ISSN 0002-3035

ФИЗИКА · ՖԻԶԻԿԱ · PHYSICS

ИЗВЕСТИЯ
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ

PROCEEDINGS
OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

51, № 3, 2016

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ АРМЕНИЯ

ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ

ՖԻԶԻԿԱ ФИЗИКА

ՀԱՏՈՐ ТОМ

51

№ 3

ՀՀ ԳԱԱ "ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ" ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА

ԵՐԵՎԱՆ ЕРЕВАН

2016

Адрес редакции: Республика Армения, 0019
Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24-г.

Խմբագրության հասցեն՝ Հայաստանի Հանրապետություն,
0019, Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող., 24-գ:

Editorial address: 24-g, Marshal Baghramyan Ave.,
Yerevan, 0019, Republic of Armenia.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.291-299 (2016)

УДК 539.17

МЕТОД НАВЕДЕННОЙ АКТИВНОСТИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ НА ИЗОТОПАХ Pb И Sn

А.Р. БАЛАБЕКЯН[1*], С.В. ГАГИНЯН[1], Дж.Р. ДРНОЯН[2]

[1]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[2]Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

[*]e-mail: balabekyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 24 февраля 2016 г.)

Методом наведенной активности исследованы ядерные реакции при взаимодействии частиц с тяжелыми мишенями. Этот метод позволяет исследовать механизм образования остаточных ядер в широком диапазоне масс, начиная с легких ядер до ядер с массами, близкими к массе мишени. Приведены результаты исследований ядерных реакций на разделенных изотопах свинца (^{206}Pb, ^{207}Pb, ^{208}Pb) и на изотопе олова (^{118}Sn), осуществленных методом наведенной активности.

1. Введение

Исследования ядерных реакций начались с возникновением ядерной физики как науки и до сих пор являются актуальным направлением в этой области физики. Они связаны с выявлением механизмов реакций и структуры ядер, участвующих во взаимодействии. Существует несколько методов исследования ядерных реакций. Один из них – так называемый «интерактивный» метод исследования ядерных реакций, когда во время эксперимента регистрируются все частицы, образовавшиеся во время взаимодействия и вылетевшие из мишени. Другой метод – это наведенная активность (радиохимический метод) [1] или по другому активационный анализ, интенсивно используется в геологии и геофизике [2]. В ядерной физике этот метод заключается в том, что мишень из исследуемого элемента подвергается облучению на внутреннем или выведенном из ускорителя пучке частиц, и определяются сечения образования тех или иных радиоактивных изотопов во время взаимодействия частиц с ядрами мишени. При этом только некоторые ограничения накладываются на период полураспада определяемых изотопов, обусловленных как условиями эксперимента, так и необходимостью иметь определенную активность препарата для количественных измерений. Этот метод используется как при исследованиях структуры атомных ядер и механизмов ядерных реакций, так и при прикладных исследованиях трансмутации ядерных отходов [3,4].

2. Метод наведенной активности для анализа данных

Методом наведенной активности можно исследовать радиоактивные изотопы, которые образуются в мишени. Для этого на спектрометрах периодически измеряются характеристические γ-спектры ядер остатков с учетом их периодов полураспада.

Если образованный в мишени радиоактивный изотоп не имеет генетически связанного радиоактивного родителя, распад которого может дать вклад в выходы образования данного изотопа, то сечения определяются следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dN}{dt} = N_p N_n \sigma - \lambda N, \tag{1}$$

где $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ – постоянная распада (мин$^{-1}$), $T_{1/2}$ – период полураспада данного изотопа, N_p – интенсивность пучка (мин$^{-1}$), N_n – число ядер в мишени (см$^{-2}$). Решение этого уравнения с учетом ядер, образованных за временной период облучения t_1 и временной период от конца облучения до начала измерения t_2, дает число радиоактивных ядер за временной период измерения t_3 следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta N &= N_0(t_1)\exp(-\lambda t_2) - N_0(t_1)\exp(-\lambda(t_2+t_3)) \\ &= \frac{N_p N_n \sigma}{\lambda}(1-\exp(-\lambda t_1))\exp(-\lambda t_2)(1-\exp(-\lambda t_3)). \end{aligned} \tag{2}$$

В ходе измерения определяется площадь ΔN под фотопиком полного погашения. Из уравнения (2) можно определить сечение образования данного радиоактивного изотопа

$$\sigma = \frac{\Delta N \lambda}{N_p N_n k \varepsilon \eta (1-\exp(-\lambda t_1))\exp(-\lambda t_2)(1-\exp(-\lambda t_3))}, \tag{3}$$

где k – коэффициент поглощения γ-кванта с данной энергией в мишени и в детекторе, η – интенсивность γ-перехода с данной энергией и ε – эффективность детектора для регистрации γ-линий данной энергии.

Если вероятность образования родительского изотопа можно определить из эксперимента или оценить из других источников, то независимое сечение σ_B данного изотопа можно определить следующим образом [5,6]:

$$\begin{aligned} \sigma_B &= \frac{\lambda_B}{(1-\exp(-\lambda_B t_1))\exp(-\lambda_B t_2)(1-\exp(-\lambda_B t_3)} \\ &\times \left[\frac{\Delta N}{N_\gamma N_n k \varepsilon \eta} - \sigma_A f_{AB} \frac{\lambda_A \lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} \frac{(1-\exp(-\lambda_A t_1))\exp(-\lambda_A t_2)(1-\exp(-\lambda_A t_3)}{\lambda_A^2} \right. \\ &\left. - \frac{(1-\exp(-\lambda_B t_1))\exp(-\lambda_B t_2)(1-\exp(-\lambda_B t_3)}{\lambda_B^2} \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Буквами A и B отмечены характеристики, относящиеся к родительским и дочерним ядрам, соответственно. Коэффициент f_{AB} показывает долю родительских ядер A, которые распадаются в дочернее ядро B ($f_{AB} = 1$, если вклад от γ-распада родительского ядра равен 100%); ΔN – площадь под фотопиком полного поглощения, которая связана с распадом родительского и дочернего ядер. Вкладом родительского ядра можно пренебречь, если его период полураспада велик по сравнению с дочерним ядром. В остальных случаях, когда экспериментально невозможно разделить родительское и дочернее ядра, то сечение квалифицируется как кумулятивное.

При изучении ядерных реакций в тяжелых ядрах при высоких энергиях характеристические γ-спектры получаются очень сложными из-за образования в мишени большого количества радиоактивных остаточных ядер. Очень часто энергетическое разрешение детекторов не позволяет разделить близлежащие γ-линии, которые характеризуют разные остаточные радиоактивные ядра с разными периодами полураспада (рис.1).

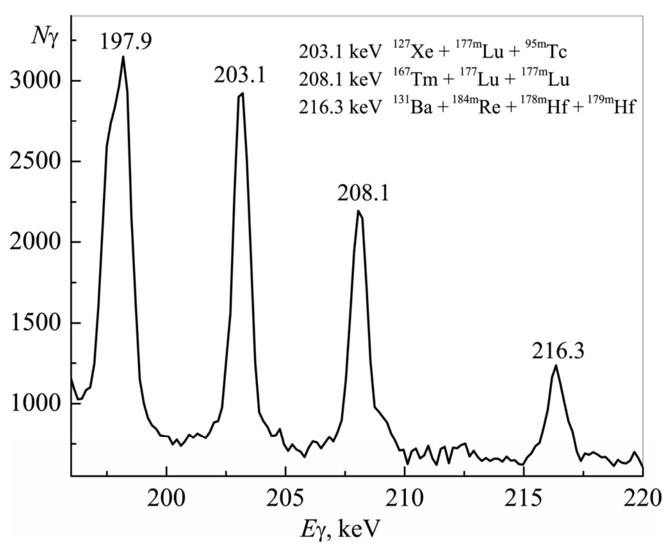

Рис.1. Энергетический спектр γ-квантов, полученный на мишени ^{208}Pb. На рисунке приведены элементы, которые имеют одну и ту же характерную γ-линию.

Если периоды полураспадов нескольких ядер остатков сильно отличаются, то можно из позднее измеренных спектров определить сечения образования остаточного ядра с большим периодом полураспада. После этого из ранее измеренных спектров определить долю остаточного ядра в пике полного поглощения, а потом определить сечение образования короткоживущего остаточного ядра. Если периоды полураспадов нескольких остаточных ядер приблизительно одинаковы и во время эксперимента было измерено большое количество γ-спектров, то сечение образования этих остаточных ядер можно вычислить из системы уравнений

$$N_i = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\sigma_k \ , \tag{5}$$

где

$$A_{ik} = \frac{N_p N_n k\varepsilon\eta_k (1-\exp(-\lambda_k t_1))\exp(-\lambda_k t_{2i})(1-\exp(-\lambda_k t_{3i}))}{\lambda_k}.$$

Необходимо учесть, что число спектров, которое совпадает с числом уравнений, должно быть равно числу неизвестных сечений.

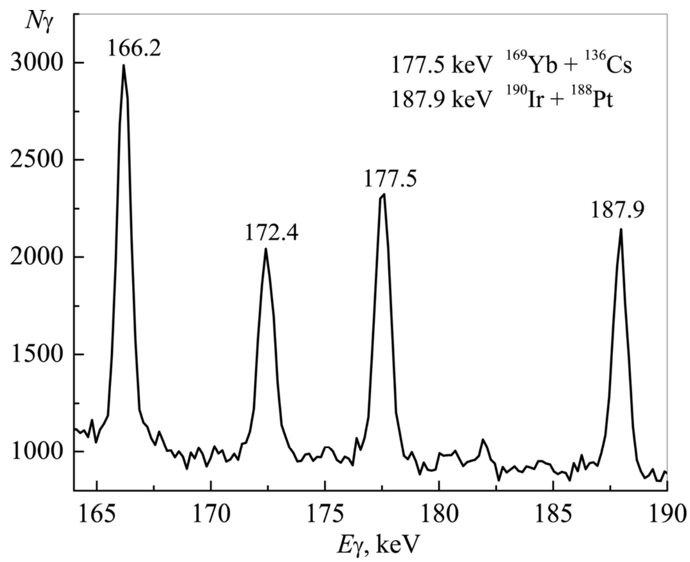

Рис.2. Энергетический спектр γ-квантов, полученный на мишени ^{208}Pb. На рисунке приведены элементы, которые имеют одну и ту же характерную γ-линию.

В случае, когда в площадь фотопика полного поглощения дают вклад два независимых радиоактивных ядра (рис.2), система уравнений (5) принимает вид

$$\begin{cases} N_1 = A_{11}\sigma_1 + A_{12}\sigma_2 \\ N_2 = A_{21}\sigma_1 + A_{22}\sigma_2, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$A_{11} = \frac{N_p N_n k\varepsilon\eta_1 (1-\exp(-\lambda_1 t_1))\exp(-\lambda_1 t_{21})(1-\exp(-\lambda_1 t_{31}))}{\lambda_1}, \tag{7}$$

$$A_{12} = \frac{N_p N_n k \varepsilon \eta_2 (1 - \exp(-\lambda_2 t_1)) \exp(-\lambda_2 t_{21}) (1 - \exp(-\lambda_2 t_{31}))}{\lambda_2}, \tag{8}$$

$$A_{21} = \frac{N_p N_n k \varepsilon \eta_1 (1 - \exp(-\lambda_1 t_1)) \exp(-\lambda_1 t_{22}) (1 - \exp(-\lambda_1 t_{32}))}{\lambda_1}, \tag{9}$$

$$A_{22} = \frac{N_p N_n k \varepsilon \eta_2 (1 - \exp(-\lambda_2 t_1)) \exp(-\lambda_2 t_{22}) (1 - \exp(-\lambda_2 t_{32}))}{\lambda_2}. \tag{10}$$

Решая систему уравнений (6), для сечений образования радиоактивных ядер получаем следующие выражения:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_{11}} - \frac{A_{12}(A_{11} N_2 - A_{21} N_1)}{A_{11}(A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12})}, \tag{11}$$

$$\sigma_2 = \frac{A_{11} N_2 - A_{21} N_1}{A_{11} A_{22} - A_{21} A_{12}}. \tag{12}$$

3. Исследование ядерных реакций под действием дейтронов на изотопах свинца методом наведенной активности

Согласно современным представлениям, взаимодействие высокоэнергичных заряженных частиц с атомными ядрами описывается двухступенчатой каскадно-испарительной моделью. На первой, быстрой стадии реакции, налетающая частица, взаимодействуя на своем пути с ограниченным числом нуклонов ядра и вылетая из ядра, уносит с собой определенное число быстрых частиц. На второй стадии оставшееся после каскада возбужденное ядро изотропно испускает нуклоны или γ-кванты и превращается в ядро-продукт. Эта модель описывает ядерные реакции в широкой области масс мишеней, ядер-продуктов и энергий налетающих частиц. В тоже время, несмотря на многочисленные экспериментальные факты, накопленные за многолетнюю историю физики ядерных реакций, некоторые из важных проблем, такие как механизм адрон- и ядро-ядерных взаимодействий при высоких энергиях, поиск нового острова стабильности сверхтяжелых элементов, свойства экзотических ядер и т.д., все еще ожидают своего решения. Одна из них связана с выяснением механизма образования легких ядер-продуктов (механизм мультифрагментации, асимметричное деление и т.д.). Такие исследования можно проводить как в «интерактивных» экспериментах, регистрируя прямо во время эксперимента вылетевшие частицы и легкие ядра, образованные в мишенях при взаимодействиях, так и в «автономных» экспериментах, регистрируя образованные в мишенях радиоактивные ядра методом наведенной активности.

В наших исследованиях в качестве бомбардирующих частиц используется пучок дейтронов, а в качестве мишеней – обогащенные изотопы свинца. Так как дейтрон – слабосвязанная система (энергия связи 2.2 МэВ), то такие исследования позволяют получить информацию о доле составляющих дейтрон нуклонов в процессе взаимодействия. Выбор свинцовой мишени обусловлен разновидностью механизмов образования остаточных радиоактивных ядер в широком диапазоне масс. У свинца параметр деления большой, $Z^2/A = 35.5$, поэтому образование легких остаточных ядер можно объяснить как мультифрагментацией, так и асимметричным делением. Мультифрагментация проявляется в виде одновременного испускания медленных фрагментов, масса которых тяжелее, чем масса α-частиц, но легче, чем масса осколков деления. В настоящее время их называют фрагментами промежуточной массы (ФПМ, $7 \leq Z \leq 20$).

Асимметричное деление предполагает образование двух осколков с сильно отличающимися друг от друга массами в процессе деления. Предполагается, что их вероятностный вклад значителен в этом процессе. Образование легких продуктов в процессе деления можно объяснить также тройным делением, когда в процессе образуются три осколка. Поэтому исследование сечений образования легких продуктов при промежуточных и высоких энергиях очень актуально.

Табл.1. Сечение образования остаточных ядер из разделенных изотопов свинца

№	Остаточное ядро	Энергия γ-квантов, кэВ	Сечение (мбн) для мишени ^{206}Pb	Сечение (мбн) для мишени ^{207}Pb	Сечение (мбн) для мишени ^{208}Pb
1	^{24}Na	1368	7.16 ± 0.13	-	9.52 ± 0.13
2	^{58}Co	810	2.08 ± 0.2	2.23 ± 0.03	2.82 ± 0.38
3	^{74}As	595	1.8 ± 0.18	2.03 ± 0.014	2.38 ± 0.25
4	^{127}Xe	202; 374; 172	5.51 ± 0.63	5.78 ± 0.85	8.19 ± 0.8
5	^{132}Cs	667	1.35 ± 0.3	1.45 ± 0.4	1.67 ± 0.3
6	^{121}Te	573	5.61 ± 0.51	6.37 ± 1.27	7.59 ± 0.51
7	^{196}Au	477.59	1.34 ± 0.3	1.67 ± 0.2	2.25 ± 0.2
8	^{206}Bi	802; 1718	1.31 ± 0.2	2.48 ± 0.3	3.37 ± 0.3
9	^{202}Tl	439	10.74 ± 0.13	11.25 ± 0.14	13.5 ± 0.25

В табл.1 приведены сечения образования остаточных радиоактивных ядер из разных изотопов свинца при взаимодействии с дейтронами с энергией 2.2 ГэВ/нуклон методом наведенной активности.

Эксперимент был проведен на «Нуклотроне» ОИЯИ (Дубна, Россия). Характеристические γ-спектры остаточных ядер измерялись на сверхчистых германиевых (HpGe) детекторах через 5 часов после облучения и продолжались периодически в течении четырех месяцев.

Как видно из табл.1, метод наведенной активности дает возможность определить вероятность образования остаточных ядер в широком диапазоне масс. Использование разделенных изотопов свинца в качестве мишеней позволяет исследовать влияние нуклонного состава мишени на вероятность образования остаточных ядер. Несмотря на то, что нуклонный состав мишеней отличается на два нейтрона, что составляет 1% от числа нуклонов, сечения образования остаточных ядер из разных изотопов свинца отличаются на 20–25%, т. е. из нейтронизбыточного ядра-мишени с большей вероятностью образуются относительно более нейтронизбыточные остаточные ядра.

4. Определение кинематических характеристик остаточных ядер методом наведенной активности

Методом наведенной активности обычно определяется сечение образования остаточных ядер. Однако с помощью экспериментов улавливающих фольг можно в рамках метода наведенной активности определить кинематические характеристики образовавшихся остаточных ядер – скорость, кинетическую энергию, импульс, а также энергию возбуждения промежуточного ядра. В этих экспериментах при облучении с обеих сторон мишени ставятся улавливающие фольги из легких элементов, с помощью которых определяется доля остаточных ядер, вылетевших из мишени вперед и назад по отношению к пучку:

$$F = \frac{N_F}{N_B + N_F + N_T}, \quad B = \frac{N_B}{N_B + N_F + N_T}, \tag{13}$$

где N_F и N_B – число ядер-отдачи, вылетевших из мишени и зарегистрированных в улавливающих фольгах вперед и назад, соответственно, а N_T – число остаточных ядер в мишени.

Результаты таких экспериментов, как правило, представляются в рамках стандартной двухступенчатой векторной модели [7–9], где предполагается, что на первой стадии частица, взаимодействуя с ядром мишени, образует возбужденное ядро со скоростью $\mathbf{v}$, импульсом $\mathbf{P}$ и энергией возбуждения E^*, импульс и скорость – постоянны и направлены вперед по отношению к пучку; на второй стадии возбужденное ядро теряет нуклоны и энергию и получает дополнительную скорость $\mathbf{V}$, которая распределена изотропно.

Результаты экспериментов улавливающих фольг зависят от отношения энергия–пробег ядер-отдачи следующим образом:

$$R = kV^n, \tag{14}$$

где R – пробег продуктов реакции, а k и n – параметры.

Из данных, полученных в эксперименте, в рамках двухступенчатой модели можно определить пробег продуктов реакции и скорости, передаваемые остаточным ядрам в первой (**v**) и на второй стадии (**V**), следующими соотношениями:

$$F/B = \frac{1+\frac{2}{3}(n+2)\eta+\frac{1}{4}(n+1)^2\eta^2}{1-\frac{2}{3}(n+2)\eta+\frac{1}{4}(n+1)^2\eta^2}, \quad R = \frac{2W(F+B)}{1+\frac{1}{4}(n+1)^2\eta^2}, \tag{15}$$

где $\eta = v/V$ и W – толщина мишени в мг/см^2.

На рис.3 приведена зависимость продольной скорости возбужденного ядра после каскадной стадии от относительного числа вылетевших нуклонов $\Delta A/A_t$, полученная при взаимодействии ионов ^{12}C с энергией 2.2 ГэВ/нуклон с мишенью ^{118}Sn [10]. В эксперименте использован метод наведенной активности.

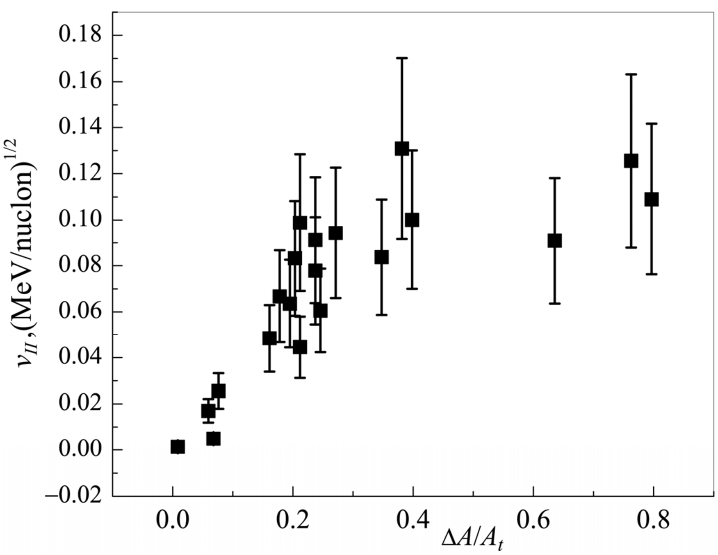

Рис.3. Зависимость продольной скорости возбужденного ядра от относительного числа вылетевших нуклонов для мишени ^{118}Sn.

5. Заключение

В работе представлены результаты исследований ядерных реакций на разделенных изотопах свинца (^{206}Pb, ^{207}Pb, ^{208}Pb) и на изотопе олова (^{118}Sn), осуществленных методом наведенной активности. Получена зависимость сечения образования остаточных ядер от нуклонного состава мишени. Приведена зависимость продольной скорости возбужденного ядра после каскадной стадии от относительного числа вылетевших нуклонов при взаимодействии ионов ^{12}C с энергией 2.2 ГэВ/нуклон с мишенью олова ^{118}Sn, полученная метод наведенной активности.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Н. Перфилов, О. Ложкин, В. Остроумов.** Ядерные реакции под действием частиц высоких энергий. Москва, Издательство АН СССР, 1962.
2. **V.I. Feronski.** Nuclear Geophysics. Part of the series Springer Geophysics, Induced Activity Method for Analysis of Rocks and Groundwaters, 2015.
3. **A.R. Balabekyan, N.A. Demekhina, G.S. Karapetyan et al.** Phys. Rev. C, **90**, 054612 (2014).
4. **J. Adam, A. Balabekyan, V. Bradnova et al.** Nuclear Instruments and Methods in Physiscs Research A, **562**, 741 (2006).
5. **J. Adam, A.R. Balabekyan, V.S. Pronskikh, V.G. Kalinnikov, J. Mrázek.** Applied Radiation and Isotopes, **56**, 607 (2002).
6. **M. Cavinato, E. Fabrici, E. Gadioli et al.** Phys. Rev. C, **52 (**1995).
7. **N. Sugarman, M. Campos, K. Wielgoz.** Phys. Rev., **101**, 388 (1956).
8. **L. Winsberg.** Nucl. Instrum. Methods, **150**, 465 (1978).
9. **L. Winsberg.** Phys. Rev. C, **22**, 2116 (1980).
10. **A. Balabekyan, A. Danagulyan, G. Hovhannisyan et al.** Phys. Atomic Nuclei, **73**, 1176 (2010).

ՆԵՐՄՈՒԾՎԱԾ ԱԿՏԻՎՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴԸ Pb ԵՎ Sn ԻԶՈՏՈՊՆԵՐԻ ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆ ՌԵԱԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա.Ռ. ԲԱԼԱԲԵԿՅԱՆ, Ս.Վ.ԳԱԳԻՆՅԱՆ, Ջ.Ռ. ԴՌՆՈՅԱՆ

Ներմուծված ակտիվության մեթոդով ուսումնասիրված են մասնիկների և ծանր միջուկների միջև ընթացող միջուկային ռեակցիաները: Այս մեթոդը թույլ է տալիս հետազոտել մնացորդային միջուկների առաջացման մեխանիզմը զանգվածների լայն տիրույթում, սկսած թեթև միջուկներից մինչև թիրախ միջուկի զանգվածին մոտ միջուկները: Բերված են կապարի հարստացված թիրախների (^{206}Pb, ^{207}Pb, ^{208}Pb) և անագի իզոտոպի (^{118}Sn) համար միջուկային ռեակցիաների ուսումնասիրության արդյունքները:

METHOD OF INDUCED ACTIVITY FOR THE STUDY OF NUCLEAR REACTIONS ON Pb AND Sn ISOTOPES

A.R. BALABEKYAN, S.V. GAGINYAN, J.R. DRNOYAN

The nuclear reactions in the interaction of particles with heavy targets were investigated by the method of induced activity. This method allows us to investigate the production mechanism of the residual nuclei in a wide mass range, starting from light nuclei to nuclei with masses close to the mass of the target. The results of studies of nuclear reactions on separated lead isotopes (^{206}Pb, ^{207}Pb, ^{208}Pb) and on tin isotope (^{118}Sn) were obtained by the method of induced activity.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.300-304 (2016)

УДК 539.162

МОДЕЛЬНЫЕ ЭТАЛОНЫ В ЯДЕРНО-ФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДАТЫ СОБЫТИЯ

О.М. ПОП*, М.В. СТЕЦ

Институт электронной физики НАН Украины, Ужгород, Украина

*e-mail: oksana_pop@i.ua

(Поступила в редакцию 25 ноября 2015 г.)

Рассмотрен метод стандартных множеств, в котором образец–стандарт не используется. В этом методе используется множество упорядоченных последовательностей активностей радионуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U, ^{238}U. Упорядочение активностей нуклидов определяется решением системы дифференциальных уравнений Бейтмена–Рубинсона. Рассчитанные активности нуклидов систематизированы в виде таблицы стандартов. Таблица стандартов выполняет функцию внутреннего математического эталона (образца-стандарта).

1. Введение

Методы геологического датирования в большинстве случаев представлены радиоизотопными хронометрами [1–3]. Основными предпосылками использования радиоизотопных хронометров являются:

1. Предположение об отсутствии в образце дочерних продуктов распада в момент времени $T_e = 0$. Наличие в образованной породе (современные застывшие лавы) дочерних продуктов распада (^{40}Ar для K-Ar метода) подтверждено в образцах лавовых потоков, возраст которых исторически известен [1–6].

2. Предположение о замкнутости систем, т.е. невозможности процессов приношения – выноса как материнских, так и дочерних компонентов.

3. В радиоуглеродном методе датирования, например, считается, что соотношение изотопов ^{12}C/^{14}C постоянно во времени и пространстве (не учитывается состояние неустойчивого равновесия этих изотопов в атмосфере).

Итак, радиоизотопные методы имеют недостатки, как с теоретической, так и практической точек зрения [6,7].

Наиболее геологически важными изотопными хронометрами являются ^{234}U/^{238}U, ^{230}Th/^{234}U, ^{231}Pa/^{235}U, ^{226}Ra/^{230}Th, которые базируются на законе радиоактивного распада. Первая форма аналитического решения для множества последовательных изотопов рядов распада была получена Бейтменом [8]. Детальный анализ этих уравнений проведен также в [2]. Эти дифференциальные уравнения, описывающие неравновесность радионуклидов, могут быть решены аналитически подстановкой основных коэффициентов для определенного множества условий [2].

Примерами цепей радиоактивных превращений, которые описываются решениями дифференциальных уравнений, являются природные радиоактивные ряды. Родоначальниками этих рядов являются ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U, однако их использование ограничено из-за сложности решения дифференциальных уравнений. Самое простое решение характерно при распаде материнских радионуклидов в стабильные дочерние нуклиды без учета промежуточных звеньев. Решение дифференциальных уравнений при распаде материнского радионуклида в дочерние радионуклиды, которые в свою очередь распадаются, является очень сложным. Таким образом, методы изотопных хронометров основываются на использовании уравнения типа

$$T_e = -\frac{1}{\lambda_D} \ln\left[1 - \frac{A_D}{A_M}\right], \tag{1}$$

где T_e – собственное время, т.е. продолжительность существования системы материнского M и дочернего D нуклидов (событие – изменение содержания нуклидов ряда в образце); λ_D – постоянная распада. Эти методы связывают активности двух нуклидов: материнского A_M и дочернего A_D, в основном, для пар долгоживущих нуклидов A_D ^{234}U и A_M ^{238}U; A_D ^{230}Th и A_M ^{234}U; A_D ^{231}Pa и A_M ^{235}U.

Предпосылки, на которых базируются радиоизотопные хронометры, могут считаться допустимыми после использования методик определения возраста на эталонных объектах. Однако нет таких эталонных объектов, возраст которых был бы известен наверняка. Исключение составляют только самые молодые вулканические объекты, время образования которых зафиксировано исторически. Проблема эталонных объектов ставит задачу их создания с использованием математической модели. Математическая модель представляет собой систему уравнений (дифференциальных, интегральных и алгебраических), в которой конкретные величины заменяются постоянными и переменными величинами, функциями.

Все естественные и общественные науки, использующие математический аппарат, по сути, занимаются математическим моделированием, т.е. заменяют объект его математической моделью и затем изучают последнюю. Связь математической модели с реальностью осуществляется с помощью цепочки гипотез, идеализаций и упрощений. С помощью математических методов описывается, как правило, идеальный объект, построенный на этапе содержательного моделирования. Математические модели многих задач, возникающих в науках о Земле, хорошо описываются уравнениями математической физики. Более того, ряд важных геофизических задач представляет собой классические задачи математической физики. Нами предложен метод, который использует модельный подход. Он основывается на классических решениях системы дифференциальных уравнений, описывающих распад/образование линейной цепи радиоактивных ядер нуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U.

2. Метод стандартных множеств

К безэталонным методам, которые не используют вещественные эталоны (стандарты) сравнения, можно, с известной степенью осторожности, отнести методы определения даты событий в образцах, которые используют зависимости

$$T_e = f_1(A_M, A_D, T_{1/2M}, T_{1/2D}) + f_2\,(A_{MO}, A_{DO}),$$

где T_e – время, A_M и A_D – активности материнского M и дочернего D радиоактивных нуклидов, связанных генетической цепью распада; $T_{1/2M}$ и $T_{1/2D}$ – периоды полураспада; A_{MO} и A_{DO} – начальные активности нуклидов.

Зависимость f_1 описывает количественно эту связь (закон радиоактивного распада) и не зависит от образца. Таким образом, зависимость f_1 выполняет функцию математического эталона, заменяющего эталон (стандарт) вещественный. Зависимость f_2 должна учитывать особенности образца как геохимической системы, взаимодействующей с внешней для нее системой – окружающей средой. Знание зависимости f_2 по сути эквивалентно требованию внешней априорной информации о содержании A_{MO} и A_{DO}, т.е. необходимости в отдельном вещественном эталоне.

Развивая метод ядерных хронометров, рассмотрим метод определения даты события (метод стандартных множеств), где вещественный эталон не нужен. В этом методе используется множество упорядоченных последовательностей активностей радионуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U. Упорядочение активностей радионуклидов определяется решением системы дифференциальных уравнений Бейтмена–Рубинсона.

Активность каждого *n*-го нуклида ряда можно представить обобщенным для случая разветвленных цепей выражением – решением системы дифференциальных уравнений Бейтмена–Рубинсона [9,10]

$$A_n = \lambda_n N_n\left(T_e\right) = N_{10}\sum_j\left(\prod b_{rij}\right)\sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_{ij} e^{-\lambda_i T_e}\ , \tag{2}$$

где N_{10} – начальное количество материнского ядра, $\prod b_{rij} = b_{12} \times b_{23} \times \ldots \times b_{n\text{-}1n}$ – произведение всех коэффициентов ветвления b_{ij} (коэффициентов, учитывающих нелинейность цепи) в *r*-м линейном участке этой цепи, $b_{ij} \le 1$, C_{ij} – коэффициенты, зависящие от постоянных распада λ_{ij}, $C_{ij} = \prod_{ij}^{n}\lambda_j\big/\left(\lambda_j - \lambda_i\right)$.

Расчеты выполнены для одного моля вещества, где $N_{10} = N_A = 6.022 \times 10^{23}$ ядер (число Авогадро), и собственного времени T_e для ^{232}Th (от 0 до 3.17×10^{12} лет), ^{235}U (от 0 до 3.17×10^{12} лет), ^{238}U (от 0 до 3.17×10^{12} лет).

Ядерные данные взяты из работы [11]. Коэффициенты ветвления b_{ij} с образованием кластеров не рассматриваются. Для расчетов системы дифференциальных уравнений Бейтмена–Рубинсона выделим следующие условия:

– стартовое (начальное) количество ядер материнского нуклида в момент собственного времени $T_e = 0$ равно $N_{10} > 0$ ($A_M > 0$);

– все остальные количества нуклидов для $T_e = 0$ равны 0 ($A_D = 0$);
– для любого момента времени T_e никаких других возможностей поступления или потери ядер кроме процессов образования/распада нет.

Совокупность всех указанных условий, аналитических выражений (2) и их решений назовём стандартными условиями. Множества активностей, полученных для этих начальных условий, будут стандартными (эталонными) множествами активностей нуклидов.

Стандартное множество нуклидов – это упорядоченная совокупность нуклидов одного ряда, генетически связанных взаимным распадом и образованием. Количественной характеристикой стандартного множества нуклидов является стандартный нуклидный спектр. Рассчитанные активности нуклидов рядов для достаточно большого количества точек собственного времени T_e (выражение (2)) систематизированы в виде таблицы значений активностей радионуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U. Систематизированную таблицу активностей пересчитаем в экспериментальные значения активностей и получим таблицу стандартов. Таблица стандартов, рассчитанная для всех радионуклидов ряда, выполняет функцию внутреннего математического эталона (стандарта) образца. Это обеспечивает метрологию экспериментальных стандартных множеств нуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U, обнаруженных в образце [12]. Каждая строка из таблицы стандартов представляет собой стандартный нуклидный спектр активностей – стандарт для времени T_e. В колонках таблицы приведены значения активностей для соответствующих нуклидов рядов.

Дальнейшее измерение заключается в сравнении экспериментального нуклидного спектра активностей ЕНС $A(T_m)$ нуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U со стандартами, соответствующими стандартным (расчетным) нуклидным спектрам активностей СНС $A(T_e)$:

$$\text{ЕНС } A(T_m) = \text{СНС } A(T_e). \quad (3)$$

Сравнение (3) ставит в соответствие дате времени T_m собственное время T_e. Значение этого собственного времени T_e толкуется как возраст стандартного множества нуклидов, которое образовалось в результате события.

Одновременно с разработкой и детализацией алгоритма нашего метода нами было осуществлено его практическое использование на основе уже полученных гамма-спектрометрических данных и сравнение его с методом ядерных хронометров. Практическое использование метода для определения длительности существования стандартных множеств в образцах керамики и горных пород приведено в [13–16].

3. Заключение

Рассмотрен метод стандартных множеств, в котором в качестве внутреннего математического эталона (стандарта) образца используется таблица стандартов. Метод основан на измерении экспериментальных нуклидных спектров активностей всех нуклидов рядов. Дальнейшие измерения заключаются в сравнении экспериментальных нуклидных спектров активностей нуклидов рядов ^{232}Th, ^{235}U и ^{238}U со стандартными нуклидными спектрами активностей. Результатом измерения экспериментальных нуклидных спектров активностей является время T_e. Полученную величину T_e можно интерпретировать как продолжительность существования стандартного множества – промежуток времени с момента события, в результате которого это множество возникло, до момента измерения. Расчетные данные использованы для определения возраста событий в образцах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Г.А. Вагнер.** Научные методы датирования в геологии, археологии и истории. Москва, Техносфера, 2006.
2. **Г. Фор.** Основы изотопной геологии. Москва, Мир, 1989.
3. **В.А. Мейер, П.А. Ваганов.** Основы ядерной геофизики. Ленинград, изд. ЛГУ, 1978.
4. **G.B. Dalrimple.** Earth and Planetary Science Letters, **6**, 47 (1969).
5. **А.А. Вальтер, Н.П. Дикий, А.Н. Довбня, Ю.В. Ляшко, А.И. Писанский, В.Е. Сторижко.** Доповіді Національної академії наук України, **7,** 76 (2009).
6. **G.H. Gill.** Creation Research Society Quarterly, **33**, 105 (1996).
7. **A.A. Snelling.** Proc. Third Inter. Conf. on Creationism, Creation Science Fellowship, Pittsburgh, 497 (1994).
8. **H. Bateman.** Proc. Camb. Phil. Soc., **15,** 423 (1910).
9. **И.А. Маслов, В.А. Лукницкий.** Справочник по нейтронному активационному анализу. Ленинград, Наука, 1971.
10. **О.М. Поп, М.В. Стець.** Доповіді Національної академії наук України, **4**, 65 (2013).
11. Table of Isotopes CD-ROM, B. Firestone, 1996.
12. **И.Ф. Шишкин** Теоретическая метрология. Часть первая. Общая теория измерений. С.-Петербург, изд. Питер, 2010.
13. **O.M. Pop, M.V. Stets.** Abstracts. LXIV Intern. Conf. Nucleus 2014, July 1–4, Minsk, 240 (2014).
14. **О.М. Поп, М.В. Стец, В.Т. Маслюк.** Известия НАН Армении, Физика, **50**, 159 (2015).
15. **О.М. Поп, П.С. Пеняк, М.В. Стець.** Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика, **34**, 101 (2013).
16. **О.М. Поп, М.В. Стець, В.Т. Маслюк, Б.В. Мацків, Р.В. Хомутник.** Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика, **36**, 89 (2014).

MODEL STANDARDS IN NUCLEAR-PHYSICAL METHODS OF DETERMINING OF THE EVENT DATE

O.M. POP, M.V. STETS

The method of standard sets in which reference sample is not used, was considered. This method uses the set of ordered sequences of activities of the nuclides being the members of the ^{232}Th, ^{235}U and ^{238}U series. The ordering activities of the nuclides were determined by solving a system of the Bateman–Rubinson differential equations. Calculated activities of nuclides were systematized in the table of standards. The table of standards plays the role of function of the internal mathematical standard (reference samples).

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.305-312 (2016)

УДК 535.14

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ КУБИТОВ В ПОДХОДЕ ФАРРИ–МАГНУСА

Г.А. АБОВЯН[1*], Г.Ю. КРЮЧКЯН[1,2]

[1]Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения
[2]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

[*]e-mail: gor.abovyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 9 марта 2016 г.)

Исследована система кубитов, взаимодействующая с полем возмущения с произвольной огибающей импульсов в представлении Фарри, основанном на разложении Магнуса в квантовой электродинамике. Получены общие выражения для вероятностей квантовых переходов между состояниями кубита. Представлены обобщения этого подхода для системы из двух взаимодействующих кубитов.

1. Введение

Как известно, логические операции со связанными кубитами представляют большой интерес в связи с реализацией квантовых процессоров. Алгоритмы квантовых вычислений могут быть построены с помощью фазовых и основанных на преобразовании Адамара однокубитных операций и в комбинации с двухкубитными логическими операциями [1]. В последнее время квантовые двухуровневые системы на основе сверхпроводящих джосефсоновских переходов были предложены как перспективные кубиты для реализации квантовых процессоров [2–6]. Системы, состоящие из нескольких связанных кубитов, являются менее изученными [7], и в основном рассмотрены системы, состоящие из двух кубитов. Теоретические и экспериментальные исследования двух связанных кубитов, взаимодействующих с полем возмущения, были проведены в работах [8–14], включая также случай взаимодействия с сильным полем, когда реализуются квазиэнергетические состояния двух кубитов [15]. Тем не менее, многие проблемы динамики связанных кубитов в импульсном поле возмущения к настоящему времени плохо изучены.

В настоящей работе развит систематический подход для исследования системы связанных кубитов, взаимодействующих с полем возмущения импульсов с произвольной огибающей амплитуд. Кубиты рассматриваются как двухуровневые системы, в которых имеет место эффект туннелирования. К ним, в частности, относятся сверхпроводящие кубиты с джозефсоновским переходом, которые характеризуются сравнительно большим временем релаксации. Рассматривается случай произвольного поля возмущения, включая импульсный режим и интенсивные поля. С этой целью в работе используется представление Фарри, в котором поле возмущения рассматривается вне рамок теории возмущения, для исследования временной эволюции кубитов. С другой стороны оператор эволюции рассматривается в рамках так называемого разложения Магнуса в квантовой электродинамике [16,17]. В этом подходе оператор временной эволюции представляется в экспоненциальной форме без использования хорошо известного дайсоновского *T*-хронологического упорядочения операторов. Такой подход позволяет вычислить вероятности переходов между состояниями кубитов как в резонансном приближении, так и вне этого приближения.

Следует отметить, что представление Фарри уже широко использовалось для исследования взаимодействия атомных систем с лазерным полем и формирования квазиэнергетических состояний и квазиэнергий [18–20]. Также рассматривались квазиэнергетические состояния для двухуровневого атома и кубита в бихроматическом поле [21–24], для связанных в ловушке охлажденных лазерным полем ионов [25–28] и для сверхпроводящих кубитов с джозефсоновским переходом [29,30].

2. Временная эволюция кубита в подходе Фарри–Магнуса

В начале рассмотрим одиночный кубит, взаимодействующий с импульсами с произвольной огибающей, на основе Гамильтониана

$$\hat{H}(t) = -g(t)\hat{\sigma}_z + \Delta\hat{\sigma}_x\,, \tag{1}$$

где

$$g(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 + A(t)\cos\left(\omega t + \theta\right). \tag{2}$$

Здесь ε_0 – разность энергий возбужденного и основного состояний кубита, Δ – амплитуда туннелирования между состояниями кубита, A – амплитуда внешнего поля, $\hat{\sigma}_x$ и $\hat{\sigma}_x$ – матрицы Паули.

Уравнение для состояния системы

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle = \hat{H}(t)\left|\Psi(t)\right\rangle \tag{3}$$

записывается в представлении Фарри $\left|\Psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t)\left|\Phi(t)\right\rangle$ в следующем виде:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi(t)\right\rangle = \Delta\hat{U}^{-1}\hat{\sigma}_x\hat{U}\left|\Phi(t)\right\rangle, \tag{4}$$

где

$$\hat{U}(t) = \exp\left(i\hat{\sigma}_z \int_0^t g(t')dt'\right). \tag{5}$$

В итоге получаем уравнение

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi(t)\right\rangle = \hat{h}(t)\left|\Phi(t)\right\rangle \tag{6}$$

с Гамильтонианом

$$\hat{h}(t) = \Delta\left[e^{-2t\Lambda(t)}\hat{\sigma}_+ + e^{2t\Lambda(t)}\hat{\sigma}_-\right], \tag{7}$$

где

$$\Lambda(t) = \int_0^t g(t')dt'. \tag{8}$$

В рассматриваемом подходе оператор эволюции системы $\left|\Phi(t+dt)\right\rangle = \hat{S}(t+dt,t)\left|\Phi(t)\right\rangle$ представляется в экспоненциальной форме разложения Магнуса без временного упорядочения [17]

$$\hat{S}(t,0) = T\exp\left(-i\int_0^t \hat{h}(t')dt'\right) = \exp\left(\hat{\Omega}(t)\right), \tag{9}$$

где оператор $\hat{\Omega}(t)$ дается в форме разложения

$$\hat{\Omega}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\hat{\Omega}_k(t). \tag{10}$$

Для трех членов такого разложения имеем:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Omega}_1(t) = -i\int_0^t \hat{h}(t')dt',\\
&\hat{\Omega}_2(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\left[\hat{h}(t'),\hat{h}(t'')\right],\\
&\hat{\Omega}_3(t) = \frac{i}{6}\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt''\int_0^{t''} dt'''\left(\left[\hat{h}(t'),\left[\hat{h}(t''),\hat{h}(t''')\right]\right] + \left[\hat{h}(t'''),\left[\hat{h}(t''),\hat{h}(t')\right]\right]\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Удобно также представить оператор эволюции через векторы сферы Блоха в виде

$$\hat{S}(t+dt,t) = \hat{I} - i\frac{d\theta(t)}{2}\left(\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right), \tag{12}$$

где $d\theta(t) = 2\Delta dt$ и

$$n_x = \cos\left(2\Lambda(t)\right),\quad n_y = \sin\left(2\Lambda(t)\right),\quad n_z = 0. \tag{13}$$

Заметим, что все члены разложения Магнуса выражаются через матрицы Паули, и оператор эволюции может быть представлен как

$$\hat{S}(t,0) = \exp\left(\hat{\Omega}(t)\right) = \exp\left(-i\mathbf{G}(t)\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right) = \hat{I}\cos\left(\left|\mathbf{G}(t)\right|\right) - i\left(\boldsymbol{\rho}(t)\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\sin\left(\left|\mathbf{G}(t)\right|\right), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{G}(t)/\left|\mathbf{G}(t)\right|$. Таким образом, проблема состоит в вычислении $\mathbf{G}(t)$ с помощью разложения Магнуса.

С точностью до второго порядка разложения получаем

$$
\begin{aligned}
&G_x(t) = \Delta\int_0^t dt' \cos\left(2\Lambda(t')\right), \\
&G_x(t) = \Delta\int_0^t dt' \sin\left(2\Lambda(t')\right), \\
&G_x(t) = \Delta^2\int_0^t dt'\int_0^{t'} dt'' \sin\left[2\left(\Lambda(t'') - \Lambda(t')\right)\right].
\end{aligned}
\tag{15}
$$

В конце этого раздела приведем выражения для амплитуд вероятностей переходов между состояниями кубита. Вектор состояния системы записывается в виде

$$
\left|\Psi(t)\right\rangle = \hat{U}(t)\exp\left(-i\mathbf{G}(t)\hat{\boldsymbol{\sigma}}\right)\left|\Psi(0)\right\rangle . \tag{16}
$$

Вводя амплитуды вероятностей

$$
\left|\Psi(t)\right\rangle = C_1(t)\left|1\right\rangle + C_2(t)\left|2\right\rangle , \tag{17}
$$

для них с помощью формул (16) можно получить следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
C_1(t) = {} & e^{i\Lambda(t)}\left[\cos(\mathbf{G}(t)) - i\rho_z \sin(\mathbf{G}(t))\right]C_1(0) \\
& + e^{i\Lambda(t)}(-i\rho_x - \rho_y)\sin(\mathbf{G}(t))C_2(0), \\
C_2(t) = {} & e^{-i\Lambda(t)}(-i\rho_x + \rho_y)\sin(\mathbf{G}(t))C_1(0) \\
& + e^{-i\Lambda(t)}\left[\cos(\mathbf{G}(t)) + i\rho_z \sin(\mathbf{G}(t))\right]C_2(0).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

В частности, для вероятности перехода системы из основного состояния в возбужденное состояние получаем

$$
P_2(t) = \left(1-\rho_z^2\right)\sin^2\left(\mathbf{G}(t)\right) . \tag{19}
$$

Этот результат получен в наиболее общем виде для случая взаимодействия кубита с внешним полем с произвольной частотой и огибающей импульса или последовательности импульсов.

Таким образом, эти результаты могут быть использованы как в резонансном приближении взаимодействия, так и вне рамок такого приближения, для взаимодействия кубита с одиночными импульсами, а также с их последовательностью.

3. Система двух кубитов в подходе Фарри–Магнуса

Здесь рассматривается обобщение метода на случай взаимодействующих кубитов. Гамильтониан системы многих кубитов может быть записан в виде

$$
\hat{H} = \hat{H}_0 - \sum_{i=1}^{N}\frac{\Delta_a}{2}\hat{\sigma}_x^{(a)} , \tag{20}
$$

$$\hat{H}_0 = -\sum_{a=1}^{N} g_a(t)\hat{\sigma}_z^{(a)} + \frac{1}{2}\sum_{a,b}^{N} J_{a,b}\hat{\sigma}_z^{(a)}\hat{\sigma}_z^{(b)}, \qquad (21)$$

где различные кубиты отличаются индексами a и b. Величина

$$g_a(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_a + A_a(t)\cos\left(\omega_a t + \theta_a\right) \qquad (22)$$

описывает взаимодействие каждого из кубитов с внешним полем частоты ω_a, амплитуды $A_a(t)$ и фазы θ_a. Гамильтониан $\hat{H}_0$ включает амплитуды туннельных переходов и член взаимодействия кубитов с константой связи $J_{a,b}$.

В этом случае оператор представления Фарри имеет вид

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = \hat{R}(t)\left|\Phi(t)\right\rangle, \qquad (23)$$

$$\hat{R}(t) = \exp\left[i\sum_a \Lambda_a(t)\hat{\sigma}_z^{(a)} - \frac{it}{2}\sum_{a,b} J_{a,b}\hat{\sigma}_z^{(a)}\hat{\sigma}_z^{(b)}\right], \qquad (24)$$

$$\Lambda_a(t) = \int_0^t g_a(t')dt', \qquad (25)$$

а вектор состояния в представлении Фарри может быть записан как в форме Дайсона с Гамильтонианом (20), так и в форме Магнуса

$$\left|\Psi(t)\right\rangle = T\exp\left(-i\int_0^t \hat{h}_{mq}(t')dt'\right) = \exp\left(\hat{Q}_{mq}(t)\right). \qquad (26)$$

Здесь Гамильтониан в представлении Фарри равен

$$\hat{h}_{mq}(t) = -\frac{1}{2}\hat{R}^{-1}(t)\left(\sum_a \Delta_a\hat{\sigma}_x^{(a)}\right)\hat{R}(t) \qquad (27)$$

и оператор $\hat{Q}_{mq}(t)$ дается разложением Магнуса, аналогичным формулам (10) и (11). Отметим, что Гамильтониан (27) записан здесь в неявной форме. Конкретные результаты могут быть получены для частных случаев нескольких кубитов.

Ниже приводятся результаты для двух взаимодействующих кубитов, когда Гамильтониан записывается в форме

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \frac{1}{2}\left(\Delta_1\hat{\sigma}_x^{(1)} + \Delta_2\hat{\sigma}_x^{(2)}\right), \qquad (28)$$

где

$$\hat{H}_0 = -g_1(t)\hat{\sigma}_z^{(1)} - g_2(t)\hat{\sigma}_z^{(2)} + J\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)}, \qquad (29)$$

и он же в представлении Фарри записывается как

$$\hat{h}_{mq}(t) = \hat{R}^{-1}(t)\left(\Delta_1\hat{\sigma}_x^{(1)} + \Delta_2\hat{\sigma}_x^{(2)}\right)\hat{R}(t), \qquad (30)$$

где

$$\hat{R}(t) = \exp\left[i\Lambda_1(t)\hat{\sigma}_z^{(1)} + i\Lambda_2(t)\hat{\sigma}_z^{(2)} - iJt\hat{\sigma}_z^{(1)}\hat{\sigma}_z^{(2)}\right]. \qquad (31)$$

Для выполнения конкретных преобразований используем следующие известные формулы с матрицами Паули:

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha\hat{\sigma}_x}\hat{\sigma}_x e^{-i\alpha\hat{\sigma}_x} &= \cos(2\alpha)\hat{\sigma}_x - \sin(2\alpha)\hat{\sigma}_y,\\
e^{i\alpha\hat{\sigma}_x}\hat{\sigma}_y e^{-i\alpha\hat{\sigma}_x} &= \sin(2\alpha)\hat{\sigma}_x + \cos(2\alpha)\hat{\sigma}_y.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

С помощью формул (32) можно получить преобразование

$$
\begin{aligned}
&\hat{R}^{-1}(t)\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{R}(t) = \cos\left(2\Lambda_1(t)\right)\left(\hat{\sigma}_x^{(1)}\cos\left(2Jt\hat{\sigma}_z^{(2)}\right) - \hat{\sigma}_y^{(1)}\sin\left(2Jt\hat{\sigma}_z^{(2)}\right)\right)\\
&-\sin\left(2\Lambda_1(t)\right)\left(\hat{\sigma}_x^{(1)}\sin\left(2Jt\hat{\sigma}_z^{(2)}\right) + \hat{\sigma}_y^{(1)}\cos\left(2Jt\hat{\sigma}_z^{(2)}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

которое в матричной форме приобретает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^{-1}(t)\hat{\sigma}_x^{(1)}\hat{R}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & e^{-2iJt\hat{\sigma}_z^{(2)}}e^{-2i\Lambda_1(t)} \\ e^{2iJt\hat{\sigma}_z^{(2)}}e^{2i\Lambda_1(t)} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-2i\left(Jt+\Lambda_1(t)\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i\left(Jt-\Lambda_1(t)\right)} \\ e^{2i\left(Jt+\Lambda_1(t)\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\left(Jt-\Lambda_1(t)\right)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Аналогичные выражения получаются также для второго кубита. Комбинируя эти результаты, для Гамильтониана системы в представлении Фарри можно получить следующий результат:

$$
\begin{aligned}
\hat{h}_{mq}(t) &= \Delta_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-2i\left(Jt+\Lambda_1(t)\right)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i\left(Jt-\Lambda_1(t)\right)} \\ e^{2i\left(Jt+\Lambda_1(t)\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\left(Jt-\Lambda_1(t)\right)} & 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&+\Delta_1 \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\left(Jt+\Lambda_2(t)\right)} & 0 & 0 \\ e^{2i\left(Jt+\Lambda_2(t)\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2i\left(Jt-\Lambda_2(t)\right)} \\ 0 & 0 & e^{-2i\left(Jt-\Lambda_2(t)\right)} & 0 \end{pmatrix}\\
&+\begin{pmatrix} 0 & \Delta_2 e^{-2i\left(Jt+\Lambda_2(t)\right)} & \Delta_1 e^{-2i\left(Jt+\Lambda_1(t)\right)} & 0 \\ \Delta_2 e^{2i\left(Jt+\Lambda_2(t)\right)} & 0 & 0 & \Delta_1 e^{2i\left(Jt-\Lambda_1(t)\right)} \\ \Delta_1 e^{2i\left(Jt+\Lambda_1(t)\right)} & 0 & 0 & \Delta_2 e^{2i\left(Jt-\Lambda_2(t)\right)} \\ 0 & \Delta_1 e^{-2i\left(Jt-\Lambda_1(t)\right)} & \Delta_2 e^{-2i\left(Jt-\Lambda_2(t)\right)} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Этот Гамильтониан представлен как сумма 4×4 матриц и действует в пространстве 4-х состояний двух кубитов. Главное преимущество такого Гамильтониана состоит в том, что в представлении Фарри он пропорционален амплитудам туннелирования, которые имеют смысл констант взаимодействия системы и по которым можно сформулировать итерационную процедуру. Что касается взаимодействия кубитов с полем возмущения, то оно учитывается во всех порядках по постоянным взаимодействия $g_a(t)$ и $g_b(t)$, поэтому результаты применимы также для случая интенсивных полей возмущения. Очевидно, что выражения (11), приведенные для разложения Магнуса вплоть до членов третьего порядка, получаются простой заменой в них $\hat{h}(t)$ на $\hat{h}_{mq}(t)$. Каждый m-й порядок разложения Магнуса содержит степени порядка m от амплитуд туннелирования.

4. Заключение

Развит новый подход для исследования эволюции многокубитных систем в поле возмущения с произвольной огибающей импульса. Для этого используются представление Фарри и разложение Магнуса для вектора состояния системы в рамках квантовой электродинамики. В случае одного кубита получены общие выражения для вероятностей квантовых переходов между основными состояниями. Представлены обобщения этого подхода для системы из двух взаимодействующих кубитов.

Работа частично финансировалась ГКН МОН Армении в рамках проекта № 15T-1C052.

ЛИТЕРАТУРА

1. **M. Nielsen, I. Chuang**. Quantum Computation and Quantum Information. Cambridge, Cambridge University Press, 2010.
2. **Y. Makhlin, G. Schön, A. Shnirman**. Rev. Mod. Phys., **73**, 357 (2001).
3. **J.Q. You, F. Nori**. Phys. Today, **58**, 42 (2005).
4. **J. Clarke, F.K. Wilhelm**. Nature (London), **453**, 1031 (2008).
5. **R.J. Schoelkopf, S.M. Girvin**. Nature (London), **451**, 664 (2008).
6. **A.M. Zagoskin**. Quantum Engineering: Theory and Design of Quantum Coherent Structures. Cambridge, Cambridge University Press, 2011.
7. **A.J. Berkley, H. Xu, R.C. Ramos, M.A. Gubrud, F.W. Strauch, P.R. Johnson, J.R. Anderson, A.J. Dragt, C.J. Lobb, F.C. Wellstood.** Science, **300**, 1548 (2003).
8. **J.B. Majer, F.G. Paauw, A.C.J. ter Haar, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij.** Phys. Rev. Lett., **94**, 090501 (2005).
9. **M. Steffen, M. Ansmann, R.C. Bialczak, N. Katz, M. Nee-ley, E.M. Weig, A.N. Cleland, J. M. Martinis**. Science **313**, 1423 (2006).
10. **J.H. Plantenberg, P.C. de Groot, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij**. Nature, **447**, 836 (2007).
11. **P.C. de Groot, J. Lisenfeld, R.N. Schouten, S. Ashhab, A. Lupaşcu, C.J.P.M. Harmans, J.E. Mooij**. Nature Phys., **6**, 763 (2010).

12. **S.N. Shevchenko, S.H.W. van der Ploeg, M. Grajcar, E. Il'ichev, A.N. Omelyanchouk, H.-G. Meyer**. Phys. Rev. B, **78**, 174527 (2008).
13. **E. Il'ichev, S.N. Shevchenko, S.H.W. van der Ploeg, M. Grajcar, E.A. Temchenko, A.N. Omelyanchouk, H.-G. Meyer.** Phys. Rev. B, **81**, 012506 (2010).
14. **S.S. Ivanov, P.A. Ivanov, N.V. Vitanov**. Phys. Rev. A, **91**, 032311 (2015).
15. **A.M. Satanin, M.V. Denisenko, S. Ashhab, F. Nori**. Phys. Rev. B, **85**, 184524 (2012).
16. **S. Blanes, F. Casas, J.A. Oteo, J. Ros.** Physics Reports, **470**, 151 (2009).
17. **S. Blanes, F. Casas, J.A. Oteo, J. Ros, B. P. Meystre, M. Sargent III.** The Magnus Expansion and Some of its Applications. Berlin, Springer Verlag, 2008.
18. **J.H. Shirley**. Phys. Rev., **138**, B 979 (1965).
19. **Я.Б. Зельдович**. ЖЭТФ, **51**, 1492 (1967).
20. **В.И. Ритус.** ЖЭТФ, **51**, 1544 (1966).
21. **M. Jakob, G.Yu. Kryuchkyan.** Phys. Rev. A, **58**, 767(1998).
22. **G.Yu. Kryuchkyan, M. Jakob, A.S. Sargsian**. Phys. Rev. A, **57**, 2091 (1998).
23. **M. Jakob, G.Yu. Kryuchkyan**. Phys. Rev. A, **57**, 1355 (1998).
24. **G.A. Abovyan, G.Yu. Kryuchkyan**. Phys. Rev. A, **88**, 033811 (2013).
25. **G.Yu. Kryuchkyan, B. Kneer**. Phys. Lett. A, **259**, 178 (1999).
26. **G.Yu. Kryuchkyan, B. Kneer**. Phys. Rev A, **60**, 5035 (1999).
27. **M. Jakob, G.Yu. Kryuchkyan**. Phys. Rev. A, **59**, 2111 (1999).
28. **M. Jakob, B. Kneer, G.Yu. Kryuchkyan**. Phys. Rev. A, **58**, 4728 (1998).
29. **M. Silveri, J. Tuorila, M. Kemppainen, E. Thuneberg**. Phys. Rev. B, **87**, 134505 (2013).
30. **J. Tuorila, M. Silveri, M. Sillanpää, E. Thuneberg, Y. Makhlin, P. Hakonen**. Phys. Rev. Lett., **105**, 257003 (2010).

ՔՅՈՒԲԻԹՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՖԱՐՐԻ–ՄԱԳՆՈՒՍ ՄՈՏԵՑՄԱՄԲ

Գ.Ա. ԱԲՈՎՅԱՆ, Գ.ՅՈՒ. ԿՐՅՈՒՉԿՅԱՆ

Հետազոտված է իմպուլսների կամայական փաթեթի հետ փոխազդող քյուբիթների համակարգը Ֆարրի ներկայացմամբ Մագնուսի շարքի հիման վրա քվանտային էլեկտրոդինամիկայում: Մի քյուբիթի դեպքում ստացված են ընդհանուր արտահայտություններ քյուբիթի հիմնական մակարդակների միջև քվանտային անցումների հավանականությունների համար: Ստացված է այդ մոտեցման ընդհանրացումը երկու փոխազդող քյուբիթների համար:

INTERACTION OF QUBITS IN FURRY–MAGNUS APPROACH

G.A. ABOVYAN, G.YU. KRYUCHKYAN

System of qubits interacting with a perturbation field of arbitrary envelope is investigated in Furry representation based on Magnus expansion in quantum electrodynamics. General expressions are derived for quantum transitions probability between states of a single qubit. The generalization of the approach is presented for the system of two interacting qubits.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.313-322 (2016)

УДК 539.184

РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ БИКОНФЛЮЭНТНОГО УРАВНЕНИЯ ГОЙНА В РЯДЫ ПО НЕПОЛНЫМ БЕТА- И ГАММА-ФУНКЦИЯМ

Т.А. ИШХАНЯН[1,2*], Е. ПАШАЯН-ЛЕРУА[3], М.Р. ГЕВОРГЯН[1,3], К. ЛЕРУА[3], А.М. ИШХАНЯН[1*]

[1]Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения
[2]Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия
[3]Laboratoire Interdisciplinaire Carnot de, Universite de Bourgogne, Dijon, France

[*]e-mail: tishkhanyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 10 июля 2015 г.)

Рассматривая уравнения для некоторых функций, содержащих первую или вторую производную биконфлюэнтной функции Гойна, строятся два разложения решений биконфлюэнтного уравнения Гойна по неполным бета-функциям. В первом разложении в качестве функций разложения фигурирует одна бета-функция, в то время как во втором разложении – комбинация двух бета-функций. Коэффициенты разложения удовлетворяют четырехчленному и пятичленному рекуррентным соотношениям, соответственно. Показано, что предложенная методика в состоянии генерировать решения в виде разложений по другим специальным функциям. Приведены два примера таких разложений по неполным гамма-функциям.

1. Введение

Биконфлюэнтное уравнение Гойна [1–2] широко используется в различных разделах современной фундаментальной и прикладной науки: в квантовой механике, в общей теории относительности, в физике твердого тела, в атомной, молекулярной и оптической физике, в химии и т. д. (см., например, [3–9]). Одним из недавних примеров является потенциал обратного квадратного корня [10], член семейства биконфлюэнтных потенциалов Гойна [11], который описывает менее сингулярное по сравнению с потенциалом Кулона взаимодействие.

Несмотря на то, что свойства биконфлюэнтного уравнения Гойна изучались большим числом авторов [12–23], в теории этого уравнения многие вопросы остаются открытыми. К примеру, долгое время приложения ограничивались только полиномиальными решениями. Обобщение решений на неполиномиальные случаи представляет интересную и важную задачу [9]. Как было недавно показано нами, разложение решений по более сложным (по сравнению со степенными) математическим функциям может привести к легко оперируемым алгоритмам для вывода новых аналитических квадратично-интегрируемых неполиномиальных решений уравнения Шредингера [10]. В настоящей работе мы делаем шаг в этом направлении, конструируя два разложения решений биконфлюэнтного уравнения Гойна по неполным бета-функциям и два разложения по неполным гамма-функциям.

Подход, который мы применяем для построения этих разложений, следующий. Мы рассматриваем, согласно работам [24–31], разложение некоторой вспомогательной функции, содержащей производную биконфлюэнтной функции Гойна, по некоторым элементарным или специальным функциям. Характерная особенность этих уравнений заключается в том, что в общем случае они имеют, как минимум, еще одну дополнительную регулярную особенность по сравнению с биконфлюэнтным уравнением Гойна. Расположение этой дополнительной сингулярности определяется вспомогательным параметром биконфлюэнтного уравнения Гойна (т. е. параметром, который происходит от вспомогательного параметра исходного общего уравнения Гойна [32]), и в общем случае она может быть расположена в любой точке расширенной комплексной z-плоскости. Имея разложения упомянутой вспомогательной функции, путем дальнейшего интегрирования(ий) мы выводим разложение биконфлюэнтного уравнения Гойна по специальным функциям или их комбинациям.

Ниже мы рассмотрим два разных типа разложений по неполным бета-функциям, которые получаются, используя разложения по бета-функциям или по рядам Фробениуса для дополнительных функций, которые включают первую и вторую производные биконфлюэнтной функции Гойна, соответственно. Коэффициенты разложения подчиняются соответственно четырех- или пятичленному рекуррентным соотношениям. Наконец, мы представляем два разложения по неполным гамма-функциям. Построенные разложения применимы к произвольному набору параметров биконфлюэнтного уравнения Гойна при условии $\alpha \neq 0$ и $q \neq 0$.

Биконфлюэнтное уравнение Гойна имеет четыре независимых параметра [1–2, 12]. Согласно [1], канонический вид данного уравнения следующий:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1+\alpha-\beta z-2z^2}{z}\frac{du}{dz} + \frac{(\gamma-\alpha-2)z-\left(\delta+(1+\alpha)\beta\right)/2}{z}u = 0\,. \qquad (1)$$

Как было упомянуто выше, сингулярными точками этого уравнения являются точки $z=0$ (регулярная сингулярность) и $z=\infty$ (иррегулярная сингулярность ранга 2). Другой вид уравнения с четырьмя независимыми параметрами приведен в работе [2]:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{\gamma}{z}+\delta+z\right)\frac{du}{dz} + \frac{\alpha z-q}{z}u = 0\,. \qquad (2)$$

Иные канонические формы также могут быть использованы, как это отмечено в [1]. В данной работе для общности мы рассматриваем следующий вид этого уравнения:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\frac{\gamma}{z}+\delta+\varepsilon z\right)\frac{du}{dz}+\frac{\alpha z-q}{z}u=0\,. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что как вышеуказанные две формы, так и другие формы, встречающиеся в литературе, получаются из этой формы прямой спецификацией параметров.

Важно сделать несколько замечаний об элементарных случаях биконфлюэнтного уравнения Гойна. Во-первых, заметим, что уравнение (3) при $\varepsilon=0$ и $\alpha=0$ сразу переходит в вырожденное гипергеометрическое уравнение Куммера. Более того, случай $\varepsilon=0$ всегда вырожден, независимо от значения α, так как в этом случае уравнение (3) приводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению простым преобразованием зависимой переменной $u=e^{sz}v(z)$. Общее решение данного уравнения записывается в виде

$$u=e^{sz}\left[C_1\times{}_1F_1\left((q-\gamma s)/s_0;\gamma;s_0z\right)+C_2U\left((q-\gamma s)/s_0;\gamma;s_0z\right)\right], \tag{4}$$

где ${}_1F_1$ и U – вырожденные гипергеометрические функции Куммера и Трикоми, соответственно, $C_{1,2}$ – константы и

$$s=-(\delta+s_0)/2\,,\quad s_0=\pm\sqrt{\delta^2-4\alpha}\,. \tag{5}$$

Другим известным случаем, когда решение уравнения (3) записывается в вырожденных гипергеометрических функциях (с аргументом $-\varepsilon z^2/2$), является случай $\delta=q=0$ [1]. Также простым и вырожденным является случай $\alpha=0$ и $q=0$, когда общее решение биконфлюэнтного уравнения записывается в квадратурах

$$u=C_1+C_2\int e^{-\delta z-\varepsilon z^2/2}z^{-\gamma}dz\,,\quad C_{1,2}=\text{const}\,. \tag{6}$$

Учитывая вышеупомянутые замечания, далее мы предполагаем, что $\varepsilon\neq 0$, а α и q одновременно не равняются нулю.

2. Разложения в ряды по неполным бета-функциям

Продемонстрируем наш подход к построению решений в рядах по неполным бета-функциям, рассматривая следующее представление для первой производной решения уравнения (3):

$$\frac{du}{dz}=z^{-\gamma}v(z)\,. \tag{7}$$

Если функцию $v(z)$ можно разложить в виде

$$v(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-s)^{\mu+n} \;, \tag{8}$$

то почленное интегрирование уравнения (7) дает следующее разложение по неполным бета-функциям ($|z| \le |z_0|$)

$$u = C_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \left(-s\right)^n B\left(1-\gamma,\, 1+n+\mu;\, \frac{z}{s}\right). \tag{9}$$

Более развитый пример, включающий неполные бета-функции уже в уравнении (8), строится, используя возможное разложение функции $v(z)$ следующей формы:

$$v(z) = C_1 + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n B(a_n, b_n; z/s) \,. \tag{10}$$

Почленное интегрирование приводит к разложению по комбинациям неполных бета-функций

$$u(z) = C_0 + C_1 \frac{z^{1-\gamma}}{1-\gamma} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{1-\gamma}\left(z^{1-\gamma} B(a_n, b_n; z/s) - s^{1-\gamma} B(a_n + 1-\gamma, b_n; z/s)\right). \tag{11}$$

Заметим, что константы интегрирования C_0 и C_1 в вышеуказанных разложениях не произвольные; наоборот, они должны быть выбраны подходящим образом, чтобы обеспечить правильное решение.

С точки зрения данного подхода на этом шаге задача сводится к рассмотрению различных уравнений, которым подчиняются некоторые функции, содержащие производные биконфлюэнтной функции Гойна, и построению разложений этих функций на основе этих уравнений.

Чтобы быть более конкретным, рассмотрим, например, детали вывода разложения (9). Легко показать, что если разделить уравнение (3) на $(\alpha z - q)/z$ и продифференцировать, то дифференциальное уравнение для функции $v(z) = z^\gamma du/dz$ запишется в виде

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \left(\frac{1-\gamma}{z} + \delta + \varepsilon z - \frac{\alpha}{\alpha z - q}\right)\frac{dv}{dz} + \frac{\Pi(z)}{z(\alpha z - q)} v = 0 \,, \tag{12}$$

где $\Pi(z)$ – квадратичный полином по z

$$\Pi(z) = \alpha(\alpha + \varepsilon - \gamma\varepsilon) z^2 - (\alpha(2q + \gamma\delta) + q\varepsilon(2-\gamma)) z + q(q + (\gamma - 1)\delta) \,. \tag{13}$$

Сравнивая (12) с уравнением (3), можно сразу увидеть, что это уравнение имеет дополнительную регулярную сингулярность в $z_0 = q/\alpha$. Пусть теперь $\alpha \ne 0$ и $q \ne 0$, так чтобы дополнительная сингулярность находилась в конечной точке комплексной z-плоскости, отличной от начала координат, т. е. $z_0 \ne 0$. Тогда, взяв фробениусовское решение уравнения (12) в окрестности данной сингулярности

$$v=(z-z_0)^{\mu}\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^{(z_0)}(z-z_0)^n\ , \tag{14}$$

получим разложение (8). Далее, почленно интегрируя уравнение (7), получим разложение (9), которое в конечном итоге запишется в виде ($|z|\le|z_0|$)

$$u=C_0+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^{(z_0)}\left(-z_0\right)^n B\left(1-\gamma,\ 1+n+\mu;\ \frac{z}{z_0}\right). \tag{15}$$

Подставляя это разложение в уравнение (3) и переходя к пределу $z\to 0$, находим $C_0=0$, если $\operatorname{Re}(1-\gamma)>0$. Последующие коэффициенты построенного разложения подчиняются четырехчленному рекуррентному соотношению

$$S_n a_n^{(z_0)}+R_{n-1}a_{n-1}^{(z_0)}+Q_{n-2}a_{n-2}^{(z_0)}+P_{n-3}a_{n-3}^{(z_0)}=0\,, \tag{16}$$

где

$$S_n=z_0(n+\mu)(n+\mu-2)\,, \tag{17}$$

$$R_n=z_0(\delta+z_0\varepsilon)(n+\mu-1)+(n+\mu)(n+\mu-1-\gamma)\,, \tag{18}$$

$$Q_n=-\gamma(\delta+z_0\varepsilon)+(\delta+2z_0\varepsilon)(n+\mu)\,, \tag{19}$$

$$P_n=\alpha+\varepsilon(n+\mu+1-\gamma)\,. \tag{20}$$

Ряд обрывается слева при $n=0$, если $S_0=0$, т. е. при $\mu=0$ или $\mu=2$. Эти характеристические показатели отличаются целым числом, и легко проверить, что только больший из показателей $\mu=2$ приводит к состоятельному разложению; второе независимое решение требует логарифмического члена. Ряд обрывается справа, если три последующих коэффициента зануляются для какого-то $N=1,2,\ldots$: $a_N\neq 0$, $a_{N+1}=a_{N+2}=a_{N+3}=0$. Условие $a_{N+3}=0$ показывает, что обрывание возможно, если $P_N=0$, т. е. при

$$\alpha=-\varepsilon(N+\mu+1-\gamma)\,,\quad \mu=2\,. \tag{21}$$

Оставшиеся два уравнения, $a_{N+1}=0$ and $a_{N+2}=0$, накладывают два других ограничения на параметры биконфлюэнтного уравнения Гойна.

Рассмотрим теперь вывод разложения формы уравнения (11) по комбинациям неполных бета-функций. Легко проверить, что первая производная $du(z)/dz=v(z)$ биконфлюэнтной функции Гойна удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}&v_{zz}+\left(\frac{1+\gamma}{z}+\delta+\varepsilon z-\frac{\alpha}{\alpha z-q}\right)v_z\\&+\frac{(\alpha+\varepsilon)z(\alpha z-2q)+(q^2-\delta q-\alpha\gamma)}{z(\alpha z-q)}v=0,\end{aligned} \tag{22}$$

которое имеет дополнительную регулярную сингулярность в $z_0=q/\alpha$. Теперь необходимо построить решение этого уравнения в виде разложения по бета-функциям. Как было показано ранее, такое разложение может быть построено переходом к уравнению для функции $w(z)=z^{1+\gamma}dv(z)/dz$. Для $(\alpha+\varepsilon)\alpha\neq 0$ это уравнение записывается в виде

$$w_{zz}+\left(-\frac{\gamma}{z}+\delta+\varepsilon z-\frac{1}{z-z_1}-\frac{1}{z-z_2}\right)w_z+\frac{P_3(z)}{z(z-z_1)(z-z_2)}w=0\,, \qquad (23)$$

где $P_3(z)$ является кубическим полиномом и $z_{1,2}$ – корнями квадратного уравнения

$$(\alpha+\varepsilon)z(\alpha z-2q)+(q^2-\delta q-\alpha\gamma)=0\,. \qquad (24)$$

Структура сингулярностей этого уравнения зависит от значений корней $z_{1,2}$:

$$z_{1,2}=z_0\pm\sqrt{\frac{\gamma+\delta z_0+\varepsilon z_0^2}{\alpha+\varepsilon}}\,. \qquad (25)$$

Сравнивая (23) с уравнением (3), видим, что в общем случае разных корней $z_1\neq z_2$, при условии, что корни $z_{1,2}$ ненулевые, это уравнение имеет две дополнительные регулярные сингулярности, расположенные в $z=z_1$ и $z=z_2$. Если $z_1=z_2$, получается только одна дополнительная сингулярность, расположенная в $z=z_0$, которую мы предполагаем ненулевой ($q\neq 0$). Кроме того, одна из дополнительных сингулярностей может совпадать с $z=0$ биконфлюэнтного уравнения Гойна, тем не менее, заметим, что другая дополнительная сингулярность обязательно будет ненулевой. Поэтому, если $q\neq 0$, уравнение (23) имеет хотя бы одну дополнительную сингулярность, расположенную в конечной точке комплексной z-плоскости, отличающейся от начала координат.

Предположим, что z_1 является дополнительной сингулярностью, и рассмотрим фробениусовское решение уравнение (23) в окрестности этой точки

$$w=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^{(z_1)}(z-z_1)^{\mu+n}\,. \qquad (26)$$

Интегрируя, мы получаем следующее разложение:

$$\begin{aligned}v(z)&=C_1+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^{(z_1)}\int z^{-1-\gamma}(z-z_1)^{\mu+n}dz\\&=C_1+\sum_{n=0}^{+\infty}a_n^{(z_1)}\frac{(-z_1)^{n+\mu}}{(z_1)^{\gamma}}B\left(-\gamma,\,1+n+\mu;\,\frac{z}{z_1}\right),\end{aligned} \qquad (27)$$

которое имеет форму уравнения (10). Проинтегрировав еще раз, получаем следующее окончательное разложение решения биконфлюэнтного уравнения Гойна в терминах комбинаций неполных бета-функций:

$$u(z) = C_0 + C_1 z + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^{(z_1)} \frac{(-z_1)^{n+\mu}}{(z_1)^{\gamma}} \times \left(zB\left(-\gamma,\, 1+n+\mu;\, \frac{z}{z_1}\right) - z_1 B\left(1-\gamma,\, 1+n+\mu;\, \frac{z}{z_1}\right)\right), \tag{28}$$

Вспомним, что константы интегрирования $C_{0,1}$ не являются произвольными, а должны быть выбраны надлежащим образом, чтобы получить конечное решение.

Коэффициенты $a_n^{(z_1)}$ разложения (26) в общем случае подчиняются пятичленному рекуррентному соотношению

$$T_n a_n^{(z_1)} + S_{n-1} a_{n-1}^{(z_1)} + R_{n-2} a_{n-2}^{(z_1)} + Q_{n-3} a_{n-3}^{(z_1)} + P_{n-4} a_{n-4}^{(z_1)} = 0, \tag{29}$$

где

$$T_n = z_1(z_1 - z_2)(n+\mu)(n-1+\mu), \tag{30}$$

$$S_n = s_0 + s_1\mu_1 + s_2\mu_1^2,\ R_n = r_0 + r_1\mu_1 + \mu_1^2,\ Q_n = q_0 + q_1\mu_1,\ \mu_1 = n+\mu, \tag{31}$$

$$P_n = \alpha + \varepsilon(n+\mu+1-\gamma), \tag{32}$$

причем параметры $s_{0,1,2}$, $r_{0,1}$, $q_{0,1}$ не зависят от n. Поскольку разложения (27) и (28) применимы, если $z_1 \neq 0$, это рекуррентное соотношение может включать четыре последовательных члена только при $z_1 = z_2$, т. е. если $\gamma + \delta z_0 + \varepsilon z_0^2 = 0$, или, что эквивалентно, $\alpha^2\gamma + q\alpha\delta z_0 + q^2\varepsilon = 0$, как это получается из уравнения (25). В этом случае имеем $z_{1,2} = z_0 = q/\alpha$, $T_n = 0$ и $S_n = z_0(n+\mu-1) \times (n+\mu-2)$, так что ряды могут обрываться слева при $\mu = 1$ или $\mu = 2$. Поскольку эти характеристические показатели отличаются на целое число, можно ожидать только одно состоятельное разложение в степенной ряд, соответствующее большему показателю степени $\mu = 2$; для второго решения может потребоваться логарифмический член.

Если $z_1 \neq z_2$, то ряд может обрываться слева при $\mu = 0$ или $\mu = 1$. И здесь в общем случае можно ожидать только одно состоятельное разложение в степенной ряд, соответствующее большему показателю $\mu = 1$.

Таким образом, в обоих случаях, $z_1 = z_2$ и $z_1 \neq z_2$, ряды могут обрываться справа при каком-то $N = 1, 2, \ldots$, если $P_N = 0$, т. е.

$$\alpha = -\varepsilon(N + \mu + 1 - \gamma), \tag{33}$$

и, дополнительно, если $a_{N+1} = a_{N+2} = a_{N+3} = 0$ (в случае пятичленного соотношения) или $a_{N+1} = a_{N+2} = 0$ (в случае четырехчленного соотношения).

3. Разложения в ряды по неполным гамма-функциям

Итак, рассматривая уравнения для некоторых функций, содержащих первую или вторую производную биконфлюэнтной функции Гойна, мы построили два разложения решений биконфлюэнтного уравнения Гойна по неполным бета-функциям. В первом разложении в качестве функций разложения выступает одна бета-функция, во втором же вовлечена линейная по z комбинация бета-функций. Коэффициенты разложений удовлетворяют четырех- и пятичленным рекуррентным соотношениям, соответственно. Построенные ряды применимы для произвольного набора параметров биконфлюэнтного уравнения Гойна, за исключением случая $\alpha = 0$, $q = 0$.

Тот же самый подход можно применить для построения решений в виде рядов и по другим специальным функциям. Например, применив к дифференциальному уравнению для функции $v(z) = e^{\delta z} z^{\gamma} du/dz$:

$$v_{zz} + \left(\frac{1-\gamma}{z} - \delta + \varepsilon z - \frac{\alpha}{\alpha z - q} \right) v_z + \frac{P_3(z)}{z(\alpha z - q)} v = 0, \tag{34}$$

где P_3 является кубическим полиномом

$$P_3(z) = -\alpha\delta\varepsilon z^3 + (\alpha^2 + q\delta\varepsilon + \alpha\varepsilon(1-\gamma)) z^2 - q(2\alpha + (2-\gamma)\varepsilon) z + q^2, \tag{35}$$

и фробениусовское решение для $v(z)$ в окрестности сингулярной точки $z = 0$

$$v(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} z^{\mu+n}, \tag{36}$$

можно построить разложение по неполным гамма-функциям

$$u(z) = C_0 + \int e^{-\delta z} z^{-\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} z^{\mu+n} \right) dz = C_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^{(0)}}{\delta^{n+\mu+1-\gamma}} \Gamma\left(n+\mu+1-\gamma; \delta z\right). \tag{37}$$

Другое разложение по неполным гамма-функциям легко построить, если рассматривать следующее дифференциальное уравнение для функции $v(z) = e^{\varepsilon z^2/2} z^{\gamma} du/dz$:

$$v_{zz} + \left(\frac{1-\gamma}{z} + \delta - \varepsilon z - \frac{\alpha}{\alpha z - q} \right) v_z + \frac{P_3(z)}{z(\alpha z - q)} v = 0, \tag{38}$$

где P_3 – кубический полином

$$P_3(z) = -\alpha\delta\varepsilon z^3 + (\alpha^2 + q\delta\varepsilon) z^2 - \alpha(2q + \gamma\delta) z + q^2 + q\delta(\gamma - 1). \tag{39}$$

Подставив ряд Фробениуса в решении $v(z)$ в окрестности сингулярной точки $z = 0$, приходим к разложению

$$\begin{aligned} u(z) &= C_0 + \int e^{-\varepsilon z^2/2} z^{-\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(0)} z^{\mu+n} \right) dz \\ &= C_0 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n^{(0)}/2}{(\sqrt{\varepsilon/2})^{n+\mu+1-\gamma}} \Gamma\left(\frac{n+\mu+1-\gamma}{2}; \frac{\varepsilon z^2}{2} \right). \end{aligned} \tag{40}$$

В заключение приведем иной аргумент в поддержку полезности применения уравнений для производных функций Гойна. Из уравнения (22) видим, что если последнее слагаемое исчезает, то решение задачи записывается в квадратурах. Решение исходного биконфлюэнтного уравнения (3) в этом случае записывается как

$$u = C_1 e^{-\delta z - \varepsilon z^2/2} z^{-\gamma} + \frac{\gamma + \delta z + \varepsilon z^2}{\alpha z - q}\left(C_2 - C_1 \int e^{-\delta z - \varepsilon z^2/2} z^{-1-\gamma} (\alpha z - q) dz \right), \qquad (41)$$

которое верно, если $\alpha + \varepsilon = 0$ и $q^2 - \delta q - \alpha\gamma = 0$. Несмотря на то, что данное решение можно предвидеть из уравнения (3), наш вывод ясный, интуитивно понятный и последовательный.

4. Заключение

Итак, мы продемонстрировали, что уравнения для различных функций, содержащих производные функций Гойна, могут быть использованы для построения разложений решений уравнений Гойна по различным специальным функциям. Мы показали это построением двух разложений биконфлюэнтных функций Гойна по неполным бета-функциям и двух разложений по неполным гамма-функциям. При специальных ограничениях, наложенных на параметры, построенные ряды могут оборваться, тем самым образовав замкнутые решения в виде сумм, содержащих конечное число членов. Помимо сказанного, использование уравнений для производных функций Гойна может быть полезным в построении явных решений, записываемых в квадратурах. Несмотря на то, что мы убедились в справедливости данных выводов только на примере частного случая биконфлюэнтного уравнения Гойна – это общие наблюдения, характерные как для других уравнений Гойна, так и для уравнений более общего типа.

Работа выполнена в рамках армяно-французской Международной ассоциированной лаборатории (CNRS-France и SCS-Armenia) IRMAS. Исследования поддержаны ГКН МОН Армении (грант № 15T-1C323). М. Геворгян благодарит Департамент сотрудничества и культурной деятельности (SCAC) посольства Франции в Армении за аспирантский грант.

ЛИТЕРАТУРА

1. Heun's Differential Equations, A. Ronveaux, Ed., Oxford University Press, London, 1995.
2. NIST Handbook of Mathematical Functions, F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert, C.W. Clark, Eds., Cambridge University Press, New York, 2010.
3. **B. Léauté, G. Marcilhacy.** J. Phys. A, **19**, 3527 (1986).
4. **R. Pons, G. Marcilhacy.** Class. Quantum Grav., **4**, 171 (1987).
5. **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen.** J. Phys. A, **34**, 6301 (2001).
6. **A. Ralko, T.T. Truong.** Phys. Lett. A, **323**, 395 (2004).
7. **F. Caruso, J. Martins, V. Oguri.** Annals of Physics, **347**, 130 (2014).

8. **Т.А. Шахвердян, Т.А. Ишханян, А.Е. Григорян, А.М. Ишханян.** Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 283 (2015).
9. **J. Karwoswki, H.A. Witek.** Theor. Chem. Accounts, **133**, 1494 (2014).
10. **A.M. Ishkhanyan.** Eur. Phys. Lett., **112**, 10006 (2015).
11. **D. Batic, R. Williams, M. Nowakowski.** J. Phys. A, **46**, 245204 (2013).
12. **A. Decarreau, M. Dumont-Lepage, P. Maroni, A. Robert, A. Ronveaux.** Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **92**, 53 (1978).
13. **P. Maroni.** Ann. Inst. Henri Poincaré A, **30**, 315 (1979).
14. **D.P. Datta, S. Mukherjee.** J. Phys. A, **13**, 3161 (1980).
15. **F. Batola.** Arch. Ration. Mech. Ana., **78**, 275 (1982).
16. **R.N. Chaudhuri.** J. Phys. A, **16**, 209 (1983).
17. **E.R. Arriola, A. Zarzo, J.S. Dehesa.** J. Comput. Appl. Math., **37**, 161 (1991).
18. **A. Hautot.** Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, **40**, 13 (1971).
19. **H. Exton.** Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **102**, 87 (1989).
20. **A.Ya. Kazakov, S.Yu. Slavyanov.** Methods and Applications of Analysis, **3**, 447 (1996).
21. **S.Yu. Slavyanov.** J. Phys. A, **29**, 7329 (1996).
22. **A. Roseau.** Bull. Belg. Math. Soc., **9**, 321 (2002).
23. **S. Belmehdi, J.-P. Chehab.** Abstract and Appl. Anal., **2004:4**, 295 (2004).
24. **A.M. Ishkhanyan, K.-A. Suominen.** J. Phys. A **36**, L81 (2003).
25. **V.A. Shahnazaryan, T.A. Ishkhanyan, T.A. Shahverdyan, A.M. Ishkhanyan.** Armenian Journal of Physics, **5**, 146 (2012).
26. **A.M. Ishkhanyan.** Phys. Lett. A, **380**, 640 (2016).
27. **T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan.** AIP Advances, **4**, 087132 (2014).
28. **C. Leroy, A.M. Ishkhanyan.** Integral Transforms and Special Functions, **26**, 451 (2015).
29. **A.S. Tarloyan, T.A. Ishkhanyan, A.M. Ishkhanyan.** Ann. Phys. (Berlin), **528**, 264 (2016).
30. A. Ishkhanyan, V. Krainov, arXiv:1508.06989 (2016).
31. **A. Ishkhanyan, B. Joulakian, K.-A. Suominen.** J. Phys. B, **42**, 221002 (2009).
32. **K. Heun.** Math. Ann., **33**, 161 (1889).

EXPANSIONS OF THE SOLUTIONS OF THE BICONFLUENT HEUN EQUATION IN TERMS OF INCOMPLETE BETA AND GAMMA FUNCTIONS

T.A. ISHKHANYAN, Y. PASHAYAN-LEROY, M.R. GEVORGYAN,
C. LEROY, A.M. ISHKHANYAN

Starting from equations obeyed by functions involving the first or the second derivatives of the biconfluent Heun function, we construct two expansions of the solutions of the biconfluent Heun equation in terms of incomplete Beta functions. The first series applies single Beta functions as expansion functions, while the second one involves a combination of two Beta functions. The coefficients of expansions obey four- and five-term recurrence relations, respectively. It is shown that the proposed technique is potent to produce series solutions in terms of other special functions. Two examples of such expansions in terms of the incomplete Gamma-functions are presented.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №2, с.323-331 (2016)

УДК 533.9

ПОРОГОВЫЕ СВОЙСТВА ЛАЗЕРОВ НА СВОБОДНЫХ ЭЛЕКТРОНАХ БЕЗ ИНВЕРСИИ

Д.Н. КЛОЧКОВ[1], А.А. ГЕВОРГЯН[2], Н.Ш. ИЗМАИЛЯН[3], К.Б. ОГАНЕСЯН[3*]

[1]Институт общей физики РАН им. А.М. Прохорова, Москва, Россия
[2]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[3]Национальная научная лаборатория им. А.И. Алиханяна, Ереван, Армения

[*]e-mail: bsk@yerphi.am

(Поступила в редакцию 18 марта 2016 г.)

Показано, что возможность создания лазеров на свободных электронах без инверсии (ЛСЭБИ) имеет пороговый характер по интенсивности поля усиливаемой волны. Дано описание пороговых условий в рамках коллективного подхода. Показано, что порог наблюдения усиления без инверсии достаточно высок, что может существенно затруднить возможность экспериментальной реализации ЛСЭБИ.

1. Введение

Идея создания лазеров на свободных электронах без инверсии (ЛСЭБИ) была предложена впервые в работе [1], затем развивалась и совершенствовалась в работах [2–5]. Конкретные схемы реализации ЛСЭБИ предлагались и рассматривались в работах [6, 7]. Одним из ключевых моментов схем реализации ЛСЭБИ является предложение об использовании неколлинеарного распространения электронного пучка и усиливаемого излучения. В обычных лазерах на свободных электронах (ЛСЭ) и строфотронах такие схемы известны и обсуждаются уже достаточно давно [8–27]. Применительно к ЛСЭБИ с двумя ондуляторами основная идея состоит в том, что при неколлинеарном взаимодействии лазерного и электронного пучков у электронов после первого ондулятора возникает разброс по поперечным скоростям, а значит и по углам, и этот разброс напрямую связан с приростом энергии электронов. Поэтому селекция электронов по направлениям в межондуляторном промежутке оказывается эквивалентной селекции по энергиям. В принципе, это позволяет изменять контролируемым образом длину пути электронов с разными энергиями в межондуляторном пространстве и распределение по энергиям на входе во второй ондулятор. Если устройства в межондуляторном промежутке обладают свойством отрицательной дисперсии (т. е. более быстрые электроны тратят больше времени на прохождение межондулятоного пространства, чем медленные), то интегральный (по энергиям электронов) коэффициент усиления $G(\omega)$ может быть положительным практически во всей области изменения частоты усиливаемой волны ω в окрестности резонансной частоты ондулятора.

Данный механизм может работать только в том случае, если разброс по углам α, возникающий в результате взаимодействия электронов с полем ондулятора и усиливаемой волны, больше, чем естественный разброс по направлениям скорости в электронном пучке $\Delta\alpha_{\text{beam}}$. Практически $\Delta\alpha_{\text{beam}}$ не может быть меньше, чем 10^{-4} рад. Условие $\alpha > \Delta\alpha_{\text{beam}}$ приводит к возникновению порога реализации ЛСЭБИ либо по интенсивности лазерного излучения, либо по плотности электронного пучка.

В настоящей работе оценивается порог возникновения эффекта усиления без инверсии в предлагавшихся для достижения этой цели схемах ЛСЭ. Анализ выполнен в рамках многочастичного описания, охватывающего как комптоновский, так и рамановский режимы усиления в ЛСЭ.

2. Многочастичное описание

В работах [2–5] рассматривалась модель безграничных электронного и лазерного пучков, в то время как реальные пучки ограничены в продольном направлении. Учет конечности ширин последних является принципиальным для лазеров, в которых лазерный и электронный пучки неколлинеарны, что приводит к конечности области их взаимодействия. Поэтому здесь будут сделаны оценки для учета влияния конечных размеров электронного и лазерного пучков, в частности, будет проанализировано возникновение порога в ЛСЭБИ. Для этого мы применим метод дисперсионного анализа, чтобы получить пространственное усиление лазерной волны в магнитостатическом ондуляторе с неколлинеарной геометрией.

2.1. Пространственное усиление

Рассмотрим распространение моноэнергетического пучка электронов в магнитостатическом ондуляторе. Систему координат выберем таким образом, чтобы ось Oz совпадала с осью виглера, а вектор-потенциал виглеровского поля был бы направлен вдоль оси Oy. Предположим, что статическое магнитное поле плоского ондулятора $\mathbf{A}_w$ не зависит от поперечных координат x и y и является приближенно гармонической функцией

$$\mathbf{A}_w = A_w\mathbf{e}_y = \left(A_0 e^{-ik_w r} + \text{c. c.}\right)\mathbf{e}_y\,, \tag{1}$$

здесь $\mathbf{k}_w = \left(0,0,k_w\right)$ волновой вектор виглера, с. с. означает комплексное сопряжение, $\mathbf{e}_y$ – единичный вектор y-оси. Мы предполагаем, что в виглере распространяется линейно-поляризованная волна $\mathbf{A}_L = A_L(t,x,z)\mathbf{e}_y = \mathbf{a}_+ e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}_w)\mathbf{r}-i\omega t}$, в которой вектор-потенциал направлен вдоль оси y, а волновой вектор лежит в плоскости xz: $\mathbf{k} = \left(k\sin\theta, 0, k\cos\theta\right)$. Мы пренебрегли стоксовой волной $\mathbf{A}_{-} = \mathbf{a}_{-}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}_w)\mathbf{r}-i\omega t}$, которая не играет существенной роли при резонансе и которую следует учитывать только при его отстройке [28].

Классическая динамика электрона, находящегося в суммарном поле $A = A_w + A_L$ виглера и лазерной волны, описывается следующим гамильтонианом:

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2} + e\varphi = mc^2\gamma + e\varphi. \tag{2}$$

Исходя из этого выражения, в работе [29] для электронного пучка, имеющего на входе в виглер однородную плотность n_b и скорость $u = (-u\sin\alpha, 0, u\cos\alpha)$, было получено дисперсионное уравнение

$$D_b(\omega^2 - \omega_+^2) = K^2\omega_b^2\gamma_0^{-3}\left(c^2k^2 - \omega^2 + \omega_b^2\gamma_0^{-1}\right). \tag{3}$$

Здесь введены обозначения для частоты

$$\omega_+^2 = \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}_w\right)^2 c^2 + \frac{\omega_b^2}{\gamma_0}. \tag{4}$$

и дисперсионной функции электронного пучка

$$D_b = (\omega - \mathbf{ku})^2 - \Omega_b^2, \tag{5}$$

которая связана с частотой пучка Ω_b, где

$$\Omega_b^2 = \omega_b^2\left[1 - (\mathbf{ku})^2/(kc)^2\right]/\gamma_0\,. \tag{6}$$

Здесь $\omega_b^2 = 4\pi e^2 n_b/m$ – квадрат ленгмюровской частоты электронов пучка и

$$K = \frac{e}{mc^2}\left|A_0\right| \tag{7}$$

– безразмерная амплитуда виглеровского поля (параметр ондуляторности).
Полный релятивистский фактор электронов определяется как $\gamma_0 = \sqrt{1+2K^2} \times\left(1 - u^2/c^2\right)^{-1/2}$.

Дисперсионное уравнение (3) описывает 4 ветви колебаний $k_\upsilon = k_\upsilon(\omega)$, а именно: две пучковые и две лазерные. При $\omega_b = 0$ эти решения имеют вид $(\omega - \mathbf{ku})^2 = 0$ для пучковых волн и $\omega^2 = \left(\mathbf{k} - \mathbf{k}_w\right)^2 c^2$ для лазерных волн. Ниже мы рассмотрим решения дисперсионного уравнения (3) при резонансных условиях

$$\omega = \omega_+ = (\mathbf{k}_0\mathbf{u}) - \Omega_b\,, \tag{8}$$

которые соответствуют максимальному инкременту. В этом случае встречной лазерной волной с $\omega = -\left|\mathbf{k} - \mathbf{k}_w\right|c$ можно пренебречь. Решение ищем в виде

$\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \delta\mathbf{k}$, где $\delta\mathbf{k}$ малая комплексная поправка к волновому вектору $\delta\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$. Мнимая часть $\mathbf{k}''$ определяет пространственное усиление лазерной волны в ондуляторе.

Для коллективного режима, когда $|(\mathbf{u}\delta\mathbf{k})| \ll \Omega_b$, дисперсионное уравнение редуцируется к квадратному

$$\delta k^2 + \frac{K^2}{4}\frac{k_0\Omega_b}{\gamma_0^2 u}\frac{\omega^2}{(\mathbf{k}_0\mathbf{u})^2}\left(1 + \frac{\omega_b^2}{\omega\,\Omega_b\gamma_0}\right)^2 F_R(\varphi) = 0. \qquad (9)$$

Здесь

$$F_R(\varphi) = \frac{1}{\left[\cos(\varphi - \theta) - \dfrac{k_w}{k_0}\cos\varphi\right]\cos(\varphi + \alpha)}, \qquad (10)$$

где φ – угол между осью виглера и вектором $\delta\mathbf{k}$. Заметим, что уравнение имеет силу до тех пор, пока $F_R(\varphi)$ невелико. Нас в дальнейшем будет интересовать усиление волны в направлении ее распространения, т. е. для случая $\varphi = \theta$. В реальных ситуациях $k_w \ll k_0$, поэтому членом с k_w / k_0 в (10) можно пренебречь, тогда пространственный инкремент будет

$$k'' = \frac{K}{2}\frac{k_0}{\gamma_0}\frac{\omega\sqrt{\Omega_b}}{(\mathbf{k}_0\mathbf{u})^{3/2}}\left(1 + \frac{\omega_b^2}{\omega\,\Omega_b\gamma_0}\right). \qquad (11)$$

В условиях $\omega_b^2 / (\omega\,\Omega_b\gamma_0) \ll 1$, когда плотность тока пучка мала, инкремент (9) имеет нормальную зависимость для рамановского режима [28]: он зависит от ленгмюровской частоты по закону $\omega_b^{1/2}$. В случае сильноточных пучков, когда $\omega_b^2 / (\omega\,\Omega_b\gamma_0) \gg 1$, инкремент имеет аномальное поведение $\omega_b^{3/2}$.

Для одночастичного усиления (томпсоновский режим $|(\mathbf{u}\delta\mathbf{k})| \gg \Omega_b$) дисперсионное уравнение (3) – кубическое:

$$\delta k^3 + \frac{K^2}{2}\frac{k_0\Omega_b^2}{\gamma_0^2 u}\frac{\omega^2}{(\mathbf{k}_0\mathbf{u})^2}\left(1 + \frac{\omega_b^2}{\omega\,\Omega_b\gamma_0}\right)^2 F_T(\varphi) = 0. \qquad (12)$$

Здесь $F_R(\varphi) = F_R(\varphi) / \cos(\varphi + \alpha)$. Решением уравнения (12) для мнимой части $\delta\mathbf{k}$ в случае $\varphi = \theta$ является

$$k'' = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{K^2}{2}\right)^{1/3} k_0 \left[\frac{\omega\,\Omega_b}{\gamma_0(\mathbf{k}_0\mathbf{u})^2}\left(1 + \frac{\omega_b^2}{\omega\,\Omega_b\gamma_0}\right)\right]^{2/3}. \qquad (13)$$

Как и для рамановского режима, в томпсоновском режиме для слаботочных пучков $\omega_b^2 / (\omega\,\Omega_b\gamma_0) \ll 1$ реализуется нормальный режим усиления с $k'' \sim \omega_b^{2/3}$ и аномальный с $k'' \sim \omega_b^{4/3}$ для сильноточных пучков $\omega_b^2 / (\omega\,\Omega_b\gamma_0) \gg 1$.

Приведенные выше теоретические построения предполагают бесконечные электронный и световой пучки. Реально и тот и другой ограничены в поперечном направлении. Последнее обстоятельство для неколлинеарных электрон-

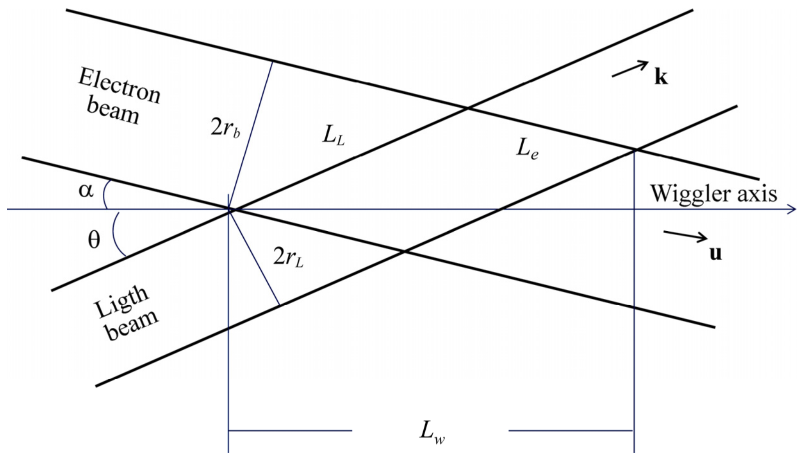

Рис.1. Схематическое представление распространения электронного и лазерного пучков в *xz*-плоскости магнитостатического ондулятора.

ного и лазерного пучков приводит к конечной области их взаимодействия. Длина, на которой имеет место усиление света в среде электронов пучка, составляет (см. рис.1)

$$L_L = \frac{2r_L}{\sin(\alpha+\theta)}. \tag{14}$$

Здесь $2r_b$ – ширина пучка электронов в плоскости *xz*. В свою очередь, длина, на которой лазерное поле совершает работу над электроном, равна

$$L_e = \frac{2r_L}{\sin(\alpha+\theta)}, \tag{15}$$

где $2r_L$ – ширина лазерного пучка в плоскости *xz*. Рабочая длина виглера определяется выражением

$$L_w = L_e \cos\alpha + L_L \cos\theta \approx \frac{2(r_L + r_b)}{\sin(\alpha+\theta)}. \tag{16}$$

Увеличивать длину виглера больше, чем L_w не имеет смысла. Чтобы увеличить L_w, следует уменьшить $\alpha+\theta$ и увеличить ширину электронного пучка $2r_b$. Последнее следует делать также в силу следующих оценок.

Коэффициент усиления лазерного поля по амплитуде волны равен

$$\frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}} = \exp\left(k'' L_L\right). \tag{17}$$

Как показано выше, $k'' \sim \omega_b^{\nu}$. Для томсоновского (одночастичного) режима неустойчивости $\nu = 2/3$ и $\nu = 4/3$, а для рамановского (коллективного) режима неустойчивости $\nu = 1/2$ и $\nu = 3/2$. Для цилиндрической формы пучка электронов при его постоянном токе имеем оценку $\omega_b \sim r_b^{-1}$ и, следовательно,

$k'' \sim \omega_b^{\nu} \sim r_b^{-\nu}$. Так как $L_L \sim r_b$, получаем оценку на усиление

$$\frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}} = \exp\left(\text{const} \times r_b^{1-\nu}\right). \tag{18}$$

При $\nu < 1$ мы имеем монотонно возрастающую функцию от ширины электронного пучка r_b и монотонно убывающую в противоположном случае $\nu > 1$. Таким образом, для $\nu < 1$ следует использовать широкий пучок и при $\nu > 1$ (сверхсильноточные пучки электронов) следует использовать узкий пучок.

2.2. Порог для усиления без инверсии (УБИ)

Рассмотрим здесь оценки применительно к ЛСЭБИ. Как было сказано выше, лежащий в основе ЛСЭБИ механизм может работать только, если разброс по углу α, возникающий в результате взаимодействия электронов с полем, больше, чем естественный разброс по направлениям в электронном пучке $\Delta\alpha_{\text{beam}}$. Это обстоятельство приводит к возникновению порога для мощности лазерного излучения.

Относительно своего невозмущенного движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{u}t$ в плоскости *xz* электроны пучка совершают осцилляции в этой плоскости, при этом вариация скорости в линейном приближении составляет [29]

$$\delta\mathbf{v}_{\parallel} = K^2 \frac{c^2}{\gamma_0^3} \frac{\beta_1\mathbf{k} - \dfrac{\omega}{c^2}\beta_2\mathbf{u}}{D_b} a e^{i\xi_0 - i\Delta_\omega t} + \text{c. c.} \tag{19}$$

Здесь $a = a_+ / A_0$ – безразмерная амплитуда лазерного поля, $\Delta_\omega = \omega - (\mathbf{ku})$, $\xi_0 = \mathbf{k}_0\mathbf{r}_{\parallel 0}$, $\mathbf{r}_{\parallel 0}$ – начальная координата в плоскости *xz*. Коэффициенты β_1 и β_2 равны:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \gamma_0\left(\omega - \left(\mathbf{k}_0\mathbf{u}\right)\right) - \frac{\omega_b^2\left(\mathbf{k}_0\mathbf{u}\right)}{\left(k_0 c\right)^2}, \\ \beta_2 &= \gamma_0\left(\omega - \left(\mathbf{k}_0\mathbf{u}\right)\right) - \frac{\omega_b^2}{\omega}. \end{aligned} \tag{20}$$

Уравнение траектории (19) получено для моноэнергетического пучка, имеющего неограниченный размер и в силу этого бесконечно долго взаимодействующего с полем. Тем не менее, используя это уравнение, можно получить необходимые оценки, которые проведем для наиболее интересного с точки зрения эксперимента случая – для одночастичного режима усиления. Полагая, что электрон влетает в лазерное поле в момент времени $t = 0$ и за время пролета $t = L_e / u$ он отклоняется от своего первоначального направления на угол $\Delta\alpha$, который зависит от фазы влета в поле по закону $\cos\xi_0$, получаем максимальную величину

$$\Delta\alpha_{\max} \simeq K^2 \frac{c^2}{\gamma_0^2} \frac{k_0}{u^2} \sin(\alpha + \theta) \frac{e^{ik'' L_e} - 1}{k''}. \tag{21}$$

В случае слабого усиления на длине $k''L_e \ll 1$ угол поворота не зависит ни от угла $\alpha+\theta$, ни от коэффициента усиления k'' (следовательно, и от тока пучка):

$$\Delta\alpha_{\max} \simeq \frac{2K^2 k_0 r_L}{\gamma_0^2} a. \tag{22}$$

Как и ожидалось, значение $\Delta\alpha_{\max}$ совпадает с оценкой, приведенной в работах [30–33]. Полученное выражение (22) следует рассматривать как нижнюю границу максимально возможного отклонения. Превышение $\Delta\alpha_{\max}$ естественного разброса $\Delta\alpha_{\text{beam}}$ дает пороговое значение для амплитуды лазерного поля и для его интенсивности. Перепишем выражение (22) через полную мощность лазера $W = \frac{c}{4}(k_0 r_L)^2 \left|a_+\right|^2$, а именно, через выражение, определяющее порог мощности:

$$W > \frac{c}{8}\left(\frac{mc^2}{e}\right)^2 \frac{\left(\Delta\alpha_{\text{beam}}\right)^2 \gamma_0^4}{2K^2}. \tag{23}$$

Это дает численное значение

$$W > 1.1\times 10^9 \, \frac{\left(\Delta\alpha_{\text{beam}}\right)^2 \gamma_0^4}{2K^2} \text{ Вт}. \tag{24}$$

Для следующих значений параметров [7] $\gamma_0 = 15$, $K = 0.635$ и $\Delta\alpha_{\text{beam}} = 5\times 10^{-4}$ рад получаем пороговое значение $W > 1.8\times 10^7$ Вт. Полученная пороговая мощность превосходит мощность лазерного поля, при которой наступает насыщение. Для работы лазера в линейном режиме усиления следует уменьшить $\Delta\alpha_{\text{beam}}$. При работе на самой границе области насыщения $\sim 10^5$–10^6 Вт/см^2 формула (23) дает оценку $\Delta\alpha_{\text{beam}} \sim 10^{-6}$ рад.

Эта оценка совпадает с результатами работ [24,30–33], полученными другим (одночастичным) подходом. Заметим, что для устойчивой работы ЛСЭБИ величина $\Delta\alpha_{\max}$ должна на порядок превосходить величину естественного разброса электронов пучка по направлениям $\Delta\alpha_{\text{beam}}$. Сомнительно то, что в ускорителе можно достичь естественной угловой расходимости электронного пучка заметно меньшей, чем 10^{-6} рад.

3. Заключение

Исследовано влияние разброса скоростей электронов пучка по направлениям на работу ЛСЭБИ. Получено пороговое значение максимального разброса по углу скоростей электронов пучка в рамках многочастичного подхода. Показано, что порог для угла разброса соответствует наличию порога по интенсивности (или мощности) лазерного поля. Полученное значение порога для мощности лазерного излучения (23) является верхней границей в условиях слабого усиления. Как следует из приведенных выше оценок, реализация ЛСЭБИ в одночастичном режиме со слабым усилением $k''L \ll 1$ встречает большие проблемы, что приводит к практической невозможности его реализации в данном режиме в том варианте, в котором рассматривался. Имеется два выхода из этой ситуации. Во-первых, использование рамановского режима усиления. Как показало численное моделирование [7] в данном режиме идея ЛСЭБИ имеет большие возможности. Во-вторых, использование сильного усиления на длине $k''L \gg 1$ в томпсоноском режиме. Как в первом, так и во втором случае требуется использование пучков большой плотности.

Работа поддержана грантом 15T-1C068 ГКН Армении.

ЛИТЕРАТУРА

1. **G. Kurizki, M.O. Scully, C. Keitel.** Phys. Rev. Lett., **70**, 1433 (1993).
2. **B. Sherman, G. Kurizki, D.E. Nikonov, M.O. Scully.** Phys. Rev. Lett., **75,** 4602 (1995).
3. **D.E. Nikonov, B. Scherman, G. Kurizki, M.O. Scully**. Opt. Commun., **123,** 363 (1996).
4. **D.E. Nikonov, M.O. Scully, G. Kurizki.** Phys. Rev. E, **54,** 6780 (1996).
5. **D.E. Nikonov, Yu.V. Rostovtsev, G. Sussmann.** Phys. Rev. E, **57,** 3444 (1998).
6. **A.I. Artemiev, M.V. Fedorov, Yu.V. Rostovtsev, G. Kurizki, M. O. Scully.** Phys. Rev. Lett., **85,** 4510 (2000).
7. **Yu. Rostovtsev, S. Trendafilov, A. Artemyev, K. Kapale, G. Kurizki, M.O. Scully.** Phys. Rev. Lett., **90,** 214802 (2003).
8. **D.F. Zaretsky, E.A. Nersesov, M.V. Fedorov.** Phys. Lett., **82,** 227 (1981).
9. **M.V. Fedorov, S. Stenholm.** Opt. Commun., **49,** 355 (1984).
10. **A.A. Varfolomeev, T.V. Yarovoi.** Nucl. Instr. Meth. A, **445,** 290 (2000).
11. **M.V. Fedorov.** Atomic and Free Electrons in a Strong Light Field. Singapore, World Scientific, 1997.
12. **K.B. Oganesyan, M.L. Petrosyan.** YERPHI-**475(18)** – 81, Yerevan (1981).
13. **M.V. Fedorov, K.B. Oganesyan.** IEEE J. Quant. Electr., **QE-21**, 1059 (1985).
14. **Д.Ф. Зарецкий, Э.А. Нерсесов, К.Б. Оганесян, М.В. Федоров.** Квантовая электроника, **13**, 685 (1986).
15. **Э.А. Нерсесов, К.Б. Оганесян, М.В. Федоров.** ЖТФ, **56**, 2402 (1986).
16. **К.Б. Оганесян, М.В. Федоров.** ЖТФ, **57**, 2105 (1987).
17. **M.L. Petrosyan, L.A. Gabrielyan, Yu.R. Nazaryan, G.Kh. Tovmasyan, K.B. Oganesyan**. Laser Physics, **17**, 1077 (2007).
18. **M.V. Fedorov, K.B. Oganesyan, A.M. Prokhorov.** Appl. Phys. Lett., **53**, 353 (1988).
19. **К.Б. Оганесян, А.М. Прохоров, М.В. Федоров.** ЖЭТФ, **94**, 80 (1988).
20. **E.M. Sarkisyan, K.G. Petrosyan, K.B. Oganesyan, V.A. Saakyan, N.Sh. Izmailyan, C.K. Hu.** Laser Physics, **18**, 621 (2008).
21. **М.Л. Петросян, Л.А. Габриелян, Ю.Р. Назарян, Г.Х. Товмасян, К.Б. Оганесян**. Изв. НАН Армении, Физика, **42**, 57 (2007).
22. **К.Б. Оганесян.** Изв. НАН Армении, Физика**, 50,** 169 (2015).
23. **К.Б. Оганесян.** Изв. НАН Армении, Физика**, 50,** 422 (2015).
24. **К.Б. Оганесян.** Изв. НАН Армении, Физика**, 51,** 15 (2016).

25. **K.B. Oganesyan**. J. Modern Optics, **61,** 763 (2014).
26. **K.B. Oganesyan**. J. Modern Optics, **61,** 1398 (2014).
27. **K.B. Oganesyan**. J. Modern Optics, **62,** 933 (2015).
28. **M.V. Kuzelev, A.A. Rukhadze.** Plasma Free Electron Lasers. Paris, Frontier, 1995.
29. **D.N. Klochkov, A.I. Artemyev, G. Kurizki, Yu.V. Rostovtsev, M.O. Scully**. Phys. Rev. E, **74**, 036503 (2006).
30. **A.I. Artemiev, D.I. Klochkov, K.B. Oganesyan, M.V. Fedorov, Yu.V. Rostovtsev.** Laser Physics, **17**, 1213 (2007).
31. **D.N. Klochkov, K.B. Oganesyan, Y.V. Rostovtsev, G. Kurizki.** Laser Physics Letters, **11**, 125001 (2014).
32. **M.V. Fedorov, G. Kurizki, K.B. Oganesyan, M.L. Petrosyan, Y.V. Rostovtsev, M.O. Scully, C.K. Hu.** Physica Scripta, **140**, 014058 (2010).
33. **K.B. Oganesyan.** Nucl. Instr. Meth. Physics Research A, **812,** 33 (2016).

ԱՌԱՆՑ ԻՆՎԵՐՍԻԱՅԻ ԱԶԱՏ ԷԼԵԿՏՐՈՆՆԵՐՈՎ ԼԱԶԵՐՆԵՐԻ ՇԵՄԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Դ.Ն. ԿԼՈՉԿՈՎ, Ա.Հ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ, Ն.Շ. ԻԶՄԱԻԼՅԱՆ, Կ.Բ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

Ցույց է տրված, որ Առանց Ինվերսիայի Ազատ Էլեկտրոններով Լազերների (ԱԻԱԷԼ) ստեղծման հնարավորությունը ունի շեմային բնույթ ըստ ուժեղացվող ալիքի դաշտի ինտենսիվության: Կոլեկտիվ փոխազդեցության ռեժիմում տրված է շեմային պայմանների նկարագրությունը: Ցույց է տրված, որ առանց ինվերսիայի ուժեղացման դիտման շեմը բավական բարձր է, ինչը էապես դժվարացնում է ԱԻԱԷԼ-ի իրականացման փորձնական հնարավորությունը:

THRESHOLD PROPERTIES OF FREE ELECTRON LASERS WITHOUT INVERSION

D.N. KLOCHKOV, A.H. GEVORGYAN, N.Sh. IZMAILIAN, K.B. OGANESYAN

The possibility of creation of Free Electron Laser Without Inversion (FELWI) has threshold behavior on amplified wave intensity is shown. The description of threshold conditions is given in collective regime. It is shown, that the amplification observation threshold without inversion is high enough, which essentially hampers experimental realization possibility of FELWI.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.332-338 (2016)

УДК 539.1

ВЛИЯНИЕ ФАЗОВОЙ САМОМОДУЛЯЦИИ НА КОГЕРЕНТНЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПЯТИУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ

Э.А. ГАЗАЗЯН*, Г.Г. ГРИГОРЯН

[1]Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

*e-mail: emilgazazyan@gmail.com

(Поступила в редакцию 2 марта 2016 г.)

Исследована возможность формирования когерентного тёмного состояния в пятиуровневой системе во всём объёме среды при адиабатическом распространении импульсов. Показано, что формирование тёмного состояния не зависит от величины первой двухфотонной отстройки от резонанса, которая может изменяться при распространении в среде. Показано, что в случае системы М-типа с равными силами осцилляторов на крайних переходах фазовая самомодуляция не влияет на когерентные эффекты, в то время как в системе лестничного типа она может приводить к разрушению тёмного состояния. Получена оценка для длины среды, при которой эффекты распространения пренебрежимо малы.

1. Введение

Когерентные взаимодействия резонансного лазерного излучения с отдельными атомами и атомарными средами получили широкое практическое применение в таких областях исследований, как лазерное охлаждение атомов, генерация без инверсии, новые прецизионные методы магнитометрии, когерентный контроль над химическими реакциями и т. д. [1–6].

Конструирование заданных когерентных суперпозиционных состояний атомов в макроскопическом объёме является одной из ключевых проблем квантовой информатики [7–10]. Другой актуальной проблемой квантовой информатики является запись и последующее воспроизведение оптической и квантовой информации [11–15]. Возбуждение атомов из основного состояния в ридберговское привлекает в последние годы большое внимание исследователей в области квантовой и нелинейной оптики из-за характерного для них сильного взаимодействия и так называемой «дипольной блокады» [16–18].

Все эти эффекты детально исследованы как теоретически, так и экспериментально, в основном, на модели трёхуровневой системы, взаимодействующей с двумя лазерными импульсами. Однако использование многоуровневых систем может иметь ряд преимуществ по сравнению с трёхуровневыми. Так, например, в работе [19] продемонстрирована возможность двойной записи оптической информации в пятиуровневой системе М-типа (см. рис.1а), при которой второй импульс записывается в том же образце без нарушения записи первого импульса. При этом воспроизведение обоих импульсов может осуществляться независимо друг от друга и в любом порядке. В работе [20] показана возможность эффективного четырёхфотонного возбуждения ридберговских состояний атомов для системы лестничного типа (рис.1b).

В этих работах показано, что в пятиуровневой системе может формироваться состояние, аналогичное тёмному состоянию в трёхуровневой системе (см. формулу (2) далее). Таким образом, в такой системе могут быть реализованы все

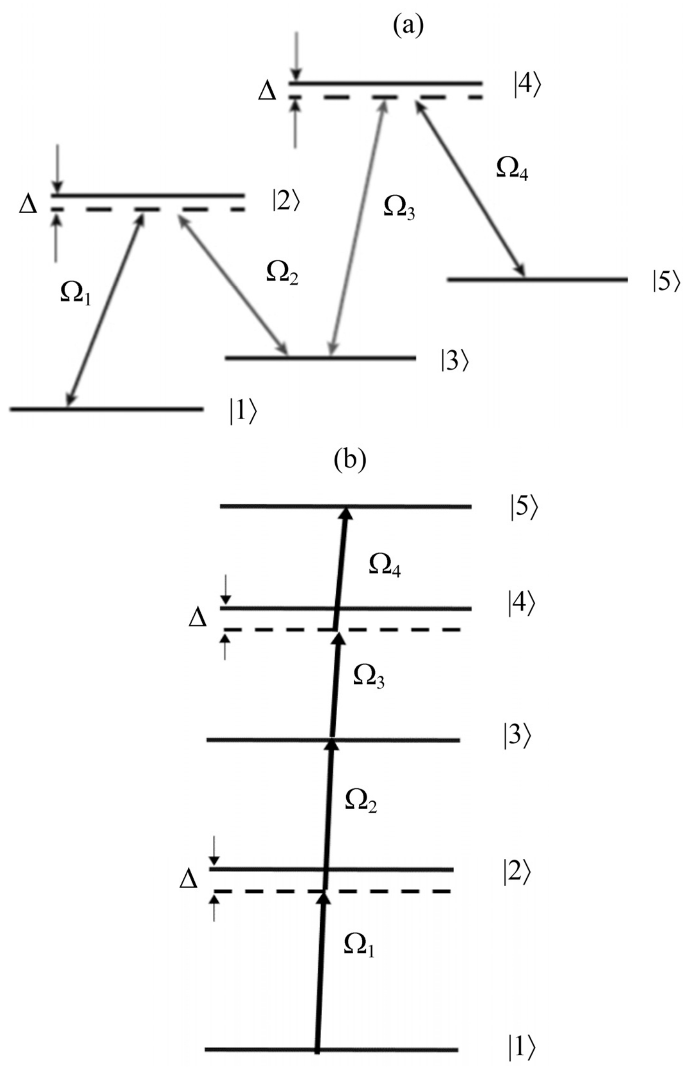

Рис.1. Диаграмма атомных уровней: (a) М-система и (b) система лестничного типа.

вышеперечисленные когерентные процессы.

Однако формирование этого состояния на отдельном атоме требует достаточно жёстких условий, налагаемых на частоты и огибающие используемых импульсов. Очевидно, что при распространении в среде эти условия могут нарушаться, например, из-за фазовой самомодуляции, приводящей к спектральному уширению импульсов.

Целью настоящей работы является более детальное исследование необходимых условий формирования тёмного состояния в пятиуровней системе, а также адиабатического распространения импульсов в резонансных средах, состоящих из таких атомов. В работе получены необходимые условия для формирования тёмного состояния во всём объёме среды и ограничения на длину прохождения, когда эти необходимые условия не выполняются, но влияние фазовой самомодуляции может считаться пренебрежимо малым.

2. Формирование тёмного состояния

Гамильтониан взаимодействия пятиуровневой системы в резонансном приближении имеет следующий вид:

$$H = \sum_i \sigma_{i,i}\delta_{i-1} - \left(\sum_i \sigma_{i,i+1}\Omega_i + \text{h.c.}\right). \quad (1)$$

Здесь $\sigma_{i,j} = \langle i | j \rangle$ – проекционные матрицы ($|i\rangle$ – собственные состояния гамильтониана свободного атома), Ω_i – частоты Раби на переходах $|i\rangle \to |i+1\rangle$ и δ_{i-1} – многофотонные отстройки от резонанса $(\delta_0 = 0)$. Частоты Раби предполагаются реальными и положительными, а их фазы, которые могут меняться при распространении в среде, включены в однофотонные отстройки от резонанса Δ_i ($\Delta_i = \omega_{i+1,i} - \omega_i + \dot{\varphi}_i$, если $\omega_{i+1,i} > 0$ и $\Delta_i = \omega_{i,i+1} - \omega_i + \dot{\varphi}_i$, если $\omega_{i+1,i} < 0$). Различные пятиуровневые схемы (система лестничного типа, М-система и т.д.) отличаются только определением многофотонных отстроек. Так, например, для системы лестничного типа многофотонные отстройки от резонанса выражаются через однофотонные отстройки следующим образом: $\delta_2 = \Delta_1 + \Delta_2$, $\delta_3 = \Delta_3 + \delta_2$ и $\delta_4 = \Delta_4 + \delta_3$, а для М-системы получаем $\delta_2 = \Delta_1 - \Delta_2$, $\delta_3 = \Delta_3 + \delta_2$, $\delta_4 = \delta_3 - \Delta_4$.

В работе [20] были получены вся пять собственных значений гамильтониана (1) при условии равенства нулю всех трёх двухфотонных отстроек от резонанса, т.е. резонансов не только на переходах $|1\rangle \to |2\rangle \to |3\rangle$ и $|3\rangle \to |4\rangle \to |5\rangle$ (т.е. $\delta_2 = 0,\ \delta_4 = \delta_2 = 0$), но и точного двухфотонного резонанса на переходе $|2\rangle \to |3\rangle \to |4\rangle$ (т.е. $\delta_3 - \delta_1 = 0$). При дополнительном условии $\Omega_1 = \Omega_4$ одно из полученных собственных состояний является аналогом тёмного состояния в трёхуровневой системе, не содержащим промежуточного состояния $|3\rangle$:

$$|\lambda_1\rangle = |\psi_1\rangle \cos\theta - |\psi_2\rangle \sin\theta, \tag{2}$$

где $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ – суперпозиционные состояния двухуровневых систем (1,2) и (4,5) (см. рис.1) и $|\psi_1\rangle = |1\rangle\cos\phi - |2\rangle\sin\phi$, $|\psi_2\rangle = -|4\rangle\sin\phi + |5\rangle\cos\phi$. Здесь введены следующие обозначения для углов θ и ϕ: $\tan\theta = \Omega_2/\Omega_3$ и $\tan 2\phi = 2\Omega_1/\Delta$.

Однако, как следует из характеристического уравнения, требование первого двухфотонного резонанса $\delta_2 = 0$ не является необходимым условием. Действительно, легко показать, что при условиях

$$\delta_3 = \delta_1 = \Delta,\ \ \delta_4 = 0,\ \ \Omega_1 = \Omega_4 \tag{3}$$

характеристическое уравнение может быть записано в виде

$$\left[\lambda(\lambda-\Delta)-\Omega_1^2\right]\left[\lambda(\lambda-\Delta)(\lambda-\delta_2)-\Omega_1^2(\lambda-\delta_2)-\lambda\left(\Omega_2^2+\Omega_3^2\right)\right]=0. \tag{4}$$

Таким образом, характеристическое уравнение распадается на произведение характеристических уравнений двухуровневой системы и эффективной трехуровневой системы и независимо от величины двухфотонной отстройки имеет корень

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(\Delta - \left(\Delta^2 + 4\Omega^2{}_1\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{5}$$

соответствующий собственному состоянию $|\lambda_1\rangle$.

На рис.2 приведена полученная в результате численного решения уравнения Шредингера вероятность полного переноса населённостей из состояния $|1\rangle$ в состояние $|5\rangle$ в зависимости от значений однофотонной и двухфотонной отстроек от резонанса при условиях (3). Ухудшение переноса при малых значениях однофотонной расстройки обусловлено нарушением адиабатичности взаимодействия. Как было показано в [19], адиабатичность взаимодействия с

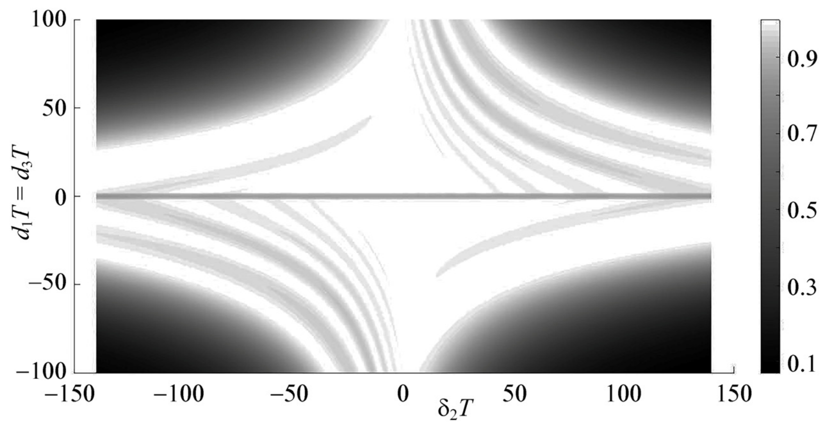

Рис.2. Населенность пятого уровня в зависимости от величин двухфотонной и однофотонной отстроек от резонанса.

рассматриваемой пятиуровневой системой требует, чтобы величина однофотонной отстройки была много больше обратной длительности импульсов (т. е. спектральной ширины для спектрально ограниченных импульсов) и в тоже время достаточно мала, чтобы штарковские смещения уровней были также много больше обратной длительности импульсов.

3. Адиабатическое распространение импульсов в пятиуровневой среде

Укороченная система уравнений Максвелла в бегущей системе координат для системы лестничного типа может быть записана в виде [1]

$$\frac{\partial \Omega_i e^{i\varphi_i}}{\partial x} = i q_i b_i^* b_{i+1}. \tag{6}$$

Здесь $q_i = \dfrac{2\pi\omega_i \left|d_{i,i+1}\right|^2 N}{\hbar c}$ ($d_{i,i+1}$ – матричные элементы соответствующих дипольных переходов) и b_i – амплитуды населённостей атомных уровней.

При распространении импульсов в M-системе уравнения (1) необходимо несколько видоизменить. Уравнения для импульсов Ω_1 и Ω_3 остаются теми же самыми, а для импульсов Ω_1 и Ω_4 в правой части уравнения (6) произведения $b_2^* b_3$ и $b_4^* b_5$ необходимо заменить на комплексно сопряжённые величины. При адиабатическом распространении импульсов в среде для коэффициентов b_i можно использовать выражение для волновой функции (2).

Разделяя укороченные уравнения Максвелла (1) на действительную и мнимую части и учитывая, что в состоянии $\left|\lambda_1\right\rangle$ $b_3 = 0$, получаем следующие простые уравнения:

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{1,4}}{\partial x} = -\frac{i q_{1,4}}{2\Omega_{1,4}} \sin 2\phi. \tag{7}$$

Отметим, что полученная система уравнений справедлива для всех пятиуровневых схем, поскольку для волновой функции (2) все коэффициенты b_i действительные.

Таким образом, в адиабатическом приближении при реализации состояния $\left|\lambda_1\right\rangle$ второй и третий импульсы распространяются в среде без искажений, а первый и четвёртый импульсы испытывают фазовую самомодуляцию, т. е. приобретают дополнительную, зависящую от времени фазу. Условие равенства временных огибающих $\Omega_1 = \Omega_4$ при этом не нарушается.

Из системы уравнений (7) непосредственно получаем

$$\varphi_{1,4} = \varphi_{1,4}^0 (x = 0) - \frac{q_{1,4} x}{\sqrt{\Delta^2 + 4\Omega_1^2}}. \tag{8}$$

Это приводит к изменению текущих значений однофотонных расстроек

$$\Delta_{1,4}(x,t) = \Delta - q_{1,4}x\frac{4\Omega_1}{\left(\Delta^2 + 4\Omega_1^2\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\Omega_1}{\partial t}. \tag{9}$$

Таким образом, фазовая самомодуляция приводит к следующим изменениям многофотонных резонансов (знак «+» относится к системе лестничного типа, а знак «–» соответствует системе М-типа):

$$\delta_2(t) = \Delta_1(t) \pm \Delta_{20}, \delta_3 = \Delta_{30} \pm \Delta_{20} + \Delta_1(t) = \delta_1, \delta_4 = \Delta_1(t) \pm \Delta_4(t). \tag{10}$$

В случае равных сил осцилляторов (т.е. $q_1 = q_4$) для системы М-типа ни одно из условий (3) формирования состояния $\left|\lambda_1\right\rangle$ не нарушается. Однако для системы лестничного типа нарушается условие четырехфотонного резонанса, что может привести к разрушению состояния $\left|\lambda_1\right\rangle$ по мере распространения в среде. Чтобы этого не происходило, изменения однофотонных расстроек должны быть пренебрежимо малы, т. е. длина среды должна быть ограниченна условием

$$\frac{q_{1,4}x}{\Delta T_1}\frac{\Omega_1^2}{\left(\Delta^2 + 4\Omega_1{}^2\right)^{3/2}} \ll 1. \tag{11}$$

4. Заключение

Показано, что для формирования собственного состояния гамильтониана взаимодействия, имитирующего трёхуровневую систему, условие равенства нулю первой двухфотонной отстройки от резонанса не является необходимым. Это легко понять из следующих физических соображений. Когерентность наводится на внутренней трехуровневой системе, т. е. системе (2,3,4) (перевёрнутая Λ-система в случае рис.1а), а поля на переходах $|1\rangle \to |2\rangle$ и $|4\rangle \to |5\rangle$ «затягивают» эту когерентность на уровни $|1\rangle$ и $|5\rangle$. При этом двухфотонная отстройка δ_2 выступает в качестве однофотонной отстройки для внутренней трехуровневой системы. Как известно, когерентность в трехуровневой системе в условиях тёмного состояния не зависит от величины однофотонной отстройки. В то же время для того, чтобы наведенная на уровнях $|2\rangle - |4\rangle$ когерентность равномерно переносилась на уровни $|1\rangle - |5\rangle$, необходима эквивалентность полей на переходах $|1\rangle \to |2\rangle$ и $|4\rangle \to |5\rangle$. Отсюда требование равенства огибающих полей на этих переходах и равенства нулю четырехфотонного резонанса.

При адиабатическом распространении импульсов в среде на двухуровневых подсистемах (1,2) и (4,5) эквивалентность полей может нарушаться из-за фазовой самомодуляции. Однако М-система оказывается нечувствительной к этим процессам, если силы осцилляторов на переходах $|1\rangle \to |2\rangle$ и $|4\rangle \to |5\rangle$ одного порядка. В противном случае когерентные процессы (такие как перенос населенностей и запись информации) будут эффективно протекать только на длинах, ограниченных условием (11).

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МО Армении (тема 15T-1C066) и проекта IRMAS.

ЛИТЕРАТУРА

1. **B.W. Shore**. The Theory of Coherent Atomic Excitation. New York, Wiley, (1990).
2. **M.L. Ter-Mikaelyan**. Phys. Usp., **40**, 1195 (1997).
3. **K. Bergmann, H. Theuer, B.W. Shore**. Rev. Mod. Phys., **70**, 1003 (1998).
4. **P. Kral, I. Thanopulos, M. Shapiro.** Rev. Mod. Phys., **79**, 53 (2007).
5. **S.E. Harris**. Phys. Today, **50**, 36 (2008).
6. **M.O. Scully**. Quantum Optics. Cambridge, Cambridge University Press, 1997.
7. **H. Kimble**. Nature (London), **453**, 1023 (2008).
8. **L. Li, Y.O. Dudin, A. Kuzmich**. Nature (London), **498**, 466 (2013).
9. **K. Hammerer, A.S. Sorensen, E.S. Polzik**. Rev. Mod. Phys., **82**, 1041 (2010).
10. **M. Fleischhauer, A. Imamoglu, J.P. Marangos**. Rev. Mod. Phys., **77**, 633 (2005).
11. **M.D. Lukin**. Rev. Mod. Phys., **75**, 457 (2003).
12. **I. Novikova, R.L. Walsworth, Y. Xiao**. Laser Photonics Rev., **6**, 333 (2012).
13. **Г.Г. Григорян.** Изв. НАН Армении, Физика, **43,** 53 (2008).
14. **В.О. Чалтыкян, Г.Г. Григорян**. Изв. НАН Армении, Физика**, 44**, 57 (2009).
15. **В.О. Чалтыкян, Э.А. Газазян, Г.Г. Григорян, Д. Шрафт.** Изв. НАН Армении, Физика, **47**, 216 (2012).
16. **A. Gaëtan, Y. Miroshnychenko, T. Wilk, A. Chotia, M. Viteau, D. Comparat, P. Pillet, A. Browaeys , Ph. Grangier**. Nature Physics, **5**, 115 (2009).
17. **A.V. Gorshkov, J. Otterbach, M. Fleischhauer, T. Pohl**. Phys. Rev. Lett., **107**, 133602 (2011).
18. **D. Petrosyan, K. Molmer**. Phys.Rev. A, **87**, 033416 (2013).
19. **G. Grigoryan, V. Chaltykyan, E. Gazazyan, O. Tikhova, V. Paturyan**. Phys. Rev. A, **91**, 023802 (2015).
20. **Э.А. Газазян, Г.Г. Григорян, В.О. Чалтыкян**. Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 312 (2015).

INFLUENCE OF SELF-PHASE MODULATION ON COHERENT EFFECTS IN FIVE-LEVEL SYSTEM

E.A. GAZAZYAN, G.G. GRIGORYAN

The possibility of the formation of the coherent dark state in the five-level system in the entire volume of the medium during an adiabatic pulse propagation is investigated. It is shown that dark state formation is not dependent on the value of the first two-photon detuning from resonance, which may change during the propagation in the medium. It is shown that in the case of M-type system with equal oscillators strength, self-phase modulation does not influence on the coherent effects while in the ladder-type system it may lead to the destruction of the dark state. We obtain the estimation of the length of the medium in which the propagation effects are negligible.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.339-345 (2016)

УДК 530.145

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПЕРЕНОС НАСЕЛЕННОСТЕЙ В ПЯТИУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ В ОТСУТСТВИЕ ЧЕТЫРЕХФОТОННОГО РЕЗОНАНСА

О.С. ТИХОВА

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

e-mail: otikhova@3dm.am

(Поступила в редакцию 11 марта 2016 г.)

Аналитически и численно исследовано влияние отличной от нуля четырехфотонной отстройки от резонанса на адиабатический перенос населенностей в пятиуровневой системе. Получены оценки, определяющие допустимую область изменения четырехфотонной отстройки, которые хорошо подтверждаются численными расчетами.

1. Введение

Адиабатический перенос атомных населенностей изучался теоретически и экспериментально, в основном, на модели трехуровневой системы, взаимодействующей с двумя лазерными импульсами [1–3], и получил большое применение в различных областях физики таких, как лазерное охлаждение атомов, новые прецизионные методы магнитометрии, когерентный контроль над химическими реакциями и т. д. (см. например, обзор [4] и ссылки в нем). Использование многоуровневых систем может иметь ряд преимуществ по сравнению с трехуровневыми.

В работах [5–6] было показано, что при условии точных двухфотонных резонансов пятиуровневая система может полностью имитировать трехуровневую систему. В такой системе могут быть реализованы все когерентные процессы, как и в трехуровневой системе. В то же время в пятиуровневой системе в отличие от трехуровневой может быть осуществлена двойная запись оптической (квантовой) информации, а также возможен эффективный перенос населенностей в ридберговские состояния. Однако возможность экспериментального осуществления этой схемы взаимодействия сильно ограничена жесткими условиями, налагаемыми на резонансные отстройки, в том числе условием равенства нулю четырехфотонной отстройки, которое вытекает из условия равенства нулю двухфотонных отстроек.

Целью настоящей работы является аналитическое и численное исследование влияния отличной от нуля четырехфотонной отстройки от резонанса на эффективный перенос атомных населенностей. Отметим, что для трехуровневой системы подобное исследование показало [7–8], что требование точного двухфотонного резонанса не является слишком жестким, и перенос населенностей может происходить, когда двухфотонная отстройка от резонанса много меньше штарковского смещения промежуточного уровня, обусловленного обобщенной частотой Раби.

2. Формализм

Рассмотрим взаимодействие пятиуровневой системы с электромагнитным полем следующего вида

$$E(z,t)=\sum_i E_i \exp(\frac{i\omega_i z}{c}-i\omega_i t)+\text{к. с.} \qquad (1)$$

Несущие частоты импульсов ω_i могут быть резонансными с одним или сразу с несколькими атомными переходами, т. е. $\left|\omega_i-\omega_{ij}\right|\ll\omega_{ij}$, где ω_{ij} – частоты соответствующих атомных переходов. Ограничимся адиабатическим взаимодействием пятиуровневой системы с лазерными импульсами, которое возможно при достаточно больших длительностях импульсов (см. условия (5) ниже). В тоже время предположим, что длительности импульсов достаточно малы, чтобы можно было пренебречь релаксационными процессами.

В дипольном приближении гамильтониан взаимодействия может быть представлен в виде

$$H=\sum\sigma_{i,i}\delta_{i-1}-\left(\sum\sigma_{i,i+1}\Omega_i+\text{к. с.}\right) \qquad (2)$$

где $\sigma_{i,i}$ – проекционная матрица, Ω_i – амплитуды комплексных частот Раби импульсов, взаимодействующих на переходах $i\to i+1$: $\tilde{\Omega}_i=\Omega_i e^{i\varphi_i}=-E_i d_{i,i+1}/\hbar$ и δ_{i-1} $(i-1)$ – многофотонные отстройки от резонансов ($\delta_{i-0}=0$). Фазы комплексных частот Рабби $\tilde{\Omega}_i$ включены в однофотонные отстройки Δ_i: $\Delta_i=\omega_{i+1,i}-\omega_i+\dot{\varphi}_i$, если $\omega_{i+1,i}>0$, и $\Delta_i=\omega_{i+1,i}+\omega_i+\dot{\varphi}_i$, если $\omega_{i+1,i}<0$, где $\omega_{i+1,i}$ – атомная частота на переходе $i\to i+1$, а ω_i – частота соответствующего лазерного импульса. Следовательно, значения Ω_i – действительные и положительные. Определение многофотонных отстроек зависит от конкретной рассматриваемой схемы. Например, в М-системе (рис.1) $\delta_1=\Delta_1$, $\delta_2=\Delta_1-\Delta_2$, $\delta_3=\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2$, $\delta_4=\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2-\Delta_4$, тогда как для V-системы (рис.1) $\delta_1=-\Delta_1$, $\delta_2=\Delta_2-\Delta_1$, $\delta_3=-\Delta_3-\Delta_1+\Delta_2$, $\delta_4=-\Delta_3-\Delta_1+\Delta_2+\Delta_4$, и для ступенчатой системы $\delta_1=\Delta_1$, $\delta_2=\Delta_1+\Delta_2$, $\delta_3=\Delta_3+\Delta_1+\Delta_2$, $\delta_4=\Delta_3+\Delta_1+\Delta_2+\Delta_4$.

Как известно, собственные значения гамильтониана взаимодействия (квазиэнергии системы) – это корни характеристического уравнения

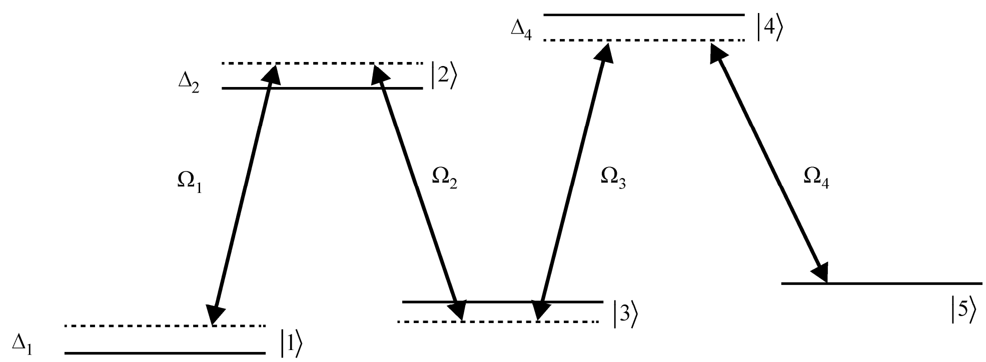

Рис.1. Схема пятиуровневой М-системы.

$$\det(H - \lambda I) = 0 \tag{3}$$

где I – единичная матрица.

В работах [5,6] показано, что при условии точных двухфотонных резонансов в системе, т. е. когда $\delta_2 = 0$, $\delta_3 - \delta_1 = 0$, $\delta_4 - \delta_2 = 0$, а также равенстве частот Раби Ω_1 и Ω_4, собственные значения Гамильтониана имеют вид

$$\lambda_0 = 0\,,$$

$$\lambda_{1;3} = \frac{1}{2}(\delta_1 \mp \sqrt{\delta_1^2 + 4\Omega_1^2})\,, \tag{4}$$

$$\lambda_{2;4} = \frac{1}{2}(\delta_1 \mp \sqrt{\delta_1^2 + 4(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2})\,.$$

Когда поля отключены, получаем $\lambda_{1;2} \to 0$ и $\lambda_{3;4} \to \delta_1$. Следует подчеркнуть, что собственные значения $\lambda_{1;3}$ зависят только от поля Ω_1 и совпадают с собственными значениями двухуровневой системы, накачиваемой полем Ω_1.

Адиабатическая эволюция рассматриваемой системы возможна при выполнении условий

$$\delta_1 T \gg 1\,, \quad \frac{(\Omega_2^2 + \Omega_3^2)T}{\delta_1} \gg 1\,, \quad \frac{\Omega_1^2 T}{\delta_1} \gg 1\,, \tag{5}$$

где T – длительность кратчайшего импульса. Первое условие отражает адиабатичность для двухуровневой системы. Второе условие соответствует условию адиабатичности для трехуровневой системы. Третье условие касается только интервалов времени, когда все импульсы перекрываются, т. е. когда $\Omega_2^2 + \Omega_3^2 \neq 0$.

Чтобы записать собственные вектора, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2, введем следующие обозначения:

$$\Omega^2 = \Omega_2^2 + \Omega_3^2\,, \quad \tan\theta = \frac{\Omega_2}{\Omega_3}\,, \quad \tan\Phi = -\frac{\lambda_1}{\Omega_1}\,. \tag{6}$$

В таких обозначениях собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_1, имеет вид

$$\left|\lambda_1\right\rangle = \left|\psi_1\right\rangle \cos\theta - \left|\psi_2\right\rangle \sin\theta\,, \tag{7}$$

где $\left|\psi_1\right\rangle$ и $\left|\psi_2\right\rangle$ являются суперпозиционными состояниями двухуровневой системы 1 → 2 и 5 → 4:

$$\begin{aligned} \left|\psi_1\right\rangle &= \cos\Phi\left|1\right\rangle - \sin\Phi\left|2\right\rangle, \\ \left|\psi_2\right\rangle &= \cos\Phi\left|5\right\rangle - \sin\Phi\left|4\right\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Как следует из соотношений (7) и (8), собственный вектор, соответствующий λ_1, не включает атомного состояния $\left|3\right\rangle$ и имитирует «темное» состояние трехуровневой Λ-системы, если заменить нижние состояния на суперпозицию состояний $\left|\psi_1\right\rangle$ и $\left|\psi_2\right\rangle$.

Таким образом, пятиуровневая система может быть представлена в виде модификации трехуровневой системы с суперпозиционными уровнями.

3. Перенос населенностей в пятиуровневой системе в отсутствие четырехфотонного резонанса

Чтобы определить допустимые отклонения от условия точного четырехфотонного резонанса, рассмотрим пятиуровневую М-систему при следующих значениях многофотонных отстроек $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = \delta_1$, $\delta_4 \neq 0$. Импульс с частотой Раби Ω_1 выбирается настолько широким, чтобы в промежутке времени включения–выключения импульсов с частотами Раби Ω_2 и Ω_3 изменения первого импульса были бы незначительными. График последовательности импульсов приведен на рис.2.

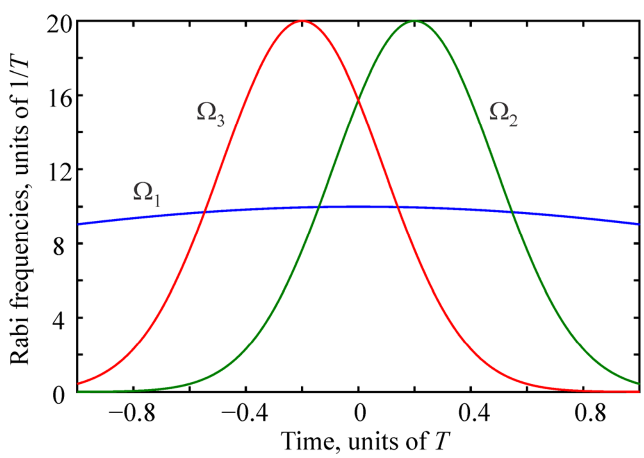

Рис.2. Схема включения импульсов. Форма импульсов выбрана гауссовой с различными длительностями $\tilde{\Omega}_i = \Omega_i e^{i\varphi_i} = -E_i d_{i,i+1} / \hbar$.

Рассмотрим влияние четырехфотонной отстройки на состояние $|\lambda_1\rangle$. Расчеты проводим при условии, что четырехфотонная отстройка мала, а изменение λ_1 рассматриваются как

$$\lambda'_1 = \lambda_1 + \varepsilon, \quad \varepsilon \ll \lambda_1, \tag{9}$$

где ε – малая величина, которая может быть определена из характеристического уравнения для системы (3). Ограничиваясь первым порядком теории возмущений, получим

$$\varepsilon = \delta_4 \frac{\Omega_1^2 \Omega_2^2}{(\Omega_1^2 + \lambda_1^2)(\Omega_2^2 + \Omega_3^2)}. \tag{10}$$

Условие $\varepsilon \ll \lambda_1$ непосредственно приводит к

$$\frac{\delta_4}{\delta_1} \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\Phi} \ll 1. \tag{11}$$

Таким образом, при выполнении условия (11) собственное значение гамильтониана будет несущественно искажаться. Однако для выполнения этого условия недостаточно требования большой однофотонной отстройки, т. е. $\delta_4 \ll \delta_1$. Необходимо также, чтобы при включении полей угол θ стремился к нулю быстрее, чем угол Φ (см. рис.2).

Имея выражение для квазиэнергии, нетрудно вычислить населенности уровней. Несмотря на малость возмущения квазиэнергии при отличной от нуля четырехфотонной отстройке от резонанса, в состоянии $|\lambda_1\rangle$ появляется примесь третьего уровня, которого не было при условии четырехфотонного резонанса. Увеличивается также заселенность промежуточных 2 и 4 уровней. Требование

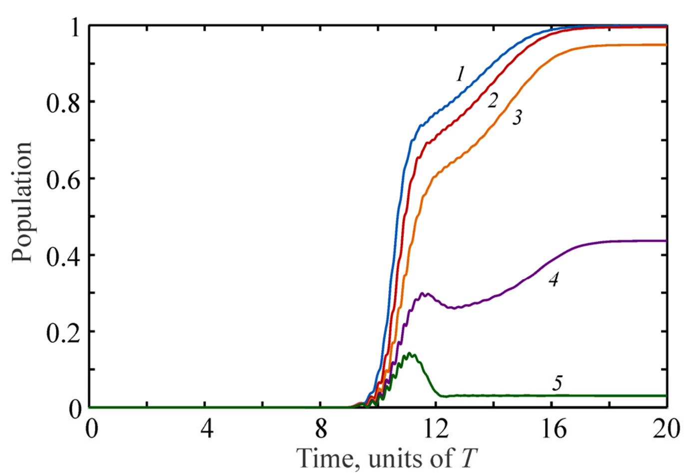

Рис.3. Динамика населенности пятого уровня в зависимости от величины четырехфотонной отстройки от резонанса при соотношении δ_4/δ_1: (*1*) 0, (*2*) 0.05, (*3*) 0.25, (*4*) 0.5 и (*5*) 1.

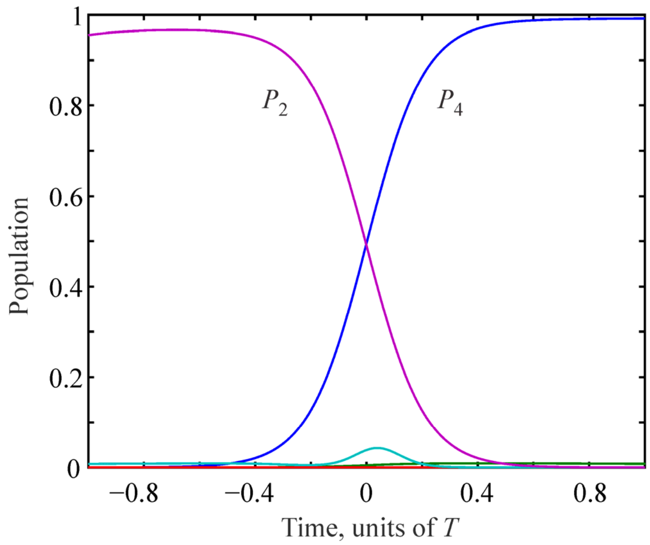

Рис.4. Динамика населенностей второго P_2 и четвертого P_4 атомных уровней в случае, когда отношение δ_4/δ_1 равно 0.05. Населённость третьего уровня P_3 остается равной нулю в течение всего времени взаимодействия.

малости населенности 3-го уровня приводит к дополнительному ограничению на величину δ_4:

$$\delta_4 \ll \Omega_2 T/\delta_1 . \tag{12}$$

Сравнивая (12) с условием адиабатичности взаимодействия (5), можно убедиться, что (12) легко выполняется, если $\delta_4 T \ll 1$. Из-за громоздкости выражений для амплитуд атомных населенностей они здесь не представлены. На рис.3 и 4 приведены результаты численных решений уравнения Шредингера, из которых следует, что перенос населенностей с уровня 1 на уровень 5 может происходить достаточно эффективно и при отличной от нуля четырехфотонной отстройке от резонанса.

4. Заключение

В работе продемонстрирована возможность адиабатического переноса населённостей в пятиуровневой системе при отличной от нуля четырехфотонной отстройке от резонанса. Для получения аналитической оценки допустимых отклонений от условия точного четырехфотонного резонанса было проанализировано поведение системы при небольшом, но ненулевом значении четырехфотонной отстройки в рамках теории возмущений. Получено численное решение уравнения Шредингера для амплитуд атомных состояний, которое демонстрирует хорошее совпадение с полученными аналитическими оценками.

Величина четырехфотонной отстройки должна удовлетворять следующим двум требованиям: четырехфотонная отстройка должна быть много меньше однофотонной отстройки и четырехфотонная отстройка должна быть много меньше штарковского сдвига, обусловленного обобщенной частотой Раби $\Omega^2 = \Omega_2{}^2 + \Omega_3{}^2$. Дополнительным условием является ограничение на скорости включения импульсов, а именно, что импульс с частотой Раби Ω_1 должен включаться раньше, чем импульс частотой Раби Ω_2, для того, чтобы второй уровень успевал заселиться прежде, чем начнется перенос населенности.

Сравнивая эти условия с условиями адиабатичности взаимодействия (5), можно убедиться, что область допустимого изменения четырехфотонной отстройки является достаточно большой. Так, например, для наносекундных импульсов первое из условий адиабатичности $\delta_1 T \gg 1$ дает величину однофотонной отстройки порядка 10 ГГц, следовательно, четырехфотонная отстройка может составлять 1000 МГц, что для сравнения, много больше доплеровского уширения. Аналогично этому, из второго условия адиабатичности $(\Omega_2{}^2 + \Omega_3{}^2)T / \delta_1 \gg 1$ получаем такую же оценку для величины штарковского сдвига уровней. Отметим, что для наносекудных импульсов полученные результаты справедливы в системах, времена релаксаций которых не превышают 10^{-8} сек. Это может быть реализовано в разреженных газах, в которых однородные уширения, обусловленные столкновениями, не превышают доплеровского уширения.

Автор выражает благодарность Г.Г. Григорян за постановку задачи, полезные обсуждения и постоянное внимание при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **K. Bergmann, H. Theuer, B. Shore.** Rev. Mod. Phys., **70**, 1003 (2004).
2. **N.V. Vitanov, B.W. Shore, K. Bergmann**. Adv. Atom., Mol., Optical Physics, **46**, 55 (2001).
3. **P. Kral, I. Thanopulos, M. Shapiro**. Rev. Mod. Phys., **79**, 53 (2007).
4. **K. Bergmann, N.V. Vitanov, B.W. Shore.** J. Chem. Phys., **142**, 170901 (2015).
5. **G. Grigoryan, V. Chaltykyan, E. Gazazyan, O. Tikhova, V. Paturyan.** Phys. Rev. A, **91**, 023802 (2015).
6. **Э.А. Газазян, Г.Г. Григорян, В.О. Чалтыкян.** Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 312 (2015).
7. **Г.Г. Григорян, Е.Т. Пашаян.** Изв. НАН Армении, Физика, **35**, 292 (2000).
8. **G.G. Grigoryan, Y.T. Pashayan.** Opt. Comm., **198**, 107 (2001).

ADIABATIC TRANSFER OF POPULATION IN FIVE-LEVEL SYSTEM IN THE ABSENCE OF FOUR-PHOTON RESONANCE

O.S. TIKHOVA

The impact of nonzero four-photon detuning on the adiabatic transfer of population in five-level system have been studied analytical and numerical. Evaluations which determine the permissioned range of the four-photon detuning have been obtained, and they are well confirmed by numerical calculations.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.346-356 (2016)

УДК 621.373

ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОСТНОЙ ТКАНИ ЧЕЛЮСТИ ЧЕЛОВЕКА И ЗАМЕНИТЕЛЯ КОСТНОЙ ТКАНИ СЕРАБОН (CERABONE®) В ТЕРАГЕРЦОВОМ ДИАПАЗОНЕ

А.С. НИКОГОСЯН[1*], H. TING[2], J. SHEN[2], Р.М. МАРТИРОСЯН[1], М.Ю. ТУНЯН[3], А.В. ПАПИКЯН[3], А.А. ПАПИКЯН[3]

[1]Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
[2]Capital Normal University, Beijing, China
[3]Ереванский государственный медицинский университет, Ереван, Армения

[*]e-mail: nika@ysu.am

(Поступила в редакцию 25 января 2016 г.)

Методом терагерцовой спектроскопии во временной области в широкой диапазоне частот от 0.2 до 2.5 ТГц in vitro определены показатели преломления $n(\omega)$ и коэффициенты поглощения $\alpha(\omega)$ костной ткани нижней челюсти человека и заменителя костной ткани Cerabone®**.** Показано, что показатель преломления костной ткани челюсти человека изменяется между значениями 2.075 и 2.157, а Cerabone® – между 2.4 и 2.65. Коэффициент поглощения костной ткани челюсти человека увеличивается с частотой от 1.7 см$^{-1}$ до значения 178.5 см$^{-1}$, демонстрируя несколько резонансных линий поглощения после 1.6 ТГц. Поглощение Cerabone® увеличивается от нуля до 80 см$^{-1}$, а резонансное поглощение имеет место при 1.7 ТГц. Полученные результаты позволили определить близость физических свойств костного трансплантационного материала с естественным костным матриксом.

1. Введение

Современные достижения научной медицины направлены на решение проблем, связанных с увеличением продолжительности и качества жизни человека. Разработанные технологии способствуют созданию материалов для искусственных органов и тканей. В настоящее время для лечения, восстановления и замены различных частей человеческого тела, включая кожные покровы, мышечную ткань, кровеносные сосуды, нервные волокна и костную ткань применяются различные материалы – металлы, полимеры, керамика, но все они далеки от идеала.

По действию на организм человека трансплантационные материалы классифицируются как: 1) токсичные (если окружающие ткани отмирают при контакте) – это большинство металлов; 2) биоинертные (нетоксичные, но биологически неактивные) – керамика на основе Al_2O_3 и ZrO_2; 3) биоактивные (нетоксичные, биологически активные, срастающиеся с костной тканью) – композитные материалы типа биополимер/фосфат кальция, керамика на основе фосфатов кальция, биостекла.

Известными и широко применяемыми биоактивными материалами являются биостекла [1] и материалы на основе гидроксилапатита [2,3]. Химическая формула плотной и пористой керамики гидроксилапатита – $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ (рис.1а). Биокерамика гидроксилапатита полностью усваивается живым организмом. Спустя несколько лет после имплантации гидроксилапатит должен полностью рассосаться и замениться новой костной тканью, т. е. место протеза должна занять вновь образовавшаяся костная ткань. Это случай идеального типа искусственного имплантата, поскольку проблемы прочности и биосовместимости не возникают вообще. Однако отрицательное воздействие имплантата состоит в том, что при рассасывании в кровь, лимфу и тканевые жидкости переходит большое количество ионов кальция (Ca) и фосфора (P), и неизвестно, каким образом Ca и P могут повлиять на организм человека в целом.

(a) (b)

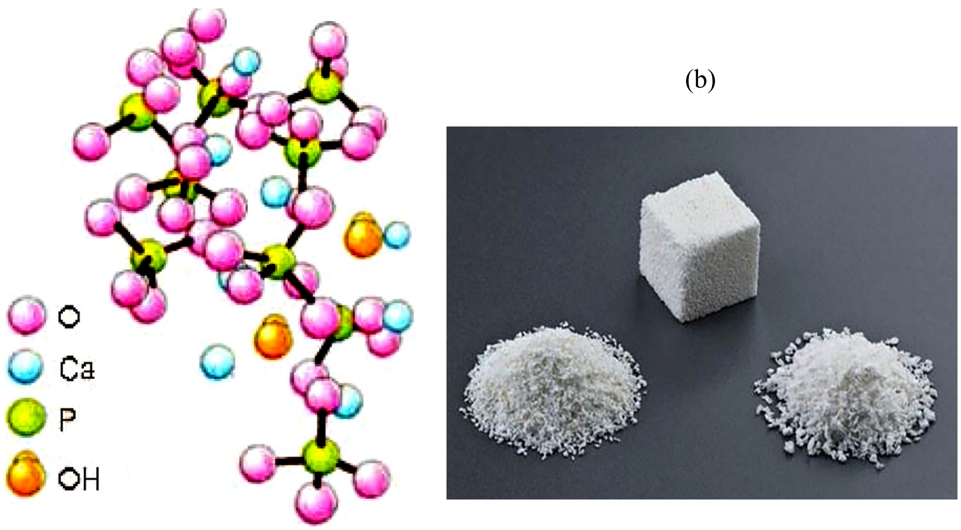

Рис.1. Фрагмент кристаллической решетки (a) биоактивного материала гидроксилапатита $Ca_{10}(PO_4)_6(OH)_2$ и фото (b) Cerabone®.

В 1982 г. был создан композит в процессе кристаллизации стекла, содержащий апатит и β-волластонит [4]. Эта стеклокерамика ($CaO–SiO_2$) получила коммерческое название Cerabone AW.

Заменитель костной ткани Cerabone® (Германия) изготавливается из минеральной фазы бычьей кости [5], которая имеет максимальное сходство с человеческой костью (рис.1b) (поверхность, пористость и химический состав). Во время производственного процесса, основанного на высокотемпературном нагреве, удаляются все органические компоненты и белки для исключения потенциальной иммунологической реакции. Основными свойствами Cerabone® являются медленное рассасывание и быстрое интегрирование с костной тканью, долгосрочная трехмерная стабильность имплантата, отсутствие воспалительной реакции, оптимальная адгезия клеток и абсорбция крови, безопасность и стерильность и простота в обращении.

Разработка заменителей костной ткани остается одной из актуальных проблем современной медицины. Для эффективного лечения искусственная кость должна как можно точнее соответствовать заменяемой части костной ткани по химическим и физическим свойствам. Уровень современной технологии не позволяет пока создать материал, полностью соответствующий естественному костному матриксу – натуральному гидроксиапатиту.

В настоящей работе применен метод терагерцовой спектроскопии во временной области для исследования костнотрансплантационного материала Cerabone® и костной ткани нижней челюсти человека с целью определения близости их физических свойств в диапазоне частот 0.2–2.5 THz.

2. Терагерцовая спектроскопия во временной области

Терагерцовые (ТГц) волны (диапазон частот от 0.1 до 30 ТГц) нашли наиболее широкое практическое применение в ТГц спектроскопии во временной области [6,7] и в ТГц имиджинге [8,9]. Известно, что время колебательного движения биологических молекул порядка пикосекунд, и поэтому частота их колебаний находится в терагерцовой области частот. Спектр биомолекул имеет сложную структуру, поскольку она состоит из большого количества взаимодействующих атомов и молекул. Межмолекулярные взаимодействия обычно слабее внутримолекулярных, и только ТГц спектроскопия во временной области чувствительна для разрешения их спектра в ТГц диапазоне. ТГц волна, неразрушающая (поскольку энергия кванта ТГц волны на несколько порядков меньше энергии кванта рентгеновской волны) и бесконтактная по природе, может проникать внутрь непроводящих материалов и представлять дополнительные спектроскопические данные для достоверной диагностики и анализа материала.

Мы применили метод ТГц спектроскопии во временной области для исследования костной ткани челюсти человека и заменителя кости Cerabone®. Этот метод позволяет регистрацией временной формы электрического поля ТГц импульса после его взаимодействия с образцом определить комплексный спектр исследуемого материала с помощью быстрого преобразования Фурье [10]. Однако для определения физических свойств образца, коэффициента поглощения $\alpha(\omega)$ и показателя преломления $n(\omega)$ во всем спектральном интервале частот необходимо провести два измерения, поскольку трудно точно определить время отклика

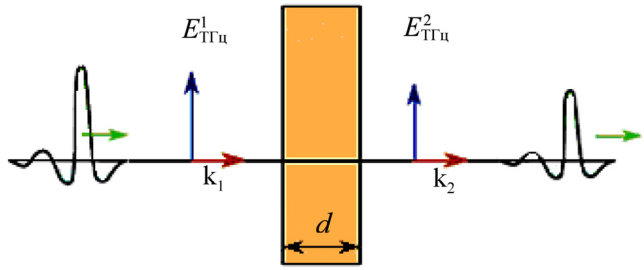

Рис.2. Прохождение ТГц импульса через исследуемый образец толщиной d.

приемника. Отклик приемника исключается из уравнений выполнением сравнительного измерения. Измеряются временные формы опорного импульса $\mathbf{E}_1(t)$, прошедшего через свободное пространство (воздух), а затем импульса $\mathbf{E}_2(t)$, прошедшего через исследуемый материал (рис.2).

Согласно теореме о спектре свертки двух функций, спектр регистрируемого опорного сигнала $\dot{E}_1(\omega)$ можно представить как

$$\dot{E}_1(\omega) = E^1_{\mathrm{THz}}(\omega)\,\dot{S}(\omega)\mathrm{e}^{-\alpha_1(\omega)d/2}\mathrm{e}^{-i\omega n_1(\omega)d/c}, \qquad (1)$$

где $E^1_{\mathrm{THz}}(\omega)$ – напряженность ТГц электрического поля, входящего в слой воздуха толщиной d, равной толщине образца, $\dot{S}(\omega)$ – комплексная частотная характеристика приемника, $n_1(\omega)$ – реальная часть показателя преломления воздуха и $\alpha_1(\omega)$ – коэффициент поглощения воздуха (предполагается, что $n_1(\omega) = 1$, $\alpha_1(\omega) = 0$). Частотная характеристика приемника определяется преобразованием Фурье временного отклика приемника. Второе измерение выполняется непосредственно с образцом. В результате имеем

$$E^2_{\mathrm{THz}}(\omega) = t_{12}t_{21}\,E^1_{\mathrm{THz}}(\omega)\exp(-\alpha_2(\omega)d/c)\exp\left(-i\,\omega n_2(\omega)d/c\right), \qquad (2)$$

$$\dot{E}_2(\omega) = E^2_{\mathrm{THz}}(\omega)\,\dot{S}(\omega), \qquad (3)$$

где t_{12} и t_{21} – коэффициенты прохождения Френеля, $\alpha_2(\omega)$ – коэффициент затухания ($I = I_0 e^{-\alpha_2(\omega)d}$). Если потери на рассеяние и отражение от поверхностей для образца толщиной d пренебрежимо малы, то $\alpha_2(\omega)$ – коэффициент поглощения. Для границы воздух–образец $t_{12} = 2/\left(\dot{n}+1\right)$, где $\dot{n}$ – комплексный показатель преломления образца ($\dot{n} = n - \mathrm{i}k = n - \mathrm{i}c/2\omega\alpha(\omega)$ и $\alpha(\omega) = 2\omega k/c$) и для границы образец–воздух $t_{21} = 2\dot{n}/\left(\dot{n}+1\right)$. Отношение $\dot{E}_2(\omega)$ к $\dot{E}_1(\omega)$ является комплексным коэффициентом передачи материала

$$\dot{T}(\omega) = \frac{\dot{E}_2(\omega)}{\dot{E}_1(\omega)} = \frac{4\dot{n}(\omega)}{\left[1+\dot{n}(\omega)\right]^2}\exp(-\alpha_2(\omega)d/c)\exp\left(-\mathrm{i}\omega[n_2(\omega)-1]d/c\right)$$
$$= \left|\dot{T}(\omega)\right|\mathrm{e}^{-i\Phi(\omega)}, \qquad (4)$$

где

$$\Phi(\omega) = \Phi_2(\omega) - \Phi_1(\omega) = \arctan\left|\frac{\mathrm{Im}(E_2(\omega))}{\mathrm{Re}(E_2(\omega))}\right| - \arctan\left|\frac{\mathrm{Im}(E_1(\omega))}{\mathrm{Re}(E_1(\omega))}\right|. \qquad (5)$$

Коэффициент $\dot{T}(\omega)$ определяет изменение амплитуды и фазы ТГц излучения, прошедшего через материал, в зависимости от частоты. Смещение фазы, возникающее из-за коэффициентов прохождения Френеля намного меньше, чем фазовое смещение, возникающее при распространении ТГц волны в веществе, если толщина исследуемого вещества сравнима или меньше длины ТГц волны. В этом случае реальная часть показателя преломления вещества во всем спектральном интервале может быть получена из формулы

$$n(\omega) \cong 1 + \frac{c}{\omega d}\Phi(\omega), \qquad (6)$$

а абсолютный коэффициент поглощения определяется выражениями

$$\alpha(\omega) = -\frac{2}{d}\ln\left[\left|\dot{T}(\omega)\right|\frac{\left[1+\dot{n}(\omega)\right]^2}{4\dot{n}(\omega)}\right], \qquad (7)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{d}\ln\left(\frac{I_2(\omega)}{I_1(\omega)}\right). \qquad (8)$$

Относительный коэффициент поглощения, независящий от толщины образца, определяется выражением

$$\alpha_{\mathrm{rel}}(\omega) = \ln\left(\frac{I_2(\omega)}{I_1(\omega)}\right). \qquad (9)$$

Амплитуда $\left|\dot{T}(\omega,\dot{n})\right| = \left|\dot{E}_2(\omega)\right| / \left|\dot{E}_1(\omega)\right|$ и фаза $\Phi(\omega) = \Phi_2(\omega) - \Phi_1(\omega)$ комплексной функции передачи материала определяются экспериментально из отношения преобразования Фурье регистрируемых ТГц полей $E_1(t)$, $E_2(t)$ и $\Phi_2(\omega)$, $\Phi_1(\omega)$.

3. Экспериментальное исследование Cerabone® и костной ткани челюсти человека методом ТГц спектроскопии во временной области

Для измерения оптических свойств Cerabone® и костной ткани нижней челюсти человека был применен метод ТГц спектроскопии во временной области. Схема экспериментальной установки ТГц спектрометра показана на рис.3. Волоконный фемтосекундный лазер (Fx-100, IMRA) с длительностью импульсов 113 фс, центральной длиной волны 800 нм, частотой повторения импульсов 75 MHz и мощностью 120 мВт использовался для накачки и детектирования ТГц импульсов [11].

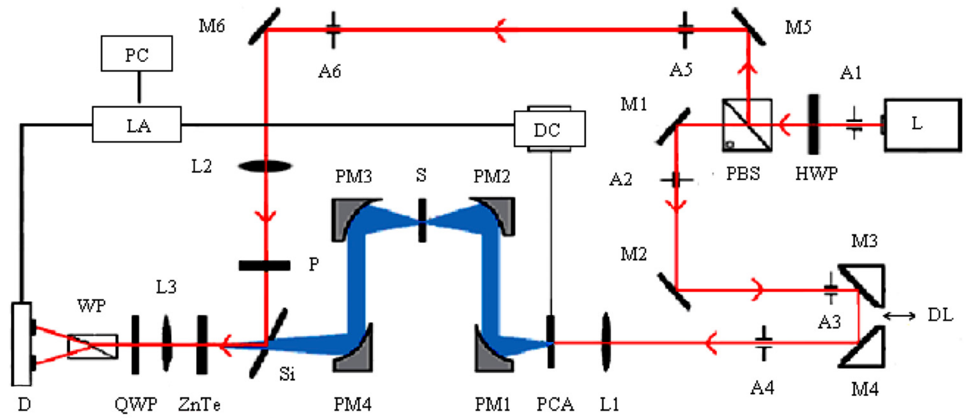

Рис.3. Экспериментальная установка ТГц спектрометра. L – фемтосекундный лазер Fx-100, IMRA; A1–A6 – диафрагмы; M1–M6 – отклоняющие оптический пучок зеркала; DL – оптическая линия задержки; PM1–PM4 – параболические зеркала; HWP – полуволновая (λ/2) пластина; PBS – поляризационный разделитель пучка; L1–L3 – фокусирующие линзы; PCA – фотопроводящая GaAs антенна; DC – программное обеспечение накопления данных; P – поляризатор; Si – кремниевая пластина, совмещающая ТГц и оптический пучки; ZnTe – кристалл; QWP – четвертьволновая (λ/4) пластина; WP – призма Волластона; S – исследуемый материал; D – детектирующие диоды; LA – синхронный усилитель; PC – персональный компютер.

Излучение волоконного фемтосекундного лазера делилось на два пучка – накачки и зондирования с помощью поляризационного разделителя пучка (PBS). Пучок накачки после линии задержки фокусировался на фотопроводящую антенну из GaAs (PCA), которая использовалась как источник субпикосекундных импульсов ТГц излучения. ТГц излучение с помощью параболических зеркал PM1 и PM2 собиралось и фокусировалось на исследуемый материал. Параболическими зеркалами PM3 и PM4 ТГц излучение, прошедшее через исследуемый материал, направлялось на кристалл ZnTe. Субпикосекундный ТГц импульс и оптический фемтосекундный зондирующий импульс совмещались тонкой пластиной из Si в кристалле ZnTe.

Когерентное детектирование временной формы электрического поля ТГц импульсов осуществлялось с помощью динамической электрооптической ячейки, которая состояла из электрооптического кристалла ZnTe с ориентацией (110) и толщиной 1 мм, пластины λ/4 и поляризатора – призмы Волластона, разделяющей *s*- и *p*-поляризации. Зондирующий пучок управлял детектором, отклик которого был пропорционален амплитуде и знаку электрического поля ТГц импульса.

Детектирование ТГц импульса имеет место, если ТГц излучение и зондирующий пучок совпадают по времени и в пространстве при распространении внутри электрооптического кристалла ZnTe. Поле субпикосекундного ТГц импульса при распространении в кристалле ZnTe благодаря линейному эффекту Поккельса вызывает фазовую модуляцию оптического фемтосекундного импульса. Наведенная фазовая модуляция зондирующего оптического импульса

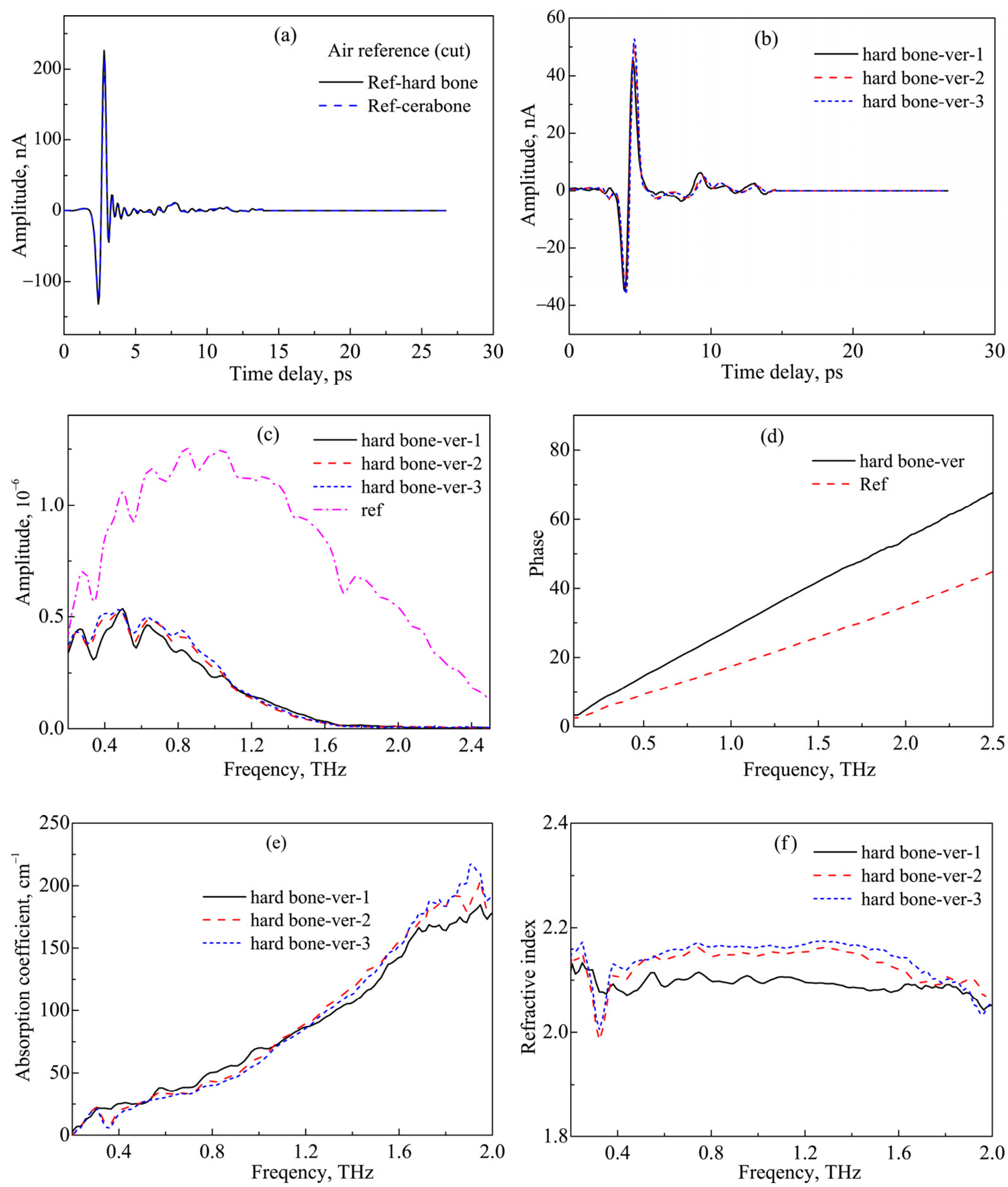

Рис.4. Временные волновые формы ТГц импульсов, прошедших через (a) воздух и (b) костную ткань челюсти человека; (c) спектры электрического поля после быстрого преобразования Фурье; (d) фазово-частотная характеристика; (e) коэффициент поглощения и (f) показатель преломления.

анализируется пластиной λ/4 и призмой Волластона, разделящей его на два пучка со взаимно перпендикулярными поляризациями. Фазовая модуляция зондирующего импульса преобразовывается в модуляцию интенсивности двух взаимно-ортогональных поляризованных импульсов зондирования, которые

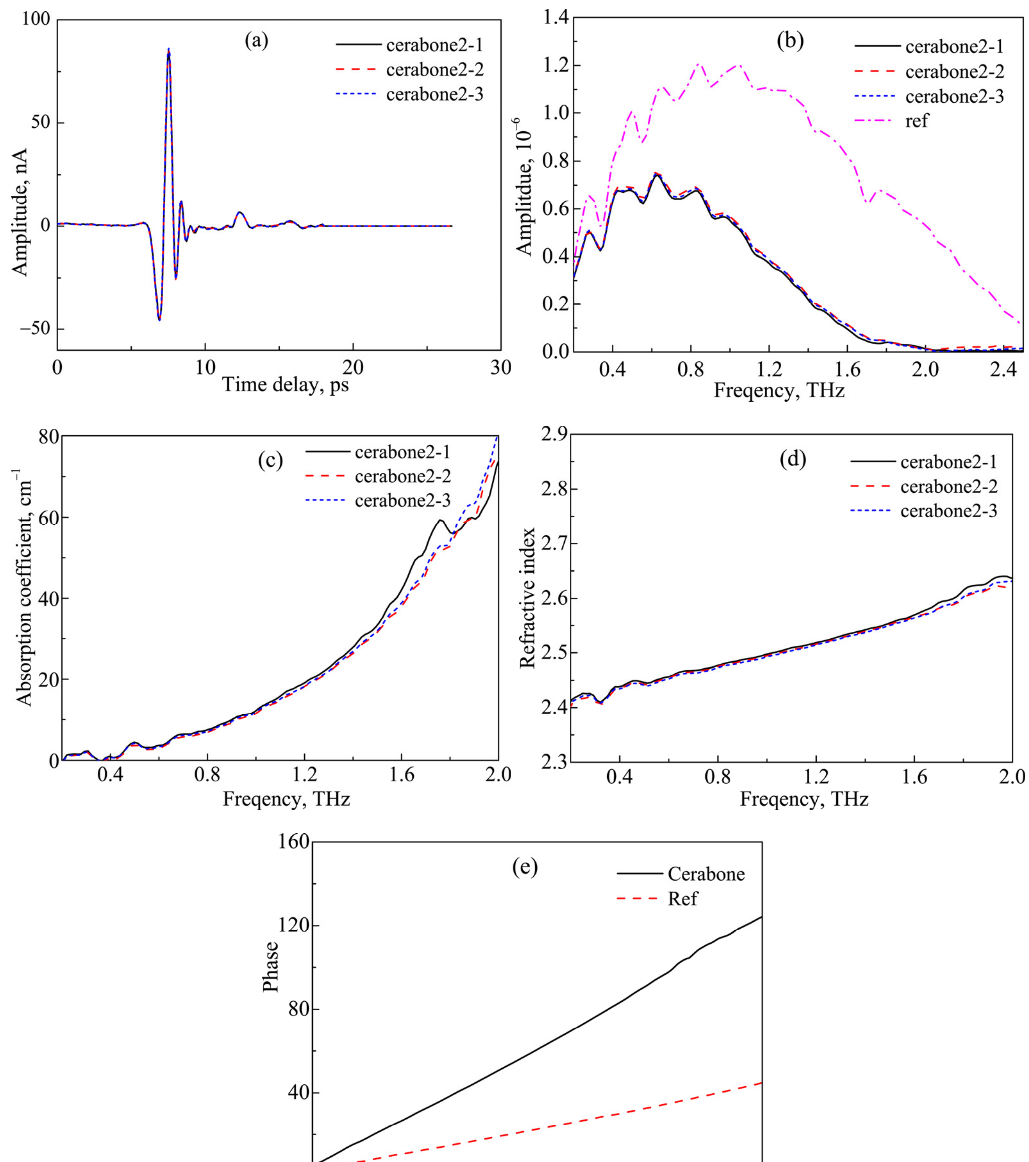

Рис.5. Временная волновая форма электрического поля ТГц импульса прошедшего через (a) заменитель костной ткани Cerabone®, (b) его спектр после быстрого преобразования Фурье, (c) коэффициент поглощения, (d) показатель преломления и (e) фазово-частотная характеристика.

затем направляются на два фотодиода.

Интенсивности s- и p-компонент, пропорциональные мгновенной величине ТГц поля, детектировались разностной схемой в синхронном усилителе, позволяющей измерить отношение $\Delta I/I$, где $\Delta I = I_s - I_p$ – разность оптических зондирующих интенсивностей, измеренных фотодетекторами, а $I = I_s + I_p$. Полная временная форма ТГц импульса определялась изменением времени задержки между пучками накачки и зондирования с помощью оптической линии задержки. Во время измерений температура воздуха была 21°C, влажность воздуха < 1.5 %, динамический диапазон больше 1000, а отношение сигнал/шум при пиковой позиции около 400.

Временные формы ТГц импульсов, прошедших через воздух и костную ткань нижней челюсти человека толщиной 0.44 мм и поперечным сечением 2 × 1 мм^2, и соответствующие им спектры ТГц поля, полученные после быстрого преобразования Фурье, приведены на рис.4a,b,c. Для контроля воспроизводимости эксперимента на рисунке приведены результаты трех измерений. Фазово-частотные зависимости $\Phi_1(\omega)$ и $\Phi_2(\omega)$ приведены на рис.4d, а коэффициенты поглощения и показатели преломления на рис.4e,f. Коэффициент поглощения увеличивается с частотой от 1.7 см$^{-1}$ до значения 178.5 см$^{-1}$, демонстрируя резонансное поглощение при 1.76 ТГц.

Временные формы поля ТГц импульсов, прошедших через заменитель кости Cerabone® толщиной d = 1.02 мм, и соответствующие им спектры после быстрого преобразования Фурье, приведены на рис.5a,b. Частотная зависимость коэффициента поглощения, показателя преломления и фазы приведены на рис.5c,d,e. Коэффициент поглощения Cerabone® меньше, чем натуральной кости и увеличивается от нуля до значения 80 см$^{-1}$.

Измерения показывают, что показатель преломления костной ткани нижней челюсти человека в полосе частот 0.2–2 ТГц изменяется между значениями 2.075 и 2.157, а заменителя костной ткани Cerabone® – между 2.4 и 2.65. Коэффициент поглощения для двух образцов быстро увеличивается с увеличением частоты по нелинейному закону (на два порядка), а показатели преломления – незначительно.

4. Обсуждение результатов

Оптические свойства материалов исследуются в области длин волн от 1 мм до 2.6 мкм (0.3–115 ТГц), а диэлектрические от 20 мм до 1 мм (15–300 ГГц). Поэтому полученные данные относятся, в основном, к оптическим свойствам исследуемых образцов, а в полосе от 200 ГГц до 300 ГГц – к диэлектрическим.

К настоящему времени с помощью ТГц излучения проведено незначительное количество исследований костной ткани человека. Оптические свойства костной ткани челюсти человека и Cerabone® измерены впервые, авторам неизвестны публикации о величинах показателя преломления и коэффициентов поглощения исследуемых материалов в области 0.2–2.5 ТГц. Поэтому мы проводили сравнение полученных данных с оптическими свойствами различных костных тканей человека.

В работе [12] исследованы зубная эмаль с дентином и слои костей черепа двух человек в полосе частот 0.5–2.5 ТГц с отношением сигнал/шум равным 10000. Полученное нами значение показателя преломления для Cerabone® близко к значениям показателям преломления зубного дентина (2.57 ± 0.05) и черепа (2.49 ± 0.07), но показатель преломления костной ткани челюсти человека отличается от этих значений. Однако коэффициенты поглощения зубного дентина (70 ± 7 см$^{-1}$), эмали (62 ± 7 см$^{-1}$), черепа (61 ± 3 см$^{-1}$) и кости челюсти человека почти одинаковы в области 0.5–1.5 ТГц. Интересно отметить, что в той же полосе частот коэффициент поглощения Cerabone® почти в три раза меньше коэффициента поглощения указанных материалов, а на частоте 1.5 ТГц равен 30 см$^{-1}$ (см. рис.5c). Спектроскопические исследования высушенной бедренной кости [13] в области 0.3–1.9 THz показали, что показатель преломления изменяется от 1.92 до 1.97. С точностью до 8% эти значения совпадают со значениями, полученными нами для костной ткани челюсти человека. Коэффициент поглощения бедренной кости в области частот 0.3–2.75 ТГц изменяется от 10 до 420 см$^{-1}$ и тоже совпадает со значениями для костной ткани челюсти человека в области частот 0.2–2 ТГц. Такое сильное поглощение в [13] объясняется присутствием неорганических веществ в образце, например, Ca – основного минерала костной ткани.

5. Заключение

Методом ТГц спектроскопии во временной области в широком диапазоне частот от 0.2 до 2.5 ТГц in vitro определены показатели преломления и коэффициенты поглощения костной ткани челюсти человека и заменителя костной ткани Cerabone®. В результате исследований получено, что показатель преломления костной ткани челюсти человека изменяется между значениями 2.075 и 2.157, а Cerabone® – между 2.4 и 2.65. Коэффициент поглощения костной ткани челюсти увеличивается с частотой от 1.7 см$^{-1}$ до значения 178.5 см$^{-1}$, демонстрируя несколько резонансных линий поглощения после 1.6 ТГц (рис.4e), а Cerabone® – увеличивается до значения 80 см$^{-1}$ и показывает резонансное поглощение при 1.7 ТГц (рис.5c).

ЛИТЕРАТУРА

1. **L.L. Hench, T.K. Greenlee, W.C. Allen, G. Piotrowski.** U.S. Army Research and Development Command, Contract no. DADA 17-70-C-0001, University of Florida, Gainesville, 1970.

2. **H. Aoki, Y. Shin, M. Akao, T. Tsuji, T. Togawa, Y. Ukegawa, R.Kikuchi.** In: Biological and Biomechanical Performances of Biomaterials, P. Cristel, Ed., Amsterdam, Elsvier, 1966, pp. 1–3.
3. **M. Jarcho, C.H. Bolen, M.B. Thomas, J. Nobick, J.F. Kay, R.H. Doremus.** J. Mater. Sci., **11,** 2027 (1976).
4. **T. Kokubo, M. Shigematsu, Y. Nagashima, M. Tashiro, T. Nakamura, T. Yamamoro, et al.** Bull. Inst. Chem. Res. Kyoto Univ., **60,** 260 (1982).
5. http://www.botiss.com.tr/cerabone_en.html
6. **A.J. Fitzgerald, E. Berry, N.N. Zinov'ev, S. Homer-Vanniasinkam, R.E. Miles, J.M. Chamberlain, M.A. Smith.** J. Biol. Phys., **29**, 123 (2003).
7. **E. Berry, A.J. Fitzgerald, N.N. Zinov'ev, G.C. Walker, S. Homer-Vanniasinkam, C.D. Sudworth, R.E. Miles, J.M. Chamberlain, M.A. Smith.** Proceedings of SPIE, **5030,** 459 (2003).
8. **N.N. Zinov'ev, A.S. Nikoghosyan, J.M. Chamberlain.** Proceedings of SPIE, **6257**, 62570P1, (2006).
9. **E. Pickwell, V.P. Wallace, B.E. Cole, S. Ali, C. Longbottom, R. Lynch, M. Pepper.** Caries Res., **41,** 4955 (2007).
10. Terahertz Optoelectronics, K. Sakai, Ed., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.
11. **B. Zhang, T. He, J. Shen, Y. Hou, Y. Hu, M. Zang, T. Chen, S. Feng, F. Teng, L. Qin.** Opt. Lett., **39,** 6110 (2014).
12. **E. Berry, A.J. Fitzgerald, N.N. Zinov'ev, G.C. Walker, S. Homer-Vanniasinkam, C.D. Sudworth, R.E. Miles, J.M. Chamberlain, M.A. Smith.** White Rose Consortium ePrints Repository, http://eprints.whiterose.ac.uk/761/1/berrye5_5030-46AuthorVersion.pdf
13. **M. Bessou, B. Chassagne, J.P. Caumes, C. Pradère, P. Maire, M. Tondusson, E. Abraham.** App. Opt., **51,** 6738 (2012).

OPTICAL PROPERTIES OF HUMAN JAWBONE AND HUMAN BONE SUBSTITUTE CERABONE® IN THE TERAHERTZ RANGE

A.S. NIKOGHOSYAN, H. TING, J. SHEN, R.M. MARTIROSYAN,
M.Yu. TUNYAN, A.V. PAPIKYAN, A.A. PAPIPKYAN

Refractive indices $n(\omega)$ and the absorption coefficients $\alpha(\omega)$ of the jawbone and human bone substitute Cerabone® were determined in vitro by the terahertz time-domain spectroscopy (TDS) in a wide frequency range from 0.2 to 2.5 THz. It is shown that the refractive index of the human jawbone changes between the values of 2.075 and 2.157, and Cerabone® – between 2.4 and 2.65. The absorption coefficient of the human jawbone depending on frequency increases from 1.7 см$^{-1}$ to 178.5 cm^{-1}, showing several resonance absorption lines after 1.6 THz. The absorption coefficient of Cerabone® increases from zero to 80 cm^{-1}, and the resonance absorption occurs at 1.7 THz. The obtained results allowed us to determine the proximity of the physical properties of the Cerabone® with the natural bone matrix.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.357-362 (2016)

УДК 535.371

ИДЕНТИФИКАЦИЯ МОЛЕКУЛ ЧЕРЕЗ УСИЛЕНИЕ ФЛУОРЕСЦЕНЦИИ ПОСРЕДСТВОМ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ОСТРИЯ

С.Х. НЕРКАРАРЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: sonanerk@gmail.com

(Поступила в редакцию 25 ноября 2015 г.)

Теоретически исследуется явление усиления флуоресценции в результате резкого возрастания скорости затухания квантового дипольного излучателя (КДИ) в окрестности металлического конического острия. Процесс релаксации КДИ рассматривается как самостимулирующий переход из возбужденного состояния в основное в результате формирования обратной связи от металлического острия. Динамика релаксации системы проявляет ступенчатое поведение, чем существенно отличается от общепринятого экспоненциального затухания. Это явление можно наблюдать в небольшой области резонансной частоты, которая определяется углом конического острия. Усиление флуоресценции при сближении молекулы с металлическим острием на поверхности позволяет определить ее расположение.

1. Введение

Два важнейших достижения нанооптики заметно расширили возможности идентификации и определения места отдельных атомов или молекул на поверхности. Во-первых, установлено, что связь между квантовыми дипольными излучателями (КДИ), такими как молекулы или квантовые точки, и металлическими наночастицами (МНЧ) в оптической области спектра позволяет управлять энергией электромагнитного излучения [1,2]. Наиболее часто обсуждаемый эффект, возникающий в результате взаимодействия между КДИ и МНЧ, это – усиление или подавление флуоресценции, которые определяются соотношением излучательной и безызлучательной скоростей распада, и усиливаются вблизи МНЧ [3–7]. Во-вторых, эксперименты с одиночными молекулами, взаимодействующими с определенными металлическими наноструктурамы [3,4,8], часто называемыми наноантеннами, служат мощным импульсом для дальнейшего развития этого направления [9,10].

Многие исследователи рассматривали изменение спонтанного излучения при различных конфигурациях КДИ–МНЧ, сосредоточив внимание на явлении необычного возрастания скорости распада КДИ (излучательного и безызлучательного) в окрестности МНЧ [3–7,11,12], при этом всегда неявно предполагая, что динамика релаксации имеет экспоненциальный характер, по аналогии с моделью Вайскопфа–Вигнера для индивидуального двухуровневого атома. В работах [13,14] было показано, что в присутствии МНЧ вблизи КДИ, когда в результате резонансной связи с КДИ возбуждается локализованный поверхностный плазмон, резко меняется динамика релаксации: экспоненциальное поведение затухания превращается в ступенчатое. Основным физическим следствием этого быстрого процесса релаксации является то, что излучение выходит со значительным опозданием. Тем не менее существенное сокращение времени жизни возбужденного состояния КДИ в условиях эффективной накачки обеспечивает усиление флуоресценции [3,14]. Согласно проведенному в [14] анализу, сокращение времени жизни возбужденного состояния – результат самостимулирующего перехода КДИ из возбужденного состояния в основное, что имеет место, когда сдвиг фазы резонансного отклика МНЧ составляет $\pi/2$. Однако, наряду с МНЧ таким свойством могут обладать и другие структуры, в частности, металлические острия (МО). В работе [15] показано, что отклик на внешнее поле МО конической формы в области ближнего поля при определенных условиях сдвинут по фазе на $\pi/2$. Это очень важно, так как именно МО является наиболее эффективным зондом для изучения поверхности с нанометрическим разрешением.

Целью настоящей работы является исследование возможности идентификации молекулы и определения ее местоположения на поверхности, используя процесс усиления флуоресценции, обусловленный наличием МО.

2. Теория явления

Рассматриваемая система КДИ–МО схематически представлена на рис.1 и состоит из трехуровнего КДИ [3,4] и конической МО. Предполагается, что лазер внешней накачки переводит КДИ из основного состояния 0 в возбужденное состояние 2, откуда безызлучательно переходит в оптически активное состояние 1, и на частоте ω_{10} излучательного (дипольно разрешенного) перехода $1 \to 0$ возбуждает плазменные колебания. Это позволяет отделить динамику возбуждения состояния 1, которое не зависит от присутствия МО, от динамики релаксации состояния 1, что из-за реализации КДИ–МО связи является предметом настоящего исследования. Физически похожая ситуация может быть реализована в двухуровневом КДИ в результате одно- или двухфотонного (импульсного) возбуждения.

В рамках сделанных предположений волновую функцию КДИ в процессе перехода можно представить как когерентную суперпозицию основного и возбужденного состояний и записать в виде

$$\psi = a(t)\phi_1(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} + a_0(t)\phi_0(\mathbf{r})e^{-\frac{i}{\hbar}E_{10} t}, \qquad (1)$$

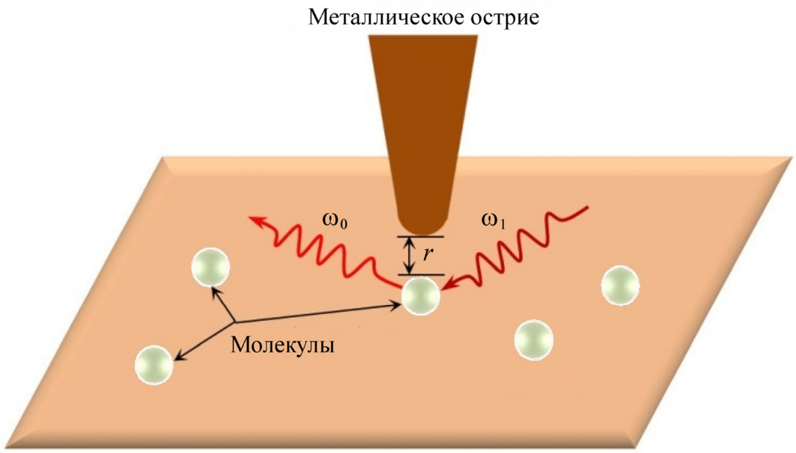

Рис.1. Схематическое представление КДИ–МО.

где ϕ_1 и ϕ_0 – волновые функции КДИ в состояниях 1 и 0, характеризуемые энергиями E_1 и E_0, соответственно, $a_0(t)$ и $a_1(t)$ – соответствующие амплитуды вероятностей, описывающие переход $1 \to 0$. Таким образом, дипольный момент перехода определяется соотношением

$$\mathbf{D} = a_1 a_0^* \mathbf{d}_{10} \exp(-i\omega_{10} t) + a_0 a_1^* \mathbf{d}_{10}^* \exp(i\omega_{10} t). \quad (2)$$

Звездочкой обозначается комплексное сопряжение d_{10} и $\hbar\omega_{10} = E_1 - E_0$ определяют дипольный момент и энергию перехода $1 \to 0$, соответственно.

В рассматриваемых условиях поле диполя КДИ создает перераспределение зарядов на МО, поле которых на КДИ формирует обратную связь. Пусть КДИ расположен в окрестности конического МО, которое описывается полууглом раствора ϑ_0, а также зависящей от частоты проницаемостью ε_1 и окружен диэлектрической средой с проницаемостью $\varepsilon_2 = 1$ (рис.1). Мы полагаем, что КДИ находится на оси z и его дипольный момент перехода также направлен вдоль оси z. Индуцированное дипольным моментом КДИ перераспределение зарядов создает поле, действующее обратно на КДИ, которое также направлено вдоль оси z и имеет вид

$$\mathbf{E} = \frac{A\mathbf{d}_{10} a_1 a_0^*}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \exp(-i\omega_{10} t) + \text{c. c.} \quad (3)$$

Здесь $r \ll \lambda$, r – расстояние КДИ от МО, λ – длина волны излучения на частоте ω_{10}, A – константа обратной связи, значение которой играет принципиальную роль в процессе релаксации КДИ. Самоиндуцированный переход в основное состояние происходит в условиях, когда A – положительная мнимая величина $(A = iA_0,\ A_0 > 0)$. Тогда для амплитуд вероятностей получится следующая система связанных уравнений:

$$\frac{da_0}{dt} = \eta a_1^* a_1 a_0,$$
$$\frac{da_1}{dt} = -\eta a_0^* a_0 a_1, \tag{4}$$

где

$$\eta = \frac{A_0 \left|\mathbf{d}_{10}\right|^2}{\hbar 4\pi\varepsilon_0 r^3}. \tag{5}$$

Решение уравнений (4) можно представить в виде

$$a_0(t) = \frac{a_{00}}{\sqrt{a_{00}^2 + a_{10}^2 \exp(-2\eta t)}}, \quad a_1(t) = \frac{a_{10}}{\sqrt{a_{10}^2 + a_{00}^2 \exp(2\eta t)}}. \tag{6}$$

Здесь a_{00}^2 и a_{10}^2 определяют вероятности нахождения КДИ соответственно в основном и возбужденном состояниях. Отсюда видно, что переход в основное состояние реализуется по неэкспоненциальному закону и кривая зависимости больше напоминает степенную функцию [13], при этом скорость переноса определяется параметром η. Из [15] следует, что для золотого конуса с углом раствора $\vartheta = 18^{\circ}$ и радиуса кривизны вершины $a = 2$ нм поле отклика при длине волны 580 нм по фазе отличается на $-3\pi/2$ (или $\pi/2$) и на расстоянии 15 нм мы имеем $A_0 \approx 50$. Одно из самых важных предположений, лежащих в основе нашего теоретического описания, относится к сильному связыванию между КДИ и МО, что должно обеспечить значительно большие скорости релаксации η, чем γ для изолированного КДИ. Их соотношение может быть оценено с помощью уравнения (5) и формулы Вайскопфа–Вигнера следующим образом:

$$\beta = \frac{\eta}{\gamma} = 3\times 10^{-3}\frac{\lambda^3}{r^3}. \tag{7}$$

В приведенных условиях $\beta \approx 173$, так что в течение перехода будет доминировать исследуемый здесь процесс.

Выявленный механизм быстрого перехода из возбужденного состояние в основное существенно меняет характер флуоресценции. Пользуясь обозначениями рис.2, можно написать систему дифференциальных уравнений для изменения населенностей p_i, $i = \{0,1,2,\}$ каждого уровня в виде:

$$\frac{dp_0}{dt} = W_{02}(p_2 - p_0) + \gamma_{10} p_1, \qquad \frac{dp_1}{dt} = \gamma_{21} p_2 - \gamma_{10} p_1,$$
$$\frac{dp_2}{dt} = -W_{02}(p_2 - p_0) - \gamma_{21} p_2, \qquad p_0 + p_1 + p_2 = 1. \tag{8}$$

Здесь W_{02} – скорость вынужденного перехода между состояниями 0 и 2, γ_{21} и γ_{10} – скорости релаксации из состояний 2 в 1 и из 1 в 0, соответственно. Тогда в стационарном режиме при $\gamma_{10} \ll \gamma_{21}$ получим

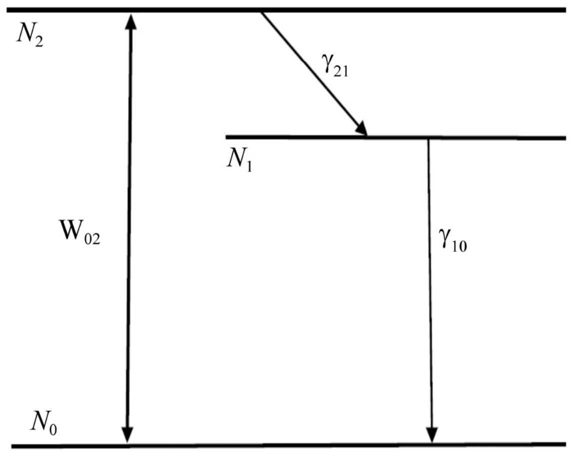

Рис.2. Схема трехуровнего КДИ.

$$p_2 = \frac{W_{02}}{W_{02} + \gamma_{10}}. \tag{9}$$

Скорость релаксации γ_{10} состоит из скоростей излучательного γ_r и безызлучательного γ_{nr} переходов, так что $\gamma_{10} = \gamma_r + \gamma_{nr}$. Нас интересует скорость R, с которой система излучает фотон. Эта скорость определяется соотношением

$$R = \frac{\gamma_r W_{02}}{W_{02} + \gamma_{10}}. \tag{10}$$

Согласно оценкам [14], $\gamma_r \approx 0.75\gamma_{10}$. Отсюда следует, что в условиях достаточно сильной накачки $(W_{02} \gg \gamma_{10})$ скорость флуоресценции возрастает с увеличением γ_{10}. Так как $\eta \sim \gamma_{10}$, можно заключить, что в окрестности МО скорость флуоресценции КДИ существенно возрастает. Из-за резонансности процесса усиление флуоресценции можно наблюдать лишь в случае КДИ с определенным спектром, что позволит идентифицировать их.

3. Заключение

Описанный процесс релаксации КДИ можно рассматривать как самостимулированный переход из возбужденного состояния в основное в результате формирования обратной связи от МО. На самом деле это поле представляет собой π-импульс, который обеспечивает переход КДИ в основное состояние. Динамика релаксации в системе проявляет ступенчатое поведение и, тем самым, значительно отличается от общепринятого экспоненциального распада. Эффект может наблюдаться в некоторой малой области резонансной частоты при заданном угле МО. Обнаружение КДИ происходит в результате увеличения флуоресценции при сближении МО к адсорбированному на поверхности КДИ. Таким образом, из-за частотной избирательности процесса можно наблюдать увеличение флуоресценции КДИ с определенным спектром, что позволяет идентифицировать и определять их местонахождение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **D.E. Chang, A.S. Sorensen, P.R. Hemmer, M.D. Lukin.** Phys. Rev. Lett., **97**, 053002 (2006).
2. **A.V. Akimov, A. Mukherjee, C.L. Yu, D.E. Chang, A.S. Zibrov, P.R. Hemmer, H. Park, M.D. Lukin.** Nature (London), **450**, 402 (2007).
3. **P. Anger, P. Bharadwaj, L. Novotny.** Phys. Rev. Lett., **96**, 113002 (2006).
4. **S. Kuhn, U. Hakanson, L. Rogobete, V. Sandoghdar.** Phys. Rev. Lett., **97**, 017402 (2006).
5. **X.W. Chen, M. Agio, V. Sandoghdar.** Phys. Rev. Lett., **108**, 233001 (2012).
6. **G.P. Acuna, M. Bucher, I.H. Stein, C. Steinhauer, A. Kuzyk, P. Holzmeister, R. Schreiber, A. Moroz, F.D. Stefani, T. Liedl, F.C. Simmel, P. Tinnefeld.** ACS Nano, **6**, 3189 (2012).
7. **K.E. Dorfman, P.K. Jha, D.V. Voronine, P. Genevet, F. Capasso, M.O. Scully.** Phys. Rev. Lett., **111**, 043601 (2013).
8. **J.N. Farahani, D.W. Pohl, H.J. Eisler, B. Hecht.** Phys. Rev. Lett., **95**, 017402 (2005).
9. **P. Mühlschlegel, H.J. Eisler, B. Hecht, D.W. Pohl.** Science, **308**, 1607 (2005).
10. **M. Agio.** Nanoscale, **4**, 692 (2012).
11. **C. Sauvan, J.P. Hugonin, I.S. Maksymov, P. Lalanne.** Phys. Rev. Lett., **110**, 237401. (2013).
12. **S. D'Agostino, F.D. Sala, L.C. Andreani.** Phys. Rev. B, **87**, 205413 (2013).
13. **Kh.V. Nerkararyan, S.I. Bozhevolnyi.** Opt. Lett., **36**, 1617 (2014).
14. **Kh.V. Nerkararyan, S.I. Bozhevolnyi.** The Royal Society of Chemistry, 2015 Faraday Discuss., **178**, 295 (2015).
15. **A. Pors, Kh.V. Nerkararyan, S.I. Bozhevolnyi.** Opt. Lett., **39**, 3308 (2014).

IDENTIFICATION OF MOLECULES THROUGH THE FLUORESCENCE ENHANCEMENT BY A METAL TIP

S.Kh. NERKARARYAN

The fluorescence enhancement phenomenon which is realized as a result of the dramatic increasing in decay rate of the quantum dipole emitter (QDE) in the vicinity of the metal conical tip is theoretically investigated. The QDE relaxation process is considered as the self-stimulated transition from the excited state into the ground state because due to the feedback field from the tip. The relaxation dynamics in the system exhibits step-like behavior thereby deviating significantly from the generally accepted exponential decay. The effect can be observed in a certain small region of the resonance frequency for a given apex angle of the conical tip. Increasing fluorescence at the convergence of the molecule with the tip on the surface allows detect it.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.363-370 (2016)

УДК 532.783

ПРИНУДИТЕЛЬНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЛЕГИРОВАННЫХ НАНОЧАСТИЦАМИ НЕМАТИКАХ В ОТСУТСТВИЕ ПЕРЕОРИЕНТАЦИИ

М.Р. АКОПЯН, Р.С. АКОПЯН*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

*e-mail: rhakob@ysu.am

(Поступила в редакцию 20 апреля 2016 г.)

Рассмотрена задача принудительной конвекции в ячейке нематического жидкого кристалла, легированного наночастицами, с двумя свободными плоскими и изотермическими границами. Эти граничные условия, предложенные Рэлеем, позволяют получить простое и точное решение краевой задачи, из которого отчетливо видны её наиболее важные особенности. В частности, появляется возможность возбудить конвекцию без переориентации директора жидкого кристалла. Показано, что наночастицы могут иметь существенное влияние на конвекцию.

1. Введение

В течение последних двух десятилетий задача конвекции в слое жидкости, нагреваемой снизу [1–3], привлекает к себе пристальное внимание в связи с применением мощных лазеров для обработки материалов [4,5]. Эти эффекты хорошо известны как конвективные движения Рэлея–Бенара и Марангони [6–12]. После систематических экспериментальных исследований Бенара [6,7] Рэлей [8] решил задачу об устойчивости равновесия слоя со свободными граничными условиями, что послужило началом развития теории конвективной устойчивости. Конвекция играет значительную роль в технологических процессах, связанных с плавлением металлов, сваркой, резкой и легированием [13,14]. Исследование устойчивости тепловой конвекции в нематических жидких кристаллах (НЖК) представляет большой интерес из-за их уникальных свойств [15–18]. Так, пороги неустойчивостей в НЖК существенно отличаются от порогов для изотропных жидкостей, имеющих те же физические параметры [19–21]. Кроме того, в отличие от изотропных жидкостей в НЖК стационарная конвекция наблюдается при нагревании ячейки как снизу, так и сверху [22–24].

В последнее десятилетие значительно возросло использование коллоидов, приготовленных из наноразмерных частиц, диспергированных в базовую жидкость. Эти коллоиды имеют многочисленные применения в микро- и наноэлектромеханических системах, биомедицине (визуализация и абляция), ядерных реакторах, солнечных коллекторах, автомобилях, микроканалах, электронных устройствах, материалах с фазовыми переходами и т. д. [25–30]. Наножидкости – это смеси, содержащие наноразмерные частицы, диспергированные в жидкости. По сравнению с базовыми жидкостями (например, масло или вода) наножидкости обладают сильными теплофизическими свойствами, такими как высокая теплопроводность, большие коэффициенты теплодиффузии, вязкости и конвективной теплопередачи [31,32]. В работе [33] впервые было показано усиление теплопроводности наножидкости и представлены ее экспериментальные измерения. Естественная конвекция в замкнутых системах с наножидкостями была исследована в работах [34–37]. Было выяснено, что с увеличением объемной концентрации наночастиц число Нуссельта (отношение конвективной передачи тепла к теплопроводности) для наножидкостей падает.

В настоящей работе рассмотрена задача возбуждения конвекции лазерным излучением (принудительный аналог так называемой задачи Рэлея) в ячейке с НЖК, легированным наночастицами (нанонематик), с двумя свободными плоскими изотермическими поверхностями. Поскольку такая задача решается аналитически и точно, то она позволяет выявить качественно новые эффекты. Например, при некоторых условиях возможно возбуждение конвекции без изменения ориентации НЖК. Рассмотрено также влияние наночастиц на конвективные движения нанонематика.

2. Теплопроводность в наножидкостях

Предполагается, что наножидкость – это раствор, состоящий из непрерывной компоненты базовой жидкости, называемой матрицей, и прерывистой твердой компоненты, называемой частицей. Свойства наножидкостей зависят от деталей их микроструктур, таких как свойства компонент, объемные концентрации компонент, размеры, геометрия и распределение частиц, движение частиц и эффекты на границе раздела фаз матрица–частица. Однако невозможно оценить эффективные свойства наножидкостей, не зная всех подробностей их микроструктур.

Существует много подходов избежать эти проблемы и моделировать теплопроводности наножидкостей. Наиболее близкий к экспериментальным результатам подход был предложен в работе [38]. Рассматривая простую единицу кубической решетки смеси и полагая, что сферические частицы однородно распределены в растворе и расположены в узлах кубической решетки, была получена следующая формула для эффективной теплопроводности:

$$r_e = r_m \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \left[2 - \frac{a r_m}{\sqrt{r_p - r_m}\sqrt{a r_m + r_p - r_m}} \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \ln \frac{\sqrt{a r_m + r_p - r_m} + \sqrt{r_p - r_m}}{\sqrt{a r_m + r_p - r_m} - \sqrt{r_p - r_m}} \right] \right\}^{-1}, \qquad (1)$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{16}{9\pi f_p^2}}.$$

Здесь r_e, r_m, и r_p – коэффициенты теплопроводности для наножидкости, матричной жидкости и твердых наночастиц, соответственно, и f_p – объемная концентрация наночастиц.

Эта модель предсказывает уникальную особенность – нелинейную зависимость коэффициента теплопроводности от объемной концентрации частиц. С увеличением последней кривая проводимости от концентрации изменяется от выпуклости вверх к вогнутости вверх. Поскольку для многих практических применений растворов очень желательно достичь высоких коэффициентов теплопроводности при малых концентрациях частиц, то такое поведение структурированных растворов привлекательно тем, что при малых объемных концентрациях частиц можно усилить ничтожную теплопроводность базовой жидкости.

3. Линеаризованные уравнения и граничные условия

Рассмотрим горизонтальный слой ($0 \le z \le L$) гомеотропно (невозмущенный директор, $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_z$) или планарно ($\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_x$) ориентированного нанонематика со свободными поверхностями, находящегося в гравитационном поле тяжести $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ и поглощающего падающий на него свет. Температура T_0 на границах слоя фиксирована, и в невозмущенном состоянии градиент температуры отсутствует. Пусть на слой падают два когерентных плоских световых (например, лазерных) пучка и создают пространственно-периодическую картину распределения интенсивности, пропорциональной $|E|^2$. Присутствие слабого поглощения приводит к периодическому тепловыделению

$$Q(x) = \frac{L\chi cn}{8\pi}\left|E(x)\right|^2 = \frac{L\chi cn}{8\pi}\left[\left|E_1\right|^2 + \left|E_2\right|^2 + E_1 E_2^* e^{(ikx)} + c.\,c.\right]. \qquad (2)$$

Здесь $k = 2\pi|\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2|/\lambda$ – волновой вектор неоднородной части тепловыделения, γ_1 и γ_2 – углы падения света, λ – длина волны световых волн в вакууме, χ – коэффициент поглощения света ($\chi L << 1$), c – скорость света в вакууме и n – средний показатель преломления нанонематика.

Предполагается, что имеется симметрия тепловыделения по y-координате, так что везде $\partial/\partial y = 0$ и $v_y = 0$. Здесь $\mathbf{v}$ – скорость гидродинамических движений. Обозначим угол между директором и осью z через $\varphi_i + \varphi$, где φ_i – угол в невозмущенном состоянии директора ($\varphi_i = 0$ для гомеотропной начальной ориентации нематика и $\varphi_i = \pi/2$ для планарной ориентации) и φ – возмущение директора, $\varphi(z = 0, L) = 0$.

В отсутствие светового поля равновесному состоянию нанонематика соответствует решение в виде

$$\begin{aligned} &v_0 = 0, \quad T = T_0 = \text{const}, \quad \rho = \rho_0 = \text{const}, \\ &\varphi_0 = 0, \quad p = p_0(z=0) - \rho_0 g z, \end{aligned} \tag{3}$$

где p – гидродинамическое давление и ρ – плотность нанонематика. Когда слой жидкости освещается, то система возмущается, и стационарные, линеаризованные уравнения для возмущенных величин θ, $\delta\rho = \rho - \rho_0 = -\beta\rho_0\theta$ (β – коэффициент объемного расширения), $\delta p = p - p_0$, v_x, v_z и φ имеют следующий вид [17]:

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial x} + \eta_x \Delta v_x + \alpha_x \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \alpha_a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t}, \tag{4}$$

$$\rho\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial \delta p}{\partial z} + \eta_z \Delta v_z + \alpha_z \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \alpha_b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \beta\rho_0 g\theta, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial t} - r_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - r_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{Q}{\rho_0 c_p L}, \tag{6}$$

$$(\alpha_a - \alpha_b)\frac{\partial \varphi}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + K_z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \alpha_a \frac{\partial v_x}{\partial z} - \alpha_b \frac{\partial v_z}{\partial x}. \tag{7}$$

Выше сделаны следующие обозначения: для ячейки с планарной исходной ориентацией $\eta_z = \eta_2$, $\eta_x = \eta_1$, $\alpha_x = \alpha_1 + \alpha_5$, $\alpha_z = -\alpha_5$, $r_x = r_\parallel$, $r_z = r_\perp$, $K_x = K_3$, $K_z = K_1$, $\alpha_a = \alpha_3$, $\alpha_b = \alpha_2$; для ячейки с гомеотропной исходной ориентацией $\eta_z = \eta_1$, $\eta_x = \eta_2$, $\alpha_x = -\alpha_5$, $\alpha_z = \alpha_1 + \alpha_5$, $r_x = r_\perp$, $r_z = r_\parallel$, $K_x = K_1$, $K_z = K_3$, $\alpha_a = \alpha_2$, $\alpha_b = \alpha_3$. Здесь K_1 и K_3 – коэффициенты упругости Франка, $r_\parallel$ и $r_\perp$ – параллельная и перпендикулярная компоненты тензора теплопроводности нанонематика (вычисляемые по формуле (1)), $\eta_1 = 0.5(\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)$ и $\eta_2 = 0.5(-\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)$ – коэффициенты вязкости нанонематика, α_i – коэффициенты Лесли, ρ_0 – невозмущенная плотность и c_p – удельная теплоемкость. Заметим, что $r_\parallel = r_e$ из (1), и в этой формуле надо брать вместо r_m параллельную компоненту коэффициента теплопроводности чистого НЖК, а также $r_\perp = r_e$ из (1), и в этой формуле надо брать вместо r_m перпендикулярную компоненту коэффициента теплопроводности чистого НЖК.

Сформулируем теперь граничные условия. Следуя Рэлею [8], будем считать границы слоя свободными – на этих границах исчезают касательные напряжения. Далее, эти границы предполагаются плоскими, т.е. считается, что возникающие конвективные возмущения не приводят к искривлению границ. Как уже указывалось, значения температуры на границах фиксированы, и, следовательно, возмущение температуры на границах исчезает. Что касается директора, то полагаем его жестко закрепленным, т.е. его отклонения на границах тоже исчезают. Таким образом, получаем систему граничных условий

$$v_z(x, z=0) = v_z(x, z=L) = 0, \quad \theta(x, z=0) = \theta(x, z=L) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial z}(x, z=0) = \frac{\partial v_x}{\partial z}(x, z=L) = 0, \quad \varphi(x, z=0) = \varphi(x, z=L) = 0. \tag{9}$$

Граничные условия для v_x, вытекающие из требования отсутствия касательных напряжений на границах, могут быть с помощью уравнения непрерывности заменены условиями для v_z. Дифференцируя первое из уравнений (6) по z и пользуясь граничными условиями для скорости, найдем $\partial^2 v_z/\partial z^2 = 0$ при $z = 0, L$.

4. Аналитическое решение уравнений для принудительной конвекции

Поскольку коэффициенты уравнений (4)–(7) и граничные условия (8), (9) не зависят от времени и горизонтальной координаты x, то существуют решения, экспоненциально зависящие от времени и периодические в плоскости (x,z).

Пространственно-периодическое слагаемое $E_i(x)E_j^*(x) = a_{ij}\exp(ikx)$ в тензоре $E_i E_j^*$, характеризующем распределение интенсивности световой волны, вызывает стационарные возмущения

$$v_z(x,z) = V_z e^{ikx} \sin\frac{\pi z}{L}, \quad \theta(x,z) = \Theta e^{ikx} \sin\frac{\pi z}{L}, \tag{10}$$

$$v_x(x,z) = V_x e^{ikx} \cos\frac{\pi z}{L}, \quad \varphi(x,z) = \Phi e^{ikx} \sin\frac{\pi z}{L}, \tag{11}$$

удовлетворяющие граничным условиям на свободных границах $z = 0, L$. Для амплитуд этих возмущений получаем

$$V_x = ikk_0\beta\rho g\Theta\left[\eta_x k_0^4 + (\eta_x + \eta_z + \alpha_x + \alpha_z)k_0^2 k^2 + \eta_z k^4\right]^{-1}, \quad V_z = -ik_0^{-1}kV_x, \tag{12}$$

$$\Theta = \frac{\chi c n}{8\pi\rho c_p}(r_x k^2 + r_z k_0^2)^{-1} E_1 E_2^*, \quad \Phi = V_x k_0^{-1}(\alpha_a k_0^2 - \alpha_b k^2)(K_z k_0^2 + K_x k^2)^{-1}, \tag{13}$$

где $k_0 = \pi/L$. Из второго выражения (13) видно, что при $k = k_0(\alpha_a/\alpha_b)^{1/2}$ вязкие моменты, действующие на директор, компенсируют друг друга и в результате отсутствует переориентация, хотя конвекция развивается. Если обозначить $k = 2\pi/\Lambda$, где Λ – период интерференционной картины, то условие отсутствия переориентации получим в виде

$$L_{\text{cr}} = \frac{\Lambda}{2}\sqrt{\frac{\alpha_a}{\alpha_b}}\,. \tag{14}$$

Для гомеотропной исходной ориентации на примере НЖК МББА получаем $L_{\text{cr}} = (\Lambda/2)\sqrt{\alpha_2/\alpha_3} = 4.08\Lambda$, а для планарной исходной ориентации $L_{\text{cr}} = (\Lambda/2)\sqrt{\alpha_3/\alpha_2} = 0.06\Lambda$. Отметим, что такое явление возможно только в случае принудительной конвекции, потому что только лазерное возбуждение даёт возможность получить конвекцию с желаемым периодом.

При $k \ll k_0(\alpha_a/\alpha_b)^{1/2}$ с уменьшением k отклик падает по линейному закону $\Phi \propto (\chi L)kk_0^{-5}$. При увеличении k от нуля отклонение возрастает и при $k \approx 0.05k_0$ (для планарного МББА) достигает своего первого максимума. В точке $k = k_0(\alpha_a/\alpha_b)^{1/2} \approx 0.1k_0$ (для планарного МББА) Φ меняет знак, т.е. φ меняет фазу на π, и при $k \approx 0.6k_0$ его амплитуда достигает своего второго максимума. Последнее соответствует поперечному периоду регулярной картины неустойчивости Бенара при постоянном вертикальном градиенте температуры. При $k \gg 0.6k_0$ переориентация резко падает с увеличением k по закону $\Phi \propto (\chi L)k^{-5}k_0$.

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе решена задача Рэлея о возможности возбуждения регулярных конвективных движений в обогащенных наночастицами жидких кристаллах с двумя свободными границами световым излучением с пространственно-периодической структурой интенсивности. Показано, что наночастицы могут иметь существенное влияние на конвекцию. Например, если к НЖК 5ЦБ (r_m = 2.35 Вт/мК) добавить наночастицы Al_2O_3 (r_p = 204 Вт/мК) с объемной концентрацией 1%, то из (1) получим $r_e = 1.22r_m$. Это приведет к уменьшению амплитуды распределения температуры, согласно формуле (13), и к снижению гидродинамической скорости, согласно формуле (12). Следовательно, уменьшится переориентация директора на 22% (см. формулу (13)). Между тем, наночастицы не влияют на эффект гидродинамических движений в отсутствие переориентации.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН Армении в рамках научного проекта № 15-1C099.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Г.З. Гершуни, Е.М. Жуховицкий.** Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва, Наука, 1972.
2. **Y. Jaluria.** Natural Convection. Oxford, Pergamon Press, 1980.
3. **А.В. Гетлинг.** Конвекция Рэлея–Бенара. Москва, Эдиториал УРСС, 1999.
4. **А.А. Веденов, Г.Г. Гладуш.** Физические процессы при лазерной обработке материалов. Москва, Энергоатомиздат, 1985.

5. **Р.В. Арутюнян, В.Ю. Баранов, Л.А. Болшов и др.** Воздействие лазерного излучения на материалы. Москва, Наука, 1989.
6. **H. Benard.** Revue Generale des Sciences, Pares at Appliguees, **11**, 1261; 1309 (1900).
7. **H. Benard.** Ann. Chem. Phys., **23**, 62 (1901).
8. **J.L. Lord Reyleigh.** Phil. Mag., **32**, 529 (1916).
9. **E.L. Koschmieder.** Adv. Chem. Phys., **26**, 177 (1974).
10. **C. Normand, Y. Pomeau, M.G. Velarde.** Rev. Mod. Phys., **49**, 581 (1977).
11. **H.L. Swinney, J.P. Gollub.** Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence. Springer, Berlin, 1981.
12. **W.R. Peltier.** Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics, **4**: Mantle Convection, Plate Tectonics, and Global Dynamics. New York, Gordon and Breach, 1989.
13. **С.И. Выборнов, Ю.В. Саночкин.** Механика жидкости и газа, **1**, 176 (1985).
14. **C.R. Heiple, J.R. Poper, R.T. Sragner, R.J. Aden.** Welding J., **62**, 572 (1983).
15. **Р.С. Акопян.** Изв. АН Арм. ССР, Физика, **23**, 95 (1988).
16. **Р.С. Акопян, Р.Б. Алавердян А.Г. Аракелян, С.Ц. Нерсисян, К.М. Сарксян, Ю.С. Чилингарян.** Изв. НАН РА, Физика, **39**, 44 (2004).
17. **М.Р. Акопян, Р.Б. Алавердян, Ю.С. Чилингарян, Р.С. Акопян**. Изв. НАН РА, Физика, **49**, 230 (2014).
18. **Р.С. Акопян, М.Р. Акопян, Р.Б. Алавердян, Ю.С. Чилингарян.** Изв. НАН РА, Физика, **49**, 177 (2014).
19. **P.J. Barratt.** Liq. Cryst., **4**, 223 (1989).
20. **L. Kramer, W. Pesch.** Annu. Rev. Fluid Mech., **27**, 515 (1995).
21. **G. Ahlers.** Pattern Formation in Liquid Crystals, L. Kramer, A. Buta, Eds., Berlin, Springer, 1996.
22. **E. Dubois-Violette, M. Gabay.** J. Physique, **43**, 1305 (1982).
23. **J. Salan, E. Guyon.** J. Fluid Mech., **126**, 13 (1983).
24. **L. Thomas, W. Pesch, G. Ahlers.** Phys. Rev. E, **58**, 5885 (1998).
25. **S. Kakaç, A. Pramuanjaroenkij**. Int. J. Heat and Mass Transfer, **52**, 3187 (2009).
26. **J.H. Lee, S.H. Lee, C.J. Choi, S.P. Jang, S.U.S. Choi.** Int. J. Micro-Nano Scale Transport, **1**, 269 (2010).
27. **J. Eagen, R. Rusconi, R. Piazza, S. Yip.** ASME J. Heat Transfer, **132**, 102402 (2010).
28. **K.F.V. Wong, O.D. Leon**. Advanced Mechanical Engineering, Article ID 519659, 2010.
29. **J. Fan, L. Wang.** ASME J. Heat Transfer, **133**, 040801 (2011).
30. **O. Mahian, A. Kianifar, S.A. Kalogirou, I. Pop, S. Wongwises.** Int. J. Heat and Mass Transfer, **57**, 582 (2013).
31. **H. Masuda, A. Ebata, K. Teramae, N. Hishinuma.** Netsu Bussei, **7**, 227 (1993).
32. **W. Yu, D.M. France, J.L. Routbort, S.U.S. Choi.** Heat Transfer Engineering, 29, 432 (2008).
33. **S.U.S. Choi, J.A. Eastman.** Development and Application of Non-Newtonian Flows, D.A. Siginer, H.P. Wang, Eds., American Society of Mechanical Engineers, New York, 1995.
34. **K. Khanafer, K. Vafai, M. Lightstone.** Int. J. Heat Mass Transfer, **46,** 3639 (2003).
35. **N. Putra, W. Roetzel, S.K. Das.** Heat and Mass Transfer, **39**, 775 (2003).
36. **D. Wen, Y. Ding.** IEEE Transactions on Nanotechnology, **5**, 220 (2006).
37. **D. Wen, Y. Ding.** Int. J. Heat and Fluid Flow, **26**, 855 (2005).
38. **W. Yu, S.U.S. Choi.** J. Nanosci. Nanotechnol., **5**, 580 (2005).

ՍՏԻՊՈՂԱԿԱՆ ԿՈՆՎԵԿՑԻԱ ՆԱՆՈՄԱՍՆԻԿՆԵՐՈՎ ՀԱՐՍՏԱՑՎԱԾ ՆԵՄԱՏԻԿՆԵՐՈՒՄ ՎԵՐԱԿՈՂՄՆՈՐՈՇՄԱՆ ԲԱՑԱԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Մ.Ռ. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Ռ.Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Դիտարկված է ստիպողական կոնվեկցիայի վերաբերյալ զույգ ազատ, հարթ ու իզոթերմ սահմաններով նանոմասնիկներով հարստացված նեմատիկ հեղուկ բյուրեղի բջջում խնդիրը: Ռելեյի առաջադրած այդ սահմանային պայմանները հնարավորություն են տալիս ստանալ եզրային խնդրի համար պարզ ու ճշգրիտ լուծում, որից հստակ երևում են պրոբլեմի առավել կարևոր առանձնահատկությունները: Մասնավորապես, հնարավորություն է ստեղծվում մակածելու կոնվեկտիվ շարժումներ, առանց ուղղորդը խոտորելու: Ցույց է տրված, որ նանոմասնիկները կարող են ունենալ նշանակալի ազդեցություն կոնվեկցիայի վրա:

FORCED CONVECTION IN NANOPARTICLES DOPED NEMATICS WITHOUT REORIENTATION

M.R. HAKOBYAN, R.S. HAKOBYAN

The problem of forced convection in the cell of nanoparticles doped nematic liquid crystal with both boundaries being free, plane and isotherm is discussed. These boundary conditions (offered by Rayleigh) allow us to get simple and exact solution for boundary-value problem, from which its most important peculiarities can be clearly seen. Particularly, there appears a possibility to induce convection without reorientation of liquid crystal director. It was shown that nanoparticles could have significant influence on the convection.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.371-380 (2016)

УДК 543.4

ИНТЕНСИВНОСТИ ОПТИЧЕСКИХ ПЕРЕХОДОВ ИОНОВ Nd^{3+} В КРИСТАЛЛАХ $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$

Н.Р. АГАМАЛЯН*, Р.Б. КОСТАНЯН, Р.К. ОВСЕПЯН,
П.Г. МУЖИКЯН, М.Н. НЕРСИСЯН

Институт физических исследований НАН Армении, Аштарак, Армения

*e-mail: natagam@ipr.sci.am

(Поступила в редакцию 23 марта 2016 г.)

На основе анализа спектров поглощения с основного $^4I_{9/2}$ на возбужденные состояния ионов Nd^{3+} в кристаллах $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ с использованием метода Джадда–Офельта определены основные спектроскопические характеристики, в том числе вероятности межмультиплетных переходов и излучательные времена жизни. Получены следующие значения параметров Джадда–Офельта $\Omega_2 = 8.91 \times 10^{-20}$ см^2, $\Omega_4 = 4.50 \times 10^{-20}$ см^2 и $\Omega_6 = 3.89 \times 10^{-20}$ см^2 для ионов Nd^{3+} в кристаллах $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$. Проведено сравнение излучательного времени жизни с экспериментально измеренным люминесцентным временем жизни.

1. Введение

Вольфраматы и молибдаты щелочноземельных металлов и свинца с шеелитоподобной структурой привлекают внимание как эффективные лазерные среды [1] и сцинтилляторы [2] из-за широкой области прозрачности (0.3–5 мкм), возможности активирования редкоземельными ионами, химической стабильности, возможности выращивания монокристаллов больших размеров с хорошим оптическим качеством, а также зарекомендовали себя как ВКР-активные среды [3].

Вольфраматы и молибдаты одного и того же двухвалентного катиона, имеющие структуру шеелита, создают твердые растворы во всей области композиционного состава [4]. Известно некоторое число работ, посвященных исследованию монокристаллов $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, выращенных методом Чохральского [5–7]. Ожидалось, что смешанные кристаллы $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ будут иметь лучшие свойства, сочетая хорошие механические свойства $PbMoO_4$ с лучшим оптическим пропусканием в области коротких длин волн $PbWO_4$. В работах [6,7] исследовалась колебательная структура твердых растворов молибдата и вольфрамата свинца.

Активированные ионами Nd^{3+} кристаллы $PbMeO_4$ (Me = Mo, W) исследовались в работах [8–16], в которых приводятся данные по оптическому поглощению, люминесценции, излучательному времени жизни, параметрам интенсивности, лазерному излучению на ионах Nd^{3+}. Однако информации по твердым растворам на их основе немного.

Целью настоящей работы было изучение абсорбционно-люминесцентных свойств ионов Nd^{3+} в кристаллах $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ с применением метода Джадда–Офельта для определения их основных спектроскопических характеристик.

2. Кристаллы и методы исследований

В работе исследовались спектроскопические свойства ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ ($x = 0.64$), который относится к тетрагональной сингонии и имеет структуру шеелита (пр.гр. $I4_1/a\text{–}C^6{}_{4h}$). Точечная группа симметрии примесного иона Nd^{3+} в кристалле – S_4. Для исследований использовались кристаллы, выращенные методом Чохральского с концентрацией примеси 2.2 ат %. Образцы для исследований ориентировались относительно оптической оси кристалла представляли из себя пластинки z-среза толщиной 0.13 мм.

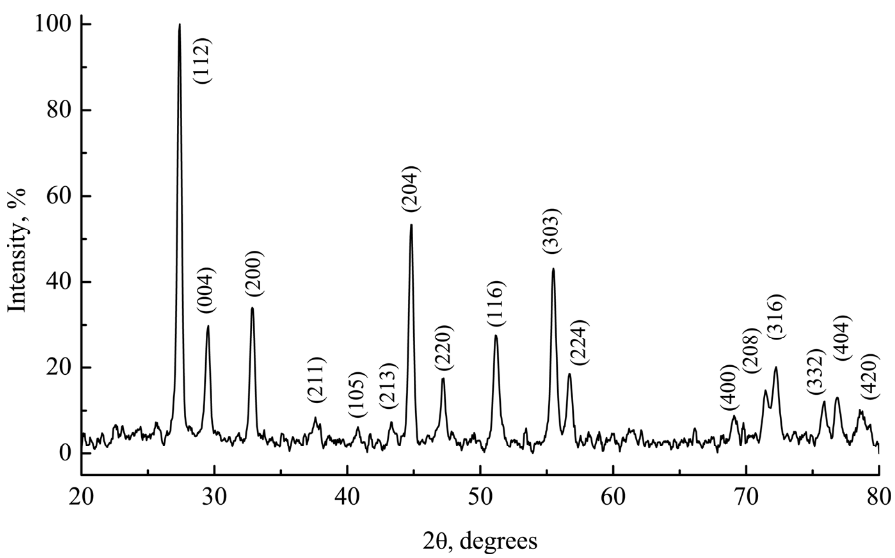

Рис.1. Рентгенодифракционный спектр измельченных кристаллов исследуемого твердого раствора $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, активированного ионами Nd^{3+}.

Рентгенодифракционный анализ измельченных кристаллов исследуемого твердого раствора $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, проведенный на дифрактометре URD-6 с излучением CuKα ($\lambda = 1.5418$ Å) в диапазоне значений $2\theta = 20\text{–}80°$ (рис.1), показал однородность шеелитовой кристаллической структуры [15,17].

Исследования спонтанного рамановского обратного рассеяния проводились в спектральной области от 200 до 1400 см$^{-1}$ на спектрометре NXR-FT RAMAN с приставкой Nicolet 5700 FT-IR при возбуждении лазерным диодом с длиной волны 980 нм. Рамановские спектры кристаллов $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, активированных ионами Nd^{3+}, и для сравнения чистого кристалла $PbMoO_4$ с характерными A_g колебательными частотами 871 см$^{-1}$ и 906 см$^{-1}$ [17] для кристаллов $PbMoO_4$ и $PbWO_4$, соответственно, показаны на рис.2. Дополнительные пики вокруг 906 см$^{-1}$ в рамановских спектрах кристаллов $PbWO_4$:Er^{3+} в работе [18] названы следствием деформации тетраэдра [WO_4] в результате активирования эрбием, из-за чего колебательная мода уширяется и расщепляется. Можно предположить, что аналогичная ситуация имеет место и с тетраэдром [MoO_4] для частоты 871 см$^{-1}$ в исследуемых смешанных кристаллах $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$.

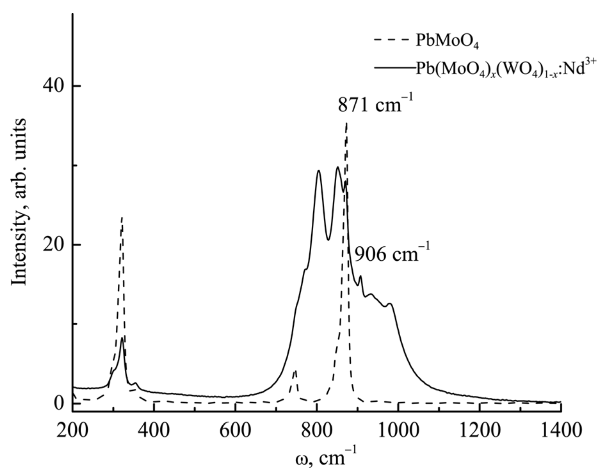

Рис.2. Рамановские спектры активированных ионами Nd^{3+} $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ и чистого $PbMoO_4$ кристаллов.

Элементный состав, в том числе концентрация неодима и соотношение MoO_4 и WO_4, определялись с помощью сканирующего электронного микроскопа Vega TS 5130 MM (Tescan) с системой энергодисперсионного рентгеновского микроанализа INCA Energy 300.

Для регистрации спектров поглощения использовались спектрофотометры Specord M-40 и СФ-8. Кинетика люминесценции ионов Nd^{3+} в кристаллах $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ на переходах $^4F_{3/2}\rightarrow J'$ исследовалась при возбуждении уровня $^4F_{3/2}$ с помощью модулированного излучения лазерного диода на 808 нм с длительностью импульса 10 мкс и частотой повторения импульсов 10 Гц на длинах волн излучения 890 нм, 1060 нм и 1330 нм, монохроматором МДР-3, цифровым осциллографом RIGOL DS1204B, фотоприемником ФЭУ-83 и фотодиодом InGaAs.

Все измерения проводились при комнатной температуре.

3. Результаты и их обсуждение

При комнатной температуре ширина запрещенной зоны кристалла $PbMoO_4$ составляет ~3.3 eV [19], а кристалла $PbWO_4$ ~3.8 eV [5], поэтому при исследовании кристалла $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ используются только 10 полос поглощения (рис.3) ионов Nd^{3+} с основного состояния $^4I_{9/2}$.

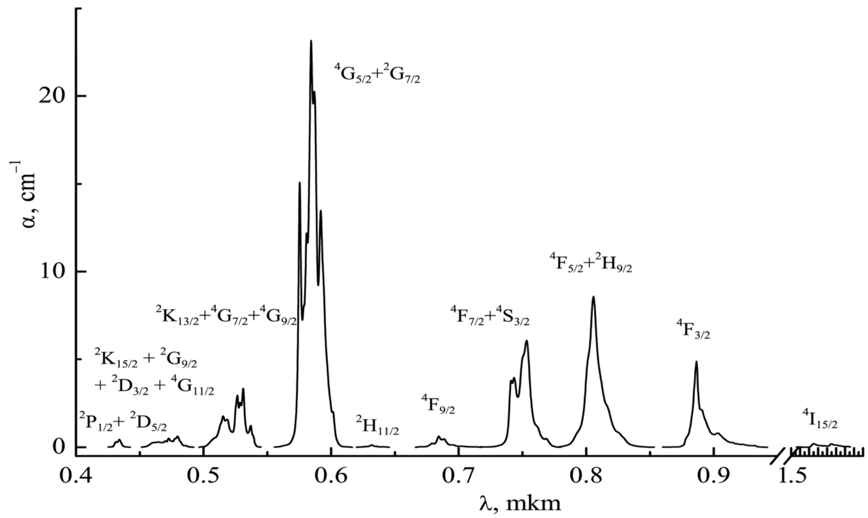

Рис.3. Спектры поглощения с идентифицированными межмультиплетными переходами $^4I_{9/2}\rightarrow J'$ ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ при комнатной температуре.

На основании анализа спектров поглощения получены значения интегральных коэффициентов поглощения $\int k(\lambda)d\lambda$ десяти полос поглощения ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, необходимых для определения экспериментальных значений сил осцилляторов $f^{\exp}$ межмультиплетных переходов с основного состояния $^4I_{9/2}$ по формуле

$$f_{JJ'}^{\exp} = (mc^2/\pi e^2 N \bar{\lambda}^2)\int \alpha(\lambda)d\lambda\,, \qquad (1)$$

где m и e – масса и заряд электрона, c – скорость света, $\bar{\lambda}_{abs}$ – средняя длина волны межмультиплетного перехода $^4I_{9/2}\rightarrow J'$, $\alpha(\lambda)$ – коэффициент поглощения на длине волны λ, N – число поглощающих ионов Nd^{3+} в кубическом сантиметре. В расчетах использовалось значение $N = 2\times10^{-20}$ см$^{-3}$, соответствующее полученному из энергодисперсионного рентгеновского микроанализа значению концентрации 2.2 ат %.

С другой стороны теоретическое значение силы осциллятора f перехода $J\rightarrow J'$ определяется как сумма сил электро-дипольного f^{ed} и магнито-дипольного f^{md} переходов $f_{JJ'} = f^{ed} + f^{md}$, т.е.

$$f_{JJ'} = \left(8\pi^2 mc/3hn^2\bar{\lambda}(2J+1)\right)\chi^{ed} S_{JJ'}^{ed} + f^{md}\,, \qquad (2)$$

где $f^{md} = \chi^{md} f'$, $\chi^{md} = n$, $\chi^{ed} = n(n^2+2)^2/9$, n – показатель преломления кристалла, h – постоянная Планка и S^{ed} – сила линии электро-дипольного перехода иона Nd^{3+}. Магнито-дипольные переходы в силу правил отбора для ионов Nd^{3+} дают вклад из рассматриваемых нами 10 полос только в полосы поглощения, соответствующие переходам с основного состояния $^4I_{9/2}$ на уровни мультиплетов $^2H_{9/2}$, $^4F_{9/2}$ и $^2G_{7/2}$. Величина f^{md} обычно мала и нечувствительна к матрице. Мы использовали значения величины f' для иона Nd^{3+} из работы [20].

Для показателя преломления исследуемого кристалла $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ использовалась показанная на рис.4 зависимость $n(\lambda)$, полученная усреднением вычисленных по формулам Селмейера значений показателя преломления для необыкновенной волны в кристаллах $PbMoO_4$ [21] и $PbWO_4$ [12], соответственно.

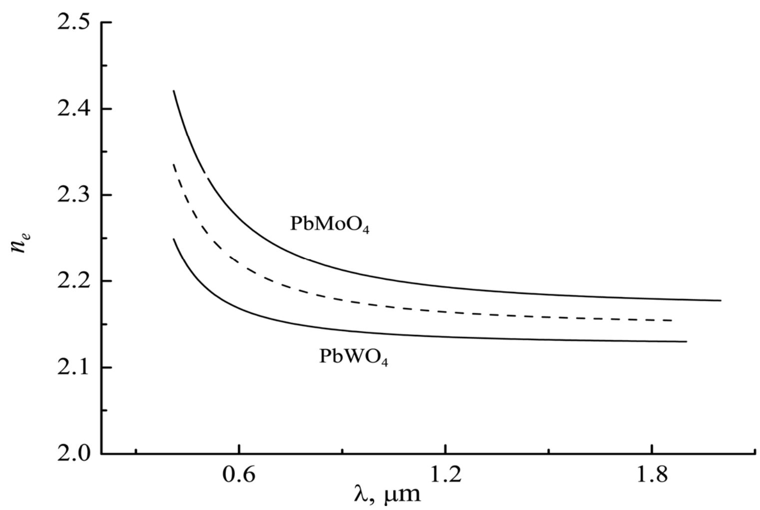

Рис.4. Зависимости показателя преломления n_e от длины волны для кристаллов $PbMoO_4$ [21] и $PbWO_4$ [12], полученные по формулам Селмейера, а также усредненная величина (пунктирная линия).

По теории Джадда–Офельта [22,23] сила линии электро-дипольного перехода между начальным (основным) J и конечным J' состояниями может быть записана в виде

$$S^{ed}_{JJ'} = \sum_{t=2,4,6} \Omega_t \left| < 4f^n J \left\| U^{(t)} \right\| 4f^n J' > \right|^2 \quad (3)$$

где Ω_t – параметры интенсивности, которые характеризуют эффективность взаимодействия иона Nd^{3+} с полем окружения в кристалле. Приравнивая правые части (1) и (2) и подставляя вместо S^{ed} формулу (3), разрешаем полученную систему уравнений относительно неизвестных Ω_t (например, методом наименьших квадратов или квадратного корня) и таким образом определяем значения Ω_t, при которых согласие экспериментальных и теоретических значений сил осцилляторов наилучшее. Численные значения матричных элементов единичного тензорного оператора $U^{(t)}$ ($t = 2,4,6$) взяты для расчетов из работы [24].

Из оптических спектров поглощения с идентифицированными переходами (рис.3) получены экспериментальные значения сил осцилляторов. Их значения представлены в табл.1 вместе с величинами, рассчитанными по теории Джадда–Офельта. Здесь же приведены параметры Джадда–Офельта, полученные в результате проведенного выше анализа, а также величина среднеквадратичного отклонения rms (Δf).

Табл.1. Экспериментальные измеренные $f^{ed}_{\exp}$ и рассчитанные f^{ed}_{cal} значения сил осцилляторов электро-дипольных переходов $^4I_{9/2} \rightarrow J'$ ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$

Переход $^4I_{9/2} \rightarrow J'$	λ_{abs}, мкм	n	$f^{ed}_{\exp}$, $\times 10^{-6}$	f^{ed}_{cal} $\times 10^{-6}$	$\Delta f \times 10^{-6}$
$^4I_{15/2}$	1.68	2.16	0.4643	0.2599	–0.2044
$^4F_{3/2}$	0.90	2.18	3.6841	3.4846	–0.1995
$^4F_{5/2} + {}^2H_{9/2}$	0.81	2.19	10.1598 $- 0.0245^{md}$	9.9911	–0.1442
$^4F_{7/2} + {}^4S_{3/2}$	0.75	2.19	9.0037	9.4026	0.3989
$^4F_{9/2}$	0.69	2.20	0.8491 $- 0.0044^{md}$	0.7852	–0.0595
$^2H_{11/2}$	0.63	2.21	0.1481	0.2193	0.0711
$^4G_{5/2} + {}^2G_{7/2}$	0.58	2.23	51.6100 $- 0.0004^{md}$	52.5476	0.9381
$^2K_{13/2} + {}^4G_{7/2} + {}^4G_{9/2}$	0.52	2.25	9.8966	10.6080	–0.7114
$^2K_{15/2} + {}^2G_{9/2} + {}^2D_{3/2} + {}^4G_{11/2}$	0.47	2.28	2.4526	2.0319	–0.4208
$^2P_{1/2} + {}^2D_{5/2}$	0.43	2.31	0.6905	1.1364	0.4459
$\Omega_2 = 8.91 \times 10^{-20}$ см^2, $\Omega_4 = 4.50 \times 10^{-20}$ см^2, $\Omega_6 = 3.89 \times 10^{-20}$ см^2 rms (Δf) = 0.57×10^{-6}					

md – вклад магнито-дипольного перехода;
rms (Δf) – значение среднеквадратичного отклонения.

Вероятность спонтанных переходов $A_{JJ'}$ между возбужденным состоянием $^4F_{3/2}$ ($J = 3/2$) и конечным состоянием J' излучательного перехода $^4F_{3/2} \rightarrow J'$ иона Nd^{3+} задается формулой

Табл.2. Вероятности $A_{JJ'}$ излучательных переходов ${}^4F_{3/2}\to J'$, коэффициенты ветвления люминесценции $\beta_{JJ'}$, рассчитанные τ_{rad} и измеренные τ_{lum} времена жизни ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$

${}^4F_{3/2}\to J'$	λ_{rad}, мкм	$\beta_{JJ'}$, %	$A_{JJ'}$, $с^{-1}$	τ_{rad}, мкс	τ_{lum}, мкс
${}^4F_{3/2}\to{}^4I_{9/2}$	0.89	46.4	3503		128
${}^4F_{3/2}\to{}^4I_{11/2}$	1.06	43.6	3291	133	127
${}^4F_{3/2}\to{}^4I_{13/2}$	1.33	9.7	734		122
${}^4F_{3/2}\to{}^4I_{15/2}$	1.85	0.3	19		–

$$A_{JJ'}=\left(64\pi^4e^2/3h\bar{\lambda}^3_{rad}(2J+1)\right)n(n^2+2)^2/9\sum_{t=2,4,6}\Omega_t\left|<4f^nJ\left\|U^{(t)}\right\|4f^nJ'>\right|^2 . \quad (4)$$

Определенные по спектрам поглощения параметры интенсивности Ω_t ($\Omega_2 = 8.91\times10^{-20}$ $см^2$, $\Omega_4 = 4.50\times10^{-20}$ $см^2$, $\Omega_6 = 3.89\times10^{-20}$ $см^2$) позволяют вычислить значения $A_{JJ'}$ между любой парой мультиплетов ${}^4F_{3/2}$ и J' (${}^4I_{9/2}$, ${}^4I_{11/2}$, ${}^4I_{13/2}$ и ${}^4I_{15/2}$) иона Nd^{3+} с помощью формулы (4). Матричные элементы $<...\left\|U^{(t)}\right\|...>$ излучательного перехода ${}^4F_{3/2}\to J'$ иона Nd^{3+} взяты из работы [25].

Излучательное время жизни τ_{rad} и коэффициенты ветвления люминесценции $\beta_{JJ'}$ возбужденного состояния J определялись соответственно по формулам

$$(\tau_{rad})^{-1}=\sum_{J'}A_{JJ'}\ ,\ \beta_{JJ'}=A_{JJ'}\Big/\sum_{J'}A_{JJ'}\ . \quad (5)$$

Рассчитанные по формуле (4) значения вероятностей $A_{JJ'}$ излучательных

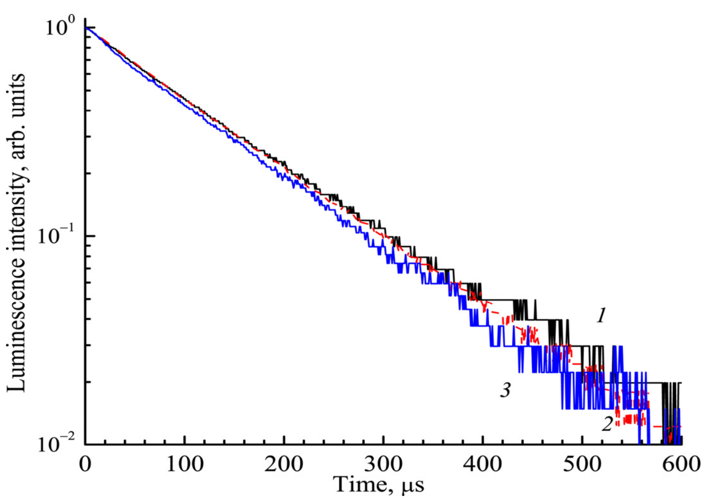

Рис.5. Кривые затухания люминесценции ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ на переходах ${}^4F_{3/2}\to J'$ на длинах волн 0.890 мкм (*1*), 1.060 мкм (*2*) и 1.330 мкм (*3*).

переходов с возбужденного состояния $^4F_{3/2}$ иона Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, приведены в табл.2. В эту же таблицу включены полученные по формуле (7) значения коэффициентов ветвления люминесценции $\beta_{JJ'}$. Здесь также приводятся для сравнения излучательное время жизни τ_{rad} возбужденного уровня и среднее время жизни τ_{lum} на метастабильном уровне $^4F_{3/2}$, экспериментально измеренное при комнатной температуре по затуханию люминесценции на длинах волн 890 нм, 1060 нм и 1330 нм (рис.5).

Сравнение полученных нами данных по измерению времени затухания люминесценции возбужденного уровня ионов Nd^{3+} в кристалле $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ с аналогичными результатами по изоструктурным кристаллам с шеелитоподобной структурой с примесью ионов Nd^{3+} (табл.3) показало, что по порядку величины они одинаковы.

Табл.3. Параметры Джадда–Офельта и рассчитанное излучательное время жизни τ_{rad} с возбужденного уровня $^4F_{3/2}$ ионов Nd^{3+} в некоторых кристаллах с шеелитоподобной структурой

Кристалл, активированный ионами Nd^{3+}	Ω_2, $\times 10^{-20}$ см^2	Ω_4, $\times 10^{-20}$ см^2	Ω_6, $\times 10^{-20}$ см^2	τ_{rad}, мкс	Ссылки
$Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$	8.91	4.51	3.89	133	Эта работа
$PbWO_4$	7.13	3.35	2.69	188	[14]
$PbWO_4$	7.53	3.15	3.06	198	[15]
$PbWO_4$	5.04	2.31	1.52	271	[16]
$PbWO_4$	11.28	1.79	3.85	145	[12]
$SrWO_4$	12.39	2.48	2.80	189	[26]
$SrWO_4$	12.49	5.72	4.39	184	[27]

4. Заключение

Таким образом, спектроскопическое исследование смешанных кристаллов молибдата–вольфрамата свинца $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$, выращенных методом Чохральского, показало, что они допускают активацию ионами Nd^{3+} и имеют высокое оптическое качество. Полученные на основе проведенного анализа по методу Джадда-Офельта спектроскопические характеристики показали перспективность этого кристалла в качестве активной среды лазера ИК диапазона.

Авторы благодарят Г.Р. Бадаляна за проведенный элементный анализ кристаллов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **A.A. Kaminskii.** Crystalline Lasers: Physical Processes and Operating Schemes, Laser Science & Technology Series. CRP Press Inc., 1996.
2. **M.E. Globus, B.V. Grinyov**. Inorganic Scintillation Crystals: New and Traditional Materials. Acta, Kharkov, 2000.
3. **T.T. Basiev, A.A. Sobol, P.G. Zverev, V.V. Osiko, R.C. Powell**. J. Appl. Optics, **38**, 594 (1999).
4. **M. Daturi, G. Busca, M.M. Borel, A. Leclaire, P. Piaggio**. J. Phys. Chem. B, **101**, 4358 (1997).
5. **R. Oeder, A. Scharmann, D. Schwabe, B. Vitt**. J. Crystal Growth, **43**, 537 (1978).
6. **Sh.M. Efendiev, N.G. Darvishov, V.M. Nagiev, N.M. Gasanly, V.T. Gabrielyan, N.S. Nikogosyan.** Phys. Stat. Sol. (b), **110**, K21 (1982).
7. **V.M. Nagiev, Sh.M. Efendiev, V.M. Burlakov.** Phys. Stat. Sol. (b), **125**, 467 (1984).
8. **V.N. Baumer, Yu.T. Dynnik, M.B. Kosmyna, B.P. Nazarenko, V.M. Puzikov, A.N. Shekhovtsov, V.F. Tkachenko.** Optical Materials, **30**, 106 (2007).
9. **M.E. Doroshenko, T.T. Basiev, S.V. Vassiliev, L.I. Ivleva, V.K. Komar, M.B. Kosmyna, H. Jelınkova, J. Sulc.** Optical Materials, **30**, 54 (2007).
10. **Yu.N. Gorobets, M.B. Kosmyna, A.P. Luchechko, B.P. Nazarenko, V.M. Puzikov, A.N. Shekhovtsov, D.Yu. Sugak**. J. Cryst. Growth, **318**, 687 (2011).
11. **W. Li, H. Huang, X. Feng**. Phys. Stat. Sol. (a), **202**, 2531 (2005).
12. **Yu. Chen, Ya. Lin, Z. Luo, Yi. Huang**. J. Opt. Soc. Am. B, **22** (2005).
13. **Y. Huang, H. J. Seo, W. Zhu**. J. Mater. Sci., **42**, 5421 (2007).
14. **A.A. Kaminskii, H.J. Eichler, K. Ueda, N.V. Klassen, B.S. Redkin, L.E. Li, J. Findeisen, D. Jaque, J. Garcıa-Sole, J. Fernandez, R. Balda**. Appl. Optics, **38**, 4533 (1999).
15. **Y. Huang, X. Feng, Z. Xu, G. Zhao, G. Huang, S. Li.** Solid St. Commun., **127**, 1 (2003).
16. **Q.-G. Wang, L.-B. Su, H.-J. Li, W. Xiong, H. Yuan, L.-H. Zheng, X.-D. Xu, F. Wu, H.-L. Tang, D.-P. Jiang, J. Xu**. Chin. Phys. B, **21**, 054217 (2012).
17. **A. Phuruangrat, T. Thongtem, S. Thongtem**. J. Crystal Growth, **311**, 4076 (2009).
18. **W. Xiong, L. Chen, F. Guo , Y. Zhou, L. Su, Y. Yang, H. Yuan**. Optical Materials, **34**, 1246 (2012).
19. **В.П. Мушинский, М.И. Караман, А.П. Макаренко**. ЖПС, **48**, 839 (1988).
20. **W.T. Carnall, P.R. Fields, K.J. Rajnak**. Chem. Phys., **49**, 4412 (1968).
21. **G.A. Coquin, D.A. Pinnow, A.W. Warner**. J. Appl. Phys., **42**, 2162 (1971).
22. **B.R. Judd**. Phys. Rev., **127,** 750 (1962).
23. **G. S. Ofelt**. J. Chem. Phys., **37,** 511 (1962).
24. **W.T. Carnall, P.R. Fields, K.J. Rajnak**. Chem. Phys., **49**, 4424 (1968).
25. **W.F. Krupke**. IEEE J. Quantum Electronics, QE-7, 153 (1971).
26. **G. Jia, C. Tu, A. Brenier, Z. You, J. Li, Z. Zhu, Y. Wang, B. Wu**. Appl. Phys. B, 81, 627 (2005).
27. **F. Cornacchia, A. Toncelli, M. Tonelli, E. Cavalli, E. Bovero, N. Magnani.** J. Phys.: Condens. Matt., **16,** 6867 (2004).

Nd^{3+} ԻՈՆՆԵՐԻ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԱՆՑՈՒՄՆԵՐԻ ԻՆՏԵՆՍԻՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ ԲՅՈՒՐԵՂՆԵՐՈՒՄ

Ն.Ռ. ԱՂԱՄԱԼՅԱՆ, Ռ.Բ. ԿՈՍՏԱՆՅԱՆ, Ռ.Կ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ,
Պ.Հ. ՄՈՒԺԻԿՅԱՆ, Մ.Ն. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

$Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ բյուրեղում Nd^{3+} իոնների հիմնական $^4I_{9/2}$ մակարդակից կլանման սպեկտրների վերլուծության հիման վրա, օգտագործելով Ջադդ–Օֆելտի մեթոդը, որոշվել են բյուրեղի հիմնական սպեկտրադիտական բնութագրերը, այդ թվում՝ միջմուլտիպլետային անցումների հավանականությունները և ճառագայթային կյանքի տևողությունները: Nd^{3+} իոնների համար $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ բյուրեղում ստացվել են Ջադդ–Օֆելտի պարամետրերի հետևյալ արժեքները՝ $\Omega_2 = 8.91 \times 10^{-20}$ սմ^2, $\Omega_4 = 4.50 \times 10^{-20}$ սմ^2, $\Omega_6 = 3.89 \times 10^{-20}$ սմ^2: Կատարված է համեմատություն հաշվարկված ճառագայթային կյանքի տևողությունների և փորձարարական ճանապարհով չափված լյումինեսցենցիայի մարման տևողությունների միջև:

INTENSITIES OF OPTICAL TRANSITIONS OF Nd^{3+} IONS IN $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ CRYSTALS

N.R. AGHAMALYAN, R.B. KOSTANYAN, R.K. HOVSEPYAN,
P.H. MUZHIKYAN, M.N. NERSISYAN

The main spectroscopic characteristics of $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ crystals doped by Nd^{3+} ions, including the probabilities of the intermultiplet transitions and the radiative lifetimes of Nd^{3+} ions in crystal based on the analysis of absorption spectra from $^4I_{9/2}$ ground state by using of the Judd–Ofelt theory are determined. The Judd–Ofelt parameters for Nd^{3+} ions in $Pb(MoO_4)_x(WO_4)_{1-x}$ crystals $\Omega_2 = 8.91 \times 10^{-20}$ cm^2, $\Omega_4 = 4.50 \times 10^{-20}$ cm^2, and $\Omega_6 = 3.89 \times 10^{-20}$ cm^2 are obtained. The comparison of the calculated radiative lifetimes with experimentally measured luminescence decay times is carried out.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.381-387 (2016)

УДК 535.417

ОТОБРАЖЕНИЕ РЕНТГЕНОВСКОГО ФАЗОВОГО КОНТРАСТА В РЕЖИМЕ ОПТИЧЕСКОГО УВЕЛИЧЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТРЕХБЛОЧНОГО ИНТЕРФЕРОМЕТРА ИЗ ДВУХУРОВНЕВЫХ ФРЕНЕЛЕВСКИХ ЗОННЫХ ПЛАСТИН

Л.А. АРУТЮНЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: levhar@ysu.am

(Поступила в редакцию 15 февраля 2016 г.)

Рассмотрена возможность отображения рентгеновского фазового контраста с использованием ранее предложенного трехблочного интерферометра из двухуровневых френелевских зонных пластин. Интерферометр работает в режиме деления амплитуды и не накладывает жестких требований к пространственной и временной когерентности исходного излучения. Использование френелевских зонных пластин в качестве блоков интерферометра позволяет получать оптически увеличенное изображение образца и конденсировать падающее на образец излучение.

1. Введение

Одним из методов отображения фазового контраста жесткого рентгеновского излучения является интерферометрический метод. Первой подобной схемой является схема с использованием трехблочного интерферометра с лауэвской геометрией дифракции (ЛЛЛ-интерферометр) [1,2]. Исследуемый фазовый объект располагается на пути одного из интерферирующих пучков. В результате фаза этого пучка модулируется согласно неоднородностям исследуемого образца, что приводит к соответствующему перераспределению интенсивности интерференционной картины [3]. Восстановление фазы из зарегистрированной интерференционный картины осуществляется специальными алгоритмами – «метод преобразования Фурье» [4] и «метод сканирования полос» [5]. Предложены также модификации этой схемы с целью увеличения пространства для размещения тестируемого образца [6] и повышения резкости изображения [7]. ЛЛЛ-интерферометр работает в режиме деления амплитуды с равными длинами путей в обоях каналах распространения. Благодаря этому он не предъявляет высокие требования к пространственной и временной когерентности исходного излучения. Отметим, что ЛЛЛ-интерферометр был экспериментально реализован еще в 60-х годах прошлого столетия с использованием тогдашних лабораторных источников рентгеновского излучения.

Развитие микро- и нанотехнологий изготовления френелевских зонных пластин (ФЗП), а также появление синхротронных источников рентгеновского излучения третьего поколения привели к использованию ФЗП в интерферометрах жесткого рентгеновского излучения. Применение таких интерферометров в задачах отображения фазового контраста позволило получить оптически-увеличенное изображение образца. В работе [8] с этой целью используются две ФЗП, расположенные на общей подложке, а в [9,10] – удаленные друг от друга вдоль оптической оси. Указанные интерферометры работают в режиме деления волнового фронта и накладывают жесткие требования к пространственной и временной когерентности исходного излучения. Эти требования, удовлетворяются с использованием современных синхротронных источниках рентгеновского излучения.

Рентгеновский интерферометр из трех ФЗП, работающий в режиме деления амплитуды и не предъявляющий столь жесткие требования к когерентности исходного излучения был ранее представлен в [11]. В настоящей работе исследуется возможность использования этого интерферометра для отображения фазового контраста в режиме оптического увеличения. Рассматриваемая схема является модификацией ранее предложенной аналогичной схемы [12], использующей трудоемкие в изготовлении многоуровневые ФЗП. В данной же схеме зонные пластины не только двухуровневые, но и допускается уменьшение глубины профиля зонной структуры, хотя при этом существенно понижается эффективность фокусировки.

2. Трехблочный интерферометр

Используемый в настоящей работе интерферометр состоит из трех двухуровневых ФЗП с общей главной оптической осью и удаленных друг от друга на двойное фокусное расстояние (рис.1). Исходная плоская волна падает на первую ФЗП параллельно оптической оси. Благодаря наличию разных порядков дифрак-

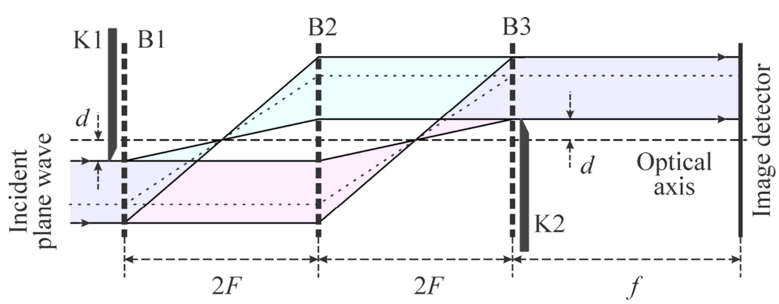

Рис.1. Принципиальная схема и ход лучей интерферометра: B1, B2, B3 – блоки интерферометра, K1, K2 – ножи. Пунктиром показаны траектории лучей в двух каналах распространения, сформированные от одного луча исходной волны.

ции на ФЗП в интерферометре образуются разные каналы распространения рентгеновских лучей. Как видно из рис.1, первый блок интерферометра действует как делитель, разделяя исходную волну на сходящий (первый порядок дифракции) и параллельный (нулевой порядок дифракции) пучки. Второй блок (зеркало) преобразует сходящийся после первого блока и расходящийся после фокусировки пучок в параллельный, а параллельный – в сходящийся. В обоих случаях используется первый порядок дифракции. Наконец, третий блок (анализатор) преобразует расходящийся пучок в параллельный. Интерференционная картина между двумя параллельными пучками регистрируется за третьим блоком на расстоянии f. Подавление влияния других каналов распространения на интерференционную картину обеспечивается двумя ножами, расположенными на первом и третьем блоках интерферометра. В приближении геометрической оптики, посредством построения хода лучей всех каналов распространения* можно показать, что «нежелательные» каналы распространения не пересекаются с регистрируемой интерференционной картиной при достаточном удалении детектора от третьего бока интерферометра:

$$f > \min\left(5/3, R/d - 1\right) F \,, \tag{1}$$

где F – фокусное расстояние, R – радиус ФЗП и d – расстояние краев ножей от главной оптической оси. Этими же ножами обеспечивается пространственное разделение интерферирующих пучков внутри интерферометра, что важно при отображении фазового контраста.

Таким образом, интерферометр работает в режиме деления амплитуды и с равными длинами траекторий в обоих каналах распространения.

В работе [11] также рассмотрены продольно и поперечно дефокусированные разновидности этого интерферометра, когда, в частности, третий блок интерферометра смещается вдоль или поперек главной оптической оси.

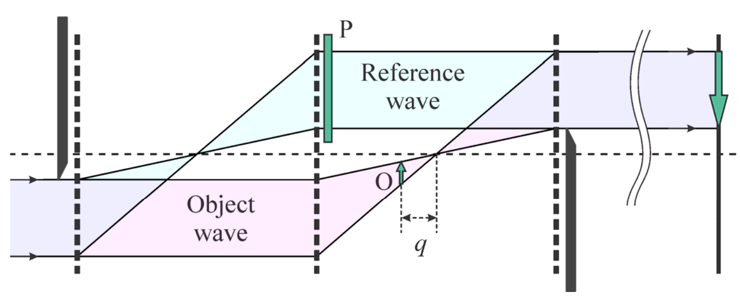

Рис.2. Схема устройства отображения фазового контраста: O – исследуемый фазовый объект, I – изображение фазового объекта на детекторе, P – фазовращатель.

* Каналы распространения, образованные дифракцией на ФЗП в порядках ±3 и выше, не учитываются.

3. Отображение фазового контраста

Для отображения фазового контраста исследуемый фазовый объект (объект из легких элементов, в частности, мягкие биологические ткани) располагается во втором межблочном пространстве на пути объектной волны слева от точки его фокусировки на расстояние q, а фазовращатель – непосредственно после второго ФЗП на пути опорной волны (рис.2). Расстояния объекта от точки фокусировки (q) и детектора от третьей ФЗП (f) связаны законом формирования изображения в тонкой линзе (роль линзы играет третья ФЗП):

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f} + \frac{1}{F+q}, \tag{2}$$

откуда

$$q = F/G, \tag{3}$$

$$f = F\left(G+1\right), \tag{4}$$

где G – коэффициент оптического увеличения изображения.

Пространственное распределение интенсивности на детекторе определяется интерференцией объектной и опорный волн и представляется выражением

$$I(\mathbf{r}) \simeq \left(\sqrt{I_2} - \sqrt{I_2}\right)^2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\left(1 + \cos\left(\varphi(\mathbf{r'}) - \varphi_s\right)\right). \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r'}$ – радиус-векторы на детекторе и объектной плоскости, соответственно, с началами на точках пересечения этих плоскостей с главной оптической осью (они связаны соотношением $\mathbf{r'} = -G^{-1}\mathbf{r}$), I_1 и I_2 – интенсивности опорной и объектной волн, $\varphi(\mathbf{r'})$ – фазовый сдвиг объектной волны в точке $\mathbf{r'}$ на

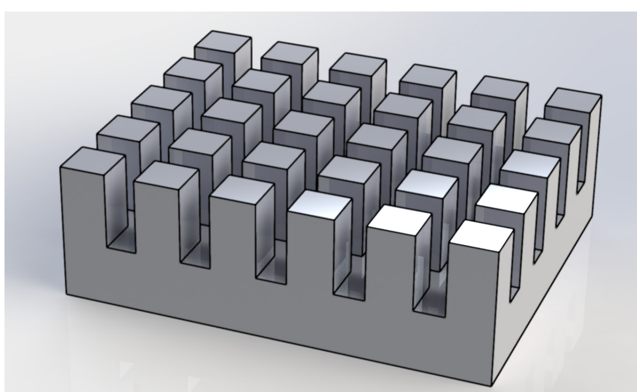

Рис.3. Структура тестируемого фазового объекта в виде кремниевой пластины с образующими сетку травленными канавками. Период сетки – 1.72 мкм, ширина канавок – 0.69 мкм. Глубина канавок составляет 4.74 мкм, что приводит к скачку фазового смещения в 0.3π рад при длине волны рентгеновского излучения λ = 0.1 нм.

объектной плоскости, введенный исследуемым объектом, а φ_s – фазовый сдвиг фазовращателя. В частности, если выбрать $\varphi_s = -\pi$, для (5) получим

$$I(\mathbf{r}) = a + b\sin^2\left(\varphi(\mathbf{r'})/2\right), \tag{6}$$

что представляет взаимно-однозначное отображение $\varphi(\mathbf{r'}) \to I(\mathbf{r'})$ для объектов с малым фазовым смещением $-\pi < \varphi(\mathbf{r'}) \le 0$.

Проведено численное моделирование регистрируемой интерференционной картины. В расчетах использован метод Фурье-преобразования для описания дифракции в вакууме [13], а объекты на пути рентгеновского пучка считаются плоскими и описываются соответствующими комплексными коэффициентами пропускания, представленными как функции от поперечных к оптической оси координат [14,15]. В качестве тестируемого фазового объекта рассмотрена пластина из кремния с травленными канавками, образующими сетку (рис.3). Фазовый сдвиг фазовращателя выбран $\varphi_s = \varphi_0 - \pi$, где φ_0 – фазовый сдвиг кремниевой пластины без канавок (это соответствует изображению тестируемого объекта в виде светлых канавок на темном фоне). Численно моделированная интерференционная картина приведена на рис.4. На рисунке видны искажения в виде полуколец и горизонтальных полос, скорее всего вызванных дифракцией рентгеновских пучков на краях ФЗП и ножей. При оценке качества приведенного изображения следует учитывать малую глубину рельефа тестируемого объекта

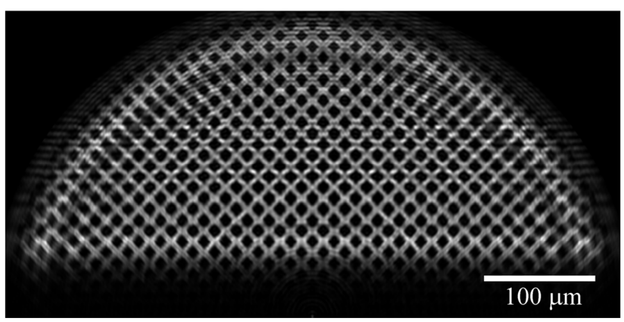

Рис.4. Численно моделированное распределение интенсивности на детекторе. При моделировании использованы следующие значения основных параметров: длина волны рентгеновского излучения λ = 0.1 нм, фокусное расстояние и количество зон кремниевых ФЗП – 1 м и 760, соответственно, (при этом радиус ФЗП составляет R = 275.7 мкм, а ширина последней зоны – 0.181 мкм), глубина травления френелевских зон – 6.32 мкм, чему соответствует фазовое смещение 0.4π рад и эффективность фокусировки 13.8% (без учета поглощения на подложке ФЗП), коэффициент оптического увеличения изображения – 8 (при этом q = 12.5 см, а f = 9 м), расстояние краев ножей от оптической оси – 43.1 мкм и 8.6 мкм для первого и второго ножей, соответственно.

(вариация фазового смещения в образце составляет 0.3π рад) и малую эффективность фокусировки (13.8%) использованных в расчетах ФЗП. Первое приводит к снижению интенсивности светлых областей интерференционной картины, а второе – к увеличению доли недифрагированного на ФЗП излучения.

4. Заключение

Методом численного моделирования исследована целесообразность использования рентгеновского трехблочного интерферометра из ФЗП для отображения фазового контраста. В предложенном интерферометре сочетается низкое требование к когерентности исходного излучения (интерферометр работает в режиме деления амплитуды с равными длинами путей в обоях каналах распространения) с оптическим увеличением изображения. Другой особенностью рассмотренной схемы является пространственное сужение объектной волны до падения на тестируемый объект. Как видно из рис.2, поперечные размеры пучка сужаются в $F/q = G$ раз, что приводит к увеличению интенсивности в G^2 раз (в рассмотренном нами случае в 64 раз). Вышеуказанные особенности дают основание надеяться, что предложенную схему отображения фазового контраста можно использовать и для лабораторных источников рентгеновского излучения, отличающихся от современных источников синхротронного излучения малой мощностью и низкой когерентностью излучения.

В качестве недостатков отметим наличие шумов в изображении, вызванных дифракцией на краях ФЗП и ножей (особенно для объектов с малой вариацией фазового смещения). Их общий вклад в изображение уменьшается с увеличением радиусов ФЗП и соответствующим уменьшением ширин крайних зон. Автор надеется, что использование метода сканирования полос при отображении фазового контраста приведет к частичному подавлению вышеуказанных дифракционных шумов и повышению качества изображения.

Автор благодарен В.С. Арутюняну за обсуждение работы и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. **U. Bonse, M. Hart.** Appl. Phys. Lett., **6**, 155 (1965).
2. **U. Bonse, M. Hart.** Z. Physik., **188**, 154 (1965).
3. **A. Momose.** Nucl. Instr. Meth., **A352**, 622 (1995).
4. **M. Takeda, H. Ina, S. Kobayashi.** J. Opt. Soc. Am., **72**, 156 (1982).
5. **J.H. Bruning, D.R. Herriott, J.E. Gallagher, D.P. Rosenfeld, A.D. White, D.J. Brangaccio.** Appl. Opt., **13**, 2693 (1974).
6. **A. Yoneyama, A. Momose, I. Koyama, E. Seya, T. Takeda, Y. Itai, K. Hirano, K. Hyodo.** J. Sync. Rad., **9**, 277 (2002).
7. **K. Hirano, A. Momose.** Jpn. J. Appl. Phys., **38**, L1556 (1999).
8. **T. Koyama, A. Saikubo, K. Shimose, K. Hayashi, A. Nakagawa et al.** IPAP Conf. Ser.,

Proc. 8th Int. Conf. X-ray Microscopy, **7**, 389 (2006).
9. **T. Wilhein, B. Kaulich, J. Susini.** Opt. Commun., **193**, 19 (2001).
10. **T. Koyama, T. Tsuji, K. Yoshida, H. Takano, Y. Tsusaka, Y. Kagoshima.** Jpn. J. Appl. Phys., **45**, L1159 (2006).
11. **Л.А. Арутюнян.** Изв. НАН Армении, Физика, **50,** 390 (2015).
12. **Л.А. Арутюнян, К.Г. Труни, Г.М. Оганесян.** Известия НАН Армении, Физика, **46,** 368 (2011).
13. **J.W. Goodman.** Introduction to Fourier Optics. New York, McGraw-Hill, 1996.
14. **V.G. Kohn, I.I. Snigireva, A. Snigirev.** Crystallography Reports, **51** S4 (2006).
15. **В.Г. Кон, М.А. Орлов.** Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, **11,** 76 (2010).

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ՓՈՒԼԱՅԻՆ ՑԱՅՏՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՕՊՏԻԿԱԿԱՆ ԽՈՇՈՐԱՑՄԱՄԲ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ ԵՐԿՄԱԿԱՐԴԱԿ ՖՐԵՆԵԼՅԱՆ ԳՈՏԻԱԿԱՆ ԹԻԹԵՂՆԵՐԻՑ ԲԱՂԿԱՑԱԾ ԵՌԱԲԼՈԿ ԻՆՏԵՐՖԵՐԱՉԱՓՈՎ

Լ.Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Քննարկված է ռենտգենյան փուլային ցայտունության արտապատկերման հնարավորությունը արդեն առաջարկված երկմակարդակ ֆրենելյան գոտիական թիթեղներից բաղկացած եռաբլոկ ինտերֆերաչափով: Ինտերֆերաչափը աշխատում է լայնույթի բաժանման եղանակով և չի ներկայացնում խիստ պահանջներ օգտագործվող ճառագայթման տարածական և ժամանակային կոհերենտության նկատմամբ: Ֆրենելյան գոտիական թիթեղների՝ որպես ինտերֆերաչափի բլոկներ օգտագործումը հնարավոր է դարձնում նմուշի վրա ընկնող փնջի նախնական խտացումը և պատկերի օպտիկական խոշորացումը:

X-RAY PHASE CONTRAST IMAGING WITH OPTICAL MAGNIFICATION USING THREE-BLOCK INTERFEROMETER WITH BI-LEVEL FRESNEL ZONE PLATES

L.A. HAROUTUNYAN

The possibility of X-ray phase contrast imaging using already suggested three-block interferometer consisting of bi-level Fresnel zone plates was considered. The interferometer operates in the amplitude-division mode and does not impose strong requirements to spatial and temporal coherencies of initial radiation. The use of the Fresnel zone plates as the interferometer blocks allows to obtain an optically magnified image of object and to condense the radiation incident on the tested object.

Известия НАН Армении, Физика, т.51, №3, с.388-401 (2016)

УДК 548.732

РЕНТГЕНОВСКАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУРЬЕ-ГОЛОГРАФИЯ

М.К. БАЛЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: mbalyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 11 января 2016 г.)

Предложена и теоретически исследована рентгеновская интерферометрическая Фурье-голография. Исследованы рентгеновские интерферометрические полосы Юнга и восстановление изображения объекта методом Фурье-преобразования. Показано, что на выходной поверхности кристалла анализатора (третья пластина интерферометра) интерференционная картина двух щелей представляет из себя рентгеновские интерферометрические полосы Юнга. Найдено выражение для периода рентгеновских интерферометрических полос Юнга. Дальнейшее восстановление изображения щели как объекта осуществляется методом Фурье-преобразования распределения интенсивности на голограмме. Представлены три способа восстановления функции комплексного пропускания объекта: аналитический – приближенный метод, метод итераций и шаговый метод. В качестве примера рассмотрены запись рентгеновской интерферометрической Фурье-голограммы и восстановление функции комплексного амплитудного пропускания кругового цилиндра из бериллия.

1. Введение

Существующие основные методы в оптической голографии, а именно: голография Френеля – методы осевой голографии (Габора) и внеосевой голографии, голография Фраунгофера, голография Фурье, интерферометрическая голография [1–3], можно развивать также в области рентгеновских частот. Получение рентгеновских голограмм может быть основано на рентгенодифракционной (брэгговской) оптике [4]. В работе [5] был предложен метод рентгенодифракционной интерферометрической голографии, который был развит в работах [6,7]. Предполагается, что объект расположен в одном плече интерферометра, а прошедшая через другое плечо волна служит опорной. В [8] был предложен метод восстановления точечного источника рентгеновских волн. Используя синхротронные источники рентгеновских волн, развиты также методы рентгеновской голографии, аналогичные методам оптической голографии, без привлечения брэгговской дифракционной оптики: метод осевой (Габора) голографии [9–12] и метод Фурье-голографии [12–15].

В работе [16] отмечено, что динамическая двухволновая лауэвская дифракция на двух щелях может стать основой для рентгендифракционной Фурье-голографии. В методе Момоза получения фазового контраста некоторого объекта с помощью трехблочного интерферометра для восстановления изображения используется метод Фурье-преобразования [17]. В [18–20] рассматривался метод однокристальной фраунгоферовской динамической дифракционной голографии, а в [21] теоретически проанализирован метод однокристальной рентгеновской динамической дифракционной Фурье-голографии. Здесь используется симметричная Лауэ-дифракция рентгеновского пучка в кристалле, перед которым в одной из двух щелей находится исследуемый объект.

Следует особо отметить, что использование динамической дифракции в рентгеновской голографии ухудшает разрешающую способность по сравнению с методами без использования такой дифракции. Теоретический предел разрешающей способности рентгеновской голографии с использованием динамической дифракции порядка нескольких или нескольких десятков микрон, тогда как без привлечения динамической дифракции теоретический предел разрешения – длина волны используемого излучения. Голография с использованием динамической дифракции обладает тем преимуществом, что можно без труда получить голограммы сравнительно больших размеров – порядка нескольких миллиметров и более [8]. Это связано с тем, что относительное отклонение двух лучей объектом на несколько угловых секунд приводит к относительному отклонению соответствующих лучей в кристалле на углы порядка десятков градусов. Вместе с тем, в случае без использования динамической дифракции пучку необходимо распространяться на достаточно большие расстояния для получения голограммы размером порядка нескольких сотен микрон. Таким образом, в случае использования динамической дифракции сравнительно легко можно достичь теоретического предела разрешения, тогда как без использования динамической дифракции из-за малых размеров голограмм возникают трудности достижения теоретического предела разрешения. Использование обоих методов будет полезным для исследования объектов с соответствующей степенью неоднородности к разрешающей способности метода.

В работе [22] теоретически исследована рентгеновская интерферометрическая голография Френеля. В настоящей работе предложен и проведен теоретический анализ другого рентгеновского интерферометрического метода – рентгеновской интерферометрической Фурье-голографии. Следует отметить, что здесь, в отличие от работ [5–7], рассматривается когерентная запись голограммы. Это связано с тем, что появились мощные синхротронные источники рентгеновского излучения, которые дают возможность с помощью последовательных симметричных и асимметричных отражений получить достаточно интенсивные пучки с пространственной и временной когерентностью. Тем более возможна когерентная запись с помощью рентгеновских лазеров на свободных электронах. Отметим также, что использование лабораторных источников рентгеновского излучения не может обеспечить достаточно интенсивный пучок с требуемой пространственной и временной когерентностью.

2. Запись рентгеновской интерферометрической Фурье-голограммы

Пусть на трехблочный рентгеновский интерферометр под точным углом Брэгга для некоторой длины волны падает монохроматическая плоская рентгеновская волна с единичной амплитудой (рис.1). В одном плече интерферометра,

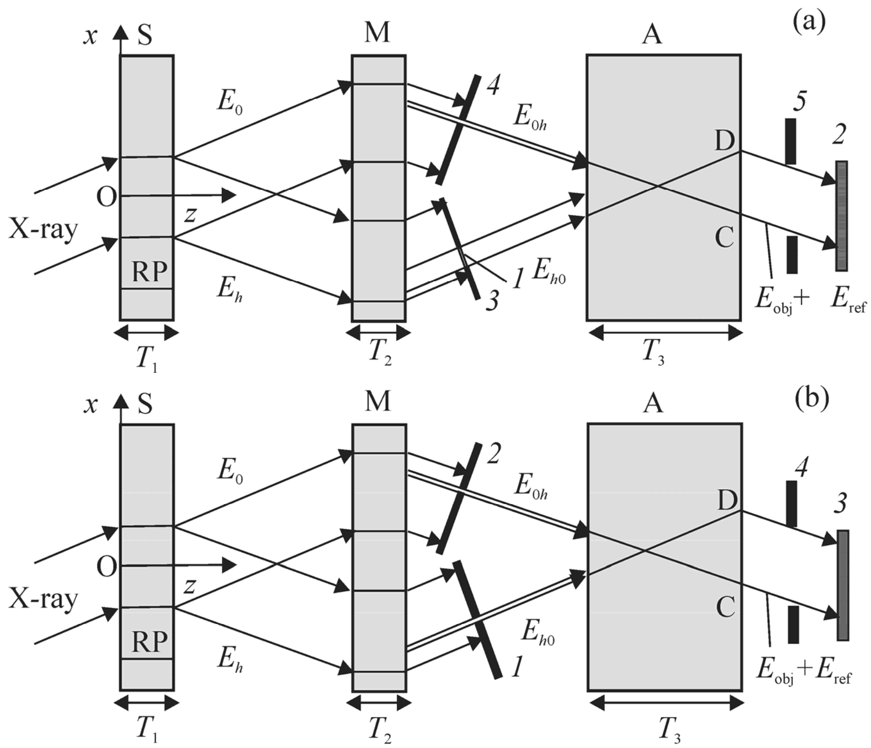

Рис.1. (a) Схема записи рентгеновской интерферометрической Фурье-голограммы. S, M, A – расщепитель, зеркальный блок и анализатор, соответственно, RP – отражающие плоскости, O*xz* – координатная система в плоскости дифракции, CD – область записи голограммы на выходе анализатора, C и D – точки пересечения характеристик (линии, параллельные направлениям распространения проходящей и дифрагированной волн), проходящие через края объектной и опорной волн, с выходной поверхностью кристалла, *1* – объект, *2* – голограмма, *3*, *4*, *5* – щели, E_0, E_h, E_{0h}, E_{h0}, $E_{obj} + E_{ref}$ – амплитуды пучков в интерферометре. (b) Схема рентгеновского интерферометрического опыта Юнга, где вместо объекта используется узкая щель, *1*, *2* – узкие щели, *3* – голограмма и *4* – щель.

в дважды дифрагированном пучке после зеркального блока (вторая пластина интерферометра) установлен исследуемый объект с комплексным коэффициентом амплитудного пропускания $t(x,y)$. Прошедшая через объект волна (объектная волна) в анализаторе (третья пластина интерферометра) интерферирует с волной, проходящей через другое плечо интерферометра (опорная волна). Объектная волна ограничена щелью с размером объекта. Опорная волна формируется с помощью узкой щели, установленной после зеркального блока.

Амплитуду E_{hol} вышедшей из анализатора волны в направлении дифракции (рис.1а) можно представить в виде

$$E_{\mathrm{hol}} = E_{\mathrm{ref}} + E_{\mathrm{obj}}\,, \tag{1}$$

где E_{ref} и E_{obj} – амплитуды опорной и объектной волны, соответственно. Согласно (1), соответствующая интенсивность на выходной поверхности анализатора будет

$$I_{\mathrm{hol}} = \left|E_{\mathrm{ref}}\right|^2 + E_{\mathrm{ref}}E^*_{\mathrm{obj}} + E^*_{\mathrm{ref}}E_{\mathrm{obj}} + \left|E_{\mathrm{obj}}\right|^2. \tag{2}$$

Мы рассматриваем случай

$$T_3/\Lambda_r >> 1,\ \ \mu T_3 >> 1, \tag{3}$$

где T_3 – толщина анализатора, Λ_r – экстинкционная длина и μ – линейный коэффициент поглощения кристалла. В этом случае существенна только слабопоглощающаяся мода σ-поляризации. Первые две пластины интерферометра можно выбрать с меньшей толщиной $T_1 = T_2 < T_3$, но так, чтобы выполнялось условие $\mu T_{1,2} > 1$, так что в конечном итоге во всех вычислениях можно оставить только слабопоглащаемую моду σ-поляризации. Согласно динамической теории дифракции рентгеновских лучей [23, 24], амплитуды волн, вышедших из анализатора, можно представить в виде свертки вдоль входной поверхности кристалла функции точечного источника и амплитуд, падающих на анализатор волн

$$E_{\mathrm{obj}} = \exp(2i\sigma_0 T_1)\int\limits_{x_{\mathrm{obj1}}}^{x_{\mathrm{obj2}}} G_{h0}(x-x',T_3)t(x',y)dx'/\,4\,, \tag{4}$$

$$E_{\mathrm{ref}} = -\exp(2i\sigma_0 T_1)\int\limits_{x_{\mathrm{ref1}}}^{x_{\mathrm{ref2}}} G_{hh}(x-x',T_3)dx'/\,4\,, \tag{5}$$

где $x_{\mathrm{ref1,2;obj1,2}}$ – координаты на входной поверхности анализатора левых и правых концов опорного и объектного пучков, соответственно, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число и λ – длина волны рентгеновских лучей, $\chi_0 = \chi_{0r} + i\chi_{0i}$ – нулевая Фурье-компонента поляризуемости кристалла, $\Lambda = \lambda\cos\theta/(\chi_h\chi_{-h})^{1/2}$ ($\Lambda_r = \mathrm{Re}\Lambda$ – экстинкционная длина), θ – угол Брэгга, $\chi_h = \chi_{-h} = \chi_{hr} + i\chi_{hi}$ – Фурье-коэффициенты поляризуемости кристалла для отражений **h** и –**h**, соответственно (не теряя общность, рассматривается случай центросимметричного кристалла и $\chi_h = \chi_{-h}$) и $\sigma_0 =$

$k\chi_0/(2\cos\theta) + \pi/\Lambda$. Вид функций Грина G_{h0} и G_{hh} приводится в [23–25]. Используемые здесь функции Грина получаются из них же [25] умножением на $\exp[ik\chi_0 T_3/(2\cos\theta)]$. В функции G_{hh} содержится как слагаемая дельта функция Дирака, но в данной задаче эту функцию можно не принимать во внимание, так как мы рассматриваем толстый поглощающий кристалл. Кроме того, щель, через которую проходит опорная волна после зеркального блока, считается узкой, так что вместо (5) приближенно можно написать

$$E_{\mathrm{ref}} = -\exp(2i\sigma_0 T_1)(2a_{\mathrm{ref}})G_{hh}(x - x_{\mathrm{ref}}, T_3) / 4 . \qquad (6)$$

Здесь x_{ref} – координата центра опорной волны на входной поверхности анализатора, $2a_{\mathrm{ref}}$ – размер проекции щели в плоскости дифракции вдоль входной поверхности третьей пластины интерферометра. Таким образом, интерференционное поле в области записи голограммы CD (рис.1) формируется суммой амплитуды точечного источника как опорной волны и амплитуды объектной волны.

3. Рентгеновские интерферометрические полосы Юнга

Одним из простейших является случай, когда в качестве объекта берется узкая щель того же размера, что и опорная щель, с координатой центра щели x_{obj} на входной поверхности анализатора. Тогда приближенно из (4) имеем

$$E_{\mathrm{obj}} = \exp(2i\sigma_0 T_1)(2a_{\mathrm{ref}})G_{h0}(x - x_{\mathrm{obj}}, T_3) / 4 . \qquad (7)$$

Согласно формулам (6) и (7), интерференционное поле есть сумма полей двух точечных источников, поэтому такая схема аналогична опыту Юнга с двумя щелями, и на выходе анализатора формируются рентгеновские интерферометрические интерференционные полосы Юнга. Такая задача с одним кристаллом рассматривалась в работе [16]. Для амплитуды суммарного поля из формул (1), (5) и (6) получим

$$E_{\mathrm{hol}} = \exp(2i\sigma_0 T_1)(2a_{\mathrm{ref}})(G_{h0}(x - x_{\mathrm{obj}}, T_3) - G_{hh}(x - x_{\mathrm{ref}}, T_3)) / 4 . \qquad (8)$$

Здесь предполагается, что $x_{\mathrm{obj}} = -x_{\mathrm{ref}}$ и $x_{\mathrm{ref}} > 0$. Так как мы рассматриваем случай толстого поглощающего кристалла, то для функций G_{h0} и G_{hh} можно применить асимптотическое представление [16, 26]. В итоге из (4) получим

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{obj,ref}} &= Q\exp[-i\pi(x \pm x_{\mathrm{ref}})^2 / (2\Lambda_r T_3 \tan^2\theta)] \\ &\times \exp[-\pi(x \pm x_{\mathrm{ref}})^2 \eta / (2\Lambda_r T_3 \tan^2\theta)], \end{aligned} \qquad (9)$$

где $Q = -\exp(i\sigma_0 T + i\pi/4)(2a_{\mathrm{obj}})(8\Lambda_r T_3 \tan^2\theta)^{-1/2}/4$, $\eta = \chi_{hi}/|\chi_{hr}|$, верхний знак соответствует объектной волне, а нижний – опорной волне, $T = 2T_1 + T_3$ – общая толщина всех трех пластин интерферометра. Таким образом, для интенсивности имеем

$$I_{\text{hol}} = |Q|^2 \{\exp[-\pi(x + x_{\text{ref}})^2 \eta / (Dx_{\text{ref}})] + \exp[-\pi(x - x_{\text{ref}})^2 \eta / (Dx_{\text{ref}})] + 2\exp[-\pi(x^2 + x_{\text{ref}}^2)\eta / (Dx_{\text{ref}})]\cos(2\pi x / D)\}, \tag{10}$$

где $D = T_3\Lambda_r\tan^2\theta/x_{\text{ref}}$. Из (10) заключаем, что интенсивность представляет собой равноотстоящие максимумы с медленно уменьшающимися к краям из-за поглощения амплитудами. Эти максимумы представляют собой рентгеновские интерферометрические полосы Юнга. Период максимумов (полос Юнга) равен D.

Обсудим требования к пространственной (поперечной, связанной с размером источника в плоскости дифракции) и временной (продольной, связанной с полихроматичностью пучка) когерентностям падающей на интерферометр рентгеновской волны. Соответствующие оценки можно получить методом, описанным в [27], с заменой толщины одного кристалла суммарной толщиной всех трех пластин интерферометра. В итоге приходим к следующим условиям, при выполнении которых размер источника в плоскости дифракции и немонохроматичность не будут влиять на профиль распределения интенсивности голограммы: для пространственной когерентности $2a_s(2T_1 + T_3) < \lambda L_s/(2\sin\theta)$, а для временной когерентности $(2T_1 + T_3)\sin 2\theta\tan\theta < l_c\cos\theta$. Здесь $2a_s$ – размер источника в плоскости дифракции, перпендикулярной к направлению распространения падающего на первую пластину интерферометра (расщепитель) пучка, L_s – среднее расстояние источника от кристалла, $l_c = \lambda^2/(2\Delta\lambda)$ – продольная длина когерентности и $2\Delta\lambda$ – средний размер области длин волн рентгеновского пучка около средней длины волны λ.

4. Восстановление изображения щели методом Фурье-преобразования

Восстановление изображения щели можно осуществить, освещая голограмму светом видимого диапазона. Однако представляют интерес, особенно для фазовых объектов [9], численные методы восстановления изображения. Здесь мы обсудим именно численный метод восстановления изображения – метод Фурье-преобразования. Умножим (10) на $\exp(2\pi ipx/D)$ и проинтегрируем по x

$$E_{\text{rec}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(2\pi ipx / D) I_h(x) dx\,, \tag{11}$$

где интегрирование производится по плоскости голограммы. Пренебрегая конечными размерами голограммы, пределы интегрирования берутся бесконечными. Согласно формулам (10) и (11), получим следующее распределение:

$$E_{\text{rec}} = |Q|^2 \sqrt{Dx_{\text{ref}} / \eta}\{2\exp[-\pi p^2 x_{\text{ref}} / (D\eta)]\cos 2\pi x_{\text{ref}}\, p / D + \exp(-\pi x_{\text{ref}}\eta / D)\exp[-\pi(p+1)^2 x_{\text{ref}} / (D\eta)] + \exp(-\pi x_{\text{ref}}\eta / D)\exp[-\pi(p-1)^2 x_{\text{ref}} / (D\eta)]\}. \tag{12}$$

Первый член в формуле (12) сконцентрирован около значения $p = 0$ с полушириной максимума

$$\Delta_0 = 2\sqrt{D\eta / (\pi x_{\text{ref}})} \,. \tag{13}$$

Второй и третий члены в формуле (12) сконцентрированы около точек $p = \pm 1$ и соответствуют двум восстановленным изображениям щели.

На практике, следовательно, нужно измерить значения интенсивности (2) в зависимости от x, затем, умножая на соответствующие значения $\exp(2\pi i p x/D)$, численно вычислить интеграл (11) с конечными пределами интегрирования, соответствующими конечным размерам голограммы. В результате численного интегрирования получатся три пика по p ($p = 0, \pm 1$). Значениям $p = \pm 1$ соответствуют два изображения щели.

5. Пример восстановления изображения щели

Рассмотрим пример рентгеновских интерферометрических полос Юнга и восстановление изображения щели с помощью метода Фурье-преобразования. Ширины обеих щелей в плоскости дифракции вдоль оси Ox равны $2a_{\text{ref}} = 10$ мкм, $x_{\text{ref}} = 75$ мкм и $x_{\text{obj}} = -x_{\text{ref}}$. Рассматривается случай Si(220) отражения, $\lambda = 0.71$ Å

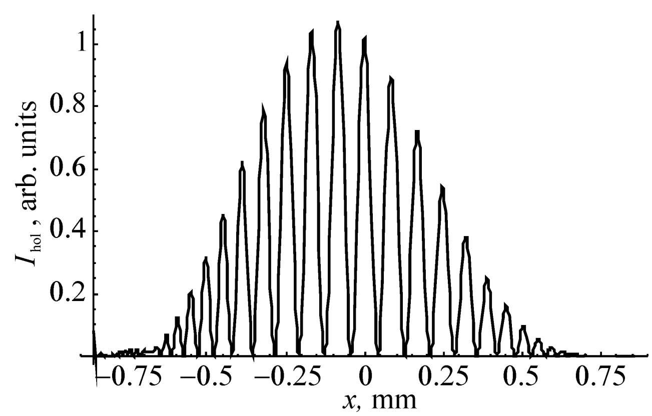

Рис.2. Численный расчет распределения интенсивности рентгеновских интерферометрических полос Юнга.

(17.46 кэВ), $T_1 = T_2 = 1$ мм и $T_3 = 5$ мм. Для периода D, согласно (10), в данном примере получаем значение 86 мкм.

На рис.2 показано полученное на основе гриновского формализма динамической теории дифракции распределение интенсивности (2) для полос Юнга. Для амплитуды опорной волны использовано выражение (3), а для амплитуды объектной волны – выражение (4). Как видно из рисунка, центр картины смещен относительно точки 0, что объясняется некоторой асимметрией функции G_{hh}.

На рис.3 представлено распределение интенсивности (9) восстановленного поля. Численные расчеты (рис.2 и 3), выполнены с учетом конечных размеров щелей и голограммы. Как видно из результатов численных расчетов, изображения щелей полностью восстанавливаются. Уширение изображений объясняется тем, что учтены конечные размеры щелей и голограммы. Результаты численных расчетов совпадают с теоретическими предсказаниями. Необходимые значения Фурье-коэффициентов поляризуемости взяты из работы [24].

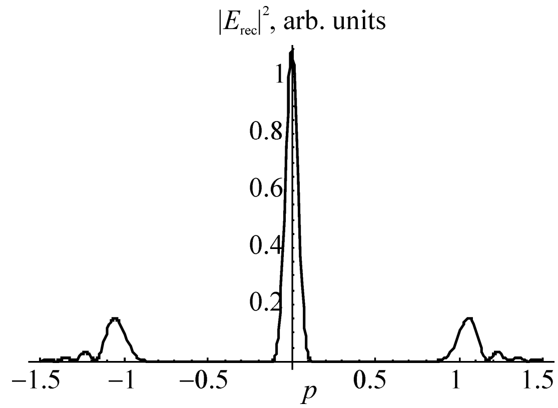

Рис.3. Численный расчет распределения интенсивности восстановленного с помощью метода Фурье изображения щели.

6. Восстановление изображения объекта методом Фурье-преобразования

Рассмотрим схему записи рентгеновской интерферометрической Фурье-голограммы, представленную на рис.1а. Из (4) имеем приближенно

$$E_{\text{obj}} = Q\exp[-i\pi(x-x_{\text{obj}})^2/(2D)]\exp[-\pi(x-x_{\text{obj}})^2\eta/(2D)]$$
$$\times\int_{-a_{\text{obj}}}^{a_{\text{obj}}}\exp\left[i\pi(x-x_{\text{obj}})x'/D\right]t(x'+x_{\text{obj}},y)dx'. \tag{14}$$

Объект выбран такого размера, что под интегралом в (14) использовано приближение $\exp[-i\pi x'^2/(2D)]\approx 1$ и амплитуда объектной волны пропорциональна Фурье-образу комплексного амплитудного пропускания объекта.

Как и в случае формулы (11), умножим (2) на $\exp(-2\pi ipx/D_1)$ (здесь более удобен знак минус в экспоненте), где $D_1 = T_3\Lambda_r\tan^2\theta/x_{\text{ref}}$, p – параметр, и проинтегрируем по x:

$$E_{\text{rec}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2\pi ipx/D_1)I_h(x,y)\,dx. \tag{15}$$

Интегрирование проводится по плоскости голограммы.

6.1. Аналитический подход

Пренебрегая конечными размерами голограммы, берем пределы интегрирования бесконечными. Подставляя формулы (6) и (14) в (2), а (2) в (15), получим

$$E_{\rm rec} = E_{\rm rec1} + E_{\rm rec2} + E_{\rm rec3} + E_{\rm rec4}\,, \tag{16}$$

где каждое из слагаемых в правой части соответствует четырем членам в правой части (2). Используя (15), получим

$$E_{\rm rec1} = |Q|^2\,(2a_{\rm ref})^2\sqrt{D/\eta}\,\exp(-2\pi i p x_{\rm ref}\,/\,D_1)\exp[-\pi p^2 x_{\rm ref}\,/\,(D_1\eta)]\,, \tag{17}$$

$$E_{\rm rec2} = 2(2a_{\rm ref})|Q|^2\,Dt^*(x_{\rm ref} - 2px_{\rm ref}, y)\,, \tag{18}$$

$$E_{\rm rec3} = 2(2a_{\rm ref})|Q|^2\,Dt(x_{\rm ref} + 2px_{\rm ref}, y)\,, \tag{19}$$

$$E_{\rm rec4} = 2|Q|^2\,D\int t^*(x'' - 2px_{\rm ref} - x_{\rm ref}, y)t(x'' - x_{\rm ref}, y)dx''\,. \tag{20}$$

Как видно из (17) и (20), $E_{\rm rec1}$ сконцентрировано около значения $p = 0$ с полушириной $\Delta_0 = 2[D_1\eta/(\pi x_{\rm ref})]^{1/2}$, а $E_{\rm rec4}$ тоже сконцентрировано около $p = 0$ и образует гало вокруг этой точки.

Согласно (18), второй член в правой части (16), т.е. $E_{\rm rec2}$, пропорционален комплексно сопряженному значению амплитудного пропускания, поэтому этот член назовем сопряженным изображением. Сопряженное изображение объекта сконцентрировано около значения $p = 1$, область изменения p для сопряженного изображения находится в пределах $1 - a_{\rm obj}/2x_{\rm ref} \le p \le 1 + a_{\rm obj}/2x_{\rm ref}$, причем изображение поворачивается на 180°. Третий член в (16), $E_{\rm rec3}$, пропорционален амплитудному пропусканию, образует прямое действительное изображение объекта и сконцентрирован около значения $p = -1$. Здесь $-1 - a_{\rm obj}/2x_{\rm ref} \le p \le -1 + a_{\rm obj}/2x_{\rm ref}$. Определяя из эксперимента $I_{\rm hol}$, численно беря интеграл (15) и учитывая, что в области изображения значения этого интеграла совпадают с $E_{\rm rec3}$, согласно (19), получим приближенные значения комплексного коэффициента пропускания объекта, если разделим $E_{\rm rec3}$ на коэффициент перед $t(x_{\rm ref} + 2px_{\rm ref}, y)$ в формуле (19).

Ход вычислений интеграла (15) показывает, что разрешение метода определяется выражением

$$\Delta_0 = 4\sqrt{D\eta/\pi}\,, \tag{21}$$

равным полуширине изображения точечного объекта.

6.2. Численный метод итераций

На практике нужно измерить значения интенсивности (2) в зависимости от x, y, затем, умножая на соответствующие значения $\exp(-2\pi i p x/D_1)$, численно проинтегрировать (15) с конечными пределами интегрирования, соответствующими конечным размерам голограммы. В результате численного интегрирования получатся значения, сконцентрированные около значений $p = 0, \pm 1$. Значениям около $p = 1$ соответствует сопряженное изображение с поворотом на 180°. Значениям около $p = -1$ соответствует прямое действительное изображение объекта. Аналитический подход показывает (формулы (17)–(20)), что значение комплексного амплитудного пропускания объекта можно численно определить из выражения

$$t(x,y) = t_0(x,y) = E_{\rm rec}(p) \,/\, E_{\rm rec3,s}(p)\,. \qquad (22)$$

Здесь $E_{\rm rec3,s}(p)$ соответствует $E_{\rm rec3}(p)$ для $t(x,y) = 1$, т.е. для щели того же размера, что и объект, но без объекта. $E_{\rm rec3,s}(p)$ вычисляется с использованием (14) и $t(x,y) = 1$. Связь между p и x дается выражением $p = x/(2x_{\rm ref}) - 1/2$, причем необходимо использовать значения x из интервала $-x_{\rm ref} - a_{\rm obj} \le x \le -x_{\rm ref} + a_{\rm obj}$, которым будут соответствовать значения p из интервала $-1 - a_{\rm obj}/(2x_{\rm ref}) \le p \le -1 + a_{\rm obj}/(2x_{\rm ref})$. Полученное по формуле (22) нулевое приближение $t(x,y)$, обозначенное как $t_0(x,y)$, дает предварительное представление об искомой функции. Следующее приближение можно получить, если при вычислении $E_{\rm rec3}(p)$ разложить $t(x', y)$ около точки $x_0' = 2px_{\rm ref} + x_{\rm ref}$ в ряд Тейлора, сохраняя линейные члены включительно, а для значения в точке x_0' использовать нулевое приближение (22). Таким путем находим

$$t(x,y) = t_1(x,y) = t_0(x,y) - E^{(1)}{}_{\rm rec3}(p) \,/\, E_{\rm rec3,s}(p)\,, \qquad (23)$$

где $E^{(1)}{}_{\rm rec3}(p)$ есть $E_{\rm rec3}(p)$ с заменой $t(x,y)$ на $t_0'(x_0',y)(x' - x_0')$, где $t_0'(x_0',y)$ производная нулевого приближения $t_0(x,y)$ в точке $x_0' = 2px_{\rm ref} + x_{\rm ref}$. При необходимости итерационный процесс можно продолжить с тем же алгоритмом.

6.3. Шаговый численный метод

Вместо итерационного процесса можно применять, на наш взгляд, более простой метод. В этом методе объектную щель берем узкой, для простоты положим такого же размера и щель опорной волны. Сначала объект устанавливается с правым (или левым) краем на левый (правый) край объектной щели. После перемещения объекта на шаг (равный или не равный размеру объектной щели) записывается голограмма этого участка объекта. Этот процесс повторяется $N = a_{\rm obj}/a_{\rm ref}$ раз и на каждом шагу записывается голограмма соответствующего участка объекта, так что после всех перемещений получатся N голограмм всех участков объекта с размерами $2a_{\rm ref}$. Для каждой голограммы имеем соответствующие значения интенсивностей, и если объектная щель достаточно узкая, то $t_i(x, y)$ $(i = 1,\ldots,N)$ можно считать постоянной и определить из выражения

$$t_i(-x_{\rm ref}, y) = E_{{\rm rec}i}(-1) \,/\, E_{{\rm rec3}i,s}(-1)\,, \qquad (24)$$

где $E_{{\rm rec}i}(-1)$ и $E_{{\rm rec3}i,s}(-1)$ имеют тот же смысл, что и в (22), но для шага i. Таким образом, объект строится с помощью N значений $t_i(-x_{\rm ref}, y)$ $(i = 1,\ldots, N)$, получая

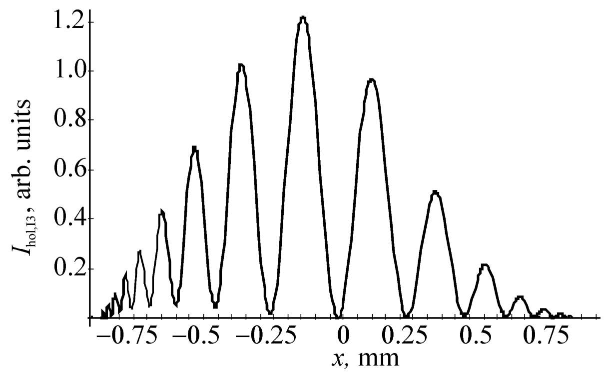

Рис.4. Распределение интенсивности на рентгеновской интерферометрической Фурье-голограмме цилиндра из бериллия, полученное шаговым методом для шага $i = 13$.

N голограмм для значения $p = -1$. Интерполяция полученной функции, заданной этими N значениями, завершает задачу нахождения $t(x,y)$.

7. Пример восстановления изображения объекта

Рассмотрим пример нахождения $t(x,y)$ для кругового однородного цилиндра из бериллия с радиусом $R_{\mathrm{obj}} = 50$ мкм и с осью, перпендикулярной к плоскости дифракции. Рассматривается случай Si(220) отражения, $\lambda = 0.71$Å (17.46 кэВ), $T_1 = T_2 = 1$ мм и $T_3 = 5$ мм. Показатель преломления объекта $n = 1 - \delta + i\beta$, причем $\delta > 0$ определяет преломление в объекте, а $\beta > 0$ определяет поглощение в объекте. Для бериллия $\delta = 1.118 \times 10^{-6}$ и $\beta = 2.69 \times 10^{-10}$. Для $t(x,y)$ получим выражение

$$t(x,y) = \exp[-2ik(\delta - i\beta)\sqrt{R_{\mathrm{ob}}^2 - (x + x_{\mathrm{ref}})^2 \cos^2\theta}\,]. \qquad (25)$$

Определим коэффициент пропускания объекта описанным выше шаговым методом. Возмем объектную щель с шириной, равной ширине щели опорного пучка 4 мкм, шаг равный ширине щели, т.е. 4 мкм, и $x_{\mathrm{ref}} = 25/\cos\theta$ мкм, $x_{\mathrm{obj}} = -x_{\mathrm{ref}}$. Для $N = 25$, используя формулу (25), вычислим все значения $I_{\mathrm{hol}i}(x)$, $i = 1,\ldots,25$ при помощи формул (2)–(4). Считая эти значения экспериментально определенными, получим значения t_i искомой функции по формуле (24). Построим интерполяционную функцию, используя эти значения. На рис.4 показана одна из голограмм для шага $i = 13$ (центр объекта совпадает с центром объектной щели).

На рис.5a,b полученные таким способом действительные и мнимые значения функции сопоставлены с соответствующими истинными значениями (25).

Очевидна близость значений восстановленной функции с истинными значениями искомой функции. Необходимые значения Фурье-коэффициентов поляризуемости взяты из работы [24], а значения δ и β для бериллия – из работы [28].

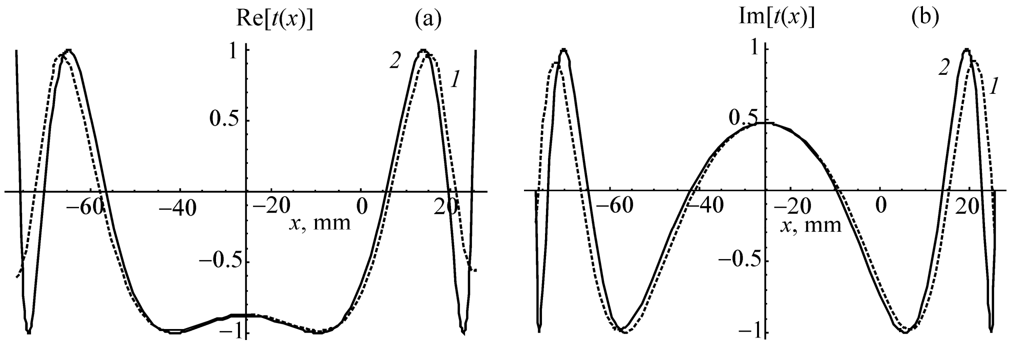

Рис.5. Сопоставление действительной и мнимой частей реконструированной шаговым методом функции $t(x, y)$ для цилиндра из бериллия с их истинными значениями: (a) *1* – действительная часть $t(x,y)$, *2* – истинное значение, (b) *1* – мнимая часть $t(x, y)$, *2* – истинное значение.

8. Заключение

Предложена и теоретически исследована рентгеновская интерферометрическая Фурье-голография. Теоретически исследованы рентгеновские интерферометрические полосы Юнга, как простейший случай рентгеновской интерферометрической Фурье-голографии. Показано, что на выходной поверхности кристалла анализатора интерференционная картина двух щелей, расположенных после зеркального блока, представляет из себя рентгеновские интерферометрические полосы Юнга. Найдено выражение для периода рентгеновских интерферометрических полос Юнга.

Дальнейшее восстановление изображения щели как объекта осуществляется численным методом Фурье-преобразования. Восстановление изображения щели можно осуществить также с помощью света видимого диапазона. Численный расчет подтверждает правильность выводов теоретического исследования.

Предложена и теоретически исследована рентгеновская интерферометрическая Фурье-голография и восстановление изображения численным методом Фурье-преобразования. Представлены три способа нахождения функции комплексного пропускания объекта: аналитический – приближенный метод, метод итераций и шаговый метод. В качестве примера рассмотрена запись рентгеновской интерферометрической Фурье-голограммы цилиндра из бериллия с радиусом 50 мкм и восстановление комплексного амплитудного пропускания объекта шаговым методом.

Метод рентгеновской интерферометрической Фурье-голографии экспериментально можно осуществить с помощью синхротронных источников рентгеновского излучения и рентгеновскими лазерами на свободных электронах. Он может быть применен в рентгеновской микроскопии для определения комплексного коэффициента пропускания неоднородных объектов (как фазовых, так и амплитудных), а также определения плотности объекта (его внутренней структуры) и показателя преломления.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Р. Кольер, К. Беркхарт, Л. Лин.** Оптическая голография. Москва, Мир, 1973.
2. **P. Hariharan.** Basics of Holography. New York, Cambridge University Press, 2002.
3. Оптическая голография, в 2-х томах, под ред. Г. Колфилда. Москва, Мир, 1982.
4. **V.V. Aristov, G.A. Ivanova.** J. Appl. Cryst., **12**, 19 (1979).
5. **А.М. Егиазарян, П.А. Безирганян.** Изв. АН Арм. ССР, **15**, 35 (1980).
6. **А.М. Егиазарян.** Письма в ЖТФ, **24**, 55 (1998).
7. **А.М. Егиазарян, К.Г. Труни, А.Р. Мкртчян.** Письма в ЖЭТФ, **68**, 681 (1998).
8. **К.Т. Габриелян.** Письма в ЖТФ, **16**, 5 (1990).
9. **A. Snigirev, I. Snigireva, V. Kohn, S. Kuznetsov, I. Schelokov.** Rev. Sci. Instrum., **66,** 5486 (1995).
10. **K.A. Nugent, T.E. Gureyev, D.F. Cookson, D. Paganin, Z. Barnea.** Phys. Rev. Lett., **77**, 2961 (1996).
11. **D.M. Paganin**. Coherent X-ray Optics. Oxford, Oxford University Press, 2006.
12. **N. Watanabe, H. Yokosuka, T. Ohogashi, H. Takano, A. Takeuchi, Y. Suzuki, S. Aoki.** J. Phys. IV France, **104**, 551 (2003).
13. **W. Leitenberger, A. Snigirev.** J. Appl. Phys., **90**, 538 (2001).
14. **В.В. Аристов, А.В. Куюмчян, А.Ю. Суворов, Т. Ишикава, А.А. Исоян, К.Г. Труни, Е. Саркисян**. Микросистемная техника, **11,** 26 (2004).
15. **H. Iwamoto, N. Yagi.** J. Synchrotron Rad., **18**, 564 (2011).
16. **M.K. Balyan.** Acta Cryst., **A66,** 660 (2010).
17. **A. Momose.** Nucl. Instr. Meth., **A352**, 622 (1995).
18. **M.K. Balyan.** J. Synchrotron Rad., **20,** 749 (2013).
19. **M.K. Balyan.** J. Synchrotron Rad., **21,** 449 (2014).
20. **M.K. Balyan**. J. Synchrotron Rad., **21,** 127 (2014).
21. **M.K. Balyan**. Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 529 (2015).
22. **M.K. Balyan**. Изв. НАН Армении, Физика, **51**, 102 (2016).
23. **A. Authier.** Dynamical Theory of X-ray Diffraction. Oxford, Oxford University Press, 2001.
24. **З.Г. Пинскер.** Рентгеновская кристаллооптика. Москва, Наука, 1982.
25. **В.Л. Инденбом, Ф.Н. Чуховский.** УФН, **107,** 229 (1972).
26. **И.Ш. Слободетский, Ф.Н. Чуховский.** Кристаллография, **15,** 6, 1101 (1970).
27. **V. Mocella, Y. Epelboin, J.P. Guigay.** Acta Cryst., **A56**, 308 (2000).
28. **A.H. Grigoryan, M.K. Balyan, A.H. Toneyan**. J. Synchrotron Rad., **17**, 332 (2010).

ՌԵՆՏԳԵՆՅԱՆ ԻՆՏԵՐՖԵՐՈՄԵՏՐԱԿԱՆ ՖՈՒՐԻԵ-ՀՈԼՈԳՐԱՖԻԱ

Մ.Կ. ԲԱԼՅԱՆ

Առաջարկված և տեսականորեն հետազոտված է ռենտգենաինտերֆերոմետրական Ֆուրիե-հոլոգրաֆիայի մեթոդը: Հետազոտված են ռենտգենաինտերֆերոմետրական Յունգի գծերը, որպես ռենտգենաինտերֆերոմետրական ֆուրիե-հոլոգրաֆիայի պարզագույն դեպք: Ցույց է տրված, որ բյուրեղ-վերլուծիչի (ինտերֆերոմետրի երրորդ թիթեղը) ելքի մակերևույթին ստացված ինտերֆերենցային պատկերը Յունգի ռենտգենաինտերֆերոմետրական գծեր են: Գտնված է արտահայտություն ռենտգենաինտերֆերոմետրական Յունգի գծերի պարբե-րության համար: Ճեղքի պատկերի հետագա վերականգնումն իրականացվում է ֆուրիե-ձևափոխության մաթեմատիկական եղանակով: Ներկայացված են օբեկտի կոմպլեքս անցման ֆունկցիայի վերականգնման երեք ձև. վերլուծական՝ մոտավոր մեթոդ, իտերացիոն մեթոդ և քայլային մեթոդ: Որպես օրինակ դիտարկված է բերիլիումե շրջանային գլանի ռենտգենո-ինտերֆերոմետրական ֆուրիե-հոլոգրամի գրանցումն և օբյեկտի կոմպլեքս ամպլիտուդային անցման ֆունկցիայի վերականգնումը:

X-RAY INTERFEROMETRIC FOURIER HOLOGRAPHY

M.K. BALYAN

The X-ray interferometric Fourier holography is proposed and theoretically investigated. Fourier The X-ray interferometric Young fringes and object image reconstruction are investigated. It is shown that the interference pattern of two slits formed on the exit surface of the crystal-analyzer (the third plate of the interferometer) is the X-ray interferometric Young fringes. An expression for X-ray interferometric Young fringes period is obtained. The subsequent reconstruction of the slit image as an object is performed by means of Fourier transform of the intensity distribution on the hologram. Three methods of reconstruction of the amplitude transmission complex function of the object are presented: analytical – approximate method, method of iteration and step by step method. As an example the X-ray Fourier interferometric hologram recording and the complex amplitude transmission function reconstruction for a beryllium circular wire are considered.

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

CONTENTS

СОДЕРЖАНИЕ

Заказ № 705

Тираж 150. Сдано в набор 15.06.2016.

Подписано к печати 22.06.2016. Печ. л. 7.25.

Бумага офсетная. Цена договорная.

Типография НАН РА. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24.