq 1, \quad j = 0, 1, \ldots, N, \quad x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.14}$$

для каждого $j \in \{0, 1, \ldots, N\}$ существует число $r_j > 0$ такое, что

$$d_j := \inf_{x \geq r_j} \psi_j(x) > 0, \tag{2.15}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \psi_j(x) = 1, \quad 1 - \psi_j \in L_1(\mathbb{R}^+), \quad j = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.16}$$

Обозначим через $r := \max(r_0, r_1, \ldots, r_N)$. Тогда из (2.15) немедленно следует, что

$$d := \min(\inf_{x \geq r} \psi_0(x), \inf_{x \geq r} \psi_1(x), \ldots, \inf_{x \geq r} \psi_N(x)) > 0. \tag{2.17}$$

Ниже докажем, что имеет место следующая оценка снизу для последовательных приближений (2.9):

(2.18)
$$f_i^{(p)}(x) \geq \begin{cases} \psi_i^\gamma(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}^+, i = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^+, i = N+1, N+2, \ldots \end{cases} := \Phi_i(x), i \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+.$$

Действительно, в случае $p = 0$ неравенство (2.18) сразу следует из (2.14) и (2.7) с учетом определения нулевого приближения в итерациях (2.9). Предположим, что $f_i^{(p)}(x) \geq \Phi_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+$ при некотором натуральном p. Тогда, принимая во внимание неравенство (1.3), (2.12), (2.13) для всех $i = 0, 1, \ldots, N$ и $x \in \mathbb{R}^+$ из (2.9) будем иметь

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)\Phi_j^\alpha(t)dt \geq \sum_{j=0}^{N} \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)\psi_j(t)dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^{N} \int_0^\infty (\mathring{K}_{i-j}(x-t) - \mathring{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt = \psi_i^\gamma(x),$$

а для $i = N+1, N+2, \ldots$, $x \in \mathbb{R}^+$ неравенство $f_i^{(p+1)}(x) \geq \Phi_i(x)$ сразу получается из (2.10). Таким образом мы доказали, что $f_i^{(p+1)}(x) \geq \Phi_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+, x \in \mathbb{R}^+$.

Из (2.11), (2.18) и (2.7) следует, что последовательность бесконечных вектор-функций $f^{(p)}(x) := (f_0^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x), \ldots)^T$, $p \in \mathbb{Z}^+$ имеет поточечный предел когда $p \to +\infty$: $\lim\limits_{p\to+\infty} f_i^{(p)}(x) = f_i(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, причем координаты предельной бесконечной вектор-функции: $f(x) := (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ удовлетворяют двойному неравенству:

$$\Phi_i(x) \leq f_i(x) \leq z_i \leq 2^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.19}$$

Заметим, что правая часть (2.9) из себя представляет сумму равномерно сходящегося ряда. Действительно, из (2.7), (2.10), (2.11), (1.4) и (1.5) имеем

$$0 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)(f_j^{(p)}(t))^\alpha dt \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)dt \leq$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m = 2^{\frac{1}{1-\alpha}}, \ i \in \mathbb{Z}^+, \ p \in \mathbb{Z}^+, \ x \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}^+$ из (2.9) получаем, что

$$f_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \lim_{p\to+\infty} \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)(f_j^{(p)}(t))^\alpha dt, \quad i \in \mathbb{Z}^+. \tag{2.20}$$

Снова используя (2.11), (2.18), a) и b) согласно теореме Б. Леви (см. [18]) сможем утверждать, что почти при всех $x \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^\infty K_{i-j}(x,t)(f_j^{(p)}(t))^\alpha dt = \int_0^\infty K_{i-j}(x,t)f_j^\alpha(t)dt, \quad i,j\in\mathbb{Z}^+. \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) получаем, что бесконечная вектор-функция $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$ удовлетворяет системе нелинейных интегральных уравнений (1.1).

(III-шаг). Для завершения доказательства сформулированной теоремы остается убедиться, что $\inf\limits_{x\geq r} f_i(x) > 0$, $i \in \mathbb{Z}^+$. Учитывая (2.18), (2.19), (2.17), a), b) и (1.3) из (1.1) для всех $x \geq r$ и $i \in \mathbb{Z}^+$ будем иметь

$$f_i(x) \geq \sum_{j=0}^N \int_0^\infty (\mathring{K}_{i-j}(x-t) - \mathring{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt \geq$$

$$\geq \sum_{j=0}^N \int_r^\infty (\mathring{K}_{i-j}(x-t) - \mathring{K}_{i-j}(x+t))\psi_j(t)dt \geq$$

$$\geq d\sum_{j=0}^N \int_r^\infty (\mathring{K}_{i-j}(x-t) - \mathring{K}_{i-j}(x+t))dt = d\sum_{j=0}^N \left(\int_{-\infty}^{x-r} \mathring{K}_{i-j}(y)dy - \int_{x+r}^\infty \mathring{K}_{i-j}(y)dy\right) \geq$$

$$\geq d\sum_{j=0}^N \left(\int_{-\infty}^{0} \mathring{K}_{i-j}(y)dy - \int_{2r}^\infty \mathring{K}_{i-j}(y)dy\right) =$$

$$= d\sum_{j=0}^N \int_0^{2r} \mathring{K}_{i-j}(y)dy \geq 2dr\sum_{j=0}^N \mathring{K}_{i-j}(2r) = 2dr\sum_{m=i-N}^{i} \mathring{K}_m(2r) > 0, \quad i\in\mathbb{Z}^+.$$

Следовательно, $\inf\limits_{x\geq r} f_i(x) \geq 2dr\sum\limits_{m=i-N}^{i} \mathring{K}_m(2r) > 0, \quad i\in\mathbb{Z}^+.$

Таким образом теорема полностью доказана. □

3. Интегральная асимптотика решения системы (1.1)

В этом параграфе накладывая более сильное (по сравнению с условием a)) условие на ядра $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^\infty$, при условии b) мы получим интегральную асимптотику решения системы (1.1) в случае когда показатель $\alpha \in (0, \log_3 \frac{3}{2})$.

Предположим, что

c) существует последовательность функций $\{\tilde{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^\infty$, со свойствами:

c_1) $\tilde{K}_i(-x) = \tilde{K}_i(x) > 0, \quad x\in\mathbb{R}^+, \quad i\in\mathbb{Z},$

$c_2)$ $\tilde{K}_i \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R}), \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_i(x)dx = a_i, \quad i \in \mathbb{Z},$

$c_3)$ $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} x\tilde{K}_i(x)dx < +\infty,$

такое, что

$$K_i(x,t) \geq \tilde{K}_i(x-t), \quad i \in \mathbb{Z}, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^+. \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *При условиях* $c)$ *и* $b)$ *система интегральных уравнений* (1.1) *в классе* $\mathbb{B}$ *имеет покомпонентно положительное решение* $f(x) = (f_0(x),\ldots, f_n(x), \ldots)^T$, *причем, если* $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$, *то*

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^+} \int\limits_0^{\infty} (z_i - f_i(x))dx < +\infty, \tag{3.2}$$

где $\{z_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ *решение бесконечной системы алгебраических уравнений* (2.1) *и обладает свойствами* (2.7), (2.8).

Доказательство. Снова рассмотрим итерации (2.9) для системы (1.1). Используя условия $c)$ и $b)$ аналогично можно доказать, что имеют места утверждения (2.10), (2.11). Докажем теперь, что при выполнении условия $c)$ имеет место следующая равномерная оценка снизу для всех членов последовательности $f_i^{(p)}(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_i^{(p)}(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad p \in \mathbb{Z}^+. \tag{3.3}$$

В случае когда $p = 0$ оценка (3.3) сразу следует из (2.9) и (2.7). Предположим, что (3.3) имеет место при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда учитывая условия $c), b)$ из (2.9) будем иметь

$$f_i^{(p+1)}(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} K_{i-j}(x,t)dt \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dt =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{K}_{i-j}(y)dy \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \tilde{K}_{i-j}(y)dy = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{i} a_m \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \sum_{m=-\infty}^{0} a_m \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+$$

ибо $a_{-i} = a_i > 0$, $i \in \mathbb{Z}^+$ и $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} a_i = 2$.

Следовательно существует поточечный предел последовательности бесконечных вектор-функций: $f^{(p)}(x) := (f_0^{(p)}(x), \ldots, f_n^{(p)}(x), \ldots)^T$, $p \in \mathbb{Z}^+$:

$$f_i(x) = \lim_{p \to +\infty} f_i^{(p)}(x), \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+,$$

причем

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq f_i(x) \leq z_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{3.4}$$

Повторяя аналогичные рассуждения как в доказательстве теоремы 1, можно убедиться, что $f(x) = (f_0(x), \ldots, f_n(x), \ldots)^T$ является решением бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений (1.1) почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Докажем теперь формулу (3.2). Принимая во внимание $c_1) - c_3)$, (3.1) и (3.4), а также равномерное сходимость и ограниченность функциональных рядов:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) f_j^{\alpha}(t)dt, \quad \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x \pm t)dt, \tag{3.5}$$

из (2.9) для произвольного положительного R в силу теоремы Фубини (см. [18]) будем иметь

$$\int_0^R (z_i - f_i(x))dx = \int_0^R \left(\sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \left(\int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dt + \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x+t)dt\right)\right) dx -$$

$$- \int_0^R \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} K_{i-j}(x,t) f_j^{\alpha}(t)dt\right) dx \leq \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)(z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dtdx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int_0^R \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x+t)dtdx \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_x^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(y)dydx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)(z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dtdx \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(y)dydx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{\alpha} \int_0^R \int_R^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t)dtdx + \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^R \tilde{K}_{i-j}(x-t)(z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dtdx \leq$$

$$\leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^{\infty} y\tilde{K}_{i-j}(y)dy + 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^R \int_R^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(t-x)dtdx +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} a_{i-j} \int_0^R (z_j^{\alpha} - f_j^{\alpha}(t))dt \leq 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} y\tilde{K}_i(y)dy +$$

$$+2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^R\int\limits_{R-x}^{\infty}\tilde{K}_{i-j}(y)dydx+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_0^R(z_j^\alpha-f_j^\alpha(t))dt=$$

$$=2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^R\int\limits_t^{\infty}\tilde{K}_{i-j}(y)dydt+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_0^R(z_j^\alpha-f_j^\alpha(t))dt\le$$

$$\le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_{i-j}(y)dy+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_0^R(z_j^\alpha-f_j^\alpha(t))dt\le$$

$$\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_0^R(z_j^\alpha-f_j^\alpha(t))dt\le$$

$$\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_0^R\theta_j^{\alpha-1}(t)(z_j-f_j(t))dt=:I_i,\quad i\in\mathbb{Z}^+,$$

где $f_j(t)\le\theta_j(t)\le z_j$, $t\in[0,R]$, $j\in\mathbb{Z}^+$ (по теореме Лагранжа). Учитывая оценку (3.4) получим, что

$$I_i\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\int\limits_0^R(z_j-f_j(t))dt\le$$

$$\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+2\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_0^R(z_j-f_j(t))dt\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\le$$

$$\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+4\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_0^R(z_j-f_j(t))dt,$$

ибо $z_j\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $j\in\mathbb{Z}^+$ и $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty}a_i=2$.

Таким образом мы приходим к следующей оценке

$$\int\limits_0^R(z_i-f_i(x))dx\le 2^{\frac{1}{1-\alpha}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy+4\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_0^R(z_j-f_j(t))dt,\quad i\in\mathbb{Z}^+,\tag{3.6}$$

из которого в частности следует, что

$$0\le\int\limits_0^R(z_i-f_i(x))dx\le\sup_{i\in\mathbb{Z}^+}\int\limits_0^R(z_i-f_i(x))dx=\frac{2^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-4\alpha}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}y\tilde{K}_i(y)dy,\ i\in\mathbb{Z}^+.\tag{3.7}$$

В (3.7) при каждом фиксированном $i \in \mathbb{Z}^+$ устремляя число $R \to \infty$ получаем

$$0 \le \int_0^\infty (z_i - f_i(x))dx \le \frac{2^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-4\alpha} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty y\tilde{K}_j(y)dy, \; i \in \mathbb{Z}^+.$$

Из последних оценок следует

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}^+} \int_0^\infty (z_i - f_i(x))dx \le \frac{2^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1-4\alpha} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty y\tilde{K}_j(y)dy.$$

Таким образом теорема полностью доказана. □

Заметим теперь, что при условии $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \tilde{K}_i(x) < +\infty$ имеет место

$$\lim_{x\to+\infty} f_i(x) = z_i, \quad i \in \mathbb{Z}^+.$$

Действительно, из (1.1) в силу условий $c), b)$ имеем

$$(3.8) \qquad \begin{gathered} 0 \le z_i - f_i(x) \le 2^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \int_x^\infty \tilde{K}_{i-j}(y)dy + \\ +2\alpha \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t) \right) \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} (z_j - f_j(t))dt, \quad i \in \mathbb{Z}^+, \end{gathered}$$

ибо ряды (3.5) равномерно сходятся и $\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \tilde{K}_i(x) < +\infty$.

Так как $\chi_i(x) := \sum\limits_{j=0}^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $\rho(t) := \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}^+} (z_j - f_j(t)) \in L_1(\mathbb{R}^+) \cap L_\infty(\mathbb{R}^+)$, то используя лемму 5 из работы [19] получим, что для всех $i \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^\infty \left(\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{K}_{i-j}(x-t) \right) \sup_{j\in\mathbb{Z}^+} (z_j - f_j(t))dt = 0.$$

Поскольку функциональный ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \int\limits_x^\infty \tilde{K}_{i-j}(y)dy$ равномерно сходиться, то из последнего предельного соотношения и (3.8) получаем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f_i(x) = z_i$, $i \in \mathbb{Z}^+$.

В следующем параграфе для всевозможных значений показателя $\alpha \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ мы докажем также единственность решения бесконечной системы нелинейных интегральных уравнений вида (1.1) в следующем классе бесконечных вектор-функций:

$$(3.9) \qquad \mathfrak{M} := \{\varphi(x) = (\varphi_0(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots)^T : \varphi \in \mathbb{B}, \inf_{j\in\mathbb{Z}^+} \inf_{x\in\mathbb{R}^+} \varphi_j(x) > 0\}.$$

4. Единственность решения. Примеры

Теорема 4.1. *При условиях теоремы 2 бесконечная система нелинейных интегральных уравнений* (1.1) *в классе* $\mathfrak{M}$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательство. Пусть $f(x)=(f_0(x),\dots,f_n(x),\dots)^T$ произвольное решение системы (1.1) из класса $\mathfrak{M}$. Тогда учитывая условие $c)$ из (1.1) будем иметь

$$\begin{gathered} f_i(x)\geq\sum_{j=0}^{\infty}\rho_0^{\alpha}\int\limits_0^{\infty}\tilde{K}_{i-j}(x-t)dt\geq \\ \geq\rho_0^{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{0}\tilde{K}_{i-j}(y)dy\geq\frac{\rho_0^{\alpha}}{2}\sum_{j=0}^{\infty}a_{i-j}\geq\frac{\rho_0^{\alpha}}{2}\sum_{m=-\infty}^{0}a_m\geq\frac{\rho_0^{\alpha}}{2},\quad i\in\mathbb{Z}^+, \end{gathered}\tag{4.1}$$

где $\rho_0:=\inf\limits_{i\in\mathbb{Z}^+}\inf\limits_{x\in\mathbb{R}^+}f_i(x)$. Из (4.1) следует, что

$$\rho_0\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.\tag{4.2}$$

Предположим теперь, что система (1.1) имеет две различные решения $f,\tilde{f}$ из класса $\mathfrak{M}$. Тогда в силу доказанного выше

$$\inf_{i\in\mathbb{Z}^+}\inf_{x\in\mathbb{R}^+}f_i(x)\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}},\quad \inf_{i\in\mathbb{Z}^+}\inf_{x\in\mathbb{R}^+}\tilde{f}_i(x)\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.\tag{4.3}$$

Учитывая (3.9), (4.3) и условия $b),c)$ из (1.1) в силу теоремы Лагранжа имеем

$$\begin{gathered} |f_i(x)-\tilde{f}_i(x)|\leq\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}K_{i-j}(x,t)|f_j^{\alpha}(t)-\tilde{f}_j^{\alpha}(t)|dt\leq \\ \leq 2\alpha\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_0^{\infty}K_{i-j}(x,t)|f_j(t)-\tilde{f}_j(t)|dt\leq \\ \leq 2\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|f_j(t)-\tilde{f}_j(t)|\sum_{j=0}^{\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^+}\int\limits_0^{\infty}K_{i-j}(x,\tau)d\tau\leq \\ \leq 2\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|f_j(t)-\tilde{f}_j(t)|\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_m=4\alpha\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\sup_{t\in\mathbb{R}^+}|f_j(t)-\tilde{f}_j(t)|, \end{gathered}$$

откуда получаем, что

$$(1-4\alpha)\sup_{j\in\mathbb{Z}^+}\sup_{x\in\mathbb{R}^+}|f_j(x)-\tilde{f}_j(x)|\leq 0.\tag{4.4}$$

Так как $\alpha\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$ то из (4.4) следует, что $f_i(x)=\tilde{f}_i(x)$, $i\in\mathbb{Z}^+$ почти всюду на $\mathbb{R}^+$. Теорема доказана. □

Замечание 4.1. *К сожалению интегральную асимптотику* (3.2) *и теорему единственности решения пока нам удается доказать только для малых значений показателя α. Отметим, что аналогичные результаты для соответствующих конечных систем нелинейных интегральных уравнений нам удалось доказать при всевозможных значений параметра $\alpha \in (0,1)$ (см.* [3], [10] *и* [11]*).*

В конце приведем несколько примеров ядер $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\{\overset{\circ}{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$ и $\{\tilde{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$. Сперва приведем примеры ядерных функций: $\{\overset{\circ}{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$, $\{\tilde{K}_m(x)\}_{m=-\infty}^{\infty}$:

1) $\overset{\circ}{K}_m(x) = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, где $\varepsilon_m \in (0,1)$, $m \in \mathbb{Z}$ и $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\sum\limits_{m=-N}^{N} \varepsilon_m = 1$, $\varepsilon_{-j} = \varepsilon_j$, $j \in \mathbb{Z}^+$,
2) $\overset{\circ}{K}_m(x) = \varepsilon_m \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $\sigma \uparrow$ на $[a,b)$, $2\int\limits_a^b \frac{1}{s} d\sigma(s) = 1$, $0 < a < b \leq +\infty$,
3) $\tilde{K}_m(x) = \frac{\delta_m}{\sqrt{\pi p_m}} e^{-\frac{x^2}{p_m}}$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, $p_m > 0$, а $\delta_m \in (0,1)$, $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} \delta_m = 2$,
4) $\tilde{K}_m(x) = \delta_m \int\limits_a^b e^{-|x|s} d\sigma(s)$, $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Теперь приведем примеры ядер $\{K_m(x,t)\}_{m=-\infty}^{\infty}$:

A) $K_m(x,t) = \tilde{K}_m(x-t) + \varepsilon^* \tilde{K}_m(x+t)$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $0 < \varepsilon^* < 1$,
B) $K_m(x,t) = \tilde{K}_m(x-t)\lambda_m(x)$, $m \in \mathbb{Z}$, $(x,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, $\lambda_i(x) = \lambda_{-i}(x)$, $i \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_m \in C(\mathbb{R}^+)$, $1 \leq \lambda_m(x) \leq \frac{a_m}{\int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{K}_m(\tau)d\tau}$, $x \in \mathbb{R}^+$ и $\lambda_m(x) \not\equiv \frac{a_m}{\int\limits_{-\infty}^{x} \tilde{K}_m(\tau)d\tau}$, $m \in \mathbb{Z}$.

Прямой проверкой можно убедиться, что перечисленные примеры удовлетворяют всем условиям доказанных теорем. Приведенные примеры $1) - 4), A), B)$ возникают в конкретных задачах из теории переноса излучения и кинетической теории газов (см. [5]-[7]).

Авторы выражают благодарность рецензенту за полезные замечания.

Abstract: An infinite system of integral equations with power nonlinearity on the positive half-line is considered. A number of particular cases of this system arise in many branches of mathematical physics. In particular, systems of this nature are encountered in the theory of radiative transfer in spectral lines, in the dynamic theory of p-adic open-closed strings, in the mathematical theory of the spread of epidemic diseases, and in econometrics. The existence of a non-negative (in coordinates) non-trivial and bounded solution is proved. Under an additional constraint on the matrix kernel, we also study the asymptotic behavior at infinity. In the case of strong symmetry (symmetry both in coordinates and in indices) of the matrix kernel, we also prove a uniqueness theorem for a solution in a certain class of infinite and bounded vector functions. At the end, concrete examples of an infinite matrix kernel are given that are of practical interest in the above applications.

Список литературы

[1] В. С. Владимиров, Я. И. Волович, "О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны". ТМФ, **138**, no. 3, 355 – 368 (2004).

[2] В. С. Владимиров, "О нелинейных уравнениях p-адических открытых, замкнутых и открыто-замкнутых струн", ТМФ, **149**, no. 3, 354 – 367 (2006).

[3] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны", Изв. РАН. Сер. матем., **82**, no. 2, 172 – 193 (2018).

[4] Х. А. Хачатрян, "Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью", Изв. РАН. Сер. матем., **84**, no. 4, 198 – 207 (2020).

[5] Н. Б. Енгибарян, "Об одной задаче нелинейного переноса излучения", Астрофизика, **2**, no. 1, 31 – 36 (1966).

[6] М. Н. Коган, Динамика Разреженного газа, Наука, М., 440стр. (1967).

[7] А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян, "Качественные различия решений для одной модели уравнения Больцмана в линейном и нелинейном случаях", ТМФ, **172**, no. 3, 497 – 504 (2012).

[8] J. D. Sargan, "The distribution of wealth. Econometrica", **25**, no. 4, 568 – 590 (1957).

[9] A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan, "On solvability of one infinite system of nonlinear functional equations in the theory of epidemics", Eurasian Math. J., **11**, no. 2, 52 – 64 (2020).

[10] Х. А. Хачатрян, "О разрешимости одной системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна на прямой", Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер.: Математика. Механика. Информатика, **19**, no. 2, 164 – 181 (2019).

[11] А. С. Петросян, Ц. Э. Терджян, Х. А. Хачатрян, "Единственность решения одной системы интегральных уравнений на полуоси с выпуклой нелинейностью", Матем. тр., **23**, no. 2, 187 – 203 (2020).

[12] Kh. A. Khachatryan, H. S. Petrosyan, "Solvability of a certain system of singular integral equations with convex nonlinearity on the positive half-line", Russian Math. (Iz. VUZ), **65**, no. 1, 27 – 46 (2021).

[13] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, М. О. Аветисян, "Теоремы существования и единственности для одной системы интегральных уравнений с двумя нелинейностями", Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, **29**, no. 1, 202 – 218 (2023).

[14] Х. А. Хачатрян, "Вопросы разрешимости некоторых нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений с некомпактными операторами в критическом случае", Докторская диссертация, ЕрГУ, 231 страниц (2011).

[15] Kh. A. Khachatryan, M. F. Broyan, "One-parameter family of positive solutions for a class of non-linear infinite algebraic systems with Toeplitz-Hankel type matrices", Journal of Contemporary Mathematical Analysis, **48**, no. 5, 209 – 220 (2013).

[16] Kh. A. Khachatryan, M. H. Avetisyan, "On solvability of an infinite nonlinear system of algebraic equations with Teoplitz–Hankel matrices", Proceedings of the Yerevan State University, series Physical and Mathematical Sciences, **51**, no. 2, 158 – 167 (2017).

[17] Х. А. Хачатрян, А. С. Петросян, "Теоремы существования и единственности для одной бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений", Известия Иркутского государственного университета, Серия Математика, **44**, 44 – 54 (2023).
[18] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы Теории Функций и Функционального Анализа, М., Наука (1976).
[19] Л. Г. Арабаджян, А. С. Хачатрян, "Об одном классе интегральных уравнений типа свертки", Матем. сб., **198**, no. 7, 45 – 62 (2007).

Поступила 25 сентября 2023

После доработки 20 ноября 2023

Принята к публикации 25 ноября 2023