ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №2, 2001** Механика
УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЛУНОЧКИ С СИММЕТРИЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

Арутюнян Л.А.

Լ. Ա. Հարությունյան
Ճաքեր պարունակող բաղադրյալ լուսնաձև մարմնի առաձգականության տեսության մեկ հարթ խնդրի լուծումը

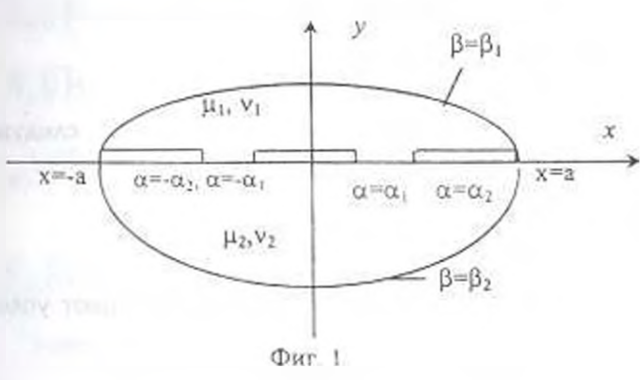
Երկբևեռ կոորդինատային համակարգի և Ֆուրյեի ինտեգրալի օգնությամբ, տրված է շրջանային աղեղներով սահմանափակված առաձգականության հարթ տեսության բաղադրյալ մարմնի մեկ խնդրի լուծումը, որը պարունակում է սիմետրիկ ճաքեր բաժանման մակերևույթի վրա:
Մասնավոր դեպքում, երբ բացակայում են ճաքերը կամ նյութերը միացված են կոնտակտային գծի երկարությամբ, ապա խնդրի լուծման համար ստացված է փակ լուծում
Ցույց է տրված, որ եթե բաղադրյալ մարմնի վրա ազդող արտաքին ուժերը և նյութերի երկրաչափական չափերը նույնն են, ապա լարվածային վիճակը կախված չէ նյութերի հատկություններից:
Քննարկված է լարումների վարքը ճաքի և միացման մակերևույթի ծայրակետերում:

L.A. Haroutunyan
On one plane problem of elasticity theory inhomogeneous Moonshape body ith symmetrical cracks

В настоящей работе с помощью биполярных координат и аппарата интеграла Фурье дано решение плоской задачи теории упругости для двух областей, образованных пересечением дуг окружностей имеющих симметричные трещины между материалами

В работах [4-9] приведены решения задач для составных тел, имеющих на границе раздела материалов трещины. В этих работах рассмотрены слои, круговые кольца, дуги окружности и прямоугольники

В данной работе рассматривается плоская контактная задача теории упругости для области, состоящей из двух внутренних луночных областей с различными упругими характеристиками. На контактной линии имеются две симметричные трещины, превращающие область в двухсвязную (фиг. 1).



Фиг. 1

Задача решается при помощи функции напряжений в биполярной системе координат $\alpha;\beta$, которые связаны с декартовыми координатами x, y соотношениями [1-2]

$$xg(\alpha,\beta)=\operatorname{sh}\alpha,\ yg(\alpha,\beta)=\sin\beta,\ ag(\alpha,\beta)=\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta \tag{1}$$

где a – параметр биполярных координат.

В биполярной системе координат первый материал с упругими характеристиками μ_1,ν_1 занимает область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[0;\beta_1]$, а второй с упругими характеристиками μ_2,ν_2 – область $\alpha\in(-\infty;\infty)$, $\beta\in[\beta_2;0]$.

Функция напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)\,(m=1,2)$ удовлетворяет бигармоническому уравнению в биполярной системе координат [1-3]

$$\left(\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4}+2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4}{\partial\beta^4}-2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}+1\right)(g\Phi_m)=0 \quad m=1,2 \tag{2}$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений следующими формулами:

$$a\sigma_\alpha^{(m)}=\left[(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}+\operatorname{ch}\alpha\right](g\Phi_m)$$

$$a\sigma_\beta^{(m)}=\left[(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}+\sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta}-\cos\beta\right](g\Phi_m)$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(m)}=-(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi_m) \tag{3}$$

$$aU_m=\frac{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\alpha}-\frac{\partial\Psi_m}{\partial\beta}\right]$$

$$aV_m=\frac{(\operatorname{ch}\alpha+\cos\beta)}{2\mu_m}\left[(1-2\nu_m)\frac{\partial\Phi_m}{\partial\beta}-\frac{\partial\Psi_m}{\partial\alpha}\right] \qquad m=1,2$$

где $\Psi_m(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ – бигармоническая функция, связанная с $\Phi_m(\alpha,\beta)\,(m=1,2)$ формулами

$$g\Psi_m(\alpha,\beta)=(1-\nu_m)\iint\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-1\right)(g\Phi_m)d\alpha\,d\beta \tag{4}$$

Пусть трещина находится в промежутке

$$\alpha\in(-\infty,-\alpha_2)\cup(-\alpha_1,\alpha_1)\cup(\alpha_2;\infty) \text{ и } \beta=0$$

Граничные условия для напряжений равносильны следующим условиям для функции напряжений [1]:

$$(g\Phi_m)\big|_{\beta=\beta_m}=\varphi_m(\alpha);\quad \left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\beta_m}=\psi_m(\alpha) \tag{5}$$

Предполагаем, что $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграл Фурье.

На линии контакта имеем следующие условия:

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial(g\Phi_m)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} = 0 && \alpha \in (-\infty,\infty)\\
&\partial(g\Phi_m)\big|_{\beta=0} = 0 && \alpha \in (-\infty,-\alpha_2)\cup(-\alpha_1;\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty)\\
&(g\Phi_1)\big|_{\beta=0} = (g\Phi_2)\big|_{\beta=0} && \alpha \in (-\alpha_2;-\alpha_1)\cup(\alpha_1;\alpha_2)\\
&V_1\big|_{\beta=0} = V_2\big|_{\beta=0} && \alpha \in (-\alpha_2;\alpha_1)\cup(\alpha_1;\alpha_2)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Учитывая симметрию, бигармоническую функцию напряжений $\Phi_m(\alpha,\beta)$ $m=1,2$ удобно представить интегралом Фурье такого вида:

$$
g\Phi_m(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_m(\alpha,\beta)\cos t\alpha\, dt \qquad (m=1,2) \tag{7}
$$

где

$$
f_m(t,\beta) = A_m(t)\operatorname{ch} t\beta\cos\beta + B_m(t)\operatorname{sh} t\beta\sin\beta + C_m(t)\operatorname{sh} t\beta\cos\beta + D_m(t)\operatorname{ch} t\beta\sin\beta \tag{8}
$$

Удовлетворяя граничным (5) и частично контактным (6) условиям, получаем следующие системы уравнений для определения неизвестных интегрирования:

$$
\begin{aligned}
&f_m(t,\beta_m) = \overline{\varphi}_m(t) && f_m'(t,\beta_m) = \overline{\psi}_m(t)\\
&f_m'(t,0) = 0 && f_m(t,0) = X(t) \qquad m=1,2
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где величины $\overline{\varphi}_m(t)$ и $\overline{\psi}_m(t)$ $(m=1,2)$ являются преобразованиями Фурье функций $\varphi_m(\alpha)$ и $\psi_m(\alpha)$ $(m=1,2)$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\varphi}_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_m(\alpha)\cos t\alpha\, d\alpha\\
&\overline{\psi}_m(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \psi_m(\alpha)\cos t\alpha\, d\alpha \qquad m=1,2
\end{aligned}
\tag{10}
$$

а $X(t)$ – пока неизвестная функция, которая определяется позже.

Разрешая систему (9) для неизвестных $A_m(t), B_m(t), C_m(t)$ и $D_m(t)$ $(m=1,2)$, найдем значения через неизвестную $X(t)$

$$
\begin{aligned}
&A_m(t) = X(t), \qquad D_m(t) = -tC_m(t)\\
&B_m(t) = -\frac{t(\operatorname{sh}^2 t\beta_m + \sin^2\beta_m)}{\Delta_m(t)}X(t) + \frac{(t^2+1)\operatorname{sh} t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t) +\\
&\quad + \frac{\operatorname{sh} t\beta_m\cos\beta_m - t\operatorname{ch} t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t)\\
&C_m(t) = -\frac{\operatorname{sh}2t\beta_m + t\sin 2\beta_m}{2\Delta_m(t)}X(t) - \frac{\operatorname{sh} t\beta_m\sin\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\psi}_m(t) +\\
&\quad + \frac{t\operatorname{ch} t\beta_m\sin\beta_m + \operatorname{sh} t\beta_m\cos\beta_m}{\Delta_m(t)}\overline{\varphi}_m(t) \qquad m=1,2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

$$\Delta_m(t) = \mathrm{sh}^2 t\beta_m - t^2 \sin^2\beta_m$$

Неизвестная функция $X(t)$ определяется из следующей системы парных интегральных уравнений, которая получается из смешанных контактных условий (6):

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty tX(t)\sin t\alpha\, dt = 0 \qquad\qquad \alpha \in (0,\alpha_1)\cup(\alpha_2,\infty) \\ &\int_0^\infty [M(t)X(t) + N(t)]\sin t\alpha\, dt = 0 \qquad \alpha\in(\alpha_1,\alpha_2) \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$M(t) = \frac{\Delta(t)}{2\Delta_1(t)\Delta_2(t)}, \qquad N(t) = \frac{\Delta_3(t)}{\Delta_1(t)\Delta_2(t)}$$

$$\Delta_3(t) = -\Delta_2(t)(t\,\mathrm{ch}\, t\beta_1 \sin\beta_1 + \mathrm{sh}\, t\beta_1\cos\beta_1)\overline{\varphi}_1(t) + \Delta_2(t)\mathrm{sh}\, t\beta_1\sin\beta_1\overline{\psi}_1(t) +$$
$$+ h\Delta_1(t)(t\,\mathrm{ch}\, t\beta_2\sin\beta_2 + \mathrm{sh}\, t\beta_2\cos\beta_2)\overline{\varphi}_2(t) - h\Delta_1(t)\mathrm{sh}\, t\beta_2\sin\beta_2\overline{\psi}_2(t)$$

$$\Delta(t) = (\mathrm{sh}2t\beta_1 + t\sin\beta_1)(\mathrm{sh}^2 t\beta_2 - t^2\sin^2\beta_2) -$$
$$- h(\mathrm{sh}2t\beta_2 + t\sin 2\beta_2)(\mathrm{sh}^2 t\beta_1 - t^2\sin^2\beta_1)$$

$$h = \frac{\mu_1(1-\nu_2)}{\mu_2(1-\nu_1)} \tag{13}$$

В случае, когда размеры областей и внешние усилия одинаковы, т.е $\beta_2 = -\beta_1$, $\overline{\varphi}_2 = \overline{\varphi}_1$, $\overline{\psi}_2 = -\overline{\psi}_1$, то из (13) получим

$$\begin{aligned} &M(t) = \frac{1+h}{2\Delta_1(t)}(\mathrm{sh}2t\beta_1 + t\sin 2\beta_1) \\ &N(t) = \frac{1+h}{\Delta_1(t)}\left[\mathrm{sh}t\beta_1\sin\beta_1\overline{\psi}_1(t) - (t\,\mathrm{ch}\, t\beta_1\sin\beta_1 + \mathrm{sh}\, t\beta_1\cos\beta_1)\overline{\varphi}_1(t)\right] \end{aligned} \tag{14}$$

Как видно из (12), решение поставленных задач не зависит от упругих характеристик составляющих материалов. Аналогичные результаты для других областей были получены в работах [4-9]. Применяя преобразование Фурье, получаем интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$X(t) = \frac{1}{\pi t}\int_0^\infty [(M(\tau)-\tau)X(\tau) + N(\tau)]K(t,\tau)d\tau \tag{15}$$

или

$$Y(t) = \frac{M(t)-t}{\pi t}\int_0^\infty K(t,\tau)Y(\tau)d\tau + N(t) \tag{16}$$

где

$$Y(t) = [(M(t)-t)]X(t)$$

$$K(t,\tau)=\frac{\sin(t+\tau)\alpha_2-\sin(t+\tau)\alpha_1}{t+\tau}-\frac{\sin(t-\tau)\alpha_2-\sin(t-\tau)\alpha_1}{t-\tau} \tag{17}$$

В частном случае при $\alpha_1=\alpha_2$ $X(t)=0$ и решение совпадает с решением, полученным в работе [7], а при $\alpha_1=0, \alpha_2=\infty$ $X(t)=-\dfrac{N(t)}{M(t)}$ решение совпадает с решением, полученным в работах [7-9].

На линии контакта характер нормальной напряжений в точках $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$ после некоторых преобразований имеет вид

$$\sigma_\beta^{(m)}(\alpha)\Big|_{\beta=0}=\frac{\operatorname{ch}\alpha+1}{\pi}\int_0^\infty\Big[\sin\tau\alpha_1\Big(|\alpha-\alpha_1|^{-\frac{1}{2}}+|\alpha+\alpha_1|^{-\frac{1}{2}}\Big)-$$
$$-\sin\tau\alpha_2\Big(|\alpha_2-\alpha|^{-\frac{1}{2}}+|\alpha_2+\alpha|^{-\frac{1}{2}}\Big)\Big]Y(\tau)d\tau+H(\alpha) \tag{18}$$

При $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$ на линии контакта нормальные напряжения имеют особенность порядка $\frac{1}{2}$. В представленном виде член, содержащий особенность в точках $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_2$, разделен $aH(\alpha)\to 0$ при $\alpha=\alpha_1$ или $\alpha=\alpha_2$.

Для исследования поведения напряжений в окрестности края поверхности контакта $x=a$ (т.е. $\alpha=\infty$) в случае $\alpha_1=0$ и $\alpha_2=\infty$ $\left(X(t)=-N(t)/M(t)\right)$, нормальное напряжение представим в виде

$$a\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=0}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[t^2\left(1+e^{-\alpha}\right)^2+it\left(1-e^{-2\alpha}\right)+2e^{-\alpha}\right]\frac{\Delta_3(t)}{\Delta(t)}e^{\alpha(1+it)}dt \tag{19}$$

Интеграл (20) по вещественной оси дополняется интегралом по верхней (при $x<0$ или $\alpha<0$) или нижней (при $x>0$ или $\alpha>0$) полуокружностями радиуса $R\to\infty$ с центром в начале координат Применяя теорему о вычетах, представим (19) в виде бесконечного ряда

$$a\sigma_\beta^{(m)}\Big|_{\beta=0}=i\sqrt{2\pi}\left[t_1^2\left(1+e^{-\alpha}\right)^2+it\left(1+e^{-2\alpha}\right)+2e^{-\alpha}\right]\frac{\Delta_3(t_1)}{\Delta'(t_1)}e^{\alpha(1-\eta_1+i\xi_1)}+$$
$$+i\sqrt{2\pi}\sum_{k=2}^{\infty}\left[t_k^2\left(1+e^{-\alpha}\right)^2+it_k\left(1+e^{-2\alpha}\right)+2e^{-\alpha}\right]\frac{\Delta_3(t_k)}{\Delta'(t_k)}e^{\alpha(1+it_k)} \tag{20}$$

где $t_k=\xi_k-i\eta_k$ – корни уравнения $\Delta(t)=0$ $(\xi_k>0,\ \eta_k>0)$.

Очевидно, характер напряженного состояния около края $x=a$ $(\alpha=\infty)$ определяется величиной мнимой части первого простого корня $t_1=\xi_1-i\eta_1$ уравнения $\Delta t=0$. При $\eta_1>1$ имеем нулевое напряженное состояние, а при $\eta_1 < 1$ имеем концентрацию напряжений. В случае $\eta_1 = 1$ напряжения на краю поверхности контакта конечны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 232с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968.
3. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной области, образованной из двух луночек // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1976. Т. 29. №1. С. 51-56.
4. Абрамян Б.Л., Макарян В.С. Осесимметричная задача о контакте между двумя слоями с учетом трения между слоями. // Изв. АН Арм ССР. Механика. 1976. Т.29. №5. С. 3-14.
5. Баблоян А.А., Мелконян М.Г., О контакте двух прямоугольников без сцепления с определением области контакта. // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1974. Т. 27. №5. С. 3-18.
6. Мелконян М.Г., Мкртчян А.М. Об одной контактной задаче для двух прямоугольников // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1975. Т.28. №3. С. 13-28.
7. Арутюнян Л.А., Апикян Ж.Г., Аветисян Г.А. Плоская контактная задача для составного тела с симметричной трещиной между материалами // В. сб.: Инж. проблемы строительной механики. Ереван: ЕрПИ. 1985.
8. Арутюнян Л.А. Смешанная контактная задача для двух луночек. // Изв НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №2. С.83-89.
9. Арутюнян Л.А. Плоская задача теории упругости для составной круглой луночки с трещиной между материалами. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №2. С.3-10

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
2.03.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика
УДК 539.3

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ НЕПОЛНЫХ СОСТАВНЫХ КРУГОВЫХ КОНУСОВ

Баблоян А.А., Макарян В.С., Аванян М.В.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Վ.Ս. Մակարյան, Մ.Վ. Ավանյան

Պոտենցիալի հիմնական եզրային խնդիրները ոչ լրիվ բաղադրյալ կոների համար

Ստացված են Դիրիխլեի և Նեյմանի խնդիրների ճշգրիտ լուծումները լրիվ և ոչ լրիվ բաղադրյալ վերջավոր շրջանային կոների համար, երբ տարբեր նյութերը իրարից բաժանված են կոնական մակերևույթով կամ կիսահարթությունով: Ուսումնասիրված է հարմոնիկ ֆունկցիաների վարքը ոչ լրիվ բաղադրյալ կոնի գագաթի շրջակայքում:

A.H. Babloyan, V.S. Makaryan, M.V. Avanyan

Main problems of a potential theory for partial composite circular cones

Получены точные решения задач Дирихле и Неймана для круговых составных полных или неполных конусов конечных длин, когда поверхность раздела различных материалов – коническая или полуплоскость. Исследуется поведение гармонических функций в окрестности вершин полных или неполных составных конусов.

В работе приводятся точные решения некоторых основных задач теории потенциала для области, ограниченной конической и сферической поверхностями, а также двумя полуплоскостями, проходящими через ось конуса. Рассматриваемое тело состоит из двух различных материалов с различными физическими характеристиками α_1 и α_2. Поверхность раздела различных материалов либо полуплоскости, либо же коническая поверхность. Основная цель работы – изучение поведения гармонических функций в окрестности вершины неполных составных конусов в зависимости от свойств материалов, типа граничных условий и геометрических параметров.

Аналогичные вопросы для однородных конусов исследовались в работах [1-5].

1. Поверхность раздела материалов коническая

Пусть потребуется решить трехмерную задачу Дирихле

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

$$u(\rho,\theta,\varphi)|_s=u_0(\rho,\theta,\varphi)\quad\left(0\le\rho\le R,0\le\theta\le\theta_2,0\le\varphi\le\varphi_0\right)\tag{1.1}$$

когда на конической поверхности $\theta=\theta_1$ раздела различных материалов соблюдаются условия сопряжения

$$u(\rho,\theta_1-0,\varphi)=u(\rho,\theta_1+0,\varphi),\quad \alpha_1\frac{\partial u(\rho,\theta_1-0,\varphi)}{\partial\theta}=\alpha_2\frac{\partial u(\rho,\theta_1+0,\varphi)}{\partial\theta}\tag{1.2}$$

где (ρ, θ, φ) — сферические координаты, причем $0 < \theta_1 < \theta_2$.

Сначала приведем решение следующей задачи Штурма-Лиувилля с разрывом:

$$\left[\sin\theta\,\Phi'\right]' + \left[\nu(\nu+1) - \mu^2 \sin^{-2}\theta\right]\Phi \sin\theta = 0, \qquad (0 \le \theta \le \theta_2) \tag{1.3}$$

$$|\Phi(0)| < \infty, \quad \Phi(\theta_2) = 0, \quad \Phi(\theta_1 - 0) = \Phi(\theta_1 + 0), \quad \alpha_1 \Phi'(\theta_1 - 0) = \alpha_2 \Phi'(\theta_1 + 0)$$

где μ_p — заданные числа $\left(\mu_p = p\pi / \varphi_0\right)$.

Собственные числа $\nu_{kp} > 0$ задачи (1.3) будем определять из трансцендентного уравнения

$$\Phi_{kp}(\theta_2) = 0 \tag{1.4}$$

Собственные функции задачи (1.3) будут

$$\Phi_{kp}(\theta) = \begin{cases} y_1(\theta), & (0 \le \theta \le \theta_1) \\ y_1(\theta) + \dfrac{(\alpha_0 - 1)\, y_1'(\theta_1)}{y_0'(\theta_1)}\, y_0(\theta), & (\theta_1 \le \theta \le \theta_2) \end{cases} \tag{1.5}$$

где использованы обозначения

$$y_1(\theta) = P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta), \quad y_2(\theta) = Q_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta), \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad \mu_p = \frac{p\pi}{\varphi_0}$$

$$y_0(\theta) = y_1(\theta)\, y_2(\theta_1) - y_1(\theta_1)\, y_2(\theta) \tag{1.6}$$

Здесь $P_\nu^\mu(x)$, $Q_\nu^\mu(x)$ — присоединенные функции Лежандра.

$$y_0'(\theta_1) = \frac{C_{kp}}{\sin\theta_1}, \quad C_{kp} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{(\nu_{kp} - \mu_p + 1)}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_{kp} - \mu_p}{2} + 1\right)}{2^{2\mu_p}\,\Gamma\left(\dfrac{\nu_{kp} + \mu_p + 1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_{kp} + \mu_p}{2} + 1\right)} \tag{1.7}$$

Система функций $\{\Phi_{kp}(\theta)\}$ ортогональна с кусочно-постоянным весом $G_0(\theta)$

$$\int_0^{\theta_2} \Phi_{kp}(\theta)\, \Phi_{np}(\theta)\, G_0(\theta) \sin\theta \, d\theta = \delta_{kn}\, \omega_{kp} \tag{1.8}$$

где δ_{kn} — символ Кронекера,

$$\omega_{kp} = \frac{\sin\theta_2}{2\nu_{kp} + 1}\left[\dot{\Phi}_{kp}(\theta_2)\, \Phi_{kp}'(\theta_2) - \Phi_{kp}(\theta_2)\, \dot{\Phi}_{kp}'(\theta_2)\right]$$

$$G_0(\theta) = \begin{cases} \alpha_0, & (0 \le \theta < \theta_1) \\ 1, & (\theta_1 < \theta \le \theta_2) \end{cases}, \quad \dot{\Phi}(\theta) = \frac{d\Phi(\theta)}{d\nu}, \quad \Phi'(\theta) = \frac{d\Phi(\theta)}{d\theta} \tag{1.9}$$

Решение задачи Дирихле (1.1)- (1.2) ищем в виде двойного ряда Фурье:

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{k,p=1}^{\infty}\frac{2}{\varphi_0\,\omega_{kp}}X_{kp}(\rho)\Phi_{kp}(\theta)\sin\mu_p\varphi \tag{1.10}$$

обращение которого будет

$$X_{kp}(\rho)=\int_0^{\theta_2}\int_0^{\varphi_0}G_0(\theta)u(\rho,\theta,\varphi)\Phi_{kp}(\theta)\sin\theta\sin\mu_p\varphi\,d\theta\,d\varphi \tag{1.11}$$

Умножим обе части уравнения (1.1) на $G_0(\theta)\Phi_{kp}(\theta)\sin\theta\sin\mu_p\varphi$ и проинтегрируем по области $(0\le\theta\le\theta_2, 0\le\varphi\le\varphi_0)$. Пользуясь очевидными преобразованиями, для определения функций $X_{kp}(\rho)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\left[\rho^2 X_{kp}'(\rho)\right]'-\nu_{kp}\left(\nu_{kp}+1\right)X_{kp}(\rho)=f_{kp}(\rho),\ (0\le\rho\le R) \tag{1.12}$$

$$\left|X_{kp}(0)\right|<\infty,\ X_{kp}(R)=A_{kp} \tag{1.13}$$

где

$$f_{kp}(\rho)=\sin\theta_2\frac{\partial\Phi_{kp}(\theta_2)}{\partial\theta_2}\int_0^{\varphi_0}u(\rho,\theta_2,\varphi)\sin\mu_p\varphi\,d\varphi+$$

$$+\mu_p\int_0^{\theta_2}\left[u(\rho,\theta,0)-(-1)^p u(\rho,\theta,\varphi_0)\right]\frac{\Phi_{kp}(\theta)G_0(\theta)}{\sin\theta}d\theta$$

$$A_{kp}=\int_0^{\theta_2}\int_0^{\varphi_0}G_0(\theta)u(R,\theta,\varphi)\Phi_{kp}(\theta)\sin\theta\sin\mu_p\varphi\,d\theta\,d\varphi \tag{1.14}$$

В силу граничного условия (1.1) величины $f_{kp}(\rho)$ и A_{kp} можно считать известными.

Решение уравнения (1.13), полученное методом вариации произвольных постоянных и дальнейшим предельным переходом, имеет вид

$$X_{kp}(\rho)=A_{kp}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}-\int_0^R K(x,\rho)\frac{f_{kp}(x)\,dx}{\left(2\nu_{kp}+1\right)R} \tag{1.15}$$

$$K_{kp}(\rho)=\begin{cases}\left(\dfrac{x}{R}\right)^{\nu_{kp}}\left[\left(\dfrac{R}{\rho}\right)^{\nu_{kp}+1}-\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}\right], & (x\le\rho)\\[2ex] \left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\nu_{kp}}\left[\left(\dfrac{R}{x}\right)^{\nu_{kp}+1}-\left(\dfrac{x}{R}\right)^{\nu_{kp}}\right], & (x\ge\rho)\end{cases}$$

Подставляя найденные функции $X_{kp}(\rho)$ из (1.15) в (1.10), получим окончательное решение задачи Дирихле (1.1)-(1.2). При этом ряд (1.10) будет сходиться абсолютно и равномерно со своими первыми производными в замкнутой области, если граничная функция $u(\rho,\theta,\varphi)$ удовлетворяет условиям: а) непрерывна; б) имеет непрерывные первые производные везде, кроме точек окружности $(\rho=R,\theta=\theta_1,0\le\varphi\le\varphi_0)$; в) в точках этой окружности первая производная функции $u_0(\rho,\theta,\varphi)$ по θ имеет разрыв типа (1.2). Короче, функции $u_0(\rho,\theta,\varphi)$ и $G_0(\theta)\dfrac{\partial u_0}{\partial\theta}$ должны быть непрерывными.

В частном случае, когда функция $f_{k\rho}(\rho)$ имеет вид

$$f_{k\rho}(\rho)=B_{k\rho}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}, \qquad (\alpha+\nu_{11}>-1, \qquad \alpha\neq\nu_{k\rho}) \tag{1.16}$$

для $X_{k\rho}(\rho)$ из (1.15) получим следующее выражение:

$$X_{k\rho}(\rho)=A_{k\rho}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{k\rho}}+\frac{B_{k\rho}}{(\alpha-\nu_{k\rho})(\nu_{k\rho}+\alpha+1)}\left[\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{k\rho}}-\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}\right] \tag{1.17}$$

В том случае, когда число α совпадает с одним из корней $\nu_{k\rho}$ уравнения (1.7), выражение для $X_{k\rho}(\rho)$ получается из (1.17) путем предельного перехода, когда $\alpha\to\nu_{k\rho}$:

$$X_{k\rho}(\rho)=A_{k\rho}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{k\rho}}+\frac{B_{k\rho}}{2\nu_{k\rho}+1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\nu_{k\rho}}\ln\left(\frac{\rho}{R}\right) \tag{1.18}$$

Из полученного окончательного решения (1.10), (1.15)- (1.18) следует, что асимптотика гармонической функции в малой окрестности вершины составного, неполного кругового конуса, при $\rho<<R$, будет иметь вид

а) $u(\rho,\theta,\varphi)\approx\dfrac{2\left(A_{11}+\widetilde{B}_{11}\right)}{\varphi_0\,\omega_{11}}\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\nu_{11}}\Phi_{11}(\theta)\sin\mu_1\varphi, \quad (\alpha>\nu_{11})$

б) $u(\rho,\theta,\varphi)\approx-\widetilde{B}_{11}\,\Phi_{11}(\theta)\sin\mu_1\varphi\cdot\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\alpha}, \quad (\alpha<\nu_{11})$ (1.19)

в) $u(\rho,\theta,\varphi)\approx\left[A_{11}-\dfrac{B_{11}}{2\nu_{11}+1}\ln\dfrac{\rho}{R}\right]\left(\dfrac{\rho}{R}\right)^{\nu_{11}}\Phi_{11}(\theta)\sin\mu_1\varphi, \quad (\alpha=\nu_{11})$

где

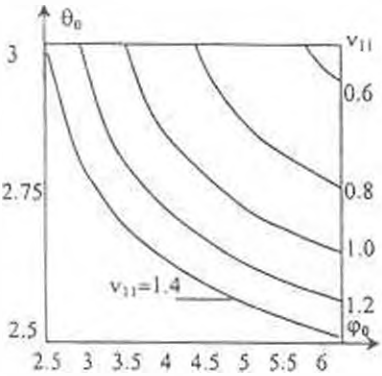
$$\widetilde{B}_{11}=\frac{B_{11}}{(\alpha-\nu_{11})(\nu_{11}+\alpha+1)}$$

Путем дифференцирования из (1.19) можно получить асимптотические формулы для производных гармонической функции.

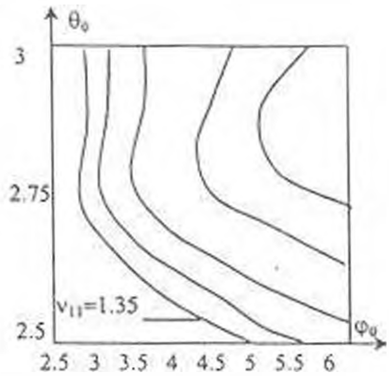
На фиг. 1 приведены графики функции $\nu_{11}(\varphi_0,\theta_0)=C$, обусловленной трансцендентным уравнением (1.7) (задача Дирихле) для различных значений $C=1.4;1.2;1;0.8;0.6$

Аналогичным образом можно решать задачу Неймана для рассматриваемого составного тела. Здесь отметим только, что в случае задачи Неймана собственные функции $\Phi_{k\rho}(\theta)$ выражаются формулами (1.4) - (1.5), а собственные числа будут определяться из трансцендентного уравнения

$$\Phi_{kp}'(\theta_2)=0 \qquad (1.7')$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Для сравнения, на фиг. 2 приведены графики функции $\nu_{11}(\varphi_0,\theta_0)=C_1$ для задачи Неймана (уравнение (1.7')) для следующих значений постоянного $C_1=1.35;1.2;1;0.8;0.6$.

2. Поверхность раздела материалов–полуплоскость

Рассмотрим задачу Дирихле (1.1) для составного конуса $(0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\theta_0, 0\le\varphi\le\varphi_0)$ при граничных условиях первого рода $u(\rho,\theta,\varphi)|_s=u_0(\rho,\theta,\varphi)$, когда на полуплоскости $(0\le\rho\le R, 0\le\theta\le\theta_0, \varphi=\varphi_1)$ заданы условия сопряжения двух материалов

$$u(\rho,\theta,\varphi_1-0)=u(\rho,\theta,\varphi_1+0),\quad \alpha_1\frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi_1-0)}{\partial\varphi}=\alpha_2\frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi_1+0)}{\partial\varphi} \qquad (2.1)$$

Решение гармонического уравнения (1.1) ищем в виде ряда Фурье

$$u(\rho,\theta,\varphi)=\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_{kp}(\rho)}{\omega_{kp}}P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\Phi_p(\varphi) \qquad (2.2)$$

$$\omega_{kp}=\frac{\sin\theta_0}{2\nu_{kp}+1}\left[\dot P_{kp}^{-\mu_p}(x_0)\frac{dP_{kp}^{-\mu_p}(x_0)}{d\theta_0}-P_{kp}^{-\mu_p}(x_0)\frac{d\dot P_{kp}^{-\mu_p}(x_0)}{d\theta_0}\right],\quad x_0=\cos\theta_0$$

Для задачи Дирихле ν_{kp} являются положительными корнями уравнения $P_{\nu}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)=0$ при заданных μ_p. Функции $\Phi_p(\varphi)$, $(p=1,2,\ldots)$ являются собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля с разрывом

$$\Phi''(\varphi)+\mu^2\Phi(\varphi)=0,\quad \Phi(0)=\Phi(\varphi_0)=0$$

$$\Phi(\varphi_1-0)=\Phi(\varphi_1+0),\quad \alpha_1\frac{d\Phi(\varphi_1-0)}{d\varphi}=\alpha_2\frac{d\Phi(\varphi_1+0)}{d\varphi} \qquad (2.3)$$

Нормированные собственные функции задачи (2.3) при условии $\sin\mu_p\varphi_1=\sin\mu_p\varphi_2\ne0$ имеют вид

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \sin\mu_p\varphi_2 \sin\mu_p\varphi, & (0 \le \varphi \le \varphi_1) \\ \sin\mu_p\varphi_1 \sin\mu_p(\varphi_0 - \varphi), & (\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_0) \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$2\varepsilon_p^2 = \varphi_1\alpha_0 \sin^2\mu_p\varphi_2 + \varphi_2 \sin^2\mu_p\varphi_1, \ \alpha_0 = \alpha_1/\alpha_2, \ \varphi_1 + \varphi_2 = \varphi_0 \tag{2.5}$$

а собственные числа μ_p определяются из уравнения

$$\sin\mu_p\varphi_1 \cos\mu_p\varphi_2 + \alpha_0 \cos\mu_p\varphi_1 \sin\mu_p\varphi_2 = 0, \ \mu_p > 0 \tag{2.6}$$

Нетрудно проверить, что уравнения (2.6) и $P_\nu^{-\mu_p}(\cos\theta_0) = 0$ имеют простые действительные корни.

Система функций $\{\Phi_p(\varphi)\}$ ортогональна на отрезке $[0, \varphi_0]$ с кусочно-постоянным весом $G_0(\varphi)$.

$$\int_0^{\varphi_0} G_0(\varphi)\Phi_k(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi = \delta_{k,p}, \quad G_0(\varphi) = \begin{cases} \alpha_0, & (0 \le \varphi < \varphi_1) \\ 1, & (\varphi_1 < \varphi \le \varphi_0) \end{cases} \tag{2.7}$$

В случае $\cos\mu_p\varphi_1 = \cos\mu_p\varphi_2 \ne 0$ функции можно представить в виде

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \alpha_0^{-1} \cos\mu_p\varphi_2 \sin\mu_p\varphi, & (0 \le \varphi \le \varphi_1) \\ \cos\mu_p\varphi_1 \sin\mu_p(\varphi_0 - \varphi), & (\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_0) \end{cases}$$

$$2\varepsilon_p^2 = \varphi_1\alpha_0^{-1} \cos^2\mu_p\varphi_2 + \varphi_2 \cos^2\mu_p\varphi_1 \tag{2.8}$$

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2$, функции $\Phi_p(\varphi)$ определяются простыми формулами

$$\varepsilon_p \Phi_p(\varphi) = \begin{cases} G_0^{-1} \sin\mu_p\varphi, \ \mu_p\varphi_0 = 2\pi p, & 2\varepsilon_p^2 = \varphi_1\alpha_0^{-1} + \varphi_2, \\ \sin\mu_p\varphi, \quad \mu_p\varphi_0 = (2p-1)\pi, & 2\varepsilon_p^2 = \varphi_1\alpha_0 + \varphi_2; \end{cases} \tag{2.9}$$

Обращение разложения (2.2), в силу (2.7) будет

$$X_{kp}(\rho) = \int_0^{\theta_0}\int_0^{\varphi_0} G_0(\varphi)u(\rho,\theta,\varphi)\Phi_p(\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{2.10}$$

Применяя метод Гринберга к уравнению (1.1), для определения неизвестных функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение (1.13), где

$$A_{kp} = \int_0^{\theta_0}\int_0^{\varphi_0} G_0(\varphi)u(R,\theta,\varphi)\Phi_p(\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$f_{kp}(\rho) = \sin\theta_0 \frac{dP_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)}{d\theta_0} \int_0^{\varphi_0} G_0(\varphi)u(\rho,\theta_0,\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi +$$

$$+ \int_0^{\theta_0}\left[u(\rho,\theta,\varphi_0)\Phi_p'(\varphi_0) - \alpha_0 u(\rho,\theta,0)\Phi_p'(0)\right]P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\frac{d\theta}{\sin\theta} \tag{2.11}$$

Функции $X_{kp}(\rho)$ будем определять по формулам (1.15) при обозначениях (2.11), а окончательное решение задачи Дирихле дается формулами (2.2), (1.15) и (2.11).

3. Задача Дирихле для составного полного кругового конуса конечной длины

Пусть круговой полный конус состоит из двух различных материалов (с физическими параметрами α_1 и α_2), которые разделены друг от друга двумя полуплоскостями $(\varphi = \pm\varphi_1, \quad 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \theta_0)$. Потребуется решать неоднородное уравнение Лапласа (1.1) для составного конуса $(0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le \theta_0, -\pi \le \varphi \le \pi)$ конечной длины при граничных условиях первого рода

$$u(\rho,\theta_0,\varphi) = u_1(\rho,\varphi), \quad u(R,\theta,\varphi) = u_2(\theta,\varphi) \tag{3.1}$$

Для простоты рассмотрим случай, когда правая часть уравнения (1.1) и функции (3.1) четные относительно полуплоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pm\pi$. При этом задачу будем решать только для области $(0 \le \varphi \le \pi)$, удовлетворяя условиям симметрии

$$\frac{\partial u(\rho,\theta,0)}{\partial\varphi} = \frac{\partial u(\rho,\theta,\pi)}{\partial\varphi} = 0 \tag{3.2}$$

и условиям сопряжений двух различных материалов

$$u(\rho,\theta,\varphi_1 - 0) = u(\rho,\theta,\varphi_1 + 0), \quad \alpha_1 \frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi_1 - 0)}{\partial\varphi} = \alpha_2 \frac{\partial u(\rho,\theta,\varphi_1 + 0)}{\partial\varphi} \tag{3.3}$$

Решение задачи Дирихле для полного составного конуса ищем в виде двойного ряда Фурье

$$u(\rho,\theta,\varphi) = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_{kp}(\rho)}{\omega_{kp}} P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\Phi_p(\varphi) \tag{3.4}$$

где μ_p и ν_{kp} являются неотрицательными корнями уравнений

$(\varphi_1 + \varphi_2 = \pi)$

$$\alpha_0 \sin\mu_p\varphi_1 \cos\mu_p\varphi_2 + \sin\mu_p\varphi_2 \cos\mu_p\varphi_1 = 0, \quad P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0) = 0 \tag{3.5}$$

а функции $\Phi_p(\varphi)$ имеют вид (при $\cos\mu_p\varphi_k \ne 0$, $k = 1,2$)

$$\varepsilon_p\Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos\mu_p\varphi_1 \cos\mu_p\varphi, & (0 \le \varphi \le \varphi_1) \\ \cos\mu_p\varphi_2 \cos\mu_p(\pi - \varphi), & (\varphi_1 \le \varphi \le \pi) \end{cases} \tag{3.6}$$

$$2\varepsilon_p^2 = \alpha_1\varphi_1 \cos^2\mu_p\varphi_2 + \alpha_2\varphi_2 \cos^2\mu_p\varphi_1 \quad (p = 0,1,2,\ldots)$$

Числа ω_{kp} определяются по формуле (2.2') с учетом (3.5).

В частном случае, когда $\varphi_1 = \varphi_2 = 0.5\pi$, для функций $\Phi_p(\varphi)$ будем иметь

$$\varepsilon_p\Phi_p(\varphi) = \begin{cases} \cos\mu_p\varphi, & (\mu_p = 2p) \\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2}\, \rho_0^{-1}(\varphi)\cos\mu_p\varphi, & (\mu_p = 2p) \end{cases}, \quad 4\varepsilon_p^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)\pi \tag{3.7}$$

Функции $\Phi_p(\varphi)$ ортогональны на интервале $[0,\pi]$ с весом $\rho_0(\varphi)$

$$\int_0^\pi \rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)\Phi_s(\varphi)d\varphi = \delta_{ps}, \qquad \rho_0(\varphi) = \begin{cases}\alpha_1, & (0\le\varphi<\varphi_1)\\ \alpha_2, & (\varphi_1<\varphi\le\pi)\end{cases} \qquad (3.8)$$

Аналогичным образом для определения функций $X_{kp}(\rho)$ получим дифференциальное уравнение (1.13), где

$$f_{kp}(\rho) = g_{kp}(\rho) + \sin\theta_0 \frac{dP_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)}{d\theta}\int_0^\pi u_1(\rho,\varphi)\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\varphi$$

$$g_{kp}(\rho) = \int_0^{\theta_0}\int_0^\pi G(\rho,\theta,\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta_0)\sin\theta\,\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\theta\, d\varphi$$

$$A_{kp} = \int_0^{\theta_0}\int_0^{\varphi_0} u_2(\theta,\varphi)P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)\sin\theta\,\rho_0(\varphi)\Phi_p(\varphi)d\theta\, d\varphi \qquad (3.9)$$

При этом решение уравнения (1.13) при обозначениях (3.9) дается формулой (1.15). Окончательное решение задачи Дирихле определяется формулами (1.15) и (3.9).

После нахождения μ_p из (2.6) или из первого уравнения (3.5), корень уравнения $P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)=0$ можно определять следующими приближенными формулами [6,7,8]:

а) $$\nu_{kp}+1/2 = \frac{j_\mu}{2\sin(\theta/2)}\left[1-\frac{1}{6}\left(1-(4\mu-1)\,j_\mu^{-2}\right)\sin^2(\theta/2)+0\left(\sin^4(\theta/2)\right)\right]$$

где $\theta\approx 0$, а j_μ – любой не равный нулю корень уравнения $J_\mu(z)=0$ $(\mu\ge 0)$

б) Если θ близко к π, то

$$\nu\approx\mu+k+\frac{\Gamma(2\mu+k+1)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\mu+1)\Gamma(k+1)}\left(\frac{\pi-\theta}{3}\right)^{2\mu}, \quad (\mu>0;\; k=0,1,2,3\ldots)$$

$$\nu\approx k+\left[2\ln\left(\frac{2}{\pi-\theta}\right)\right]^{-1} \qquad (\mu=0;\; k=0,1,2,3\ldots)$$

в) Если $\theta=\pi/2$, то

$$\nu\approx\mu+1+2k \qquad (\mu\ge 0;\; k=0,1,2,3\ldots)$$

г) При $\theta\approx\pi/2$ имеет место

$$(\nu+0.5)\theta\approx\frac{\pi}{4}+\frac{\mu\pi}{2}+\frac{(2k+1)\pi}{2} \qquad (\mu\ge 0;\nu>0;\; k=0,1,2,3\ldots)$$

Приведенные формулы предусмотрены для нахождения положительных корней уравнения $P_{\nu_{kp}}^{-\mu_p}(\cos\theta)=0$. Известно, что числа ν и $-(\nu+1)$ одновременно являются корнями вышеприведенного уравнения. На этой основе можно определить все отрицательные корни

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в областях с коническими точками Math. Nachr. 1977. т. 76.
2. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова думка, 1979. 262с.
3. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264 с.
4. Геворкян Г. З., Макарян В. С. Контактная задача для шарового сектора// Изв. НАН Армении. Механика. 1996. Т. 49. №1. С. 51-60.
5. Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 687 с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений. М.: Физматгиз. 1963. 1100с.
7. Magnus W., Oberhettinger F. Formeln and Satze fur die spesielien Funktionen der math. Phisik. Springer — Verlag, Berlin, ... , 1948.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1973. 224 с.

Ереванский гос. университет
архитектуры и строительства

Поступила в редакцию
31.10.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա | 54, №2, 2001 | Механика

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ВЕРШИНЫ УПРУГОГО КЛИНА

Белубекян В.М., Белубекян М.В.,Терзян С.А.

Վ.Մ. Բելուբեկյան, Մ.Վ. Բելուբեկյան, Ս.Հ. Թերզյան
Առաձգական սեպի գագաթի շրջակայքում լարվածային վիճակը

Սեպի եզակիության որոշման խնդիրը սովորաբար լուծվում է գլանային կոորդինատական համակարգում։ Ռ. Ալեքսանյանի կողմից առաջարկված է անիզոտրոպ սեպի խնդրի լուծման մեթոդ ուղղանկյուն կոորդինատական համակարգում։ Այստեղ այդ մեթոդը կիրառվում է իզոտրոպ սեպի համար, որի միջոցով հնարավոր է որոշել լոգարիթմական եզակիությունը։

V.M. Belubekyan, M.V. Belubekyan, S.H. Terzyan
Stress State in the Vicinity of the elastic wedge vertex

Задача определения особенности у вершины клина обычно решается в цилиндрической системе координат. Р. Алексаняном [1,2] предложен метод решения задач анизотропного клина в прямоугольной системе координат. Этот метод используется здесь для случая изотропного клина. Оказывается, что метод Алексаняна существенно упрощает решения задач изотропного клина в случаях , когда хотя бы одна из граней клина закреплена. Кроме того, решение в прямоугольной системе координат позволяет установить возможность появления логарифмической особенности.

1.Рассматривается задача плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния бесконечного упругого клина с однородными граничными условиями на гранях. Уравнения равновесия в прямоугольной декартовой координатной системе имеют вид

$$\Delta u+\frac{2}{k-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{1.1}$$

$$\Delta v+\frac{2}{k-1}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0$$

Здесь u, v – перемещения, $k=3-4\nu$ для задач плоской деформации и $k=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ – для задач обобщенного плоского напряженного состояния.

Решение системы (1.1), следуя работе Р. Алексаняна [2], представляется в виде

$$u=A(x+\beta y)^{\lambda},\quad v=B(x+\beta y)^{\lambda} \tag{1.2}$$

Подстановка (1.2) в систему (1.1), показывает, во-первых, что случай $\lambda\to 1$ следует исследовать отдельно. Согласно итоговой статье G.B.Sinclair [3] при $\lambda\to 1$ возможно появление логарифмической особенности. Во-вторых, получается, что характеристическое уравнение имеет кратные корни.

$$\beta=\pm i \tag{1.3}$$

При наличии кратных корней недостающее линейно-независимое решение можно найти путем предельного перехода, например.

$$\lim_{\gamma\to 1}\frac{(x\pm iy)^{\lambda}-(x\pm i\gamma y)^{\lambda}}{1-\gamma}=\lambda y(x+iy)^{\lambda-1} \qquad (1.4)$$

Таким образом, общее решение системы уравнений (1.1) представляется в виде:

$$\begin{aligned} u &= A_1(x+iy)^{\lambda}+A_2y(x+iy)^{\lambda-1}+A_3(x-iy)^{\lambda}+A_4y(x-iy)^{\lambda-1} \\ v &= B_1(x+iy)^{\lambda}+B_2y(x+iy)^{\lambda-1}+B_3(x-iy)^{\lambda}+B_4y(x-iy)^{\lambda-1} \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Подстановка (1.5) в систему (1.1) определяет связь между произвольными постоянными A_i и B_i

$$B_1=iA_1-\frac{k}{\lambda}A_2,\ B_2=iA_2,\ B_3=-\left(iA_3+\frac{k}{\lambda}A_4\right),\ B_4=-iA_4 \qquad (1.6)$$

Если ввести полярную систему координат

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad 0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le r<\infty \qquad (1.7)$$

то общее решение (1.5) с учетом (1.6) приведется к виду

$$u=r^{\lambda}\left[A_1e^{\lambda\theta}+A_2e^{i(\lambda-1)\theta}\sin\theta+A_3e^{-\Delta\theta}+A_4e^{-i(\lambda-1)\theta}\sin\theta\right] \qquad (1.8)$$

$$v=r^{\lambda}\left[\left(A_1-\frac{k}{\lambda}A_2\right)e^{i\lambda\theta}+iA_2e^{i(\lambda-1)\theta}\sin\theta-\left(iA_3+\frac{k}{\lambda}A_4\right)e^{-i\lambda\theta}-iA_4e^{-i(\lambda-1)\theta}\sin\theta\right]$$

2.Рассмотрим частные задачи. Пусть обе грани клина жестко закреплены

$$u=v=0 \text{ при } \theta=0,\ \varphi \qquad (2.1)$$

Непосредственная подстановка (1.8) в (2.1) приводит к известному условию существования нетривиального решения [4]

$$k\sin\lambda\varphi\pm\lambda\sin\varphi=0 \qquad (2.2)$$

определяющему показатель особенности λ.

В случае, когда грань клина $\theta=\varphi$ закреплена, а грань $\theta=0$ свободно скользит, граничные условия имеют вид

$$u_\theta=0,\ \sigma_{r\theta}=0 \text{ при } \theta=0,\quad u=v=0 \text{ при } \theta=\varphi \qquad (2.3)$$

Имея в виду известные формулы связи между полярной и прямоугольной системой координат [5]

$$\begin{aligned} &u_r=u\cos\theta+v\sin\theta,\ u_\theta=-u\sin\theta+v\cos\theta \\ &\sigma_{rr}=\sigma_{11}\cos^2\theta+\sigma_{22}\sin^2\theta+2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ &\sigma_{\theta\theta}=\sigma_{11}\sin^2\theta+\sigma_{22}\cos^2\theta-2\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \\ &\sigma_{r\theta}=(\sigma_{22}-\sigma_{11})\sin\theta\cos\theta+\sigma_{22}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{aligned} \qquad (2.4)$$

легко показать, что граничные условия (2.3) эквивалентны следующим условиям:

$$v=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0 \text{ при } \theta=0,\quad u=v=0 \text{ при } \theta=\varphi \qquad (2.5)$$

Требование, чтобы решение (1.8) удовлетворяло граничным условиям (2.5), быстро приводит к установлению известного уравнения [4], определяющего собственные значения задачи

$$k\sin 2\lambda\varphi - \lambda\sin 2\varphi = 0 \qquad (2.6)$$

Наконец, рассматривается случай, когда грань клина $\theta = \varphi$ жестко закреплена, а на грани $\theta = 0$ имеют место условия Навье (антискользящий контакт)

$$u_r = 0,\ \sigma_{\theta\theta} = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad u = v = 0 \text{ при } \theta = \varphi \qquad (2.7)$$

Несмотря на то,что условия Навье широко используются для других задач теории упругости, в частности, в теории изгиба пластин, задача с условиями Навье для клина ранее не исследовалась (по известной нам литературе). Она не приводится также в упомянутой итоговой статье [3].

Согласно (2.4), легко показать, что граничные условия (2.7) эквивалентны условиям:

$$u = 0,\ \partial v/\partial y = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad u = v = 0 \text{ при } \theta = \varphi \qquad (2.8)$$

Выражение для $\partial v/\partial y$ в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -r^{\lambda-1}\left\{\begin{array}{l}\lambda A_1 e^{i(\lambda-1)\theta} + \left[i(k-1)e^{i(\lambda-1)\theta} + (\lambda-1)e^{i(\lambda-2)\theta}\sin\theta\right]A_2 + \\ + \lambda A_3 e^{-i(\lambda-1)\theta} - \left[i(k-1)e^{-i(\lambda-1)\theta} - (\lambda-1)e^{-i(\lambda-2)\theta}\sin\theta\right]A_4\end{array}\right\} \qquad (2.9)$$

С учетом (2.9) из условий (2.8) при $\theta = 0$ получается

$$A_3 = -A_1,\ \ A_4 = A_2 \qquad (2.10)$$

Использование (2.10) в граничных условиях (2.8) при $\theta = \varphi$ приводит к следуюшей системе однородных алгебраических уравнений относительно постоянных A_1, A_2:

$$\begin{gathered} iA_1\sin\lambda\theta + A_2\sin\theta\cos(\lambda-1)\theta = 0 \\ iA_1\cos\lambda\theta - A_2\left[k\lambda^{-1}\cos\lambda\theta + \sin\theta\sin(\lambda-1)\theta\right] = 0 \end{gathered} \qquad (2.11)$$

Приравнивание нулю детерминанта системы (2.11) приводит к уравнению, определяюшему собственное значение λ

$$k\sin 2\lambda\varphi + \lambda\sin 2\varphi = 0 \qquad (2.12)$$

3 Как было указано выше, решение вида (1.2) не дает возможности исследования логарифмической особенности. Многочисленные случаи логарифмической особенности в задаче клина приведены в [3].

Нетрудно проверить, что решения с логарифмической особенностью вида

$$u = A(x \pm iy)\ln(x \pm iy), \quad v = B(x \pm iy)\ln(x \pm iy) \qquad (3.1)$$

также удовлетворяют системе уравнений (1.1). При этом, соответствующее линейно-независимое решение находится предельным переходом, аналогичным (1.4), и имеет вид

$$u = Cy\left[\ln(x \pm iy) + 1\right], \quad v = Dy\left[\ln(x \pm iy) + 1\right] \qquad (3.2)$$

Таким образом, общее решение с логарифмической особенностью запишется следующим образом:

$$\begin{gathered} u = A_1(x+iy)\ln(x+iy) + A_2 y\left[\ln(x+iy)+1\right] + \\ + A_3(x-iy)\ln(x-iy) + A_4 y\left[\ln(x-iy)+1\right] \\ v = B_1(x+iy)\ln(x+iy) + B_2 y\left[\ln(x+iy)+1\right] + \\ + B_3(x-iy)\ln(x-iy) + B_4 y\left[\ln(x-iy)+1\right] \end{gathered} \qquad (3.3)$$

Требование, чтобы решение (3.3) удовлетворяло системе (1.1), устанавливает следующие связи между постоянными A_i и B_i:

$$B_1 = iA_1 - kA_2,\ \ B_2 = iA_2,\ \ B_3 = -(iA_3 + kA_4),\ \ B_4 = -iA_4 \tag{3.4}$$

Решение (3.3) записывается в полярной системе координат. Рассматривается задача с граничными условиями (2.1), когда обе грани клина закреплены. Из удовлетворения условиям при $\theta = 0$ получается

$$2iA_1 = k(A_2 + A_4),\ \ 2iA_3 = -k(A_2 + A_4) \tag{3.5}$$

Требование, чтобы решение (3.3) (в полярной системе координат) удовлетворяло условиям (2.1) при $\theta = \varphi$, приводит к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} &[(k+1)\sin\varphi \ln r + \sin\varphi + k\varphi\cos\varphi](A_2 + A_4) + i\varphi\sin\varphi(A_2 - A_4) = 0 \\ &[(k-1)\sin\varphi \ln r - \sin\varphi + \varphi\cos\varphi](A_2 - A_4) - i\varphi\sin\varphi(A_2 + A_4) = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из (3.6) следует, что логарифмическая особенность возможна при условиях

$$k = 1,\ \ \varphi\cos\varphi - \sin\varphi = 0,\ \ \sin\varphi = 0 \tag{3.7}$$

Однако последние два условия противоречат друг другу. Следовательно, логарифмическая особенность не имеет места. В [3] другим методом получаются только первые два условия из (3.7) и этим утверждается наличие логарифмической особенности для клина с закрепленными гранями.

Аналогичным образом устанавливается невозможность появления логарифмической особенности для клина с граничными условиями (2.3) и (2.7).

Заключение. Показано, что решение в прямоугольной системе координат удобнее применять для задачи клина, когда хотя бы одна из граней клина закреплена. Получено уравнение, определяющее собственные значения для клина с условиями Навье на одной грани и закреплением на другой. Предложен метод исследования возможности логарифмической особенности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексанян Р.К. Об одном классе решений плоской задачи теории упругости анизотропного тела // ДАН Арм.ССР. 1975. Т. 61. №4. С.219-224.
2. Алексанян Р.К. Некоторые задачи упругого равновесия и термоупругой устойчивости составных изотропных и анизотропных тел с нерегулярными границами. // Докт. диссертация. Ереван, 1997. 320с.
3. Sinclair G.B. Logarithmic Stress Singularities Resulting From Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension // ASME J. of Appl. Mechanics. 1999. Vol.66. №2,P.556-560.
4. Williams M.J. Stress Singularities Resulting from Various Boundary Conditions in Angular Corners of Plates in Extension //ASME Journal of Appl. Mech. 1956. Vol. 19. P. 526-528.
5. Лехницкий С.Р. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.05.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3.01

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ С УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Шавлакадзе Н.Н.

Ն.Ն. Շավլակաձե
Առաձգական ներդիրով կլոր սալի ծռումը

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական ներդիրով կլոր սալի ծռման կոնտակտային խնդիրը. Սալի եզրը կոշտ ամրակցված է: Ներդիրի և սալի փոխազդեցության անհայտ ճիգի նկատմամբ ստացվում է սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարում: Երբ ներդիրի կոշտությունը փոխվում է հատուկ օրենքով, այսինքն երբ սինգուլյար օպերատորի գործակիցը դառնում է բարձր կարգի զրո ինտեգրման տիրույթի ծայրակետերում, հավասարումը մի կողմից բերվում է համարժեք Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման, իսկ մյուս կողմից համարժեք գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգի: Հետազոտվում է այդ համակարգի ռեգուլյարությունը

N.N.Shavlakadze
Bending of Circular Plate with Inclusion

В работе рассматривается контактная задача изгиба круглой пластинки с упругим включением. Граница пластинки жестко заделана. Относительно неизвестного контактного усилия взаимодействия включения с пластинкой получается сингулярное интегро-дифференциальное уравнение. При изменении жесткости включения специальным законом, т.е. когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль высокого порядка в концах промежутка интегрирования, уравнение сводится, с одной стороны, к эквивалентному уравнению Фредгольма второго рода, а с другой стороны, к эквивалентной системе линейных алгебраических уравнений. Исследуется эта система на регулярность.

Контактные задачи об изгибе конечных изотропных пластин, подкрепленных тонкими включениями или накладками (жесткими или упругими), рассмотрены в работах [1−4]. Эти задачи сведены к системам интегральных уравнений, характеристическая часть которых в общем случае имеет вид:

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-\tau)^2}{2}\left[\frac{a\,\mathrm{sgn}(t-\tau)}{2}+\frac{b}{\pi i}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\right]\varphi(\tau)d\tau=f(t),\qquad |t|<1 \tag{1}$$

и решение которого разыскивалось в классе функции с неинтегрируемыми особенностями с использованием аппарата регуляризации расходящихся интегралов [5].

В данной работе исследована контактная задача круглой пластинки с упругой накладкой переменной изгибной жесткости. Задача сведена к решению интегрального уравнения, характеристической частью которого является интегро-дифференциальное уравнение Прандтля, которое в некоторых условиях изучено в [6−9]. Но когда коэффициент при сингулярном операторе обращается в нуль любого порядка в концах линии интегрирования, оно эквивалентно сводится к интегральному уравнению третьего рода. Нами исследованы интегро-дифференциальные уравнения с такими коэффициентами, в некоторых условиях получены эффективные решения, установлены асимптотические оценки решения таких уравнений, на основе которого получены поведения неизвестных контактных усилий в концах упругих накладок [10−12].

Рассмотрим задачу об изгибе круглой изотропной пластинки единичного радиуса, подкрепленной тонким упругим включением переменной изгибной жесткости по отрезку: $y=0, |x|<a$ $(a<1)$. К пластинке приложена нормальная нагрузка постоянной интенсивности q, а включение свободно от нагружения. Граница пластинки жестко заделана.

Введем обозначения: $\Omega = \{(x,y)\} \,|\, x^2+y^2<1\}$, $\Gamma = \partial\Omega$, $S=\Omega\setminus[-a,a]$. Требуется найти контактные условия взаимодействия включения с пластинкой. Поставленные задачи эквивалентны отысканию решения неоднородного бигармонического уравнения:

$$D\Delta\Delta\omega(x,y)=q,\quad (x,y)\in S \tag{2}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$\omega=0,\ \partial\omega/\partial n=0,\quad (x,y)\in\Gamma \tag{3}$$

и условиям на включение в силу симметрии задачи относительно прямой $y=0$:

$$\langle w\rangle=\langle w'_y\rangle=\langle M_y\rangle=0,\ \langle N_y\rangle=\mu(x),\ \mu(x)=\mu(-x),\ |x|<a,\ |y|=0 \tag{4}$$

Здесь использовано обозначение: $\langle f\rangle = f(x-0)-f(x+0)$, ω – прогиб пластинки, D – цилиндрическая жесткость пластинки, ω'_y, M_y, N_y – соответственно угол поворота, изгибающий момент и обобщенная поперечная сила в пластинке, $\mu(x)$ – неизвестное усилие взаимодействия включения с пластинкой, причем $\mu(x)\equiv 0$ при $|x|>a$, n – внешняя нормаль границы пластинки.

Считая концы включения свободными, относительно прогиба включения $\omega_0(x)$ получаются следующие условия:

$$\frac{d^2}{dx^2}D_0(x)\frac{d^2\omega_0(x)}{dx^2}=-\mu(x),\qquad |x|<a \tag{5}$$

$$D_0(x)\omega''_0(x)\Big|_{x=\pm a}=0,\quad \left[D_0(x)\omega''_0(x)\right]'\Big|_{x=\pm a}=0 \tag{6}$$

где $D_0(x)=E_0(x)h_0^3(x)/12$ – жесткость включения на изгиб, $E_0(x)$ – модуль упругости ее материала, $h_0(x)$ – ее толщина.

Условия (6) эквивалентны обычным статическим условиям равновесия включения:

$$\int_{-a}^{a}\mu(t)dt=0,\quad \int_{-a}^{a}t\mu(t)dt=0 \tag{7}$$

На участке контакта $[-a,a]$ упругого включения с пластинкой выполняется условие

$$\omega(x,0)=\omega_0(x) \tag{8}$$

Решение краевой задачи (2)-(8) будем искать в Банаховом пространстве $W(\Omega)$ функций $\omega(x,y)$, удовлетворяющих условиям (3), имеющих суммируемые вторые производные с нормой

$$\|\omega\|_W = \left(\iint\limits_{\Omega} \left[(\Delta\omega)^2 - 2(1-\sigma)\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\right)^2 \right) \right] d\Omega \right)^{1/2}$$

С точки зрения механики это пространство описывает класс функций прогибов, для которых потенциальная энергия изгиба пластинки положительна и конечна. Доказывается, что в этом классе поставленная задача (2)-(8) имеет единственное решение.

Общее решение уравнения (2) представляется в виде:

$$\omega(x,y) = \omega_1(x,y) + \omega_2(x,y)$$

где $\omega_1(x,y)$ – частное решение, например, $\omega_1(x,y) = q(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)/64D$, а $\omega_2(x,y)$ удовлетворяет однородному уравнению: $\Delta\Delta\omega_2 = 0$ с неоднородными граничными условиями:

$$\omega_2 = -\omega_1, \quad \frac{\partial\omega_2}{\partial n} = -\frac{\partial\omega_1}{\partial n}, \quad (x,y)\in\Gamma \tag{9}$$

Как известно [13], бигармоническая функция представляется формулой Гурса.

$$\omega_2(x,y) = 2\,\mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] \tag{10}$$

где $\varphi(z)$, $\chi(z)$ – функции комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфные в S. Для изгибающих моментов M_x и M_y, скручивающего момента H_{xy} и перерезывающих сил N_x, N_y имеют место формулы [14]

$$\begin{gathered} M_y - M_x + 2iH_{xy} = 4(1-\sigma)D\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] \\ M_x + M_y = -8(1+\sigma)D\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z),\ N_x - iN_y = -8D\varphi''(z) \end{gathered} \tag{11}$$

где $\psi(z) = \chi'(z)$, σ – коэффициент Пуассона.

Введем в рассмотрение новую функцию $\Omega_0(z)$ равенством

$$\Omega_0(z) = z\varphi'(z) + \psi(z)$$

тогда из первых двух условий (4) получается

$$\left[\varphi(t) - \overline{\Omega_0(t)}\right]^- - \left[\varphi(t) - \overline{\Omega_0(t)}\right]^+ = 0, \quad t\in(-a,a)$$

откуда имеем

$$\varphi(z) - \overline{\Omega_0(\bar{z})} = F_{01}(z), \quad z\in\Omega \tag{12}$$

где функция $F_{01}(z)$ голоморфна в области Ω.

Учитывая формулы (11), из двух последних условий (4) имеем

$$\begin{gathered} \left[\varphi''(t) + \overline{\varphi''(t)}\right]^- - \left[\varphi''(t) + \overline{\varphi''(t)}\right]^+ = 0 \\ \left[\varphi''(t) - \overline{\varphi''(t)}\right]^- - \left[\varphi''(t) - \overline{\varphi''(t)}\right]^+ = \frac{i\mu(t)}{4D} \end{gathered} \quad |t| < a$$

Складывая последние условия, получим:

$$\varphi''^{+}(t) - \varphi''^{-}(t) = -\frac{i\mu(t)}{8D} \quad |t| < a \tag{13}$$

Функция $\mu(t)$ может иметь неинтегрируемые особенности на сегменте $[-a,a]$, учитывая проведенные в [4] доказательства о перенесенных результатах монографий [15] на регуляризованные значения расходящихся интегралов [5], тогда решение граничной задачи (13) дается формулой:

$$\varphi^*(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{\mu(t)dt}{t-z} + F_{02}(z), \quad z \in \Omega \tag{14}$$

где $F_{02}(z)$ – голоморфная функция в области Ω.

На основании формул (12), (14), функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ представляются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}(t-z)\ln(t-z)\mu(t)dt + F_1(z)\\ \psi(z) &= -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t\ln(t-z)\mu(t)dt + F_2(z) \qquad z \in \Omega\end{aligned} \tag{15}$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ – голоморфные в Ω функции, подлежащие определению.

Для определения этих функций в силу условий (9) на границе круга, получается следующее граничное условие:

$$F_1(t) + t\overline{F_1'(t)} + \overline{F_2(t)} = -f_1(t) - t\overline{f_1'(t)} - \overline{f_2(t)} - qt/16D \tag{16}$$

где

$$f_1(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}(t-z)\ln(t-z)\mu(t)dt, \quad f_2(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t\ln(t-z)\mu(t)dt$$

– аналитические функции в области S.

Переходя к сопряженным значениям в условии (16), по формуле Коши имеем:

$$\begin{aligned}F_1(z) + \bar{a}_1 z + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_0' &= -z\overline{f_1'\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} + \overline{f_2\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} - \frac{qz}{16D}\\ \bar{a}_0 + \frac{F_1'(z)}{z} - \frac{a_1}{z} + F_2(z) &= -f_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\end{aligned} \tag{17}$$

где постоянные a_1, a_2, a_0, a_0' – коэффициенты разложения функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ (т.е. $F_1(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, $F_2(z) = a_0' + a_1' z + \ldots$), они определяются из следующих соотношений:

$$a_0 + 2\bar{a}_2 + \bar{a}_0' = 0, \; a_1 + \bar{a}_1 = -\frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t^2\mu(t)dt - \frac{q}{16D}, \; 2a_2 = \frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}t^3\mu(t)dt$$

Предыдущие формулы показывают, что если функция $\mu(t)$ найдена, то определены постоянные a_2 и $\mathrm{Re}\,a_1$, поэтому, как и следовало ожидать, функция $\varphi(z)$ определяется с точностью до выражения $Ciz + \gamma$, где C – действительная, а γ – комплексная произвольные постоянные, а функция $\psi(z)$ – с точностью комплексного постоянного γ'.

Из формул (17) определяются искомые функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$:

$$F_1(z) = -\bar{a}_1 z - 2\bar{a}_2 - \bar{a}_0' - z\bar{f}_1(1/z) - \bar{f}_2(1/z) - qz/16D$$

$$F_2(z) = -a_0 + (a_1 + \bar{a}_1)/z - \bar{f}_1(1/z) + \bar{f}_1'(1/z)/z - \bar{f}_1''(1/z)/z^2 - \bar{f}_2'(1/z)/z^3 + q/16Dz \tag{18}$$

Приняв во внимание последние формулы, условие контакта (8) и формулу (15), дифференциальное уравнение изгиба включения (5) примет вид

$$\frac{1}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\ln|t-x|\mu(t)dt - \frac{1}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\ln|tx-1|\mu(t)dt - \frac{2x^2-1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^2\mu(t)}{tx-1}dt +$$
$$+\frac{3x^2-1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^2\mu(t)}{(tx-1)^3}dt + \frac{x-2x^3}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^3\mu(t)}{(tx-1)^2}dt + \frac{1}{16\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{t^4\mu(t)}{(tx-1)^2}dt -$$
$$-\frac{q}{8D} - 2\,\mathrm{Re}\,a_1 = -\frac{1}{D_0(x)}\int_{-a}^{x}dt\int_{-a}^{t}\mu(\tau)d\tau$$

Вводя обозначение: $\lambda(x) = \int_{-a}^{x}dt\int_{-a}^{t}\mu(\tau)d\tau$, приходим к интегро-дифференциальному уравнению:

$$\lambda(x) - \frac{D_0(x)}{8\pi D}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda'(t)dt}{t-x} + \frac{D_0(x)}{8\pi D}\int_{-a}^{a}R(x,t)\lambda'(t)dt = f_0 D_0(x), \quad |x| < a \tag{19}$$

при условии

$$\lambda(\pm a) = 0, \quad \lambda'(\pm a) = 0 \tag{20}$$

где

$$R(x,t) = \frac{x}{tx-1} + \frac{(2x^2-1)t^2x}{2(tx-1)^2} + \frac{2t(3x^2-1) - (x-2x^3)(t^3x-3t^2) - 2t^3(tx-2)}{2(tx-1)^3} -$$
$$-2t, \quad f_0 = q/16D$$

Когда коэффициент при сингулярном операторе в (19) изменяется по следующему закону: $D_0(x) = \sqrt{a^2-x^2}\,d(x)$, ($d(x)$ – любая непрерывная функция на сегменте $[-a,a]$, $d(x) > 0$), уравнение (19)-(20) можно свести к квазирегулярному интегральному уравнению [8]. Весьма простым способом, изложенным в работах [6–7], можно получить регулярное интегральное уравнение, эквивалентное интегро-дифференциальному уравнению (19)-(20), которое допускает эффективное решение, когда $d(x)$ – рациональная функция.

Уравнение (19) запишем в следующем виде:

$$K\lambda = \Pi\lambda + R\lambda = f_0 \tag{21}$$

где Π – характеристическая часть оператора K, т.е.

$$\Pi\lambda = \frac{\lambda(x)}{D_0(x)} - \frac{\lambda_0}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\lambda'(t)dt}{t-x}, \quad |x| < a, \quad \lambda_0 = \frac{1}{8D}$$

$$R\lambda=\int_{-a}^{a}R_0(x,t)\lambda(t)dt,\quad R_0(x,t)=-R_t'(x,t)$$

Перепишем (21) в виде

$$\Pi\lambda=f_0-R\lambda$$

и решим предыдущее уравнение, как если бы правая часть была заданной функцией. В работе [10] доказано, что последнее уравнение имеет единственное решение и оно представляется в явном виде при коэффициенте: $D_0(x)=d_0(a^2-x^2)^{n-1/2}$, $d_0=\mathrm{const}$, $n\geq 1$ – натуральное число. (Метод построения решения проходит и в том случае, когда $D_0(x)=(a^2-x^2)^{n+1/2}P(x)$, где $P(x)$ – рациональная функция).

На основании результатов [10] имеем:

$$\lambda(x)+K^*R\lambda=K^*f_0+\int_0^x\frac{\cos[Q(t)-Q(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\frac{1}{(a-t)^k}-\frac{1}{(a+t)^k}\right]dt \quad (22)$$

где

$$K^*g=-\frac{1}{\lambda_0}\int_0^x\sin[Q(t)-Q(x)]g(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\pi\lambda_0}\int_0^x\frac{\cos[Q(t)-Q(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}\left[\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}\,g(\tau)d\tau}{\tau-t}\right]dt$$

$$K^*f_0=-\frac{f_0}{\lambda_0}\int_0^x\sin[Q(t)-Q(x)]g(t)dt-\frac{f_0}{\lambda_0}\int_0^x\frac{t\cos[Q(t)-Q(x)]}{\sqrt{a^2-t^2}}dt$$

$$Q(x)=\frac{1}{\lambda_0}\int_0^x\frac{dt}{D_0(t)}$$

A_k $(k=1,2,...,n)$ – неизвестные постоянные.

К уравнению (22) следует присоединить еще следующую систему уравнений:

$$\lim_{z+a|\to 0}\left\{\frac{\lambda_0 i}{a}F_\lambda(0)D_0(0)+i\lambda_0\int_0^z A_\lambda'(t)e^{iQ(t)}dt\right\}=$$

$$=\lim_{z+a\to 0}\left\{\Phi(0)+\frac{\lambda_0 i}{a}F_{f_0}(0)D_0(0)+i\lambda_0\int_0^z A_{f_0}'(t)e^{iQ(t)}dt\right\} \quad (23)$$

$$\frac{2\pi(2j-2)}{2n-1}\leq\arg(z+a)<\frac{2\pi(2j-1)}{2n-1},\quad j=1,2,...,n$$

где

$$\Phi(0)=-\lim_{z\to\infty}\int_0^z\frac{F_{f_0}(t)-F_\lambda(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}e^{iQ(t)}dt$$

$$F_{f_0}(z)=\frac{f_0}{2\lambda_0}(\sqrt{z^2-a^2}-z)+\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\frac{1}{(a-z)^k}-\frac{1}{(a+z)^k}\right] \quad (24)$$

$$F_\lambda(z)=\frac{1}{2\pi\lambda_0}\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-t^2}}{t-z}\left[\int_{-a}^{a}R_0(t,s)\lambda(s)ds\right]dt$$

$$A_{f_0}(z)=d_0(a^2-z^2)^n F_{f_0}(z),\ A_\lambda(z)=d_0(a^2-z^2)^n F_\lambda(z)$$

$$\lambda(0)=2\Phi_+(0),\ \Phi(z)=e^{-iQ(z)}\left[\Phi(0)+\int_0^z\frac{F_{f_0}(t)-F_\lambda(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}e^{iQ(t)}dt\right]$$

Таким образом, исходное интегро-дифференциальное уравнение эквивалентно уравнению (22) и совокупности уравнений (23)-(24). Уравнение (21) представляет собой уравнение Фредгольма второго рода, его можно преобразовать следующим образом:

$$\lambda(x)+d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}\int_{-a}^{a}D(x,t)\lambda(t)dt=d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}g(x),\quad |x|<a \quad (25)$$

где

$$D(x,t)=R_0(x,t)-\frac{[a^{2n+1}R(0,t)+K_1(x,t)+L_1(x,t)/\pi]\cos Q(x)}{(a^2-x^2)^{n+1/2}}-$$

$$-\frac{[a^{2n}L(0,t)/\pi+K_2(x,t)+L_2(x,t)/\pi]\sin Q(x)}{(a^2-x^2)^{n+1/2}}$$

$$g(x)=f_0+\frac{\left[\lambda(0)-d_0a^{2n+1}f_0-\int_0^x B_1'(t)\cos Q(t)dt-\lambda_0\int_0^x B_2'(t)\sin Q(t)dt\right]}{d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}}\times$$

$$\times\cos Q(x)+\frac{\left[-\int_0^x B_1'(t)\sin Q(t)dt+\lambda_0\int_0^x B_2'(t)\cos Q(t)dt\right]\sin Q(x)}{d_0(a^2-x^2)^{n+1/2}}$$

$$B_1(t)=f_0(a^2-t^2)^{n+1/2},\ B_2(t)=(a^2-t^2)^n\left\{-\frac{f_0}{\lambda_0}t+\sum_{k=1}^{n}A_k\left[\frac{1}{(a-t)^k}-\frac{1}{(a+t)^k}\right]\right\}$$

$$K_1(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n R_0(t,s)\right]_t'\cos Q(t)dt$$

$$L_1(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n L(t,s)\right]_t'\sin Q(t)dt$$

$$K_2(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n R_0(t,s)\right]_t'\sin Q(t)dt$$

$$L_2(x,s)=\int_0^x\left[(a^2-t^2)^n L(t,s)\right]_t'\cos Q(t)dt$$

$$L(t,s)=\int_{-a}^{a}\frac{\sqrt{a^2-\tau^2}R_0(\tau,s)}{t-\tau}d\tau$$

Заметим, что $D(x,t)$, по крайней мере, дважды дифференцируемая функция в квадрате $-a\le(x,t)\le a$, а $g(x)$ – на интервале $[-a,a]$

Переходя к промежутку [-1, 1] с помощью замены $x=ay$, $t=a\tau$, из (25) получим уравнение:

$$\lambda_0(y)+\nu_0(1-y^2)^{n+1/2}\int_{-1}^{1}D_0(y,\tau)\lambda_0(\tau)d\tau=\nu_0(1-y^2)^{n+1/2}g_0(y),\ |y|<1 \quad (26)$$

где приняты следующие обозначения:

$$\lambda_0(y)\equiv\lambda(ay),\ D_0(y,\tau)\equiv D(ay,a\tau),\ g_0(y)\equiv f(ay),\ \nu_0\equiv d_0a^{2n+1}$$

Теперь изложим методику сведения последнего интегрального уравнения к эквивалентной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. С указанной целью, исходя из асимптотического поведения решения характеристического уравнения [10] , решение представим бесконечным рядом:

$$\lambda_0(y)=(1-y^2)^{n+1/2}\sum_{k=0}^{\infty}a_{2k}P_{2k}^{(n+1/2,n+1/2)}(y) \qquad (27)$$

с неизвестными коэффициентами a_{2k}, $(k=0,1,...)$ из пространства ограниченных числовых последовательностей. $P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(y)$ – полиномы Якоби, $(P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(y)=P_{2k}^{(\alpha,\alpha)}(-y))$.

Далее, (27) подставим в уравнение (26), умножим последнее равенство на $P_{2m}^{(n+1/2,n+1/2)}(y)$, проинтегрируем от -1 до 1, примем во внимание условие ортогональности полиномов Якоби [16], для определения неизвестных коэффициентов a_{2k} получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)}{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}a_{2m}+\nu_0\sum_{k=0}^{\infty}D_{2k,2m}a_{2k}=g_{2m},\quad m=0,1,... \quad (28)$$

где

$$D_{2k,2m}=\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{n+1/2}P_{2m}^{(n+1/2,n+1/2)}(y)dy\int_{-1}^{1}(1-\tau^2)^{n+1/2}P_{2k}^{(n+1/2,n+1/2)}(\tau)D_0(y\tau)d\tau$$

$$g_{2m}=\nu_0\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{n+1/2}P_{2m}^{(n+1/2,n+1/2)}(y)g_0(y)dy$$

Теперь приступим к исследованию бесконечной системы (28) на регулярность, для этого ее перепишем в следующем виде

$$a_{2m}-\nu_0\sum_{k=0}^{\infty}\tilde{D}_{2k,2m}a_{2k}=\tilde{g}_{2m},\quad m=0,1,... \qquad (29)$$

где

$$\widetilde{D}_{2k,2m} = \frac{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)} D_{2k,2m}$$

$$\widetilde{g}_{2m} = \frac{(2m)!(2m+n+1)\Gamma(2m+2n+2)}{2^{2n+1}\Gamma^2(2m+n+3/2)} g_{2m}$$

Применяя формулу Стирлинга для Гамма-функции и формулу Родрига для многочленов Якоби [17], получим:

$$\frac{\Gamma^2(2m+n+3/2)}{(2m!)\Gamma(2m+2n+2)} \to 1 \text{ при } m \to \infty$$

$$g_{2m} = \frac{\nu_0}{2^2 2m(2m-1)} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{n+5/2} P_{2m-2}^{(n+5/2,n+5/2)}(y) \frac{\partial^2 g_0(y)}{\partial y^2} dy$$

$$D_{2k,2m} = \frac{1}{2^4 2k(2k-1)2m(2m-1)} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^{n+5/2} P_{2m-2}^{(n+5/2,n+5/2)}(y) dy \times$$

$$\times \int_{-1}^{1} (1-\tau^2)^{n+5/2} P_{2k-2}^{(n+5/2,n+5/2)}(\tau) \frac{\partial^4 D_0(y,\tau)}{\partial y^2 \partial \tau^2} d\tau$$

Эти представления позволяют утверждать, что

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} \widetilde{D}_{2k,2m}^2 < \infty, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{g}_{2m}^2 < \infty$$

Таким образом, бесконечная система (28) при любом $\nu_0 > 0$ квазивполне регулярна [17].

Правую часть системы (29) можно представить в виде

$$\widetilde{g}_{2m} = \widetilde{g}_{2m}^f + \lambda(0)\widetilde{g}_{2m}^0 + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}_{2m}^i A_i, \quad m = 0,1,\ldots$$

Решение бесконечной системы при правой части, равной $\widetilde{g}_{2m}^f$, обозначим через a_{2m}^f, при первой части $\widetilde{g}_{2m}^0$ – через a_{2m}^0, а при правой части $\widetilde{g}_{2m}^i$ – через a_{2m}^i, тогда

$$a_{2m} = a_{2m}^f + \lambda(0)a_{2m}^0 + \sum_{i=1}^{n} a_{2m}^i A_i, \qquad m = 0,1,\ldots$$

Подставляя эти формулы в (23)-(24), получается конечная система алгебраических уравнений относительно постоянных $\lambda(0)$, $\Phi(0)$, A_i $(i = 1,2,\ldots,n)$.

Теорема единственности поставленной задачи, эквивалентность исходного интегро-дифференциального уравнения (19)-(20), с одной стороны, к интегральному уравнению (25) Фредгольма второго рода, а с другой стороны, к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений (29), позволяют сделать заключение:

Однородная система уравнений, соответствующая системе (29), имеет в l_2 тривиальное решение, а неоднородная система (29) имеет единственное решение, каковой бы ни была последовательность правых частей из l_2 [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. Онищук О.В., Попов Г.Я. О некоторых задачах пластин с трещинами и тонкими включениями //Изв.АН СССР. МТТ. 1980. № 4. С.141-150.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 342 с.
3. Онищук О.В., Попов Г.Я., Процеров Ю.С. О некоторых контактных задачах для подкрепленных пластин // ПММ.1984. Т. 48. №2. С. 307-314.
4. Онищук О.В., Попов Г.Я., Фаршайт П.Г. Об особенностяхконтактных усилий при изгибе пластин с тонкими включениями // ПММ. 1986. Т.50. № 2. С.293-302.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958. 439 с.
6. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // ПММ. 1945. Т.9. № 2. С.143-150.
7. Магнарадзе А.Г. Об одном интегральном уравнении теории крыла самолета // Сообщ. АН ГССР. 1942. Т.3. № 6. С.503-508.
8. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
9. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 254 с.
10. Shavlakadze N. On some contact problems for bodies with elastic inclusion // Georg. Math. J. 1998. V.5. № 3. PP.285-300.
11. Shavlakadze N. A contact problem of the Interection of a semi-finite inclusion with a plate // Georg.Math. J. 1999. V.6. № 5. PP.489-500.
12. Shavlakadze N. On singularities of contact stress upon tension and bending of plates with elastic inclusion // Prof. of A. Razmadze math. Inst. 1999. 120. PP.135-147.
13. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 599 с.
14. Фридман М.М. О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит //ПММ. 1941.Т.5. № 1. С.93-102.
15. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.М.: Наука, 1966. 707 с.
16. Сеге Г. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
17. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.

Тбилисский математический
институт им. А.М. Размадзе

Поступила в редакцию
26.12.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3

О ЧАСТОТАХ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ И ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ В СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г.

Լ. Ա. Աղալովյան, Լ.Գ. Ղուլղազարյան

Օրթոտրոպ սալի խառը եզրային խնդրում սեփական տատանումների հաճախությունների և սահմանային շերտի մասին

Ելնելով առաձգականության մաթեմատիկական տեսության եռաչափ խնդրի դինամիկ հավասարումներից ասիմպտոտիկ եղանակով դուրս են բերված սալի սեփական տատանումների հաճախությունների որոշման հավասարումները: Ապացուցված է, որ գոյություն ունեն սեփական արժեքների երեք խումբ: Երկու խմբերը համապատասխանում են լայնական տատանումներին, իսկ երրորդը՝ երկայնական: Որոշված է սահմանային շերտի լուծումը, արտածված է բնութագրիչ հավասարում, որի արմատները որոշում են սահմանային շերտի մեծությունների մարման արագությունը: Ցույց է տրված, որ սեփական արժեքների յուրաքանչյուր խմբին համապատասխանում է սահմանային ֆունկցիաների իր դասը:

L. A. Agbalovian, L.G. Ghulghazaryan

About frequencies of free vibrations and boundary layer of orthotropic plate in the mixed boundary problem

Исходя из динамических уравнений трехмерной задачи математической теории упругости, асимптотическим методом выведены уравнения для определения частот собственных колебаний пластин. Доказано, что существуют три группы собственных значений для случая, когда одна из лицевых поверхностей свободна, а на другой поверхности заданы смешанные граничные условия. Двум группам собственных значений соответствуют сдвиговые колебания, а третьей группе – продольные колебания. Построено решение пограничного слоя, показано, что каждой частоте собственных колебаний соответствует свое семейство пограничных функций.

Собственные колебания ортотропной пластины, когда на одной из ее лицевых поверхностей заданы однородные условия относительно компонентов тензора напряжений, а на другой — однородные условия относительно вектора перемещения, рассмотрены в [1]. В данной работе, исходя из динамических уравнений трехмерной задачи математической теории упругости, асимптотическим методом выведены уравнения для определения частот собственных колебаний пластин при других, представляющих наибольший интерес, случаях граничных условий. Доказано, что существуют три группы собственных значений для случая, когда одна из лицевых поверхностей свободна, а на другой заданы смешанные граничные условия. Двум группам собственных значений соответствуют сдвиговые колебания, а третьей группе — продольные колебания. Построено решение пограничного слоя и показано, что каждой частоте собственных колебаний соответствует свое семейство пограничных функций.

1. Требуется определить ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи математической теории упругости для ортотропного тела [2,3] в области $D = \{x, y, z : x, y \in D_0, |z| \le h\}$, занятой

пластиной, где D_0 — срединная поверхность пластины, характерный размер которой ℓ $(h<<\ell)$, при следующих однородных условиях:
на лицевой поверхности $z=h$

$$\sigma_{xz}(h)=0,\quad \sigma_{yz}(h)=0,\quad \sigma_{zz}(h)=0 \tag{1.1}$$

на поверхности $z=-h$ одна из следующих трех групп условий:

$$1)\ W(-h)=0,\ \sigma_{xz}(-h)=0,\ \ \sigma_{yz}(-h)=0 \tag{1.2}$$

$$2)\ W(-h)=0,\ U(-h)=0,\ \ \sigma_{yz}(-h)=0 \tag{1.3}$$

$$3)\ W(-h)=0,\ \sigma_{xz}(-h)=0,\ \ V(-h)=0 \tag{1.4}$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде:

$$U=\bar{u}(x,y,z)e^{i\omega t},$$

$$\sigma_{nm}=\sigma_{ik}(x,y,z)e^{i\omega t},\ \ n,m=x,y,z;\ \ i,k=1,2,3;\ \ (U,V,W) \tag{1.5}$$

Перейдем затем к безразмерным переменным $\xi=x/\ell$, $\eta=y/\ell$, $\zeta=z/h$ и безразмерным компонентам вектора перемещения $u=\bar{u}/\ell$, $\mathrm{v}=\bar{\mathrm{v}}/\ell$, $w=\bar{w}/\ell$. После подстановки (1.5) в динамические уравнения и замены переменных придем к следующей системе

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2u=0,\qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial\eta}=a_{44}\sigma_{23}\\
\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2\mathrm{v}=0,\qquad \varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}+\frac{\partial w}{\partial\xi}=a_{55}\sigma_{13}\\
\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\zeta}+\varepsilon^{-2}\omega_*^2w=0,\qquad \frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\xi}=a_{66}\sigma_{12}\\
\frac{\partial u}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33},\qquad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}\\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33},\quad \omega_*^2=\rho h^2\omega^2,\quad \varepsilon=h/\ell
\end{gathered} \tag{1.6}$$

Система (1.6) представляет собой сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений, решение которой будем искать в виде

$$\sigma_{ik}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{ik}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\ u=\varepsilon^s u^{(s)}(\xi,\eta,\zeta),\quad s=\overline{0,N}\qquad (u,\mathrm{v},w) \tag{1.7}$$

где σ_{ik} — любая из компонент тензора напряжений. Подставив (1.7) в (1.6), получим систему для определения $\sigma_{ik}^{(s)}, u^{(s)}, \mathrm{v}^{(s)}, w^{(s)}$. Из этой системы все $\sigma_{ik}^{(s)}$ можно выразить через функции $u^{(s)}, \mathrm{v}^{(s)}, w^{(s)}$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{12}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\Delta_{22}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}-\Delta_{23}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}\right]\\
\sigma_{22}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{33}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\Delta_{12}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}-\Delta_{13}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}\right]\\
\sigma_{33}^{(s)}&=\frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{11}\frac{\partial w^{(s)}}{\partial\zeta}-\Delta_{13}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\Delta_{23}\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\xi}\right]
\end{aligned} \tag{1.8}$$

$$\sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(s)}}{\partial\zeta}\right],\qquad \sigma_{12}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma_{23}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$\Delta=a_{12}\Delta_{12}+a_{22}\Delta_{33}-a_{23}\Delta_{13}$, $\Delta_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$, $\Delta_{22}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2$

$\Delta_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2$, $\Delta_{12}=a_{13}a_{23}-a_{12}a_{33}$, $\Delta_{13}=a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}$

$\Delta_{23}=a_{22}a_{13}-a_{12}a_{23}$

функции же $u^{(s)},v^{(s)},w^{(s)}$ определяются из уравнений:

$$\frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_*^2u^{(s)}=R_u^{(s-1)},\quad \frac{\partial^2 v^{(s)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\omega_*^2v^{(s)}=R_v^{(s-1)}$$

$$\Delta_{11}\frac{\partial^2 w^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\omega_*^2w^{(s)}=R_w^{(s-1)}$$

$$R_u^{(s-1)}=-\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-a_{55}\left[\frac{\partial\sigma_{11}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right] \tag{1.9}$$

$$R_v^{(s-1)}=-\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-a_{44}\left[\frac{\partial\sigma_{12}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

$$R_w^{(s-1)}=\Delta_{13}\frac{\partial^2 v^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}+\Delta_{23}\frac{\partial^2 u^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\Delta\left[\frac{\partial\sigma_{13}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right]$$

2. Для определения частот собственных колебаний рассмотрим соотношения и уравнения (1.8), (1.9) для исходного приближения $s=0$. Учитывая, что $R_j^{(m)}=0$, $j=u,v,w$ при $m<0$, имеем уравнения:

$$\frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{55}\omega_*^2u^{(0)}=0$$

$$\frac{\partial^2 v^{(0)}}{\partial\zeta^2}+a_{44}\omega_*^2v^{(0)}=0 \tag{2.1}$$

$$\Delta_{11}\frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\Delta\omega_*^2w^{(0)}=0$$

а для компонент тензора напряжений получим:

$$\sigma_{13}^{(0)}=\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial u^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{23}^{(0)}=\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial v^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{12}^{(0)}=0$$

$$\sigma_{22}^{(0)}=-\frac{\Delta_{13}}{\Delta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{33}^{(0)}=\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\zeta},\ \sigma_{11}^{(0)}=-\frac{\Delta_{23}}{\Delta}\frac{\partial w^{(0)}}{\partial\zeta} \tag{2.2}$$

Решения уравнений (2.1) будем искать в виде

$$u^{(0)}=u_1^{(0)}(\xi,\eta)u_0^{(0)}(\zeta),\ v^{(0)}=v_1^{(0)}(\xi,\eta)v_0^{(0)}(\zeta),\ w^{(0)}=w_1^{(0)}(\xi,\eta)w_0^{(0)}(\zeta) \tag{2.3}$$

В результате имеем

$$u^{(0)} = C_1^{(0)} \sin\sqrt{a_{55}}\omega_{.}\zeta + C_2^{(0)} \cos\sqrt{a_{55}}\omega_{.}\zeta$$
$$v^{(0)} = C_3^{(0)} \sin\sqrt{a_{44}}\omega_{.}\zeta + C_4^{(0)} \cos\sqrt{a_{44}}\omega_{.}\zeta \tag{2.4}$$
$$w^{(0)} = C_5^{(0)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{.}\zeta + C_6^{(0)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{.}\zeta$$

$$C_i^{(0)}(\xi,\eta) = u_1^{(0)} c_i^{(0)}, \quad C_k^{(0)}(\xi,\eta) = v_1^{(0)} c_k^{(0)}$$
$$C_j^{(0)}(\xi,\eta) = w_1^{(0)} c_j^{(0)}, \quad i = 1,2; \; k = 3,4; \; j = 5,6 \tag{2.5}$$

Рассмотрим данную задачу при граничных условиях (1.1), (1.2). По формулам (2.2) определяются компоненты тензора напряжений и, удовлетворяя этим граничным условиям, придем к трем независимым однородным алгебраическим системам уравнений. Из разрешимости этих систем (определители равны нулю), получим следующие характеристические уравнения и значения частот собственных колебаний. Возможны следующие четыре случая для сдвиговых собственных колебаний:

а) $\sin\sqrt{a_{55}}\omega_{*} = 0 \Rightarrow \quad \omega_{*n}^{(1)} = \pi n/\sqrt{a_{55}}$

$$\sin\sqrt{a_{44}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi n/\sqrt{a_{44}} \qquad n \in N \tag{2.6}$$

б) $\cos\sqrt{a_{55}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}})$

$$\sin\sqrt{a_{44}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi n/\sqrt{a_{44}} \qquad n \in N \tag{2.7}$$

в) $\sin\sqrt{a_{55}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)} = \pi n/\sqrt{a_{55}}$

$$\cos\sqrt{a_{44}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N \tag{2.8}$$

г) $\cos\sqrt{a_{55}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}})$

$$\cos\sqrt{a_{44}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)} = \pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \qquad n \in N \tag{2.9}$$

а для продольных собственных колебаний имеем:

$$\cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{*} = 0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(p)} = \pi(2n-1)\sqrt{\Delta_{11}/\Delta}/4 \quad n \in N \tag{2.10}$$

Собственными функциями собственных сдвиговых колебаний являются

а) $u^{(0)} = C_{2n}^{(0)} \cos\pi n\zeta, \quad v^{(0)} = C_{4n}^{(0)} \cos\pi n\zeta$ (2.11)

б) $u^{(0)} = C_{1n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2, \; v^{(0)} = C_{4n}^{(0)} \cos\pi n\zeta$ (2.12)

в) $u^{(0)} = C_{2n}^{(0)} \cos\pi n\zeta, \quad v^{(0)} = C_{3n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2$ (2.13)

г) $u^{(0)} = C_{1n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2, \quad v^{(0)} = C_{3n}^{(0)} \sin\pi(2n-1)\zeta/2$ (2.14)

а для собственных продольных колебаний:

$$w^{(0)} = \frac{C_{6n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4}\cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4 \tag{2.15}$$

В случае граничных условий (1.1), (1.3), тем же способом можно получить частоты и функции собственных сдвиговых колебаний. Придем к следующим двум случаям:

а) $\cos 2\sqrt{a_{55}}\omega_{*} = 0 \Rightarrow \quad \omega_{*n}^{(1)} = \pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{55}}) \quad n \in N$ (2.16)

$$u^{(0)} = \frac{C_{2n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4}\cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

$$\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*}=0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)}=\pi n/\sqrt{a_{44}} \qquad n\in N \tag{2.17}$$

$$v^{(0)}=C_{4n}^{(0)}\cos\pi n\zeta$$

б) $$\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*}=0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)}=\pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{55}}) \qquad n\in N \tag{2.18}$$

$$u^{(0)}=\frac{C_{2n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4}\cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

$$\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*}=0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)}=\pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{44}}) \qquad n\in N \tag{2.19}$$

$$v^{(0)}=C_{3n}^{(0)}\sin\pi(2n-1)\zeta/2$$

а для продольных колебаний частоты определятся по формулам (2.10), а собственные функции — по формулам (2.15).

Граничным условиям (1.1), (1.4) соответствуют:

а) $$\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*}=0 \Rightarrow \omega_{*n}^{(1)}=\pi n/\sqrt{a_{55}} \qquad n\in N \tag{2.20}$$

$$u^{(0)}=C_{2n}^{(0)}\cos\pi n\zeta$$

$$\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*}=0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)}=\pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{44}}) \qquad n\in N \tag{2.21}$$

$$v^{(0)}=\frac{C_{4n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4}\cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

б) $$\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*}=0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(1)}=\pi(2n-1)/(2\sqrt{a_{55}}) \tag{2.22}$$

$$u^{(0)}=C_{1n}^{(0)}\sin\pi(2n-1)\zeta/2$$

$$\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*}=0 \;\Rightarrow\; \omega_{*n}^{(2)}=\pi(2n-1)/(4\sqrt{a_{44}}) \qquad n\in N \tag{2.23}$$

$$v^{(0)}=\frac{C_{4n}^{(0)}}{\cos\pi(2n-1)/4}\cos\pi(2n-1)(1-\zeta)/4$$

а для продольных колебаний частоты определятся по формулам (2.10), а собственные функции — по формулам (2.15).

3. Рассмотрим вклад высших приближений. Решение системы (1.9) будет зависеть от того, какое значение ω_{*} взято за основу вычислений, надо рассмотреть все варианты значений частот собственных сдвиговых и продольных колебаний. В результате общее решение системы (1.9) будет иметь вид

$$u^{(s)}=\sum_{i=1,2,p}[C_{1in}^{(s)}\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta+C_{2in}^{(s)}\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta+\bar{u}_i^{(s)}]$$

$$v^{(s)}=\sum_{i=1,2,p}[C_{3in}^{(s)}\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta+C_{4in}^{(s)}\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta+\bar{v}_i^{(s)}] \tag{3.1}$$

$$w^{(s)}=\sum_{i=1,2,p}[C_{5in}^{(s)}\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta+C_{6in}^{(s)}\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta+\bar{w}_i^{(s)}]$$

$$\sigma_{13}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\sum_{i=1,2,p}[\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}(C_{1i}^{(s)}\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta-C_{2i}^{(s)}\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega_{*n}^{(i)}\zeta)+\frac{\partial\bar{u}_i^{(s)}}{\partial\zeta}]+$$

$$+\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial\xi}$$

$$\sigma_{23}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}} \sum_{i=1,2,p} [\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(i)} (C_{3i}^{(s)} \cos\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(i)}\zeta - C_{4i}^{(s)} \sin\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(i)}\zeta) + \frac{\partial \overline{v}_i^{(s)}}{\partial \zeta}] +$$

$$+ \frac{1}{a_{44}} \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$\sigma_{33}^{(s)} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \sum_{i=1,2,p} [\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(i)} (C_{5i}^{(s)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(i)}\zeta - C_{6i}^{(s)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(i)}\zeta) +$$

$$+ \frac{\partial \overline{w}_i^{(s)}}{\partial \zeta}] - \frac{\Delta_{13}}{\Delta} \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\Delta_{23}}{\Delta} \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi}$$

где $\overline{u}_i^{(s)}, \overline{v}_i^{(s)}, \overline{w}_i^{(s)}$ являются частными решениями соответствующих уравнений системы (1.9).

Удовлетворяя граничным условиям (1.1), (1.2) и учитывая данные для исходного приближения, получим систему уравнений относительно неизвестных переменных $C_{ijn}^{(s)}$, откуда следует:

$$C_{1pn}^{(s)} = \frac{f_n^{(s)}(\xi,\eta,-1) + f_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(p)} \cos\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(p)}}, \quad C_{2pn}^{(s)} = \frac{f_n^{(s)}(\xi,\eta,-1) - f_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(p)} \sin\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(p)}} \quad (3.2)$$

$$C_{3pn}^{(s)} = \frac{\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,-1) + \varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(p)} \cos\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(p)}}, \quad C_{4pn}^{(s)} = \frac{\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,-1) - \varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,1)}{2\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(p)} \sin\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(p)}} \quad (3.3)$$

$$C_{51n}^{(s)} = \frac{\theta_n^{(s)}(\xi,\eta)\cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)} + \psi_n^{(s)}(\xi,\eta)\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)}}{\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)} \cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)}}$$

$$C_{61n}^{(s)} = \frac{\psi_n^{(s)}(\xi,\eta)\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)} + \theta_n^{(s)}(\xi,\eta)\sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)}}{\sqrt{\Delta\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)} \cos 2\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(1)}} \quad (3.4)$$

где

$$f_n^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) = -\sum_{i=1,2,p} \frac{\partial \overline{u}_i^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} -$$

$$- \sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(2)} [C_{12n}^{(s)} \cos\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(2)}\zeta - C_{22n}^{(s)} \sin\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(2)}\zeta]$$

$$\varphi_n^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) = -\sum_{i=1,2,p} \frac{\partial \overline{v}_i^{(s)}}{\partial \zeta} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta} -$$

$$- \sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(1)} [C_{31n}^{(s)} \cos\sqrt{a_{55}}\omega_{\cdot n}^{(1)}\zeta - C_{41n}^{(s)} \sin\sqrt{a_{44}}\omega_{\cdot n}^{(1)}\zeta]$$

$$\theta_n^{(s)}(\xi,\eta) = [\Delta_{13} \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} - \Delta_{11} \sum_{i=1,2,p} \frac{\partial \overline{w}_i^{(s)}}{\partial \zeta} - \Delta_{23} \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi}]\Bigg|_{\zeta=1} - \quad (3.5)$$

$$- \sqrt{\Delta_{11}\Delta}\omega_{\cdot n}^{(2)} (C_{52n}^{(s)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(2)} - C_{62n}^{(s)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(2)})$$

$$\psi_n^{(s)}(\xi,\eta) = -\sum_{i=1,2,p} \overline{w}_i^{(s)}(\zeta=-1) - C_{62n}^{(s)} \cos\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(2)} + C_{52n}^{(s)} \sin\sqrt{\Delta/\Delta_{11}}\omega_{\cdot n}^{(2)}$$

При граничных условиях (1.1), (1.3), после соответствующих преобразований формулы (3.3), (3.4) остаются неизменными, а для $C^{(s)}_{1pn}, C^{(s)}_{2pn}$ получим:

$$C^{(s)}_{1pn} = \frac{f^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n} + F^{(s)}_n(\xi,\eta)\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}}$$

$$C^{(s)}_{2pn} = \frac{f^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n} + F^{(s)}_n(\xi,\eta)\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\cos 2\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(p)}_{*n}} \tag{3.6}$$

$$F^{(s)}_n(\xi,\eta) = -\sum_{i=1,2,p} u^{(s)}_i(\zeta=-1) + C^{(s)}_{12n}\sin\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(2)}_{*n} - C^{(s)}_{22n}\cos\sqrt{a_{55}}\,\omega^{(2)}_{*n}$$

При граничных условиях (1.1), (1.4) формулы (3.2), (3.4) остаются неизменными, а для $C^{(s)}_{3pn}, C^{(s)}_{4pn}$ получим:

$$C^{(s)}_{3pn} = \frac{\varphi^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n} + \sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}K^{(s)}_n(\xi,\eta)\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}} \tag{3.7}$$

$$C^{(s)}_{4pn} = \frac{\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}K^{(s)}_n(\xi,\eta)\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n} + \varphi^{(s)}_n(\xi,\eta,1)\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}}{\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}\cos 2\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(p)}_{*n}}$$

$$K^{(s)}_n(\xi,\eta) = -\sum_{i=1,2,p} \bar{v}^{(s)}_i(\zeta=-1) + C^{(s)}_{31n}\sin\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(1)}_{*n} - C^{(s)}_{41n}\cos\sqrt{a_{44}}\,\omega^{(1)}_{*n}$$

Отсюда следует, что высшие приближения не влияют на частоты собственных колебаний, а влияют лишь на амплитуды этих колебаний. Отметим, что в приводимых решениях присутствуют неизвестные пока постоянные интегрирования. Они определяются известным способом [2] в ходе сращивания решений внутренней задачи и пограничного слоя.

4. Выясним вопрос существования и определим решение пограничного слоя при граничных условиях (1.1), (1.2). Построение решения погранслоя осуществим также, как в [2,4,5].

После подстановки (1.5) в динамические уравнения и замены переменной $\xi_1 = \xi/\varepsilon$ решение погранслоя будем искать в виде

$$\sigma_{ik} = \varepsilon^{-1+s}\sigma^{(s)}_{ikb}(\eta,\zeta)e^{-\lambda\xi_1}, \quad u = \varepsilon^{s}u^{(s)}_{b}(\eta,\zeta)e^{-\lambda\xi_1}$$

$$\xi_1 = \xi/\varepsilon = x/h, \quad s = \overline{0,N} \quad (u, \mathrm{v}, \mathrm{w}) \tag{4.1}$$

В результате получим систему, где все $\sigma^{(s)}_{ikb}$ можно выразить через функции $u^{(s)}_b, \mathrm{v}^{(s)}_b, w^{(s)}_b$: (индекс "b" означает, что данная величина относится к погранслою (от слова "boundary"))

$$\sigma^{(s)}_{11b} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{12}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}_b}{\partial\eta} - \lambda\Delta_{22}u^{(s)}_b - \Delta_{23}\frac{\partial w^{(s)}_b}{\partial\zeta}\right]$$

$$\sigma^{(s)}_{22b} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{33}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}_b}{\partial\eta} - \lambda\Delta_{12}u^{(s)}_b - \Delta_{13}\frac{\partial w^{(s)}_b}{\partial\zeta}\right] \tag{4.2}$$

$$\sigma^{(s)}_{33b} = \frac{1}{\Delta}\left[\Delta_{11}\frac{\partial w^{(s)}_b}{\partial\zeta} - \Delta_{13}\frac{\partial \mathrm{v}^{(s-1)}_b}{\partial\eta} - \lambda\Delta_{23}u^{(s)}_b\right]$$

$$\sigma_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial u_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \lambda v_b^{(s)}\right], \quad \sigma_{13b}^{(s)} = \frac{1}{a_{55}}\left[\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} - \lambda w_b^{(s)}\right]$$

$$\sigma_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_b^{(s-1)}}{\partial \eta}\right]$$

а для функций $u_b^{(s)}, v_b^{(s)}, w_b^{(s)}$ следующие уравнения:

$$\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 u_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2 \Delta_{22}}{\Delta} + \omega_*^2\right)u_b^{(s)} + \left(\frac{\lambda \Delta_{23}}{\Delta} - \frac{\lambda}{a_{55}}\right)\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial \zeta} = R_1^{(s-1)}$$

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2}{a_{55}} + \omega_*^2\right)w_b^{(s)} + \left(\frac{\lambda \Delta_{23}}{\Delta} - \frac{\lambda}{a_{55}}\right)\frac{\partial u_b^{(s)}}{\partial \zeta} = R_2^{(s-1)} \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2}{a_{66}} + \omega_*^2\right)v_b^{(s)} = K_1^{(s-1)}$$

$$K_1^{(s-1)} = \frac{\lambda}{a_{66}}\frac{\partial u_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 w_b^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{22b}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

$$R_1^{(s-1)} = \frac{\lambda \Delta_{12}}{\Delta}\frac{\partial v_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma_{12b}^{(s-1)}}{\partial \eta}, \quad R_2^{(s-1)} = \frac{\Delta_{13}}{\Delta}\frac{\partial^2 v_b^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{23b}^{(s-1)}}{\partial \eta}$$

Из (4.2) и (4.3) следующие уравнения составляют полную систему для определения величин $\sigma_{12b}^{(s)}, \sigma_{23b}^{(s)}, v_b^{(s)}$:

$$\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 v_b^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{\lambda^2}{a_{66}} + \omega_*^2\right)v_b^{(s)} = K_1^{(s-1)} \tag{4.4}$$

$$\sigma_{23b}^{(s)} = \frac{1}{a_{44}}\left[\frac{\partial v_b^{(s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w_b^{(s-1)}}{\partial \eta}\right], \quad \sigma_{12b}^{(s)} = \frac{1}{a_{66}}\left[\frac{\partial u_b^{(s-1)}}{\partial \eta} - \lambda v_b^{(s)}\right]$$

Решение этой системы называется решением типа антиплоского погранслоя. Общее решение дифференциального уравнения из (4.4) имеет вид $v_b^{(s)} = v_{b0}^{(s)} + v_b^{*(s)}$, где $v_{b0}^{(s)}$ — общее решение однородного уравнения, а $v_b^{*(s)}$ — частное решение неоднородного уравнения. Рассмотрим нулевое приближение $s=0$ для системы (4.4). Дифференциальное уравнение относительно $v_b^{(0)}$ преобразуется в обыкновенное однородное дифференциальное уравнение, решением которого будет:

$$v_b^{(0)} = C_{1ab}^{(0)}(\eta)\sin\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)}\,\zeta + C_{2ab}^{(0)}(\eta)\cos\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)}\,\zeta \tag{4.5}$$

Вычисляя значение напряжений из (4.4) и подставляя в граничные условия (1.1) и (1.2), придем к однородной алгебраической системе уравнений относительно $C_{1ab}^{(0)}(\eta)$ и $C_{2ab}^{(0)}(\eta)$. Из разрешимости этой системы получим характеристическое уравнение для определения значений показателя экспоненты λ.

Возможны следующие два случая:

1) $\cos\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)} = 0 \Rightarrow$ (4.6)

$$\Rightarrow \lambda_{kn} = \sqrt{a_{66}(\pi^2(2k-1)^2 - 4\omega_{*n}^2 a_{44})/(4a_{44})} \quad k, n \in N$$

2) $\sin\sqrt{a_{44}(\lambda^2 / a_{66} + \omega_*^2)} = 0 \Rightarrow$ (4.7)

$$\Rightarrow \lambda_{kn} = \sqrt{a_{66}(\pi^2 k^2 - \omega_{*n}^2 a_{44})/a_{44}} \quad k, n \in N$$

Собственными функциями $v_b^{(0)}$ являются соответственно

1) $v_b^{(0)} = C_{1abk}^{(0)}(\eta)\sin\dfrac{\pi(2k-1)}{2}\zeta$ (4.8)

2) $v_b^{(0)} = C_{2abk}^{(0)}(\eta)\cos\pi k\zeta$ (4.9)

Остальные уравнения из (4.3) и (4.4) составляют полную систему уравнений для определения $\sigma_{13b}^{(s)}, \sigma_{11b}^{(s)}, \sigma_{22b}^{(s)}, \sigma_{33b}^{(s)}, u_b^{(s)}$ и $w_b^{(s)}$. Решение этой системы называется решением типа плоского погранслоя. Из дифференциальных уравнений относительно $u_b^{(s)}, w_b^{(s)}$ вытекает дифференциальное уравнение четвертого порядка для $w_b^{(s)}$:

$$\Delta_{11}\Delta a_{55}\frac{\partial^4 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^4} + [(\lambda^2\Delta_{22} + \omega_*^2\Delta)\Delta_{11}a_{55}^2 - \lambda^2(a_{55}\Delta_{23} - \Delta)^2 +$$

$$+ \Delta^2(\lambda^2 + \omega_*^2 a_{55})]\frac{\partial^2 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^2} + \Delta a_{55}(\lambda^2\Delta_{22} + \omega_*^2\Delta)(\lambda^2 + \omega_*^2 a_{55})w_b^{(s)} = R_3^{(s-1)} \tag{4.10}$$

$$R_3^{(s-1)} = \Delta a_{55}[(\lambda^2\Delta_{22} + \omega_*^2\Delta)a_{55}R_4^{(s-1)} - \frac{\partial R_1^{(s-1)}}{\partial\zeta} + \Delta\frac{\partial^2 R_2^{(s-1)}}{\partial\zeta^2}]$$

а для $u_b^{(s)}$ получим

$$u_b^{(s)} = S_1\frac{\partial^3 w_b^{(s)}}{\partial\zeta^3} + S_2\frac{\partial w_b^{(s)}}{\partial\zeta} + S_3(R_1^{(s-1)} - \frac{\partial R_2^{(s-1)}}{\partial\zeta}) \tag{4.11}$$

$$S_1 = \Delta\Delta_{11}/S, \quad S = \lambda(\lambda^2\Delta_{22} + \omega_*^2\Delta)(a_{55}\Delta_{23} - \Delta)$$

$$S_2 = ((\lambda^2 + \omega_*^2 a_{55})\Delta^2 - \lambda^2(a_{55}\Delta_{23} - \Delta)^2)/(a_{55}S), \quad S_3 = \Delta^2 / S$$

Общее решение дифференциального уравнения из (4.10) имеет вид $w_b^{(s)} = w_{b0}^{(s)} + \bar{w}_b^{(s)}$. Рассмотрим исходное приближение $s=0$. Уравнение (4.10) преобразуется в обыкновенное однородное дифференциальное уравнение, решением которого будет

$$w_b^{(0)} = C_{1pb}^{(0)}\cos\beta_1\lambda\zeta + C_{2pb}^{(0)}\sin\beta_1\lambda\zeta + C_{3pb}^{(0)}\cos\beta_2\lambda\zeta + C_{4pb}^{(0)}\sin\beta_2\lambda\zeta \tag{4.12}$$

$$\beta_{1,2}^2 = \frac{(\Delta_{22}\Delta_{11}a_{55}^2 + \Delta^2 - (a_{55}\Delta_{23} - \Delta)^2 + \mu^2\Delta a_{55}(\Delta_{11}a_{55} + \Delta) \pm \sqrt{D}}{2\Delta_{11}\Delta a_{55}}$$

$$D = (\Delta_{22}\Delta_{11}a_{55}^2 + \Delta^2 - (a_{55}\Delta_{23} - \Delta)^2 + \mu^2\Delta a_{55}(\Delta_{11}a_{55} + \Delta))^2 - \tag{4.13}$$

$$- 4\Delta_{11}\Delta^2 a_{55}^2(\Delta_{22} + \Delta\mu^2)(1 + a_{55}\mu^2), \qquad \mu = \frac{\omega_*}{\lambda}$$

Из (4.11) для $u_\phi^{(0)}$ получим

$$u_\phi^{(0)} = \lambda(\beta_1(S_1\lambda^2\beta_1^2 - S_2)(C_{1\rho b}^{(0)}\sin\beta_1\lambda\zeta - C_{2\rho b}^{(0)}\cos\beta_1\lambda\zeta) + \tag{4.14}$$
$$+\beta_2(S_1\lambda^2\beta_2^2 - S_2)(C_{3\rho b}^{(0)}\sin\beta_2\lambda\zeta - C_{4\rho b}^{(0)}\cos\beta_2\lambda\zeta))$$

Подставляя (4.12), (4.14) в (4.2) и в граничные условия (1.1), (1.2), придем к алгебраической системе однородных уравнений, из условия разрешимости которой получится характеристическое уравнение для определения λ

$$(\lambda^2\Delta_{22} + \rho\omega_*^2\Delta)((A_1A_4 + A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 - \beta_2) +$$
$$+(A_1A_4 - A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 + \beta_2)) = 0 \tag{4.15}$$
$$A_1 = \lambda\beta_1^2(S_1\lambda^2\beta_1^2 - S_2) - 1, \quad A_3 = \beta_1(\Delta_{23}\lambda(S_1\lambda^2\beta_1^2 - S_2) - \Delta_{11})$$
$$A_2 = \lambda\beta_2^2(S_1\lambda^2\beta_2^2 - S_2) - 1, \quad A_4 = \beta_2(\Delta_{23}\lambda(S_1\lambda^2\beta_2^2 - S_2) - \Delta_{11})$$

Для ортотропных материалов $\Delta > 0$, в силу чего уравнение (4.15) упростится:

$$(A_1A_4 + A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 - \beta_2) + (A_1A_4 - A_2A_3)\sin 2\lambda(\beta_1 + \beta_2) = 0 \tag{4.16}$$

В уравнение (4.16) в качестве параметра входит ω и каждому его значению из (2.6)-(2.10) будет соответствовать счетное множество λ. В силу свойства пограничного слоя необходимо ограничиться теми значениями λ, у которых $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$. Таким образом, каждому собственному значению ω соответствует свое семейство пограничных функций.

Аналогичным образом определяется решение пограничного слоя при граничных условиях (1.1)-(1.3) и (1.1)-(1.4).

Сопряжение решений пограничного слоя и внутренней задачи, в частности, можно осуществить методом наименьших квадратов или методом граничной коллокации [2,3].

Литература

1. Агаловян М.Л. К определению частот собственных колебаний и собственных функций в пространственной смешанной краевой задаче для пластин // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван. Изд-во ЕГУ, 1997, с. 128-131.
2. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.:Наука, 1997. 415 с.
3. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.:Наука,1977. 416с.
4. Агаловян М.Л. О решении пограничного слоя в задаче на собственные колебания полосы // В сб. конф.: Современные вопросы оптимального управления и устойчивости систем. Ереван: Изд. ЕГУ. 1997. с. 131-135.
5. Гулгазарян Л.Г. О пограничном слое в задаче о собственных колебаниях двухслойной ортотропной полосы при неполном контакте между слоями // В сб. научн. тр.: Математический анализ и его приложения. Ереван. "Манкаварж", 2000. Вып. 1, с.110-117.

Институт Механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
7.02.2001

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №2, 2001** Механика

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ КРУГОВЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН

Вирабян Е.Г., Геворкян Р.С.

Ե.Գ. Վիրաբյան, Ռ.Ս. Գևորգյան

Շրջանային օղակաձև սալի եզրային խնդիրների ասիմպտոտիկական լուծումները

Գլանային մարմնի առաձգականության տեսության տարածական եզրային խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկական ինտեգրման միջոցով արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր շրջանային օղակաձև սալի լարումների տենզորի և տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչների որոշման համար, երբ սալի դիմային մակերևույթների վրա տրված են կինեմատիկական և խառը եզրային պայմաններ:

Ցույց է տրված կոորդինատական առանցքի փոփոխելիության ազդեցությունը ասիմպտոտիկական պրոցեսի վրա: Բերված են արտածված բանաձևերի կիրառությունները լուսաբանող օրինակներ:

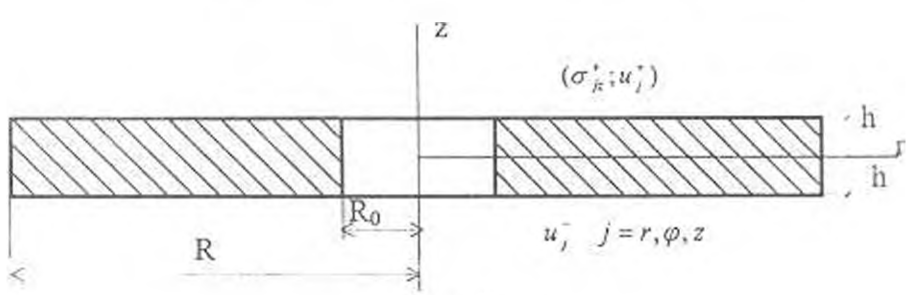
Y.G. Virabyan , R.S. Gevorgyan

Asymptotic Solutions of Boundary Mixed problems for Circular Ring Plates

Из уравнений пространственной краевой задачи теории упругости для цилиндрических тел, путем асимптотического интегрирования выведены рекуррентные формулы для определения компонентов тензора напряжений и вектора перемещения круговых кольцевых пластин. Считается, что на лицевых поверхностях заданы кинематические и смешанные граничные условия. Показана роль влияния изменяемости координатной линии на асимптотические процессы. Приведены примеры, иллюстрирующие приложения выведенных формул.

1. Имеем круговую кольцевую пластину, занимающую область

$$\Omega = \{r, \varphi, z : R_0 \le r \le R, 0 \le \varphi \le 2\pi, -h \le z \le h, R_0 > h, \ h << R - R_0\}$$



Фиг. 1

Пусть на лицевой поверхности $z = -h$ пластины заданы компоненты вектора перемещения

$$u_j(r, \varphi, z = -h) = u^{-}_j(r, \varphi) \qquad j = r, \varphi, z \tag{1.1}$$

а на противоположной лицевой поверхности $z = h$ — напряжения

$$\sigma_{jz}(r, \varphi, z = h) = \sigma^{+}_{jz}(r, \varphi) \qquad j = r, \varphi, z \tag{1.2}$$

перемещения

$$u_j(r,\varphi,z=h)=u_j^*(r,\varphi) \qquad j=r,\varphi,z \tag{1.3}$$

или их соответствующие комбинации

а) $$\sigma_{jz}(r,\varphi,z=h)=\sigma_{jz}^*(r,\varphi) \qquad j=r,\varphi$$

$$u_z(r,\varphi,z=h)=u_z^*(r,\varphi) \tag{1.4}$$

б) $$\sigma_{zz}(r,\varphi,z=h)=\sigma_{zz}^*(r,\varphi)$$

$$u_j(r,\varphi,z=h)=u_j^*(r,\varphi) \qquad j=r,\varphi \tag{1.5}$$

Условия на боковой поверхности пластины пока не будем конкретизировать. Требуется определить напряженно-деформированное состояние (НДС) пластины.

Для решения поставленных краевых задач в уравнениях равновесия и соотношениях упругости цилиндрического тела с учетом влияния температурного поля [1] перейдем к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям по формулам

$$\begin{gathered}\xi=r/R,\quad \eta=\varphi,\quad \zeta=z/h=z\varepsilon^{-1}/r,\quad \varepsilon=h/R,\quad u=u_r/R\\ v=u_\varphi/R,\quad w=u_z/R\end{gathered} \tag{1.6}$$

В результате получим сингулярно возмущенную малым параметром ε систему уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\zeta}+\frac{1}{\xi}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}\right)+RF_r=0\\
\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\zeta}+\frac{2\sigma_{r\varphi}}{\xi}+RF_\varphi=0\\
\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial\zeta}+\frac{\sigma_{rz}}{\xi}+RF_z=0\\
\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{rr}-\nu\left(\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{zz}\right)\right]+\alpha\theta\\
\frac{1}{\xi}\frac{\partial v}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi}u=\frac{1}{E}\left[\sigma_{\varphi\varphi}-\nu\left(\sigma_{rr}+\sigma_{zz}\right)\right]+\alpha\theta\\
\varepsilon^{-1}\frac{\partial w}{\partial\zeta}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu\left(\sigma_{\varphi\varphi}+\sigma_{rr}\right)\right]+\alpha\theta\\
\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{\partial v}{\partial\xi}-\frac{1}{\xi}v=\frac{1}{G}\sigma_{r\varphi}\\
\frac{\partial w}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial u}{\partial\zeta}=\frac{1}{G}\sigma_{rz}\\
\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial v}{\partial\zeta}=\frac{1}{G}\sigma_{\varphi z}
\end{gathered} \tag{1.7}$$

где E − модуль Юнга, G − модуль сдвига, ν − коэффициент Пуассона, θ − температурная функция, F_r, F_φ, F_z − компоненты объемных сил.

Решение системы (1.7) складывается из решения внутренней задачи справедливого на некотором удалении от боковой поверхности пластины и из согласованного с ним решения задачи пограничного слоя, которое экспоненциально затухает по мере удаления от боковой поверхности пластины.

Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения [2-4]

$$Q=\varepsilon^{\kappa_Q+s}Q^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad s=\overline{0,S} \tag{1.8}$$

где $\kappa_u=0$ для всех перемещений и $\kappa_\sigma=-1$ для всех напряжений, а обозначение $s=\overline{0,S}$ здесь и далее означает, что по повторяющемуся индексу s происходит суммирование по s в пределах $[0,S]$.

Считая, что влияния объемных сил и температурного поля соизмеримы с влиянием поверхностных воздействий, представим их в виде асимптотических рядов

$$F_j=\frac{1}{R}\varepsilon^{s-2}F_j^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad j=r,\varphi,z \qquad s=\overline{0,S}$$

$$\theta=\varepsilon^{s-1}\theta^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \qquad s=\overline{0,S} \tag{1.9}$$

Подставив (1.8), (1.9) в (1.7) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях ε в левых и правых частях уравнений, получим непротиворечивую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения (1.8).

Решением этой системы является

$$\begin{aligned}
&\sigma_{jz}^{(s)}=\sigma_{jz0}^{(s)}(\xi,\eta)+\sigma_{jz*}^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad j=r,\varphi,z\\
&\sigma_{rr}^{(s)}=\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz0}^{(s)}+\frac{1}{1-\nu^2}P_1^{(s)} \quad (r,\varphi;\ P_1,P_2)\\
&\sigma_{r\varphi}^{(s)}=G\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial\eta}+G\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial\xi}-G\frac{v^{(s-1)}}{\xi}\\
&u^{(s)}=u_0^{(s)}+\zeta\frac{1}{G}\sigma_{rz0}^{(s)}+u_*^{(s)}(\xi,\eta,\zeta) \quad (u,v;r,\varphi)\\
&w^{(s)}=w_0^{(s)}(\xi,\eta)+\zeta\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\sigma_{zz0}^{(s)}+w_*^{(s)}(\xi,\eta,\zeta)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где обозначены

$$\sigma_{rz*}^{(s)}=-\int_0^\zeta\left[\frac{\partial\sigma_{rr}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi}\left(\sigma_{rr}^{(s-1)}-\sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}\right)+F_r^{(s)}\right]d\zeta$$

$$\sigma_{\varphi z*}^{(s)}=-\int_0^\zeta\left[\frac{\partial\sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{2\sigma_{r\varphi}^{(s-1)}}{\xi}+F_\varphi^{(s)}\right]d\zeta$$

$$\sigma_{zz*}^{(s)}=-\int_0^\zeta\left[\frac{\partial\sigma_{rz}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi}\sigma_{rz}^{(s-1)}+F_z^{(s)}\right]d\zeta$$

$$P_1^{(s)} = E\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + \nu E\frac{1}{\xi}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + \nu E\frac{1}{\xi}u^{(s-1)} + \nu(1+\nu)\sigma_{zz*}^{(s-1)} - (1+\nu)E\alpha\theta^{(s)}$$

$$P_2^{(s)} = \nu E\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + E\frac{1}{\xi}\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + \nu E\frac{1}{\xi}u^{(s-1)} + \nu(1+\nu)\sigma_{zz*}^{(s-1)} - (1+\nu)E\alpha\theta^{(s)} \quad (1.11)$$

$$u_*^{(s)} = -\int_0^{\zeta}\left[\frac{1}{G}\sigma_{rz*}^{(s)} - \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi}\right]d\zeta, \quad v_*^{(s)} = -\int_0^{\zeta}\left[\frac{1}{G}\sigma_{\varphi z*}^{(s)} - \frac{1}{\xi}\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta}\right]d\zeta$$

$$w_*^{(s)} = -\int_0^{\zeta}\left[\frac{1}{E}\sigma_{zz*}^{(s)} - \frac{\nu}{E(1-\nu^2)}\left(P_1^{(s)} + P_2^{(s)}\right) + \alpha\theta^{(s)}\right]d\zeta$$

Решение (1.10) содержит 6 неизвестных функций интегрирования $\sigma_{rz0}^{(s)}, \sigma_{\varphi z0}^{(s)}, \sigma_{zz0}^{(s)}$, u_0, v_0, w_0, которые однозначно определяются из граничных условий на лицевых поверхностях $z = \pm h$

Удовлетворив граничным условиям (1.1), получим

$$u_0 = u_r^{-(s)} + \frac{1}{G}\sigma_{rz0}^{(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = -1) \qquad (u, v;\ r, \varphi)$$

$$w_0 = u_z^{-(s)} + \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)G}\sigma_{zz0}^{(s)} - w_*^{(s)}(\zeta = -1) \qquad (1.12)$$

$$u_j^{\pm(0)} = u_j^{\pm}/R \qquad u_j^{\pm(s)} = 0 \quad s \neq 0 \qquad j = r, \varphi, z$$

А из граничных условий, заданных на $z = h$, определяются $\sigma_{rz0}^{(s)}, \sigma_{\varphi z0}^{(s)}, \sigma_{zz0}^{(s)}$.

Удовлетворив условиям (1.2), получим

$$\sigma_{jz0}^{(s)} = \sigma_{jz}^{+(s)} - \sigma_{jz*}^{(s)}(\zeta = 1)$$

$$\sigma_{jz}^{+(0)} = \sigma_{jz}^{+}\varepsilon^{-1}, \quad \sigma_{jz}^{+(s)} = 0, \quad s \neq 0 \quad j = r, \varphi, z \qquad (1.13)$$

Таким образом, решение краевой задачи (1.1), (1.2), (1.7) определяется с помощью рекуррентных формул (1.8) - (1.13).

Если на лицевых поверхностях $z = h$ заданы кинематические условия (1.3), получаем

$$\sigma_{rz0}^{(s)} = \frac{1}{2}G\left(u_r^{+(s)} - u_r^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta = 1) + u_*^{(s)}(\zeta = -1)\right) \qquad (r, \varphi,\ u, v)$$

$$\sigma_{zz0}^{(s)} = \frac{G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left(u_z^{+(s)} - u_z^{-(s)} - w_*^{(s)}(\zeta = 1) + w_*^{(s)}(\zeta = -1)\right) \qquad (1.14)$$

следовательно, решение краевой задачи с граничными условиями (1.1), (1.3) представится с помощью рекуррентных формул (1.8) - (1.12), (1.14). Когда на лицевой поверхности $z = h$ заданы смешанные условия (1.4), функции интегрирования $\sigma_{rz0}^{(s)}, \sigma_{\varphi z0}^{(s)}, \sigma_{zz0}^{(s)}$ имеют вид

$$\sigma_{rz0}^{(s)} = \sigma_{rz}^{+(s)} - \sigma_{rz*}^{(s)}(\zeta = 1) \qquad (r, \varphi)$$

$$\sigma_{n0}^{(s)} = \frac{G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left(u_z^{+(s)} - u_z^{-(s)} - w_*^{(s)}(\zeta=1) + w_*^{(s)}(\zeta=-1)\right) \tag{1.15}$$

а для условий (1.15)

$$\sigma_{n0}^{(s)} = \frac{1}{2}G\left(u_r^{+(s)} - u_r^{-(s)} - u_*^{(s)}(\zeta=1) + u_*^{(s)}(\zeta=-1)\right) \qquad (r,\varphi;\, u,v)$$

$$\sigma_{n0}^{(s)} = \sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz*}^{(s)}(\zeta=1) \tag{1.16}$$

Рекуррентные формулы (1.8) – (1.16) позволяют вычислить компоненты тензора напряжений и вектора перемещения круговой кольцевой пластины во внутренней задаче с заранее заданной асимптотической точностью, если функции, заданные на лицевых поверхностях $z = \pm h$, имеют необходимого порядка частные производные, причем изменяемости этих функций не должны иметь порядок выше ε^{-1}

Решения (1.8) – (1.16) справедливы всюду, кроме зоны погранслоя [4,6]. Для того, чтобы оно было справедливо и в этой области, необходимо к нему прибавить согласованное с ним решение задачи пограничного слоя.

2. Рассмотрим некоторые приложения выведенных рекуррентных формул.

а) Пусть на лицевой поверхности $z = -h$ кольцевой пластины заданы постоянные компоненты вектора перемещения, а на противоположной поверхности $z = h$ – нормальная и тангенциальные нагрузки постоянной интенсивности

$$u_j(z=-h) = u_j^- = \text{const}$$

$$\sigma_{jz}(z=h) = \sigma_{jz}^+ = \text{const} \qquad j = r,\varphi,z \tag{2.1}$$

Ограничившись двумя шагами итерации, достаточных для практических приложений, по формулам (1.8) - (1.13), с точностью $O(\varepsilon^2)$ получим

$$\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^+ + \frac{h-z}{r}\sigma_{rz}^+, \quad \sigma_{rz} = \sigma_{rz}^+, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{\varphi z}^+$$

$$\sigma_{rr} = \frac{\nu}{1-\nu}\left(\sigma_{zz}^+ + \frac{z+3h}{r}\sigma_{rz}^+\right) + \frac{2\nu G}{1-\nu}\frac{u_r^-}{r}$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{zz}^+ + \frac{1}{1-\nu}\left[(2-\nu)z + (2+\nu)h\right]\sigma_{rz}^+ + \frac{2G}{1-\nu}\frac{u_r^-}{r} \tag{2.2}$$

$$\sigma_{r\varphi} = 0, \quad u_r = \frac{1}{G}(z+h)\sigma_{rz}^+ \qquad (r,\varphi)$$

$$u_z = u_z^- + \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}(z+h)\left(\sigma_{zz}^+ + \sigma_{rz}^+ h/r\right) -$$

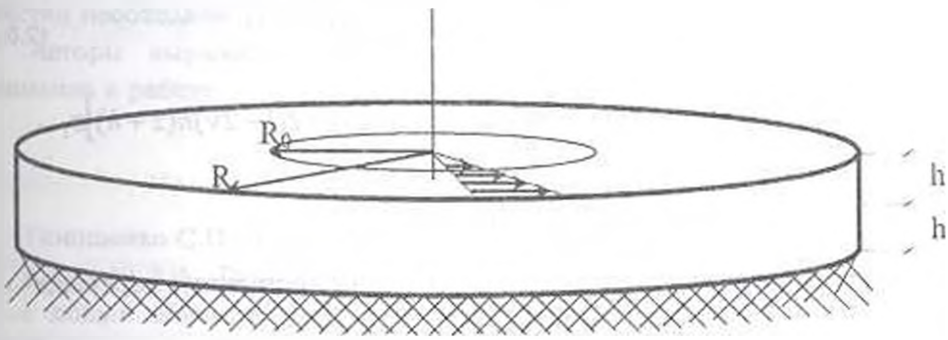
$$-\frac{1}{4rG(1-\nu)}\left[(h^2 - z^2) - 4\nu h(z+h)\right]\sigma_{rz}^+ - \frac{\nu}{1-\nu}\frac{z+h}{r}u_r^-$$

б) Пусть теперь одна лицевая поверхность кольцевой пластины жестко закреплена, а к противоположной поверхности приложена пропорциональная r касательная нагрузка.

$$u_j(z=-h)=0 \qquad j=r,\varphi,z$$

$$\sigma_{zz}(z=h)=\sigma_{rz}(z=h)=0 \qquad \sigma_{\varphi z}(z=h)=\tau r \tag{2.3}$$

Задача моделирует кручение кольцевой пластины вокруг оси симметрии (фиг. 2)



Фиг. 2

Итерация обрывается на исходном приближении и приводит к математически точному решению внутренней задачи

$$\sigma_{rr}=\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{zz}=\sigma_{rz}=\sigma_{r\varphi}=0$$

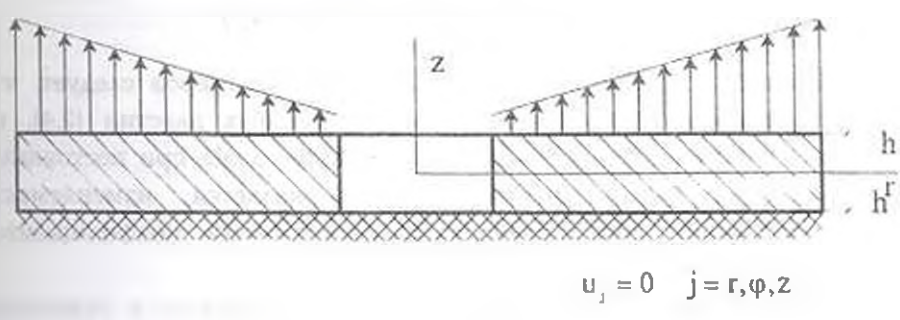
$$\sigma_{\varphi z}=\tau r; \quad u_\varphi=\frac{z+h}{G}\tau r, \quad u_r=u_z=0 \tag{2.4}$$

в) Лицевая поверхность $z=-h$ кольцевой пластины жестко закреплена, а к поверхности $z=h$ приложена нормальная, линейная по r нагрузка (фиг. 3)

$$u_j(z=-h)=0 \qquad j=r,\varphi,z$$

$$\sigma_{rz}(z=h)=\sigma_{\varphi z}(z=h)=0 \tag{2.5}$$

$$\sigma_{zz}(z=h)=\sigma_0+\sigma_1 r$$



$u_j=0 \quad j=r,\varphi,z$

Фиг. 3

Вычисленные по рекуррентным формулам (1.8) - (1.13) компоненты тензора напряжений и вектора перемещения, с точностью $O(\varepsilon^2)$ имеют вид

$$\sigma_{zz} = \sigma_0 + \sigma_1 r, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\nu}{1-\nu}\left(\sigma_0 + \sigma_1 r\right)$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\nu}{1-\nu}(h-z)\sigma_1, \quad \sigma_{\varphi z} = \sigma_{\varphi r} = 0, \quad u_\varphi = 0 \tag{2.6}$$

$$u_r = \frac{\nu}{1-\nu}\frac{1}{G}h(z+h)\sigma_1 + \frac{1}{4G(1-\nu)}\left[(h^2 - z^2) - 2(1-2\nu)h(z+h)\right]\sigma_1 \,..$$

$$u_z = u_z^- + (z+h)\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}\left(\sigma_0 + \sigma_1 r\right)$$

г) лицевым поверхностям пластины сообщены постоянные перемещения

$$u_j(z = \pm h) = u_j^\pm = \text{const} \qquad j = r, \varphi, z \tag{2.7}$$

Напряжения и перемещения, вычисленные с точностью $O(\varepsilon^2)$, такие

$$\sigma_{rr} = \frac{G\nu}{(1-2\nu)h}\left(u_z^+ - u_z^-\right) + \frac{G}{hr(1-\nu)}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}h\left(u_r^+ + u_r^-\right) + \frac{1}{2}z\left(u_r^+ - u_r^-\right)\right]$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{G\nu}{(1-2\nu)h}\left(u_z^+ - u_z^-\right) + \frac{G}{hr(1-\nu)}\left[\frac{h(1-\nu)^2}{1-2\nu}\left(u_r^+ + u_r^-\right) + \frac{z}{2}(2-\nu)\left(u_r^+ - u_r^-\right)\right]$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{G}{2hr}\left[h\left(u_\varphi^+ + u_\varphi^-\right) + z\left(u_\varphi^+ - u_\varphi^-\right)\right], \; \sigma_{rz} = \frac{G}{2h}\left(u_r^+ - u_r^-\right), \; \sigma_{\varphi z} = \frac{G}{2h}\left(u_\varphi^+ - u_\varphi^-\right)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{(1-\nu)G}{(1-2\nu)h}\left(u_z^+ - u_z^-\right) + \frac{G}{hr}\left[\frac{h\nu}{1-2\nu}\left(u_r^+ + u_r^-\right) - \frac{z}{2}\left(u_r^+ - u_r^-\right)\right] \tag{2.8}$$

$$u_r = \frac{1}{2h}\left[(h-z)u_r^- + (h+z)u_r^+\right], \; u_\varphi = \frac{1}{2h}\left[(h-z)u_\varphi^- + (h+z)u_\varphi^+\right]$$

$$u_z = \frac{1}{2h}\left[(h-z)u_z^- + (h+z)u_z^+\right] + \frac{(z^2 - h^2)(1-4\nu)}{8hr(1-\nu)}\left(u_r^+ - u_r^-\right)$$

Из решений (2.2), (2.6), (2.8) рассмотренных примеров следует, что итерационный процесс в отличие от прямоугольных пластин [2,4], не обрывается и не приводит к замкнутому решению даже при постоянных внешних воздействиях. Причиной этого является изменяемость координатных линий, обусловливающих переменность коэффициентов первой квадратичной формы.

Решение внутренней задачи однозначно определилось в результате удовлетворения граничным условиям при $z = \pm h$, следовательно, это решение не будет удовлетворять граничным усилиям на боковой поверхности пластины (за исключением простейших случаев). Условиям на боковой поверхности будет соответствовать решение пограничного слоя. Это решение строится обычным образом и известным образом осуществляется его сращивание с решением внутренней задачи [4,6], что для данного класса задач — предмет отдельного рассмотрения.

Из (1.14), (2.8) следует также, что выведенные рекуррентные формулы не пригодны, когда пластина из несжимаемого материала. Для таких пластин необходимо установить иную асимптотику.

Авторы выражают благодарность Л.А. Агаловяну за советы и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Теория упругости. М.: ОНТИ, 1937.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В кн. "Сборник трудов IV Всесоюзного симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов". Новосибирск: Наука, 1984. С. 105-110.
3. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Об асимптотическом решении смешанных трехмерных задач для двухслойных анизотропных пластинок // ПММ. 1986. Т.50. Вып. 2. С. 271-278.
4. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит, 1997. 414 с.
5. Агаловян Л.А. О погранслое ортотропных пластинок // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1973. Т. 26. № 2. С. 27-43.
6. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1984. Т. 37. № 6. С. 3-15.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
30.10.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա **54, №2, 2001** Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ УЧЕТЕ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Геворкян Г.З., Киракосян Р.М.

Գ.Զ. Գևորգյան, Ռ.Մ. Կիրակոսյան

Փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը՝ ընդլայնական սահքերի հաշվառմամբ

Հետևելով [1] աշխատանքին, դուրս են բերվել փոփոխական հաստության ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալերի շարժման հավասարումները և ձևակերպվել համապատասխան սկզբնական և եզրային պայմանները ընդլայնական սահքի դեֆորմացիաների հաշվառմամբ: Որպես օրինակ դիտարկվել է սալերի ազատ լայնական տատանումների խնդիրը, երբ արհամարհվում են միջին հարթության տանգենցիալ տեղափոխությունները և պտտման իներցիան: Սեփական հաճախությունների մոտավոր որոշման համար առաջարկված է Ռիտցի մեթոդի սխեմա, որտեղ վիրտուալ ճկվածքների վրա լայնական ֆիկտիվ բեռի կատարած աշխատանքի հետ մեկտեղ դիտարկվում է նաև ֆիկտիվ կտրող ուժերի կատարած աշխատանքը սահքի համապատասխան վիրտուալ դեֆորմացիաների վրա: Այդ սխեմայի օգնությամբ լուծված է գծայնորեն փոփոխվող հաստության սալ-շերտի ազատ տատանումների խնդիրը եզրերի հոդակապորեն հենման դեպքում: Սեփական առաջին երկու հաճախությունների համար ստացված մոտավոր արժեքները համեմատվել են հայտնի ճշգրիտ արժեքների հետ: Արվել են եզրակացություններ կիրառված մոտավոր մեթոդի ճշտության վերաբերյալ՝ կախված վիրտուալ ճկվածքների և նրանց համապատասխանող ընդլայնական սահքի ձևերի քանակից:

G.Z. Gevorgyan, R.M. Kirakosyan

On Free Transversal Vibrations of Rectangular Orthotropic Plates of Variable Thickness with taking into Account the Transversal Shears

По аналогии с [1] выводятся уравнения движения прямоугольных ортотропных пластин переменной толщины и формулируются соответствующие начальные и краевые условия при учете влияния деформаций поперечных сдвигов. В качестве примера рассматривается задача свободных поперечных колебаний пластин при пренебрежении тангенциальных перемещений срединной плоскости и инерции вращения. Для приближенного определения собственных частот пластинки предлагается схема применения метода Ритца, где наряду с работой фиктивной поперечной нагрузки на виртуальных прогибах рассматривается также работа фиктивных перерезывающих сил на соответствующих виртуальных деформациях поперечных сдвигов. По этой схеме решается задача о свободных поперечных колебаниях шарнирно опертой пластинки-полосы линейно-переменной толщины. Полученные приближенные значения первых двух собственных частот сравниваются с соответствующими известными точными значениями. Делаются заключения о точности применяемого приближенного метода в зависимости от числа выбранных форм виртуальных прогибов и соответствующих им деформаций поперечных сдвигов.

1. Рассмотрим пластинку переменной толщины h, изготовленную из прямолинейно-ортотропного линейно-упругого материала. Пластинку отнесем к системе декартовых координат x, y, z, оси которых параллельны главным направлениям ортотропии материала. Координатную плоскость xy совместим с срединой плоскостью пластинки, а ось z направим вертикально вниз. Пусть на пластинку действуют поверхностные нагрузки, проекции интенсивности которых на координатные оси, приведенные к единице площади срединной

плоскости, составляют $X^{\pm}, Y^{\pm}, Z^{\pm}$. Здесь и в дальнейшем знаками «+» и «−» будем отмечать величины, относящиеся к лицевым поверхностям пластинки $z = h/2$ и $z = -h/2$ соответственно. Условия опирания краев пластинки произвольны.

По аналогии с [2] для поперечных касательных напряжений положим

$$\tau_{xz} = \varphi_1 + z\varphi_2 + z^2\varphi_3, \qquad \tau_{yz} = \psi_1 + z\psi_2 + z^2\psi_3 \tag{1.1}$$

где φ_i и ψ_i − искомые функции только координат x, y.

Дифференциальные уравнения движения сплошной среды имеют вид [1]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\sigma y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} = \rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \qquad (x, y, z) \tag{1.2}$$

где $\sigma_x, \tau_{xy}, \ldots$ − напряжения, $u_x, \ldots$ − перемещения, ρ − плотность материала, t − время, а символ (x, y, z) означает круговую перестановку букв. Ограничиваясь линейностью распределения перемещений по толщине пластинки, можно написать:

$$u_x = u - z\left(\frac{\partial w}{\partial x} - a_{55}\varphi_1\right), \quad u_y = v - z\left(\frac{\partial w}{\partial y} - a_{44}\psi_1\right), \quad u_z = w \tag{1.3}$$

Здесь u, v, w − перемещения срединной плоскости пластинки, a_{ij} - упругие постоянные материала. Компоненты деформации и основных напряжений пластинки определяются с учетом (1.3) из геометрически линейных соотношений и соотношений обобщеного закона Гука [1] соответственно. Выражения этих величин, а также внутренних усилий и моментов пластинки совпадают со своими статическими аналогами, в силу чего здесь их приводить не будем. Если считать, что окружающая среда не оказывает сопротивления на движение пластинки, то со своими статическими аналогами будут совпадать также и условия на лицевых поверхностях пластинки $z = \pm h/2$ [2].

Имея в виду вышесказанное и поступая как обычно, из дифференциальных уравнений движения сплошной среды (1.1) приходим к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} = -X_2 + \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} = -Y_2 + \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Z_2 + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = N_x - hX_1 - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = N_y - hY_1 - \frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2} - a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)$$

Здесь $T_x, T_y, S_{xy}, N_x, N_y$ и M_x, M_y, M_{xy} − внутренние усилия и моменты пластинки,

$X_1 = (X^+ - X^-)/2,\ Y_1 = (Y^+ - Y^-)/2,\ X_2 = X^+ + X^-$

$$Y_2 = Y^+ + Y^-,\ Z_2 = Z^+ + Z^- \tag{1.5}$$

Из условий на лицевых поверхностях пластинки $z = h/2$ для функций φ_2, ψ_2, и φ_3, ψ_3 получаются известные выражения [2].

Используя формулы внутренних усилий и моментов и имея в виду выражения функций $\varphi_2, \psi_2, \varphi_3, \psi_3$, из уравнений (1.4) получим систему движения дифференциального элемента срединной плоскости:

$$
\begin{gathered}
h\left[B_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] + \left(B_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{12}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \\
+ B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial y} - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -X_2 \\
h\left[B_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + B_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] + \left(B_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + B_{22}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial h}{\partial y} + \\
+ B_{66}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial h}{\partial x} - \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -Y_2 \\
h^2\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial h^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 4B_{66}\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] - \\
- h\left\{\left[8 + a_{55}h\left(B_{11}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \left[8 + a_{44}h\left(B_{12}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + B_{22}\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)\right]\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right\} - \\
- 2B_{66}h^2\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}\left(a_{55}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + a_{44}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) - 16\left(\frac{\partial h}{\partial x}\varphi_1 + \frac{\partial h}{\partial y}\psi_1\right) + \\
+ \rho h\left\{12\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + h\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial t^2} - a_{44}\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}\right]\right\} = \\
= 4\left[3Z_2 + h\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y}\right) - X_1\frac{\partial h}{\partial x} - Y_1\frac{\partial h}{\partial y}\right] \\
h^2\left[B_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right] + 2h\left[\left(B_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial x} + 2B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] - \\
- h^2\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + B_{66}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2}\right) + a_{44}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\partial y}\right] - \\
- 2h\left[a_{55}\left(B_{11}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right) + a_{44}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \psi_1}{\partial y} + B_{66}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)\right] + \\
+ 8\varphi_1 - \rho h^2\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial t^2} - a_{55}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}\right) = 8X_1
\end{gathered}
\tag{1.6}
$$

$$h^3\left[B_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(B_{12}+2B_{66})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right]+2h\left[\left(B_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\frac{\partial h}{\partial y}+2B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-h^2\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+B_{66}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)+a_{55}(B_{12}+B_{66})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-2h\left[a_{44}\left(B_{22}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+a_{55}\left(B_{12}\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+B_{66}\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)\right]+$$

$$+8\psi_1-\rho h^2\left(\frac{\partial w^3}{\partial y\partial t^2}-a_{44}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}\right)=8Y_1$$

К уравнениям движения пластинки (1.6) нужно присоединить граничные и начальные условия. При отсутствии сопротивления среды граничные условия совпадают со своими статическими аналогами [2]. Начальные же условия можно представить в виде [1]:

$$\text{при } t=0 \quad u=u_0(x,y),\quad v=v_0(x,y),\quad w=w_0(x,y)$$

$$\partial u/\partial t=u_1(x,y),\ \partial v/\partial t=v_1(x,y),\ \partial w/\partial t=w_1(x,y) \qquad (1.7)$$

Здесь u_0, v_0, w_0 и u_1, v_1, w_1 – заданные компоненты начального перемещения и начальной скорости точек срединной плоскости пластинки соответственно.

2. Рассмотрим задачу о свободных колебаниях пластинки. Задача существенно упрощается в случае поперечных колебаний, когда пренебрегаются как тангенциальные перемещения срединой плоскости пластинки, так и влияния инерции вращения. Положив $X^+=Y^+=0$, из (1.6) для отмеченного случая получим систему свободных колебаний пластинки [3]. Рассмотрим случай, когда толщина пластинки от координат x, y зависит линейно – $h=h_0+h_1x+h_2y$

Здесь h_0, h_1, h_2 – заданные постоянные.

Примем обозначения:

$$x=\bar{x}a,\ y=\bar{y}b=\bar{y}am,\ (b=am),\ h=h_0H,\ B_{ij}=\alpha_{ij}B_{11},\ a_{44}=\beta a_{55}$$

$$a_{55}B_{11}=\chi,\ \omega^2=B_{11}\Omega^2/\rho a^2,\ \varphi_1=B_{11}\varphi\cos\omega t,\ w=h_0 f\cos\omega t \qquad (2.1)$$

$$\psi_1=B_{11}\psi\cos\omega t,\ h_0/a=s,\ h_1/s=\gamma_1,\ h_2/s=\gamma_2$$

Имея в виду (2.1), уравнения свободных поперечных колебаний пластинки (1.6) можно представить в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\frac{1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}(\gamma_1\varphi+\gamma_2\psi)+\frac{3}{2}s\Omega^2 f=L_1(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}^2}+\frac{2}{H}\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{12}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_1+2\frac{\alpha_{66}\gamma_2}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{66}}{m^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{y}^2}+\frac{\beta}{m}(\alpha_{12}+\alpha_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\left[\gamma_1\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+\right.$$

$$+\beta\left(\alpha_{12}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_2\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\varphi=L_2(f,\varphi,\psi)=0$$

$$\frac{\alpha_{22}}{m^3}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{y}^3}+\frac{\alpha_{12}+2\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^3 f}{\partial\bar{x}^2\partial\bar{y}}+\frac{2}{H}\left[\left(\alpha_{12}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}^2}+\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{y}^2}\right)\gamma_2+2\frac{\alpha_{66}\gamma_1}{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-$$

$$-\frac{\chi}{s}\left[\beta\left(\frac{\alpha_{22}}{m^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{y}^2}+\alpha_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial\bar{x}^2}\right)+\frac{\alpha_{12}+\alpha_{66}}{m}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\bar{x}\partial\bar{y}}\right]-\frac{2\chi}{Hs}\Bigg[\alpha_{12}\gamma_2\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{x}}+\alpha_{66}\frac{\gamma_1}{m}\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{y}}+$$

$$+\beta\left(\alpha_{22}\frac{\gamma_2}{m}\frac{\partial\psi}{\partial\bar{y}}+\alpha_{66}\gamma_1\frac{\partial\psi}{\partial\bar{x}}\right)\Bigg]+\frac{8}{H^2s^3}\psi=L_3(f,\varphi,\psi)=0 \qquad (2.2)$$

Безразмерная толщина $H=1+\gamma_1\bar{x}+\gamma_2 m\bar{y}$.

3. Рассмотрим одну схему приближенного определения собственных частот прямоугольных пластин переменной толщины при учете деформации поперечных сдвигов. Будем пользоваться методом Ритца [4]. Пусть каждая тройка соответствующих членов рядов

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}A_{ij}f_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \varphi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}B_{ij}\varphi_{ij}(\bar{x},\bar{y}),\ \psi=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}C_{ij}\psi_{ij}(\bar{x},\bar{y}) \qquad (3.1)$$

удовлетворяет данным краевым условиям пластинки, но не удовлетворяет дифференциальным уравнениям (2.2). Здесь A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} – произвольные постоянные. Имея в виду (1.3) и (2.1), нетрудно убедиться, что функции $A_{ij}f_{ij}$ представляют собой амплитудные значения безразмерных виртуальных прогибов, а функции $B_{ij}\varphi_{ij}$, $C_{ij}\psi_{ij}$ пропорциональны соответствующим амплитудным значениям виртуальных деформаций поперечных сдвигов пластинки. После подстановки (3.1) в левые части уравнений (2.2) получаются величины, отличные от нуля. Эти величины можно рассмотреть как некоторую распределенную нагрузку $\bar{Z}_2$ и перерезывающие силы $\bar{N}_x,\bar{N}_y$. Нагрузка $\bar{Z}_2$ может совершать работу на виртуальных прогибах, а перерезывающие силы $\bar{N}_x$ и $\bar{N}_y$ – на соответствующих виртуальных деформациях поперечных сдвигов.

Следуя методу Ритца, приравним нулю работу $\bar{Z}_2$ и $\bar{N}_x,\bar{N}_y$ на соответствующих виртуальных прогибах и деформациях:

$$\int_0^1\int_0^1\left[L_1(f,\varphi,\psi)\delta f_{ij}+L_2(f,\varphi,\psi)\delta\varphi_{ij}+L_3(f,\varphi,\psi)\delta\psi_{ij}\right]d\bar{x}d\bar{y}=0 \qquad (3.2)$$

Так как вариации δf_{ij}, $\delta\varphi_{ij}$, $\delta\psi_{ij}$ произвольны и независимы друг от друга, то из (3.2) следует:

$$\int_0^1\int_0^1 L_1(f,\varphi,\psi)f_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0,\qquad \int_0^1\int_0^1 L_2(f,\varphi,\psi)\varphi_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0$$

$$\int_0^1\int_0^1 L_3(f,\varphi,\psi)\psi_{ij}d\bar{x}d\bar{y}=0,\qquad i=1,2,...n,\ j=1,2,...k \qquad (3.3)$$

Уравнения (3.3) образуют систему однородных алгебраических линейных уравнений относительно A_{ij}, B_{ij} и C_{ij}. Значения собственных частот поперечных колебаний пластинки можно определить из условия существования нетривиальных решений этой системы, т.е. из условия равенства нулю ее определителя. Конечность числа членов выражения (3.1) накладывает определенные ограничения на возможные формы изогнутой пластинки. Это равносильно искусственному повышению жесткости пластинки, в силу чего найденные приближенные значения собственных частот будут выше соответствующих точных значений.

4. В качестве примера рассмотрим задачу о свободных поперечных колебаниях ортотропной пластинки-полосы линейно-переменной толщины при шарнирном опираний ее кромок. Положив $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma$, из (2.2) получим:

$$2H\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 4\gamma\varphi + 3Hsf\Omega^2 = L_1(f,\varphi) = 0$$

$$s^3H^2\frac{d^3f}{d\bar{x}^3} + 2s^3\gamma H\frac{d^2f}{d\bar{x}^2} - \chi s^2H^2\frac{d^2\varphi}{d\bar{x}^2} - 2\chi\gamma s^2H\frac{d\varphi}{d\bar{x}} + 8\varphi = L_2(f,\varphi) = 0$$

$$\psi = 0 \tag{4.1}$$

Условия шарнирного опирания с учетом (2.1) примут вид [1]:

при $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = 1$

$$\frac{d^2f}{d\bar{x}^2} - \frac{\chi}{s}\frac{d\varphi}{d\bar{x}} = 0 \qquad \left(M_x\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\right)$$

$$f = 0 \qquad \left(w\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0\right) \tag{4.2}$$

Нетрудно убедиться, что выражения

$$f = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin i\pi\bar{x}, \qquad \varphi = \sum_{i=1}^{n} B_i \cos i\pi\bar{x} \tag{4.3}$$

удовлетворяют краевым условиям (4.2), а дифференциальным уравнениям задачи (4.1) — нет. С учетом (4.3) уравнения виртуальных работ (3.3) представим в виде

$$\int_0^1 L_1(f,\varphi)\sin i\pi\bar{x}\,d\bar{x} = 0, \quad \int_0^1 L_2(f,\varphi)\cos i\pi\bar{x}\,d\bar{x} = 0, \quad i = 1,2,\ldots n \tag{4.4}$$

Особый интерес представляет простейший случай, когда из рядов (4.3) берутся только первые члены. Тогда получим систему

$$3s^2\Omega^2A_1 - 2\pi B_1 = 0 \tag{4.5}$$

$$\pi s^3\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2 - 3)\right]A_1 - \left\{48 + \chi s^2\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2 - 3)\right]\right\}B_1 = 0$$

Очевидно, что из системы (4.6) можно определить лишь значения первой собственной частоты

$$\Omega_1 = \Omega_{01}\sqrt{1-d}, \quad d = \frac{\chi s^2\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2 - 3)\right]}{48 + \chi s^2\left[6\pi^2(1+\gamma) + \gamma^2(2\pi^2 - 3)\right]} \tag{4.6}$$

Здесь Ω_{01} соответствует классической постановке задачи, не учитывающей влияние поперечного сдвига —

$$\Omega_{01} = \Omega_1\Big|_{\chi=0} = \frac{\sqrt{2}\pi s}{12}\sqrt{6\pi^2(1+\gamma)+\gamma^2(2\pi^2-3)} \tag{4.7}$$

Из формулы (4.6) видно, что учет влияния поперечного сдвига $(\chi > 0)$ приводит к уменьшению первой собственной частоты.

В случае полосы постоянной толщины $\gamma = 0$ и из (4.6), (4.7) получим

$$\Omega_{01} = \frac{\sqrt{3}\pi^2 s}{6}, \quad \Omega_1 = \Omega_{01}\sqrt{1-d}, \; d = \frac{\chi\pi^2 s^2}{8+\chi\pi^2 s^2} \tag{4.8}$$

Эти значения совпадают с соответствующими точными значениями, поскольку в случае постоянной толщины, выражения (4.3) кроме условий шарнирного опирания удовлетворяют еще и дифференциальным уравнениям (4.1), т.е. являются решением краевой задачи.

Сравнивая с аналогичными результатами С.А. Амбарцумяна d^* [1] замечаем

$$d^* = \frac{\chi\pi^2 s^2}{10+\chi\pi^2 s^2} < d = \frac{\chi\pi^2 s^2}{8+\chi\pi^2 s^2} \tag{4.9}$$

В силу этого поправка, вносимая учетом поперечного сдвига на первую собственную частоту полосы постоянной толщины, по теории [2] получается немного большей, чем по теории [1]. Например при $\chi = 10$, $s = 0{,}125$ она составляет по теории [2] 8.44%, а по теории [1] – 6.92%. При $\chi = 20$, $s = 0{,}125$ она составляет 15,04% и 12,58% соответственно.

В нижеприведенной таблице представлены значения первых n частот $(n = 1,2,\ldots,5)$ свободных колебаний полосы линейно-переменной толщины, определенные по методу Ритца при $s = 0.125$, $\gamma = 1$ и некоторых значениях параметра χ. С целью сравнения в начале таблицы приведены точные значения первых двух частот полосы, заимствованные с работы [3].

В последних двух строках каждой части таблицы (для каждого n) приведены величины

$$\Delta_i = \frac{\Omega_i^r - \Omega_i}{\Omega_i}100\%, \quad (i = 1;2) \tag{4.10}$$

которые показывают, на сколько процентов отличаются значения первых двух частот Ω_i^r, определенные по методу Ритца, от соответствующих точных значений Ω_i. Отметим, что величины Δ_i при $i > 2$ не приводятся из-за отсутствия соответствующих точных значений Ω_i.

Из таблицы видно, что при двучленной аппроксимации решений, т.е. когда в рядах (4.3) удерживаются по два члена $(n = 2)$, первая частота Ω_1 определяется с точностью порядка 0.3%, а вторая частота Ω_2 – 5%. При трехчленной аппроксимации $(n = 3)$ значения первой частоты практически совпадают с точными значениями. А значения второй частоты отличаются от точных значений не более чем на 0.4%. С возрастанием параметра χ точность метода Ритца заметно улучшается.

Таким образом, метод Ритца приводит к довольно хорошим результатам и в случае переменной толщины и учета поперечного сдвига.

Таблица

$s = 0.125 \quad \gamma = 1$

	χ	0	1	2	5	10	20
Точное решение по [1]	Ω_1	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827
	Ω_2	2.090	1.938	1.814	1.549	1.285	1.008
n=2	Ω_1	0.5155	0.5055	0.4958	0.4702	0.4350	0.3833
	Ω_2	2.202	2.025	1.884	1.591	1.309	1.020
	Δ_1	0.30	0.29	0.26	0.26	0.21	0.19
	Δ_2	5.36	4.49	3.86	2.71	1.87	1.08
n=3	Ω_1	0.5144	0.5044	0.4949	0.4693	0.4343	0.3829
	Ω_2	2.098	1.944	1.819	1.552	1.287	1.009
	Ω_3	4.973	4.172	3.665	2.824	2.182	1.624
	Δ_1	0.08	0.08	0.08	0.06	0.05	0.03
	Δ_2	0.38	0.31	0.28	0.19	0.16	0.09
n=4	Ω_1	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827
	Ω_2	2.092	1.939	1.815	1.550	1.286	1.009
	Ω_3	4.716	4.020	3.562	2.778	2.161	1.615
	Ω_4	8.885	6.692	5.596	4.061	3.039	2.218
	Δ_1	0	0	0	0	0	0
	Δ_2	0.10	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
n=5	Ω_1	0.5140	0.5040	0.4945	0.4690	0.4341	0.3827
	Ω_2	2.090	1.938	1.814	1.549	1.285	1.008
	Ω_3	4.698	4.010	3.556	2.775	2.160	1.615
	Ω_4	8.386	6.483	5.475	4.017	3.021	2.211
	Ω_5	13.96	9.391	7.561	5.282	3.884	2.805
	Δ_1	0	0	0	0	0	0
	Δ_2	0	0	0	0	0	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Киракосян Р.М. Прикладная теория ортотропных пластин переменной толщины, учитывающая влияние деформаций поперечных сдвигов.Ереван: Изд. "Гитутюн" НАН РА. 2000. 122с.
3. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. Свободные колебания ортотропных пластин переменной толщины с учетом поперечных сдвигов // Докл. НАН РА. 1999. Т. 99. С.116-122.
4. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматгиз, 1959. 439с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.11.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 539.3

О НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛНАХ В ТЕРМОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ

Мовсисян Л.А.

Լ.Ա. Մովսիսյան
Ջերմաառաձգական սալում ոչ գծային ալիքների մասին

Դիտարկվում է երկրաչափորեն ոչ գծային ջերմաառաձգական սալում (կապակցված խնդիր) ալիքների տարածման խնդիրը: Ցույց է տրված կտրող ուժից ոչ գծային անդամի և ջերմության ազդեցությունները ալիքների տարածման կայունության պայմանում

L.A. Movsisyan
On Non-Linear Waves in Thermoelastic Plate

Обычно при изучении геометрически нелинейных колебаний пластин инерционным членом от продольного перемещения по известным соображениям пренебрегают [1].

При изучении распространения волн модуляции в пластине [2] оказалось, что сохранение этого члена совершенно меняет ее картину, т.е. если без учета этого члена движение волнового пакета устойчиво ("жесткая" характеристика), то уже наличие – неустойчиво ("мягкая" характеристика).

В настоящей работе исследуется распространение одномерных нелинейных волн в термоупругой пластине (связанная задача). В отличие от [1,2] в уравнениях движения сохраняется нелинейный член от перерезывающего усилия [3,4]. Выявляется роль этого члена и температуры в вопросе устойчивости распространения волн модуляции.

1. Уравнения одномерного движения пластинки берем в виде [3]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial M}{\partial x}=N
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

В [1] в первом уравнении второй член отсутствует, однако, как показано в [3], имеются задачи устойчивости, в которых роль этого члена существенна. Оказывается, и в настоящей задаче наличие этого члена приводит не только к количественным изменениям в условии устойчивости распространения волн.

В предположении линейного изменения температуры по толщине пластинки $\theta=\theta_0+z\theta_1$ и справедливости гипотезы прямых нормалей для усилия T и момента M имеем:

$$
\begin{gathered}
T=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha(1+\nu)\theta_0\right] \\
M=-\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha(1+\nu)\theta_1\right]
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

и два уравнения теплопроводности [5,6]

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+A\theta_0+\chi\eta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=0$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}-\chi\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x^2}+B\theta_1-\chi\eta\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=0 \qquad (1.3)$$

$$A=\frac{2s}{\rho h c_p},\quad B=\frac{12\chi}{h^2}+\frac{6s}{\rho h c_p}$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость, ρ — плотность материала, $\chi=\lambda_0/\rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, λ_0 — коэффициент теплопроводности, s — коэффициент теплопередачи поверхности тела, $\eta=\gamma T^0/\lambda_0$ — коэффициент связанности, $\gamma=E\alpha/(1-2\nu)$, T^0 — температура недеформированного тела.

На основании (1.1) и (1.2) уравнения движения в перемещениях будут:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha(1+\nu)\theta_0\right]+\frac{h^2}{12}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\alpha(1+\nu)\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\}=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\alpha(1+\nu)\theta_1\right]-\frac{12}{h^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2-\alpha(1+\nu)\theta_0\right]\frac{\partial w}{\partial x}\right\}+ \qquad (1.4)$$

$$+\frac{12}{h^2 v^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Здесь $v=\left[E/\rho(1-\nu^2)\right]^{1/2}$ — скорость упругой волны в пластине.

2 Решение системы (1.3)-(1.4) будем искать в виде:

$$\theta_0=T_0+T_2e^{2i\tau}+\bar{T}_2e^{-2i\tau},\quad \theta_1=T_1e^{i\tau}+\bar{T}_1e^{-i\tau}$$
$$u=u_0+u_2e^{2i\tau}+\bar{u}_2e^{-2i\tau},\quad w=w_1e^{i\tau}+\bar{w}_1e^{-i\tau},\quad \tau=kx-\omega t \qquad (2.1)$$

где T_0, u_0 — так называемое "среднее течение" [7], а черточками обозначены сопряженные величины.

При исследовании задачи распространения волн в рассматриваемой системе основной считается изгибная величина.

При подставлении (2.1) в (1.3)-(1.4) и приравнивании коэффициентов при одинаковых гармониках полученная система дает для первых членов (2.1)

$$T_0\approx-\frac{\chi\eta c}{A}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},\ \frac{\partial u}{\partial x}\approx-k^2w_1\bar{w}_1e^{2\delta t}(1+k^2h^2/6) \qquad (2.2)$$

При получении (2.2) принималось, что $\partial/\partial t\sim c\partial/\partial x$, где

$c = d(\mathrm{Re}\,\omega_0)/dk$ – групповая скорость (от линейной частоты $\omega = \omega_0' + i\omega_0''$) и высшими степенями при дифференцировании можно пренебречь по сравнению с низшими.

В предположении малости затухания η для линейной частоты принимается

$$\omega_0' = \frac{h\nu k^2}{2\sqrt{3}}, \quad \omega_0'' = \frac{1}{2B}\alpha(1+\nu)\chi\eta(\omega_0')^2 \tag{2.3}$$

далее имеем:

$$T_2 \approx -\frac{4}{A}\chi\eta k\omega u_2, \quad T_1 \approx \frac{1}{B}i\chi\eta k^2\omega w_1$$

$$u_2 \approx -\frac{1}{4}ikw_1^2\left[1 - \frac{h^2k^2}{12} + \frac{2}{A}i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0'\right]$$

которые для нелинейной частоты дают

$$\omega = \omega_0'\left\{1 - \frac{1}{2B}i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0' - \frac{1}{8}a^2k^2\left[\frac{7}{2} + \alpha(1+\nu)\chi\eta + \frac{1}{A}i\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0'\right]\right\} \tag{2.4}$$

Здесь через a^2 обозначено

$$a^2 = 4w_1\bar{w}_1e^{2\omega_0''t} \tag{2.5}$$

в отличие от предыдущих работ, например [8], наверное по аналогии с линейными колебаниями, целесообразнее экспоненциальный множитель включить в выражение амплитуды. И вот, что интересно. Наличие нового члена в первом уравнении (1.1) в дисперсионном уравнении (2.4) меняло (в нелинейной части, разумеется) значение действительной части: вместо 7/2 было бы 9/2 и что более важно, мнимая часть была бы с отрицательным коэффициентом, а это существенно при исследовании на устойчивость распространения.

В случае, когда пластинка изолирована от внешней среды ($s = 0$)

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} \approx -k^2w_1\bar{w}_1e^{2\omega_0''t}\left[1 + k^2h^2/6 - \alpha(1+\nu)\chi\eta\right]$$

$$T_2 \approx -\frac{1}{k}\eta\omega_0'u_2, \quad T_1 \approx \frac{1}{12}i\eta\omega_0'h^2w_1$$

$$u_2 \approx -\frac{1}{4}ikw_1^2\left[1 - \frac{1}{12}h^2k^2 + \frac{1}{2k^2}i\alpha(1+\nu)\eta\omega_0'\right] \tag{2.6}$$

$$\omega_0'' = -\frac{1}{24}\alpha(1+\nu)\eta h^2\omega_0'$$

$$\omega = \omega_0'\left\{1 - \frac{i\alpha(1+\nu)\eta h^2\omega_0'}{24} - \frac{a^2k^2}{8}\left[\frac{7}{2} + \frac{2\alpha(1+\nu)\chi\eta}{3} + \frac{i\alpha(1+\nu)\eta\omega_0'}{4}\right]\right\} \tag{2.7}$$

3. Следующий вопрос по важности в задачах распространения волн – условие устойчивости волн модуляции. Без учета уравнений теплопроводности, как показано в [2], имеется неустойчивость. Но так как наличие температуры приводит в дисперсионном уравнении к мнимым частям (внутреннее затухание), они не меняют знак в зависимости от k и в обоих случаях они отрицательные $(\omega_0'' < 0)$, то такой процесс по [9] является устойчивым.

Однако можно поступить и как в [8]. Если составить уравнение модуляции

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{d\omega_0}{dk}\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{1}{2}i\frac{d^2\omega_0}{dk^2} - (D_2 - iD_1)\Psi|\Psi|^2 = 0, \quad |\Psi| = a \tag{3.1}$$

где ω_0 определяется по (2.3) и (2.6), а коэффициенты

$$D_1 = -7k^3/16, \quad D_2 = \begin{cases} -2\alpha(1+\nu)\chi\eta\omega_0'/A \\ -\alpha(1+\nu)\eta\omega_0'/4 \end{cases} \tag{3.2}$$

то условие устойчивости (неустойчивости) по [8].

По [8] условие устойчивости волн модуляции есть

$$\Omega'' < 0, \quad \Omega = \Omega' + i\Omega'' \tag{3.3}$$

где частота определяется из следующего уравнения

$$\begin{gathered} -i\Omega + iK\frac{d\omega_0'}{dk} = \frac{3}{2}D_2\psi_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}D_2\psi_0^2\right)^2 - \Delta} \\ \Delta = \frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0'}{dk^2}K^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\omega_0'}{dk^2} + 2D_1\psi_0^2\right) \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь ψ_0 – начальная амплитуда, K – волновое число огибающего.

Из (3.2) видно, что выражения D_1 и D_2 отрицательные, следовательно, Δ может менять знак и в связи с этим, при $\Delta < \frac{3}{2}(D_2\psi_0^2)^2$ будем иметь устойчивость, а при $\Delta > (3D_2\psi_0^2/2)^2$ возможна неустойчивость.

Как указывалось ранее, неучет инерционного члена от u меняет знак D_1, а учет нелинейного члена в первом уравнении (1.1) меняет знак D_2, следовательно, в этих случаях возможны другие условия устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука. 1972. 432 с.
2. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. О дисперсионных уравнениях гибких пластин и цилиндрической оболочки // Изв.АН Арм.ССР. Механика. 1988. Т.41. № 3. С.3-6.
3. Мовсисян Л.А. Об уравнениях устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки // Докл. АН Арм.ССР. 1971. Т.52. № 2. С.70-76.
4. Гнуни В.Ц. Об уравнеиях гибких пластин и оболочек // Тр.VII Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. М.: Наука, 1970. С.186-189.
5. Болотин В.В. Уравнение нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 2. С.361-363.
6. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
8. Багдоев А.Г., Мовсисян Л.А. Модуляция термомагнитоупругих волн в нелинейной пластине // Изв.НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. № 1. С.25-30.
9. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир, 1988. 694 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
13.04.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 62.50

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Барсегян В.Р.

Վ.Ռ. Բարսեղյան
Ստոխաստիկ հետադարձ կապով գծային համակարգերի ղեկավարումը
Դիտարկվում է գծային օբյեկտի օպտիմալ ղեկավարման խնդիր այն ենթադրությամբ, որ հետադարձ կապում հաշվի են առնվում շարժման ճշգրտումների պահերին օբյեկտի վիճակի մասին ստացվող սխալով տեղեկությունները: Ստացված են գնահատական ցանկալի շարժումից իրական շարժման շեղման համար և պայման տրված ճշտությամբ շարժումների մոտիկությունը երաշխավորող ճշգրտումների թվի համար.

V.R. Barseghyan
Optimal control of linear systems with stochastic feed-back

Рассматривается задача оптимального управления объектов в предположении, что в моменты коррекции движения информация о состоянии объекта поступает с ошибкой, которая учитывается в обратной связи. Построены оптимальное стохастическое управление и реальное движение. Получена оценка для отклонения реального движения от желаемого и условия для числа коррекции, гарантирующие близость движения на заданную величину.

1. Пусть движение управляемого объекта описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t) \tag{1.1}$$

Предполагается, что $x(t)$ — n-мерный фазовый вектор, $A(t)-(n\times n)$, $B(t)-(n\times r)$-мерные матрицы, элементы которых измеримые ограниченные функции при $t_0 \le t \le T$ (t_0 и T — заданные моменты времени), $u(t)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий, компоненты которого считаются измеримыми ограниченными функциями, $f(t)$ — n-мерный вектор внешних воздействий (быть может измеримой ограниченной функцией).

Заданы начальное и конечное значения фазового вектора

$$x(t_0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

и функционал

$$æ[u] = \left[\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{i=1}^{r} u_i^2(t)\right)dt\right]^{1/2} \tag{1.2}$$

Решение задачи оптимального перевода системы (1.1) из начального состояния $x(t_0)$ в конечное состояние $x(T)$ при минимизации функционала $æ[u]$ (1.2) будет [1].

$$u^0(t) = B'(t)X'[T,t]Q^{-1}(T,t_0)\left[x(T) - X[T,t_0]x(t_0) - \int_{t_0}^{T} X[T,\tau]f(\tau)d\tau\right] \tag{1.3}$$

где Q – матрица с элементами α_{ij}

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{r} \int_{t_0}^{T} h_{ik}(T,\tau) h_{jk}(T,\tau) d\tau$$

h_{ij} – элементы матрицы $S'[\tau,T]B(\tau)$, $S[\tau,T]$ – фундаментальная матрица сопряженной системы однородной части (1.1), $X[T,\tau]$ – фундаментальная матрица однородной части (1.1). Здесь штрих означает транспонирование.

Оптимальную траекторию $x^0(t)$ системы (1.1) получим, интегрируя ее с учетом $u^0(t)$ (1.3) при начальном условии $x(t_0)$ и будем иметь

$$x^0(t) = X[t,t_0]x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X[t,\tau]\left[B(\tau)u^0(\tau) + f(\tau)\right]d\tau \tag{1.4}$$

Фазовую траекторию $x^0(t)$ (1.4) будем считать желаемой (поводырем) для обеспечения конечного условия. Однако, в практике реальное движение объекта, описываемого математической моделью (1.1) под воздействием программного управления $u^0(t)$ (1.3), будет отличаться от желаемого (1.4). Это отличие обусловлено различными внешними влияниями, действующими на систему. Следовательно, в конце процесса не будет выполнено конечное условие.

Поэтому, необходимо следить за реальным движением объекта и построить алгоритм (непротиворечащий условиям реализации), который по мере возможности уменьшило бы отличие реального движения от желаемого.

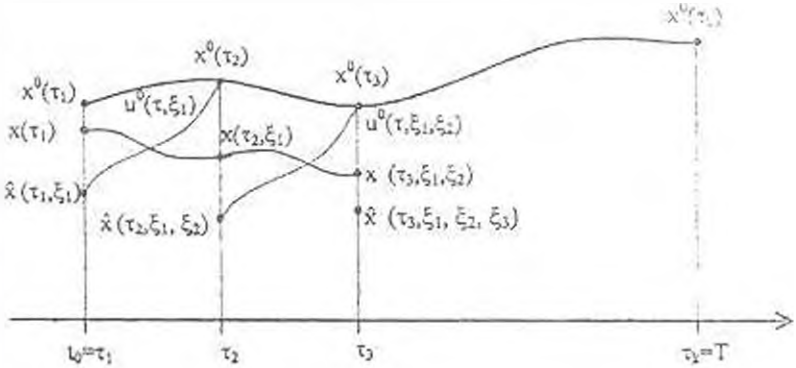
2. Предположим, что имеется возможность корректировать фазовую траекторию движения системы для прицеливания на построенный поводырь $x^0(t)$ (1.4). Поэтому пусть имеем разбиение промежутка времени $[t_0,T]$: $t_0 = \tau_1 < \ldots < \tau_k = T$ и имеется возможность с помощью измерительных устройств измерять значение фазового вектора. В зависимости от ограниченности физических возможностей измерительных устройств и различных внешних влияний результат измерения будет неточным [2,3].

Обозначим измеренное с некоторой ошибкой в момент времени τ_1 значение фазового вектора через $\hat{x}(\tau,\xi_1)$, где случайная величина ξ_1 распределена равномерно на полуинтервале $0 \le \xi_1 < 1$ [2]. Пусть $x(\tau_1)$ – реальное состояние системы в начальный момент времени τ_1 (фиг.1). Оптимальное управляющее воздействие, переводящее систему (1.1) из известного состояния $\hat{x}(\tau_1,\xi_1)$ в желаемое состояние $x^0(\tau_2)$ и минимизирующее функционал (1.2) на промежутке времени $[\tau_1,\tau_2]$, согласно (1.3) будет

$$u^0(\tau,\xi_1) = B'(\tau)X'[\tau_2,\tau]Q^{-1}(\tau_2,\tau_1)\times$$
$$\times\left[x^0(\tau_2) - X[\tau_2,\tau_1]\hat{x}(\tau_1,\xi_1) - \int_{\tau_1}^{\tau_2} X[\tau_2,\tau]f(\tau)d\tau\right] \tag{2.1}$$

Следовательно, оптимальное стохастическое движение системы под воздействием управления $u^0(\tau,\xi_1)$, выходящего из состояния $\hat{x}(\tau_1,\xi_1)$, будет [4]

$$x^0(t,\xi_1) = X[t,\tau_1]\hat{x}(\tau_1,\xi_1) + \int_{\tau_1}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1) + f(\tau)]d\tau \qquad (2.2)$$



Фиг.1

Так как в момент времени τ_1 реальным фазовым состоянием системы является $x(\tau_1)$, то реальное движение системы (1.1) под воздействием управления $u^0(\tau,\xi_1)$ (2.1), $\tau \in [\tau_1,\tau_2]$ необходимо считать выходящим из состояния $x(\tau_1)$ и будет

$$x(t,\xi_1) = X[t,\tau_1]x(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1) + f(\tau)]d\tau \qquad (2.3)$$

В момент времени τ_2, согласно (2.3), реальное фазовое состояние $x(\tau_2,\xi_1)$ не будет совпадать с состоянием $x^0(\tau_2,\xi_1) = x^0(\tau_2)$, определяемым (2.2).

Чтобы провести соответствующую корректировку отклонения траектории в момент времени τ_2, измеряя в этот момент с некоторой ошибкой фазовое состояние, получим значение $\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$, где случайная величина ξ_2 распределена равномерно на полуинтервале $0 \le \xi_2 < 1$ и такая, что величины (ξ_1,ξ_2) в совокупности независимы.

Решая задачу оптимального управления системой (1.1) на промежутке времени $[\tau_2,\tau_3]$ при начальном $\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$, конечном $x^0(\tau_3)$ состояниях и функционале (1.2) будем иметь оптимальное управление $u^0(\tau,\xi_1,\xi_2)$, явный вид которого аналогичен выражению (2.1).

Оптимальное стохастическое движение под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,\xi_2)$, выходящего из состояния $\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$, будет

$$x^0(t,\xi_1,\xi_2) = X[t,\tau_2]\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2) + \int_{\tau_2}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,\xi_2) + f(\tau)]d\tau \quad (2.4)$$

Реальное движение системы (1.1) под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,\xi_2)$ выходит из состояния $x(\tau_2,\xi_1)$ ($x(\tau_2,\xi_1)$ получаем из (2.3), подставляя $t = \tau_2$) и будет

$$x(t,\xi_1,\xi_2) = X[t,\tau_2]x(\tau_2,\xi_1) + \int_{\tau_2}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,\xi_2) + f(\tau)]d\tau \quad (2.5)$$

В момент времени τ_3, согласно (2.5), реальное состояние $x(\tau_2,\xi_1,\xi_2)$ не будет совпадать с состоянием $x^0(\tau_2,\xi_1,\xi_2) = x^0(\tau_3)$, определяемым из (2.4)

Продолжая рассуждения и решая задачу оптимального управления системой (1.1) на промежутке времени $[\tau_i,\tau_{i+1}]$ при начальном $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,...,\xi_i)$, конечном $x^0(\tau_{i+1})$ состояниях и функционале (1.2), будем иметь оптимальное управление $u^0(\tau,\xi_1,...\xi_i)$.

Оптимальное стохастическое движение под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,...\xi_i)$, выходящего из состояния $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,...\xi_i)$, будет

$$x^0(t,\xi_1,...,\xi_i) = X[t,\tau_i]\hat{x}(\tau_i,\xi_1,...,\xi_i) + \int_{\tau_i}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,...,\xi_i) + f(\tau)]d\tau \quad (2.6)$$

Реальное движение системы (1.1) под воздействием стохастического управления $u^0(\tau,\xi_1,...\xi_i)$ выходит из состояния $x^0(\tau_i,\xi_1,...\xi_{i-1})$ и будет

$$x(t,\xi_1,...,\xi_i) = X[t,\tau_i]x(\tau_i,\xi_1,...,\xi_{i-1}) + \int_{\tau_i}^{t} X[t,\tau][B(\tau)u^0(\tau,\xi_1,...,\xi_i) + f(\tau)]d\tau \quad (2.7)$$

Ясно, что в момент времени τ_{i+1} реальное состояние системы $x(\tau_{i+1},\xi_1,...,\xi_i)$ и состояние $x^0(\tau_{i+1},\xi_1,...,\xi_i)$ не совпадают. Здесь предполагается, что случайные величины $(\xi_1,...,\xi_i)$ распределены равномерно на полуинтервале [0, 1) и в совокупности независимы.

Оценим расстояние реального состояния системы $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,...,\xi_i)$ от желаемого состояния $x^0(\tau_i)$. Для момента времени τ_2 имеем

$$\|x^0(\tau_2) - x(\tau_2,\xi_1)\| = \|X[\tau_2,\tau_1]\| \cdot \|\hat{x}(\tau_1,\xi_1) - x^0(\tau_1)\| \quad (2.8)$$

Предполагается, что $x(\tau_1) = x^0(\tau_1)$. Для момента времени τ_3 с учетом (2.8) получим [4]

$$\|x^0(\tau_3)-x(\tau_3,\xi_1,\xi_2)\| = \|X[\tau_3,\tau_2]\|\cdot\|\hat{x}(\tau_2,\xi_1,\xi_2)-x^0(\tau_2)\| +$$
$$+\|X[\tau_3,\tau_1]\|\cdot\|\hat{x}(\tau_1,\xi_1)-x^0(\tau_1)\|$$

Продолжая процедуру оценивания расстояния, для конечного момента времени τ_k будем иметь

$$\|x^0(\tau_k)-x(\tau_k,\xi_1,\ldots,\xi_{k-1})\| = \sum_{i=2}^{k}\|X[\tau_k,\tau_{i-1}]\|\cdot\|\hat{x}(\tau_{i-1},\xi_1,\ldots,\xi_{i-1})-x^0(\tau_{i-1})\|$$

Полученное выражение позволяет оценить математическое ожидание и дисперсию отклонения системы от поводыря.

3. В пункте 2 предполагалось, что в моменты корректировки τ_i каким-то образом (измерения, которые не всегда доступны) известно значение фазового состояния $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_i)$. Задавая математическую модель через измерительное устройство поступающего реального (с ошибкой) сигнала и исследуя задачу наблюдения фазового вектора, можно определить функциональный вид измеренного значения $\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_i)$.

Пусть через измерительное устройство поступает реальный сигнал вида

$$Z(\tau) = G(\tau)x(\tau)+\Delta(\tau), \qquad \tau\in[t-\theta,t] \tag{3.1}$$

где $G(\tau)-(m\times n)$-мерная матрица, $\Delta(\tau)-m$-мерный вектор погрешности, θ – положительное число, учитывающее необходимую продолжительность запоминания поступающего сигнала. Исходя из физических условий процесса наблюдения, вытекает некоторая оценка погрешности по норме

$$\rho[\Delta(\tau)]\le\delta \tag{3.2}$$

где δ – положительная постоянная.

Известно, что оптимальная операция $\varphi^0[t,z(\tau)]$ [1], вычисляюшая фазовый вектор (при каждом t по всевозможным реализациям $z(\tau)$ (3.1)) с наименьшей возможной ошибкой при заданной оценке погрешности $\Delta(\tau)$ (3.2), является линейной. Следовательно,

$$\varphi^0[t,z(\tau)] = \varphi^0[t,G(\tau)x(\tau)]+\varphi^0[\Delta(\tau)]$$

Поэтому, следуя вышеизложенному, в любой момент времени τ_i измеренное с некоторой ошибкой фазовое состояние как результат оптимального решения задачи наблюдения с реальным сигналом $z(\tau)$ при $\tau\in[\tau_i-\theta_i,\tau_i]$ представится в виде

$$\hat{x}(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_i) = x(\tau_i,\xi_1,\ldots,\xi_{i-1})+\omega(\tau_i,\xi_i) \qquad (i=1,\ldots,k) \tag{3.3}$$

где $\omega(\tau,\xi)$ – функция ошибки измерения и является результатом действия оптимальной операции на погрешность $\Delta(\tau)$ реального сигнала $z(\tau)$ из (3.1).

Предполагается, что моменты времени τ_i и числа θ_i $(i=1,...,k)$ такие, что $\tau_i > \tau_{i-1}+\theta_i$. Следовательно, как и выше, определим оптимальное управление $u^0(\tau,\xi_1,...,\xi_i)$, переводящее систему (1.1) из состояния (3.3) в состояние $x^0(\tau_{i+1})$.

В конце процесса движения, при измеренных значениях фазового состояния (3.3), для расстояния реального состояния $x(\tau_k,\xi_1,...,\xi_{k-1})$ системы от желаемого состояния $x^0(\tau_k)$ будем иметь следующую оценку:

$$\left\|x^0(\tau_k)-x(\tau_k,\xi_1,...,\xi_{k-1})\right\| \le \left\|X[\tau_k,\tau_{k-1}]\right\|\cdot\left\|\omega[\tau_k,\xi_k]\right\| \tag{3.4}$$

Отметим, что из определения нормы линейной операции [1] вытекает

$$\sup_{\Delta}\left|\varphi[\Delta(\tau)]\right| = \delta\rho^*[\varphi] \tag{3.5}$$

при условии (3.2), где ρ^* – сопряженная норма.

Следовательно, учитывая $\varphi^0[\Delta(\tau)]=\omega(\tau,\xi)$ и (3.5), (3.4) запишется в виде

$$\left\|x^0(\tau_k)-x(\tau_k,\xi_1,...,\xi_{k-1})\right\| \le \left\|X[\tau_k,\tau_{k-1}]\right\|\cdot\delta\cdot\rho^*[\varphi] \tag{3.6}$$

Заметим, что измеренное состояние (3.3) в момент времени τ_i можно представить в виде

$$\hat{x}(\tau_i,\xi_1,...,\xi_i) = x(\tau_i,\xi_1,...,\xi_{i-1})+\xi_i\sigma(\tau_i) \quad (i=1,...,k) \tag{3.7}$$

где $\sigma(\tau_i)$ – некоторый известный n-мерный вектор, значение которого обусловлено движением рассматриваемой системы, физическими и техническиими возможностями измерительного устройства.

Для фундаментальной матрицы (1.1) имеем

$$\left\|X[\tau_k,\tau_{k-1}]\right\| \le \exp\left[\|A\|(\tau_k-\tau_{k-1})\right] \tag{3.8}$$

Пусть $\theta_1=\theta_2=...=\theta_k=\theta$. Чтобы норма расстояния реального состояния системы от желаемого была меньше заданного числа $\varepsilon>0$, из (3.6) с учетом (3.8) получим

$$0<\theta<\frac{1}{\|A\|}\ln\frac{\varepsilon}{\delta\cdot\rho^*[\varphi]}$$

Из неравенства $\tau_i > \tau_1+(i-1)\theta,\ (i=2,...,k)$ для числа коррекции движения $N=k-1$ имеем следующие условия:

$$N < \frac{T-t_0}{\theta} \text{ или } N < \|A\| \cdot (T-t_0)\left(\ln\frac{\varepsilon}{\delta\rho^*[\varphi]}\right)^{-1} \tag{3.9}$$

Таким образом, если через измерительное устройство поступает сигнал (3.1), то измеренное (вычисленное) состояние будет иметь общий вид (3.3) (или, в частности, (3.7) и имеет место оценка (3.4) или (3.6)). И чтобы при матрице $A(t)$ обеспечить заданную близость (по норме) реального движения от желаемого, необходимое число коррекции движения должно удовлетворять условию (3.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968. 476 с.
2. Красовский Н.Н. Управления динамической системой. М.: Наука, 1985. 519с.
3. Габриелян М.С., Барсегян В.Р., Симонян Т.А. Об уклонении стохастической линейной системы при m целевых множествах //Уч.записки ЕГУ. 1996. № 1. С.10-16.
4. Барсегян В.Р. Оптимальное стохастическое управление сближением космических аппаратов // Изв.НАН и ГИУ Армении. Сер. техн. наук. 1999. № 1. С.94-100.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 30.05.2000

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 54, №2, 2001 Механика

УДК 678.057:620.17:539.37

О ПРОЧНОСТИ И ДЕФОРМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ СТЕКЛОПЛАСТИКОВЫХ ТРУБ ПРИ ПОВТОРНО-СТАТИЧЕСКИХ НАГРУЖЕНИЯХ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ОТКЛОНЕНИЙ ОРИЕНТАЦИИ АРМИРОВАНИЯ

Карапетян К.А.

Կ.Ա. Կարապետյան
Ապակեպլաստե խողովակների ամրությունը և դեֆորմատիվ հատկությունները կրկնվող-ստատիկ բեռնավորման դեպքում կախված ամրանավորման կողմնորոշվածության շեղվածությունից

Բերվում են շերտավոր ապակեպլաստների ամրության և դեֆորմատիվ հատկությունների էքսպերիմենտալ հետազոտությունների արդյունքները կախված նրանց պատրաստման ժամանակ ամրանավորման կողմնորոշվածության հնարավոր շեղվածությունից:

Ստացված է, որ նախագծվածից 6-8^0 ամրանավորման կողմնորոշվածության շեղվածության առկայությունը գործնականում չազդելով ապակեպլաստների ամրության և Պուասոնի գործակցի մեծությունների վրա, բերում է նրանց դեֆորմատիվ հատկությունների էական փոփոխման:

K.A.Karapetyan
On strength and strain properties of glass-fibre pipes at repeatedly-static loadings depending on deviations of orientation of reinforcement

Приводятся результаты экспериментального исследования прочности и деформативных свойств слоистых стеклопластиков в зависимости от возможного отклонения ориентации армирования при их изготовлении.

Получено, что отклонение от запроектированного ориентации армирования в пределах 6-8^0 практически не влияя на значения прочности и коэффициента Пуассона, приводит к существенному изменению деформативных свойств стеклопластиков.

Для оптимального проектирования конструкций из армированных композитных материалов (АКМ) необходим учет специфики их механических свойств при различных напряженно-деформационных состояниях [1,2 и др.].

Анализ опубликованных данных по механическим свойствам АКМ показывает, что в ряде случаев численные оценки для одного и того же класса композитов существенно различаются между собой [3-6 и др.]. При этом большой разброс объясняется не только несовершенством технологии, но и отклонением углов армирования от запроектированных.

Согласно данным, приведенным в работе [5], при некоторых углах вырезки ошибка в 5^0 может внести погрешность для значений модулей упругости и коэффициента Пуассона высокомодульных (армированных боро-, угле- волокнами) композитов до 100% и более и, поэтому, при проектировании конструкций предлагается установить жесткие допуски на углы армирования.

Однако, как показывает практика, даже при изготовлении в лабораторных условиях опытных образцов на основе стеклоткани, величина угла отклонения армирования от заданного может достигать до 6-8^0.

В настоящей работе приводятся результаты экспериментального исследования влияния отклонений углов армирования на прочность и деформативные свойства стеклотканевых труб, подвергнутых повторно-статическому осевому растяжению и простому кручению.

В качестве опытных образцов были использованы трубы с внутренним диаметром 38 мм, толщиной стенки 2,25 мм и длиной 285 мм, изготовленные методом горячего прессования с использованием стекловолокнистой ткани. Технология изготовления этих труб изложена в работе [7]. Образцы были изготовлены таким образом, что направления основы стеклоткани и продольной оси труб совпадали ($\varphi=0^0$). Однако у части образцов (около 8% от общего количества) было обнаружено отклонение угла армирования в пределах 6-8^0.

При проведении опытов образцы были разделены на 2 партии. У образцов одной партии направления основы стеклоткани и их оси совпадали ($\varphi=0^0$). У образцов другой партии величина угла между этими направлениями составляла φ=6-8^0.

Значение максимального напряжения при циклическом испытании труб на растяжение (средняя скорость нагружения - 0,27 МПа/сек) и на кручение (средняя скорость нагружения - 0,1 МПа/сек) составляло соответственно 0,6 и 0,3 части от величины их временного сопротивления при растяжении $\sigma_B=147,1$ МПа и при кручении $\tau_B=47,1$МПа. Базовое значение числа циклов испытаний труб было принято равным 12. При испытании в каждом случае 3-4 образцов-близнецов измерялись как продольные, так и сдвиговые деформации.

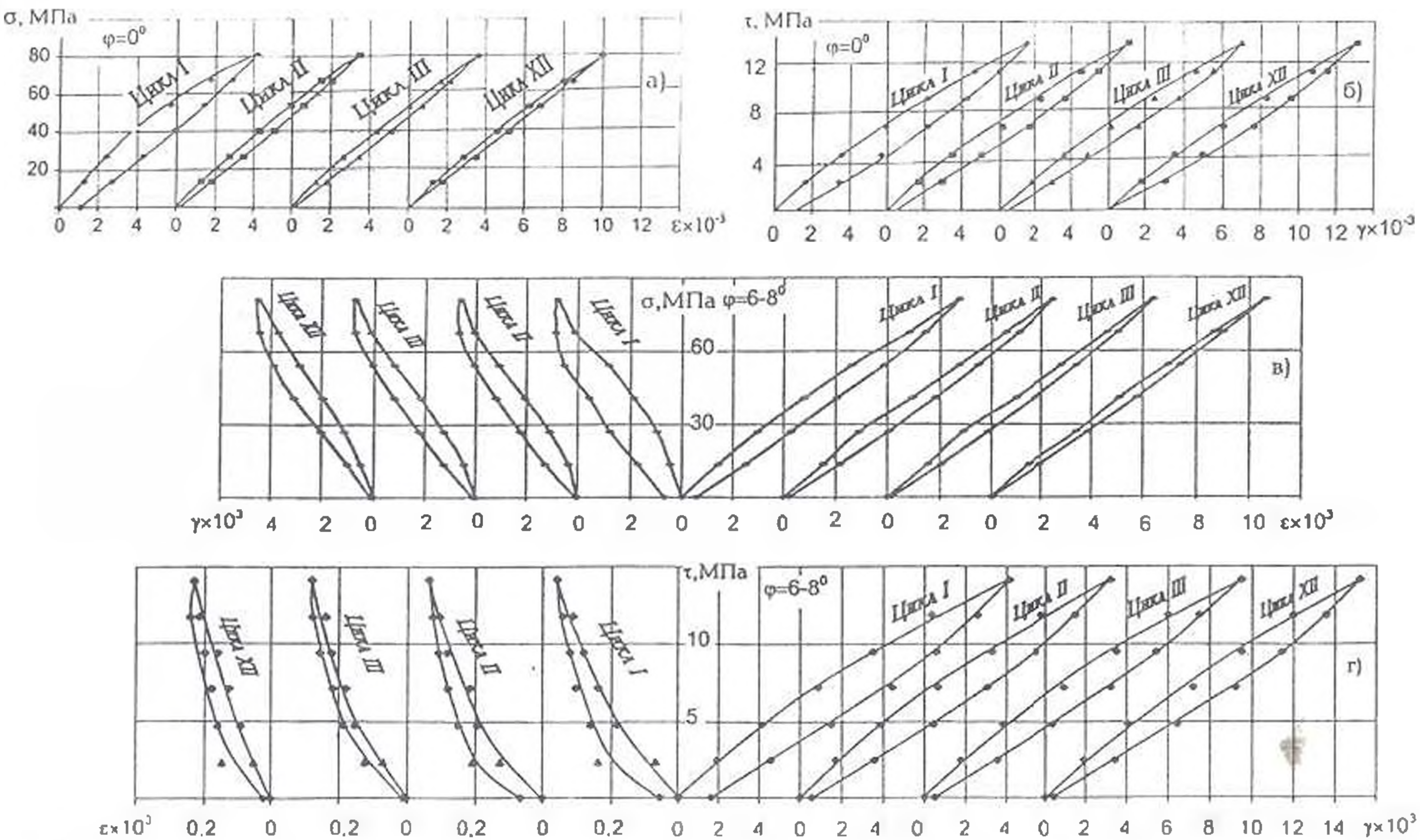
Согласно полученным экспериментальным данным, отклонение величины угла армирования на 6-8^0 от нулевого его значения практически не влияет на значения прочности тонкостенных стеклотканевых труб при осевом растяжении и при кручении.

На фиг. 1 приведены диаграммы деформирования, полученные при I, II, III и XII циклах испытания на осевое растяжение и на кручение стеклотканевых труб с $\varphi=0^0$ и φ=6-8^0.

По расчетам, проведенным на основе экспериментальных данных, отклонение угла армирования стеклотканевых труб на 6-8^0 от нулевого угла армирования приводит к снижению величин модулей Юнга и сдвига в среднем на 24 и 16% соответственно.

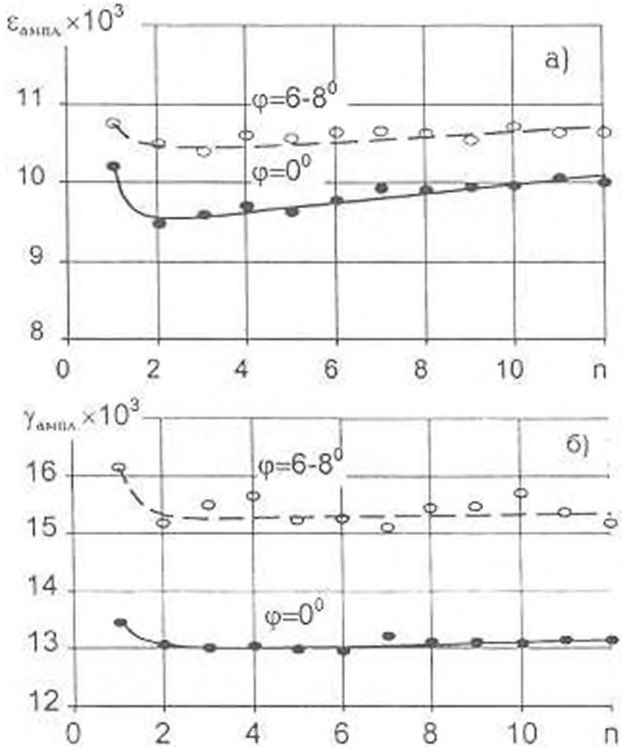
Из левых частей фиг. 1,в и 1,г следует, что отклонения угла армирования стеклотканевых труб в вышеуказанных пределах приводит к возникновению существенных сдвиговых деформаций при осевом растяжении и некоторых осевых деформаций при кручении, что закономерно [8]. Расчеты показывают, что при нагружении аналогичных стеклотканевых труб растягивающим напряжением $\sigma_z=0,6\sigma_B$ величина угла закручивания на 1 м длины составляет 13-14^0. При кручении таких труб крутящим моментом, соответствующим $0,3\tau_B$, абсолютное удлинение или укорочение (в зависимости от направления крутящего момента [8]) составляет 0,30-0,35 мм на 1 м длины.

На фиг. 2 и 3 приведены кривые изменения амплитудных продольных и сдвиговых, зафиксированных при σ_{max} и τ_{max}, а также остаточных деформаций в пределах цикла в зависимости от номера цикла n.



Фиг. 1. Диаграммы деформирования в пределах цикла в режиме нагружение-разгрузка в условиях осевого растяжения и простого кручения стеклотканевых труб с углом армирования φ=0° (а и б) и φ=6-8° (в и г)

Согласно графикам фиг. 2, независимо от вида нагружения, значения амплитудных деформаций цикла обеих партий труб после первого цикла испытании несколько уменьшаются, а в дальнейшем, с увеличением числа циклов n наблюдается их монотонное увеличение. Величина отношений амплитудных деформаций труб с $\varphi=6\text{-}8^0$ и $\varphi=0^0$ практически не зависит от числа циклов n и составляет 1,06-1,1 при осевом растяжении и 1,16-1,2 — при кручении.

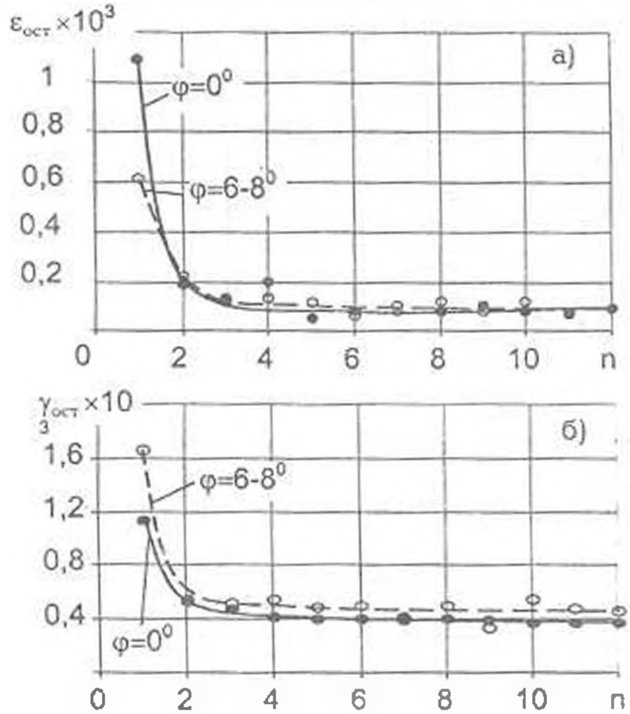


Фиг. 2. Кривые изменения амплитудных продольных (а) и сдвиговых (б) деформаций цикла стеклотканевых труб с углом армирования $\varphi=0^0$ и $\varphi=6\text{-}8^0$ в зависимости от номера цикла испытаний.

Отметим, что величины амплитудных сдвиговых деформаций цикла у труб с $\varphi=6\text{-}8^0$, зафиксированных при их осевом растяжении, и продольных осевых деформаций аналогичных труб, подвергнутых кручению, не зависят от количества циклов испытаний и составляют $(4,5\text{-}4,8)\times10^{-3}$ и $(0,3\text{-}0,35)\times10^{-3}$ соответственно.

Из графиков фиг. 3 следует, что в рассматриваемых видах испытания, величины остаточных деформаций цикла у обеих партий опытных образцов с увеличением числа циклов n монотонно стремятся к величинам, существенно меньшим их соответствующих значений, полученных при I цикле.

При I цикле испытания на осевое растяжение величина остаточных деформаций цикла у образцов с $\varphi=0^0$ получилась существенно большей (приблизительно в 1,8 раза), чем у образцов с $\varphi=6\text{-}8^0$ (фиг. 3а). В случае же кручения наблюдается обратное явление — значение указанного выше отношения составляет приблизительно 0,7 (фиг. 3б). Несмотря на это, на основе сравнения амплитудных и остаточных величин деформаций, полученных при одном и том же цикле аналогичных испытаний, можно считать, что в рассматриваемых случаях образование замкнутой петли гистерезиса практически происходит через 5-6 циклов.



Фиг. 3. Кривые изменения остаточных продольных (а) и сдвиговых (б) деформаций цикла стеклотканевых труб с углом армирования $\varphi=0^0$ и $\varphi=6\text{-}8^0$ в зависимости от номера цикла испытаний.

Динамика образования петли гистерезиса сдвиговых и продольных деформаций стеклотканевых труб с отклонением направления основы ткани от продольной оси в пределах 6-8° оказывается аналогичной.

Известно, что для определения некоторых характеристик материала, деформируемого в режиме нагрузка-разгрузка (например, коэффициент рассеяния энергии) целесообразно исходить из зависимости между интенсивностями касательных напряжений Т и деформаций сдвига Г [9].

Учитывая вышесказанное, для аналитического описания процесса деформирования стеклотканевых труб за цикл испытания исходили из экспериментально полученных зависимостей между указанными выше характеристиками, выражения которых в цилиндрической координатной системе соответственно следующие [10]:

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_Z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_Z)^2 + 6\left(\tau_{zr}^2 + \tau_{r\theta}^2 + \tau_{\theta z}^2\right)} \qquad (1)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_Z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_Z)^2 + \frac{3}{2}\left(\gamma_{zr}^2 + \gamma_{r\theta}^2 + \gamma_{\theta z}^2\right)} \qquad (2)$$

В случае осевого растяжения и простого кручения обеих партий тонкостенных трубчатых образцов для интенсивностей касательных напряжений, соответственно, имеем

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}|\sigma_z| \tag{3}$$

$$T = |\tau_{\theta z}| \tag{4}$$

Выражения интенсивностей деформаций сдвига при осевом растяжении и простом кручении труб с $\varphi=0^0$ следующие:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2} \tag{5}$$

$$\Gamma = |\gamma_{\theta z}| \tag{6}$$

При растяжении и простом кручении труб с углом армирования $\varphi=6^0-8^0$, выражения интенсивностей деформаций сдвига в обоих случаях принимают следующий вид:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{\theta z}^2} \tag{7}$$

В случае действия осевого растяжения в направлении z в выражениях (5) и (7) $\varepsilon_r=-\upsilon_1\varepsilon_z$, $\varepsilon_\theta=-\upsilon_2\varepsilon_z$, где υ_1 и υ_2 – коэффициенты Пуассона соответственно в радиальном и окружном направлениях.

В результате проведенных испытаний образцов в виде удлиненных двухсторонних лопаток по DIN 53455 [11] установлено, что в случае тканевых стеклопластиков отклонение угла армирования на 6-8^0 от нулевого его значения практически не влияет на величины υ_1 и υ_2 и при расчетах их значения можно принять равным приблизительно 0,2 и 0,16, соответственно.

В случае же действия крутящего момента $M_{\theta z}$, как это имело место и при первом цикле нагружения, осевые деформации оказались существенно меньшими касательной деформации $\gamma_{\theta z}$, что позволило ими пренебречь в формуле (7).

Аналитическое описание экспериментально полученных соотношений между T и Г на участках восходящей (→) и нисходящей (←) ветвей петли гистерезиса при рассматриваемых случаях испытания трубчатых образцов осуществлено дробнолинейной аппроксимацией следующего вида:

$$\bar{\bar{T}} = \frac{T_B}{\bar{\bar{a}}} \cdot \frac{\Gamma}{1 \pm \Gamma\bar{\bar{b}}/\bar{\bar{a}}} \tag{8}$$

Для касательных модулей по ветвям петли гистерезиса с учетом зависимости (8) имеем:

$$\frac{d\bar{\bar{T}}}{d\Gamma} = \frac{T_B}{\bar{\bar{a}}}\left(1 \mp \bar{\bar{b}}\frac{T}{T_B}\right)^2 \tag{9}$$

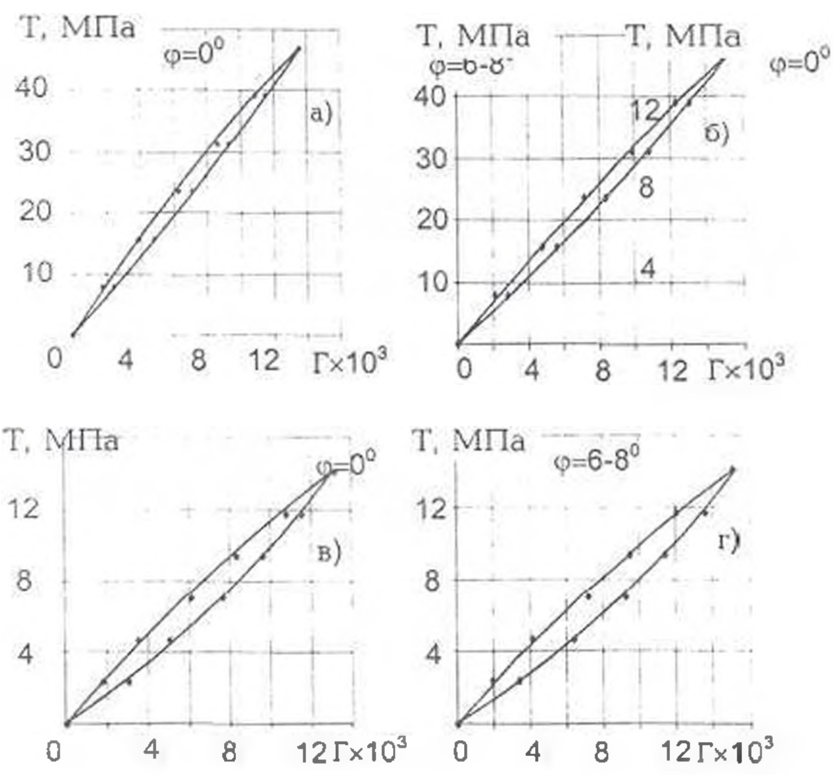
В выражениях (8), (9) T и Г – текущие значения интенсивностей касательных напряжений и деформации сдвига, T_B – предельное значение T, рассчитанное по формулам (3) и (4) с использованием данных, полученных при соответствующих испытаниях труб, a и b – геометрические параметры петли гистерезиса, определяемые непосредственно из опытных данных.

Значения параметров, входящих в (8) и (9), рассчитанные для XII цикла испытания образцов, приведены в табл. 1.

Построенные согласно зависимости (8), кривые петли гистерезиса в координатной системе Т-Г с использованием данных табл. 1 приведены на фиг. 4. На этой же фигуре точками показаны экспериментальные результаты.

Таблица 1.

Вид испытания образцов	Величина угла армирования	$T_в$ МПа	$Г_{ампл}\times 10^3$	Величины параметров				
				По восходящей ветви гистерезиса		По нисходящей ветви гистерезиса		ψ
				$\bar{a}\times 10^3$	$\bar{b}$	$\bar{a}\times 10^3$	$\bar{b}$	
Растяжение	$\varphi=0^0$	84.93	13.58	19.641	0.359	26.984	0.156	0.11
	$\varphi=6\text{-}8^0$	84.93	15.20	24.61	0.19	32.828	0.339	0.10
Кручение	$\varphi=0^0$	47.1	13.10	34.636	0.682	59.986	1.238	0.17
	$\varphi=6\text{-}8^0$	47.1	15.20	41.459	0.597	73.422	1.452	0.19



Фиг. 4. Кривые петли гистерезиса, построенные согласно зависимости (8), в случае осевого растяжения и простого кручения стеклотканевых труб с $\varphi=0^0$ (а и в) и труб с $\varphi=6^0\text{-}8^0$ (б и г).

Из фиг. 4 можно заключить, что дробнолинейная зависимость (8) с достаточной для практики точностью описывает процесс деформирования в режиме нагружение-разгрузка в условиях осевого растяжения и простого кручения стеклотканевых труб с $\varphi=0^0$ и $\varphi=6\text{-}8^0$.

Величины касательных модулей по восходящей и нисходящей ветвям петли гистерезиса, рассчитанные по зависимости (9) при различных уровнях T с использованием данных табл. 1, приведены в табл. 2.

Из данных табл. 2 можно заключить, что в случае растяжения при некотором уровне интенсивности касательных напряжений T^* (в данном случае $T^*\approx 40$МПа) отклонение угла армирования стеклотканевых труб на $6^0\text{-}8^0$ от нулевого угла практически не влияет на величину касательных модулей, определенных как по восходящей, так и по нисходящей ветвям петли гистерезиса. При $T<T^*$ вышеупомянутое отклонение угла армирования приводит к уменьшению величин касательных модулей по сравнению с аналогичными характеристиками, полученными для труб с $\varphi=0$. При $T>T^*$ имеет место обратное явление (табл. 2).

В случае же кручения значения касательных модулей для одного и того же уровня T у труб с $\varphi=0^0$ оказались существенно большими, чем у труб с $\varphi=6^0\text{-}8^0$ как по восходящей, так и по нисходящей ветвям петли гистерезиса (табл. 2). С увеличением уровня T указанная выше разница между значениями касательных модулей уменьшается (табл. 2).

Таблица 2

Направление обхода по петле гистерезиса	Величина угла армирования φ	Значения касательных модулей, МПа$\times 10^{-3}$					
		В случае растяжения при T, МПа			В случае кручения при T, МПа		
		0	40	80	0	7	14
По восходящей ветви	0^0	4.324	2.985	1.894	1.360	1.098	0.864
	$6\text{-}8^0$	3.450	2.860	2.326	1.136	0.943	0.769
По нисходящей ветви	0^0	3.147	3.626	4.140	0.785	1.100	1.469
	$6\text{-}8^0$	2.587	3.480	4.503	0.641	0.948	1.314

Известно, что неупругое поведение материала, деформируемого в режиме нагружение-разгрузка, оценивается по коэффициенту относительного рассеяния энергии ψ, исходя из зависимости [12,13]

$$\psi = \frac{\Delta W}{W} \tag{10}$$

где ΔW – энергия рассеяния, W – полная энергия деформации.

Учитывая то, что величины рассеиваемой за цикл энергии ΔW и полной энергии деформирования W эквивалентны соответственно величинам площади петли гистерезиса и площади, ограниченной восходящей ветвью гистерезиса и осью Г, обозначая $\frac{\bar{\bar{a}}}{\bar{\bar{b}}} = \bar{\bar{\chi}}$ и учитывая зависимости (8) и (10), для коэффициента рассеяния энергии имеем:

$$\psi=\frac{\Delta W}{W}=\frac{\int\limits_{0}^{\Gamma_{\text{ампл.}}}\frac{T_{\text{в}}}{\bar{a}}\cdot\frac{\Gamma}{1+\Gamma/\bar{\chi}}d\Gamma-\int\limits_{0}^{\Gamma_{\text{ампл.}}}\frac{T_{\text{в}}}{\bar{a}}\cdot\frac{\Gamma}{1-\Gamma/\bar{\chi}}d\Gamma}{\int\limits_{0}^{\Gamma_{\text{ампл.}}}\frac{T_{\text{в}}}{\bar{a}}\cdot\frac{\Gamma}{1+\Gamma/\bar{\chi}}d\Gamma} \tag{11}$$

После некоторых выкладок для коэффициента ψ получим следующее выражение

$$\psi=1-\frac{\vec{b}\{-\Gamma_{\text{ампл.}}-\bar{\chi}\ln|1-\Gamma_{\text{ампл}}/\bar{\chi}|\}}{\bar{b}\{\Gamma_{\text{ампл.}}-\bar{\chi}\ln[1+\Gamma_{\text{ампл}}/\bar{\chi}]\}} \tag{12}$$

где $\Gamma_{\text{ампл}}$ – амплитудное значение интенсивности деформации сдвига.

Рассчитанные по (12), с использованием данных табл. 1, величины коэффициента ψ при вышеуказанных случаях испытания стеклотканевых трубчатых образцов приведены в этой же таблице.

Выводы

1. Изменения величин прочности при осевом растяжении и при простом кручении тонкостенных стеклотканевых труб, вследствие отклонения направления основы ткани от направления продольной оси в пределах 6-8^0, несущественны, и они находятся в пределах разброса полученных опытных данных.

2. При нулевых углах армирования тканевых стеклопластиковых труб ошибка в угле армирования на 6-8^0 может внести погрешность для значений модулей Юнга и сдвига в среднем на 24 и 16% соответственно, хотя и такое отклонение угла армирования практически не влияет на значения коэффициента Пуассона тканевых стеклопластиков.

3. Отклонение угла армирования на 6-8^0 практически не влияет на динамику образования петли гистерезиса и на величину коэффициента рассеяния энергии тонкостенных стеклотканевых труб, деформируемых в режиме нагружение-разгрузка как в условиях осевого растяжения, так и простого кручения.

4. При проектировании конструкций из тканевых стеклопластиков следует учесть, что возможное несоблюдение угла ориентации армирования их элементов в виде длинных тонкостенных труб, претерпевающих эксплуатационные осевые растягивающие или крутящие нагрузки, может привести к существенному искажению напряженно-деформативного состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Механика композитов. В 12 томах. Механика разрушения. Т. 5. (под общей редакцией Гузя А.Н.) Киев: ПТОО "А.С.К.", 1996. 340 с.
2. Симонян А.М. Некоторые вопросы ползучести. Ереван: Изд. Гитутюн НАН РА, 1999. 255 с.
3. Гольдман А.Я., Савельева Н.Ф. О напряженном состоянии и некоторых особенностях разрушения образцов стеклопластиков при растяжении под углом к направлению армирования // Механика полимеров. 1967. №6, с. 1030-1039.
4. Розе А.В. Влияние межслойной жесткости и прочности при плоском нагружении материалов, армированных волокнами // Механика полимеров. 1970. №5. С. 876-883.
5. Тарнопольский Ю.М., Розе А.В., Жигун И.Г., Гуняев Г.М. Конструкционные особенности материалов, армированных высокомодульными волокнами // Механика полимеров. 1971. №4. С. 676-685.
6. Chiao C.C., Chiao T.T. Aramid Fibers and Composites. Preprint UCRL-80400. California: Livermore, 1977. 120 p.
7. Карапетян К.А., Саркисян Н.Е., Хачикян А.Г. Прочность и деформативность слоистых пластиков при сложном нагружении // Изв. НАН и ГИУ Армении. ТН. 1998. LI. №2. С. 127-132.
8. Мовсисян Л.А. О некоторых специфических особенностях анизотропных оболочек. // Изв. АН Арм. ССР. Сер физ-мат. наук. 1958. Т. XI. №4. С. 137-144.
9. Ильюшин А.А. Пластичность. М.-Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
10. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969. 420 с.
11. Тарнопольский Ю.М., Кинцис Т.Я. Методы статических испытаний армированных пластиков. М.: Изд. Химия, 1981. 272 с.
12. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. 193 с.
13. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов. Киев: Наукова думка, 1971. 375 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
27.12.2000