ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1986

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

УДК 539.6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКОВ И УПРУГИХ ПОЛЕЙ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ РАЗРЯДЕ В МЕТАЛЛАХ

БАГДОЕВ А. Г., ВАНЦЯН А. А. ПАХАЛОВ В. Б.

Вопросы влияния токов на движение сред представляет актуальную проблему [1, 2].

Рассматривается задача определения напряженно-деформированного состояния в электропроводящей среде при прохождении импульсного тока. В первом параграфе экспериментально получен закон распределения импульсного тока по радиусу в металлических цилиндрических образцах из дюраля, алюминия, стали и меди. Дается методика измерения плотности тока внутри металлического цилиндра. Показано, что при разряде в металле импульсный ток разделяется на низкочастотные и высокочастотные токи и что низкочастотные токи проходят по пути наименьшего сопротивления, то есть по оси цилиндра, а высокочастотные вытесняются на поверхность проводника. Показано постоянство кольцевого магнитного поля около оси. Приведен расчет величины кольцевого магнитного поля, размера области, занятой током, и показано совпадение результатов данной работы с величинами, рассчитанными по формулам, полученным в [3], с учетом тока.

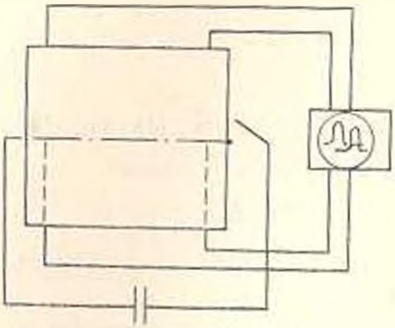
Во втором параграфе определяется напряженно-деформированное состояние внутри образца при заданном распределении токов вблизи оси. Дается условие образования и размер области пластичности.

1. Распределение токов по металлическому образцу

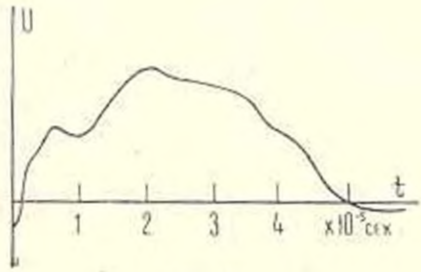
Определение распределения импульсного тока по металлическим образцам представляет интересную задачу как в прикладном, так и в теоретическом отношении. Рассматривается разрядный ток конденсаторного блока, который соединен с металлической цилиндрической болванкой по схеме, приведенной на фиг. 1.

Эксперименты показывают, что длительность импульса для заданной схемы имеет порядок $10^{-4}-10^{-5}$с (фиг. 2). Если данный импульс рассмотреть как часть синусоидального тока с частотой порядка 10^5 гц, то нетрудно вычислить толщину скин-слоя и убедиться, что она порядка 1—2 мм для хорошо проводящих металлов как медь, алюминий. Но если разложить эту кривую в ряд Фурье, можно увидеть, что первый член ряда, который соответствует постоянной составляющей данного импульса, составляет около 0,15 суммы ряда. Таким образом, пренебрегать постоянной составляющей и рассматривать вышеуказанный импульс как часть синусоиды не следует.

Для определения закона распределения импульсных токов в металлических средах был проделан эксперимент. В качестве образцов были взяты материалы из дюраля, алюминия, стали и меди.



Фиг. 1

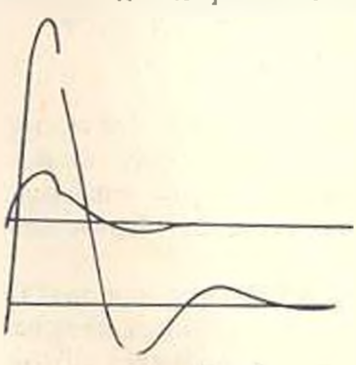


Фиг. 2

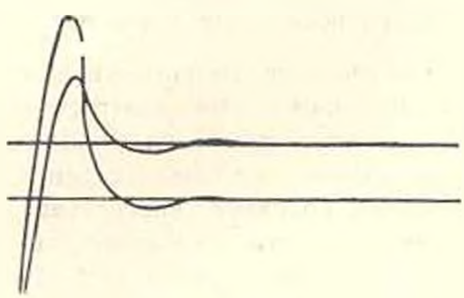
Разнообразность материалов была взята с целью проверки влияния электропроводимости среды на распределение тока.

Исследовалось также влияние напряжения конденсаторного блока на распределение токов по радиусу. С целью определения падения напряжения между двумя параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии 5 мм от торцов цилиндрического образца длиною 60 мм, на разном расстоянии от оси в шести точках производилось зондирование. Выведенные импульсы подавались на вход двухлучевого запоминающего осциллографа С8-17. Один импульс служил в качестве контрольного и всегда брался с поверхности образца, а второй импульс был взят с разных глубин.

На фиг. 3 приведены импульсы, взятые с поверхности и на глубине 20 мм для дюраля с емкостью 1300 мкф и с напряжением 200 v. На

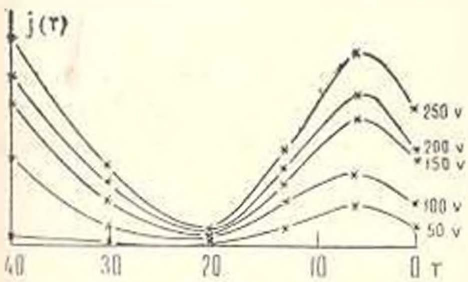


Фиг. 3

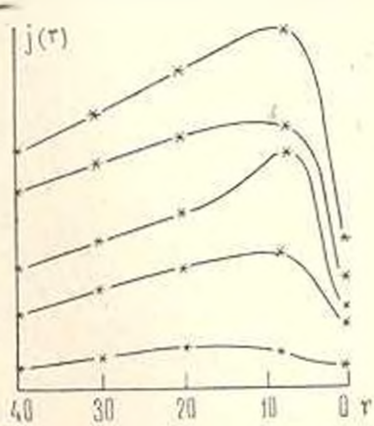


Фиг. 4

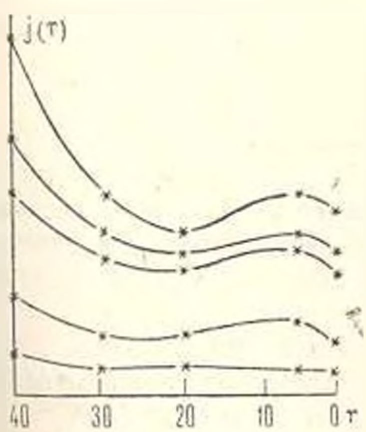
фиг. 4 показаны изменения U от t, взятые и с поверхности и с оси образца (U—напряжение). Нетрудно заметить, что оба импульса на фиг. 4—одного порядка. По значениям амплитуд импульсов построены графики плотностей токов в зависимости от радиуса (фиг. 5—8). Как видно из фиг. 5, где приведены зависимости напряжения или пропорциональной ему плотности тока от радиальной координаты r для дюраля и $C=2000$ мкф ток, в основном, сосредоточен вблизи оси (низкочастотные) и на поверхности (высокочастотные) образца, а между ними практически ток отсутствует. Для больших значений емкости конденсаторного блока имеет место выравнивание тока по радиусу (фиг. 6). Приведены графики для разных значений напряжений конденсаторного блока. Фиг. 6 соответствует $C=16000$ мкф, при этом ток, сосредоточенный вблизи оси, почти постоянен по r, и то же имеет место для больших емкостей. Аналогичные кривые были построены также для других материалов. На фиг. 7 приведена зависимость $U(j)$ от r для алюминия, на фиг. 8—для стали. Как видно из фиг. 5, чем больше электропроводимость, тем больше вытеснение токов на поверхность.



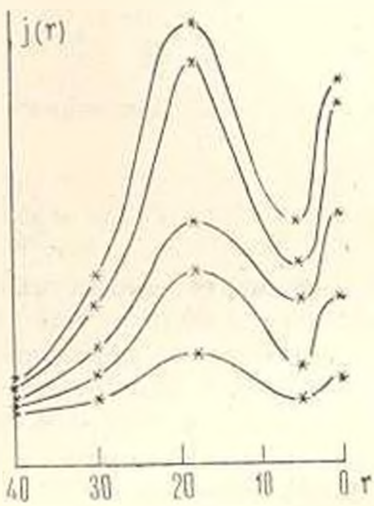
Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

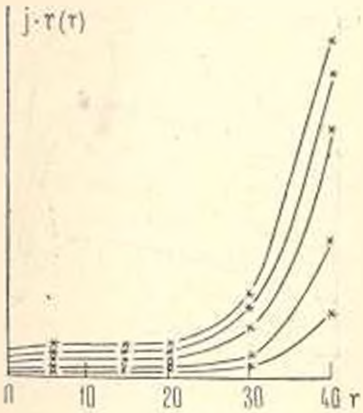


Фиг. 8

На фиг. 9 приведены зависимости $J \cdot r(r)$, построенные на основании фиг. 5 (для удобства масштаб на правом графике изменен). Как видно из фиг. 9, $J \cdot r$ до радиуса $a_1=20$ мм для части токов, сосредоточенных вблизи оси, постоянен. Следовательно, согласно уравнениям

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \vec{H}, \qquad j_x = \frac{c}{4\pi} \frac{H_\theta}{r}$$

где x, r, θ — цилиндрические координаты, H_θ также можно считать постоянным. При этом, в окрестности оси зависимость $J(r)$ можно представить в виде $J = \frac{A}{r}$, где A определяется из условия равенства тока конденсаторного блока и тока, текущего по всему сечению образца. (Провода, соединяющие конденсаторный блок с образцом, были достаточно большого сечения, следовательно, потерями тока можно пренебречь).



Фиг. 9

Ток, который течет по оси, можно вычислить по формуле

$$I_{ось} = 2\pi \int_0^{a_1} \frac{A}{r} r\,dr \qquad (1.1)$$

где a_1—приближенный радиус, по которому течет осевой ток. Значение среднего тока конденсаторного блока можно определить по формуле

$$I_{конд} = \frac{Cv}{t} \qquad (1.2)$$

где C—емкость, v—напряжение конденсаторного блока, t—время разрядки.

Так как не весь ток течет по оси, то вводится коэффициент $k = \frac{I_{ось}}{I_{ось} + I_{пов}}$. Приравнивая (1.1) к kCv/t, можно определить A, а затем J

$$A = \frac{Cvk}{2\pi a_1 t}, \qquad j = \frac{Cvk}{2\pi a_1 r t} \qquad (1.3)$$

Экспериментальные вычисления k, входящего в формулу (1.3), показали, что $k \approx 0{,}15$, то есть для дюралюминиевого образца с заданными параметрами конденсаторного блока ток, который течет по оси, составляет 0,15 долю от всего тока.

Вычисление тока по формуле (1.2) дает $2 \cdot 10^5$ A. Считая, что в начальный момент входа тела в образец ток течет, в основном, по области размером тела $r \approx 0{,}4$ см, получим $j_{эфф} = 1{,}6 \cdot 10^9$ А/м^2.

При этом, в уравнениях пластического движения среды [3] следует добавить слагаемое, соответствующее току, и решение уравнения движения, которое удовлетворяет условиям на теле и условию перехода в упругое решение, имеет вид

$$\sigma_{rr} = -\left(\tau_s + \frac{H_\theta^2}{8\pi}\right) \ln \frac{\rho}{r_s} - \tau_s \quad \text{при} \quad H_\theta = \text{const}$$

$$\sigma_{rr} = -\tau_s\left(1+\ln\frac{\mu}{\tau_s}\right) - \frac{2\pi j^2 r_0^2}{c^2}(\xi_0^2-1) \quad \text{при} \quad j=\text{const}$$

Вычисления показывают, что в начальной стадии проникания, когда ток течет в малой области около оси, член, соответствующий влиянию тока, соизмерим с механическим слагаемым, увеличивая сжимающее напряжение среды. Подобный пинч-эффект может приводить к деформации и затуплению вершины тела. Кроме этого, при наличии импульсных токов в инденторах большое значение имеет электронно-пластический эффект [6], который снижает в сильной мере предел текучести. Экспериментально показано наличие сильного сжатия инденторов за счет тока, причем основание тела с площадью 0,3 см² увеличивается вдвое. Учитывая, что предел текучести для дюраля 3000 кг/см² и то, что разрядный ток уменьшает его в 3 раза, можно получить величину силы, которая привела к сильной деформации тела порядка 1000 кГ.

Подсчет нормальной силы, действующей на площадку 0,6 см², согласно формуле [7] для давления $P=3\sqrt{3}\,\tau_s$ в области пластического течения, показывает, что она того же порядка, что и проекция на ось боковых сил от механических напряжений [3]. Таким образом, при наличии затупления тела, связанного с действием импульсных токов, получается значительное увеличение силы сопротивления прониканию. Отсюда следует полученный опытным путем вывод о существенном уменьшении глубины проникания на 40% в дюраль, которое отмечено в [5]. Следует отметить, что с помощью конденсаторного блока энергии в 400 дж удается вдвое погасить кинетическую энергию проникающего тела ~ 3200 дж, подобный выигрыш в энергии можно объяснить из-за взаимовлияния механических и электромагнитных факторов, указанных выше.

Используя формулу $j=CH_1/2\pi a_1$ для $H_1=\text{const}$, $C=0{,}02$ ф, $v=200$, $t=10^{-5}$ с, получим для H_1 численное значение $6\cdot 10^5$ гс. Данные значения H_1 и a_1 находятся в хорошем соответствии с вычислениями по формулам, полученным в [3], где добавлено слагаемое за счет тока и сравнением с опытными данными определено H_1, которое соответствует заданному значению глубины. Для рассматриваемой задачи [3] при определении напряжений и перемещений учтено, что изменения по r значительно превосходят изменения по x и t и поэтому задача решалась как одномерная и в пренебрежении инерционными членами. Тот же подход применяется далее, причем условие квазистационарности обеспечивается тем, что за время разряда упругие волны проходят расстояние, значительно превосходящее рассматриваемую область вблизи оси.

Точно также учет индуцированных магнитных полей, в задаче [3] дает незначительные поправки в значениях напряжений и ими можно пренебречь.

2. Определение напряженно-деформированного состояния в образце

Предполагается, что токи, текущие по поверхности образца, мало влияют на напряженно-деформированное состояние около оси. Вначале рассматривается задача, когда j дается формулой (1.3), тогда H_θ=const и уравнение равновесия для области $r<a_1$ можно записать в виде

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}-\frac{Hi}{4\pi r}=0 \tag{2.1}$$

При $r>a_1$, где предполагается $j=0$ и, следовательно, лоренцова сила $\vec{F}=\vec{j}\times\vec{H}$ равна нулю, уравнение равновесия записывается в виде

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r}=0 \tag{2.2}$$

Используя соотношения Гука

$$\sigma_{rr}=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad \sigma_{\theta\theta}=\lambda\Delta+2\mu\frac{u_r}{r} \tag{2.3}$$

$$\sigma_{xx}=\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \Delta=\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}$$

где λ, μ—коэффициенты Ламе, вводя поочередно обозначения $u_r=ru'$ и $\partial u'/\partial r=k_1$, интегрируя (2.1), для u_r получим

$$u_r=\frac{H_\theta^2}{8\pi(\lambda+2\mu)}r\ln r-\frac{c_1}{2r}+c_2r \tag{2.4}$$

Так как при $r=0$ u_r должно быть конечным, то следует, что $c_1=0$.

Аналогичным образом, интегрируя уравнения (2.2), при $r>a_1$ для u_r получим

$$u_r=-\frac{c_3}{2r} \tag{2.5}$$

Используя (2.3), (2.4) и (2.5) и условия непрерывности перемещений и напряжений при $r=a_1$, для компонентов напряжений и перемещений получим при $r<a_1$

$$u_r=\frac{H_\theta^2 r}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(\ln\frac{r}{a_1}-\frac{1}{2}\right),\quad \sigma_{xx}=\frac{\lambda H_\theta^2}{4\pi(\lambda+2\mu)}\ln\frac{r}{a_1} \tag{2.6}$$

$$\sigma_{rr}=\frac{H_\theta^2(\lambda+\mu)}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left(\ln\frac{r}{a_1}-\frac{1}{2}\right)+\frac{H_\theta^2}{8\pi},\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{H_\theta^2}{8\pi(\lambda+2\mu)}\left[2(\lambda+\mu)\ln\frac{r}{a_1}-\mu\right]$$

при $r>a_1$

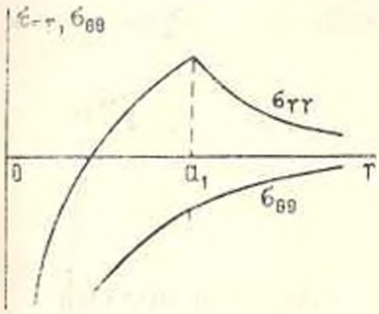
$$u_r=-\frac{H_\theta^2a_1^2}{16\pi(\lambda+2\mu)r},\quad \sigma_{\theta\theta}=-\frac{H_\theta^2a_1^2\mu}{8\pi(\lambda+2\mu)r^2},\quad \sigma_{rr}=-\sigma_{\theta\theta},\quad \sigma_{xx}=0 \tag{2.7}$$

Как видно из полученных формул, для малых r можно принимать квазистационарность процесса, что находится в основе § 1.

На фиг. 10 приведены эпюры σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$.

Подставляя компоненты напряжений из (2.6) в условие текучести Мизеса

$$(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta})^2 + (\sigma_{rr}-\sigma_{xx})^2 + (\sigma_{\theta\theta}-\sigma_{xx})^2 = 6\tau_s^2$$



Фиг. 10

где τ_s—предел текучести среды, получим радиус зоны пластичности около оси

$$r = a_1 \exp\left[-\left(\frac{48\pi^2\tau_s^2(\lambda+2\mu)^2}{H_\theta^4\mu^2} - \frac{3}{4}\right)^{1/2}\right] \tag{2.8}$$

где должно выполняться условие

$$H_\theta^2 < \frac{8\pi\tau_s(\lambda+2\mu)}{\mu}$$

Как показывают кривые для алюминия при $C = 1800$ мкф и $C = 3600$ мкф, можно приближенно считать при $r < a_1$ $j = \mathrm{const}$, а при $r > a_1$ $j = 0$. Тогда, используя тензор Максвелла в области $r < a_1$, уравнение равновесия можно записать в виде

$$\frac{\partial(\sigma_{rr}+\Pi_{rr})}{\partial r} + \frac{(\sigma_{rr}+\Pi_{rr})-(\sigma_{\theta\theta}+\Pi_{\theta\theta})}{r} = 0 \tag{2.9}$$

имея в виду, что $H_\theta \neq 0$, $H_x = H_r = 0$, для Π_{rr} и $\Pi_{\theta\theta}$ будем иметь

$$\Pi_{rr} = -\frac{\pi r^2 j^2}{2c^2}, \quad \Pi_{\theta\theta} = \frac{\pi j^2 r^2}{2c^2} \tag{2.10}$$

где c—скорость света.

Подставляя (2.10) в (2.9), получим

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}}{r} - \frac{2\pi r j^2}{c^2} = 0$$

Используя соотношения (2.3), непрерывность компонент напряжений и перемещений при $r = a_1$, найдем

при $r < a_1$

$$u_r = \frac{\pi r j^2}{4c^2(\lambda+2\mu)}(r - 2a_1^2), \quad \sigma_{rr} = \frac{\pi j^2}{c^2}\left[\frac{r^2(\lambda+1{,}5\mu) - a_1^2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\right] \tag{2.11}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\pi j^2}{c^2(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+0{,}5\mu)r^2 - a_1^2(\lambda+\mu)\right], \quad \sigma_{xx} = \frac{\lambda\pi j^2}{c^2(\lambda+2\mu)}(r^2 - a_1^2)$$

при $r > a_1$

$$u_r = -\frac{\pi j^2 a_1^4}{4c^2(\lambda+2\mu)r}, \quad \sigma_{rr} = \frac{\pi j^2 a_1^4\mu}{2c^2(\lambda+2\mu)r^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr}, \quad \sigma_{xx} = 0 \tag{2.12}$$

Если плотность тока j удовлетворяет условию

$$j^2 < \frac{2\tau_s c^2(\lambda+2\mu)}{\pi\mu a_1^2} \tag{2.13}$$

то подставляя (2.11) в уравнение Мизеса, получим условие образования пластичности при $r<a_1$

$$\frac{\pi J^2 a_1^4 \mu}{c^2(\lambda+2\mu)r^2}=2\tau_s$$

Если в (2.13) выполнено обратное неравенство, для образования пластичности получим условие

$$\frac{\pi J^2 \mu (3.5r^4+2a_1^4-4r^2a_1^2)^{1/2}}{c^2(\lambda+2\mu)}=\sqrt{6}\,\tau_s$$

ՄԵՏԱՂՆԵՐՈՒՄ ԻՄՊՈՒԼՍԱՅԻՆ ՊԱՐՊՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՀՈՍԱՆՔՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Ա. Ա. ՎԱՆՑՅԱՆ, Վ. Բ. ՊԱԽԱԼՈՎ

Ա մ փ ո փ ու մ

Որոշվում է հոսանքի խտության բաշխումը մետաղներում կոնդենսատորի պարպման դեպքում։ Ցույց է տրված, որ դյուրալի, ալյումինի և պողպատի համար հոսանքը կանցենտրացվում է նմուշի առանցքի, ինչպես նաև կողմնային մակերևույթի մոտ։ Ստացված կորերը թույլ են տալիս կառուցել լարումների և տեղափոխությունների դաշտերը, որակապես բացատրել իմպուլսային պարպման դեպքում նմուշներում տեղի ունեցող մեխանիկական երևույթները և բարակ պինդ մարմինների փոխազդեցությունը առաձգական միջավայրի հետ։

THE DETERMINATION OF DISTRIBUTION OF CURRENTS AND ELASTIC FIELDS DURING IMPULSIVE DISCHARGE IN METALS

A. G. BAGDOEV, A. A. VANTCIAN, V. B. PAHALOV

S u m m a r y

The distribution of current density in metals during discharge of the condensator is determined. It has been shown that for dural, aluminium and steel the current is concentrated near the axis of specimen and also on its lateral surface. The obtained curves allow to construct fields of stresses and displacements, qualitatively explaining the mechanical phenomena in the specimen at the time of impulsive discharge and interaction of thin bodies with elastic media.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кнопфель Г.* Сверхсильные импульсные магнитные поля. М.: Мир, 1972.
2. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. т. 1. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонкого тела в металлы и грунты.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1981, т. 34, №3.
4. *Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П., Челышев В. П., Шехтер Б. Н.* Физика взрыва. М.: Наука, 1975.
5. *Багдоев А. Г., Ванцян А. А.* Проникание тонких тел в металлы.—Изв. АН СССР, МТТ, 1982, №2.
6. *Спицын В. И., Троицкий О. А.* Моделирование теплового и пинч-действия импульсного тока на пластическую деформацию металла. ДАН СССР, 1974, т. 216, №6, 1266.
7. *Гольдсмит В.* Физика быстропротекающих процессов. М.: Мир, 1971.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступила в редакцию
16.IX.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

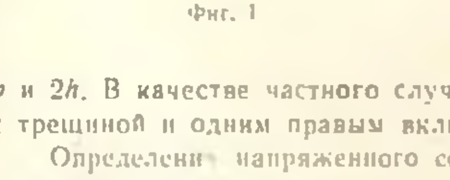
УДК 539.375

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ТЕЛА С ТРЕЩИНОЙ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ УПРУГИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

КАЛОЕРОВ С. А.

В работе [1] приведен метод определения напряженного состояния и коэффициента интенсивности напряжений для антиплоской деформации многосвязного тела с трещинами, исследовано влияние их близости к поверхностям цилиндрических полостей и «степень» анизотропии материала на концентрацию напряжений. В данной статье исследуется влияние упругих включений на изменение концентрации напряжений. Аналогичные исследования влияния круговых упругих включений для плоской задачи изотропного тела приведены в работах [3—7].

§ 1. Рассмотрим бесконечное ортотропное или изотропное тело с двумя одинаковыми эллиптическими (круговыми) цилиндрическими включениями из упругого материала и симметричной «туннельной» трещиной между ними. Будем предполагать, что на поверхности соприкосновения имеют место условия идеального контакта, на бесконечности тело загружено усилиями $\tau^\infty_{yz}=p$, $\tau^\infty_{xz}=0$. В сечении тела с плоскостью, перпендикулярной оси продольного сдвига, получается многосвязная область, ограниченная эллипсами L_1, L_2 и разрезанная отрезком длины $2l$ (фиг. 1). Обозначим полуоси эллипсов и расстояние между их центрами через a, b и $2h$. В качестве частного случая будем рассматривать также тело с трещиной и одним правым включением.



Фиг. 1

Определение напряженного состояния рассматриваемого кусочно-однородного тела сводится [1] к нахождению комплексных потенциалов $\varphi_3(z_3)$ и $\varphi^1_3(z^1_3)$ из соответствующих граничных условий.

Функция $\varphi_3(z_3)$ кусочно-голоморфна в многосвязной области S_3, ограниченной контурами L_{31}, L_{32}, получаемыми из L_1 и L_2 аффинным преобразованием $z_3=x+i\beta_3 y$, где $\beta_3=\sqrt{G_{xz}/G_{yz}}$; G_{xz}, G_{yz} — модули сдвига для соответствующих направлений. Отрезок $[-l, l]$ является линией скачков $\varphi_3(z_3)$.

Функция $\Phi_3(z_3)=\varphi'_3(z_3)$ имеет вид [1]

$$\Phi_3(z_3) = \frac{d_{30} z_3}{X(z_3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{X(z_3)}\left[\frac{1}{\zeta_1^k} + \frac{r(-1)^{k+1}}{\zeta_2^k}\right] \tag{1.1}$$

Здесь $d_{30} = p/2$; $X(z_3) = \sqrt{z_3^2 - l^2}$

$\zeta_i(z_3)$ — переменные, определяемые из зависимостей

$$z_3 - h = R_3\left(\zeta_1 + \frac{m_3}{\zeta_1}\right); \quad z_3 + h = R_3\left(\zeta_2 + \frac{m_3}{\zeta_2}\right) \tag{1.2}$$

$$R_3 = \frac{a + \beta_3 b}{2}; \quad m_3 = \frac{a - \beta_3 b}{a + \beta_3 b} \tag{1.3}$$

r — величина, равная 0 для случая одного включения и 1 для случая двух включений; b_k — неизвестные вещественные постоянные.

Функция $\varphi_3^1(z_3^1)$ голоморфна в эллипсе L_{1i}^1, получаемом из L_1 аффинным преобразованием $z_3^1 = x + i\beta_3^1 y$, где $\beta_3^1 = \sqrt{G_{xz}^1/G_{yz}^1}$, G_{xz}^1, G_{yz}^1 — модули сдвига для материала включений. Поэтому $\varphi_3^1(z_3^1)$ можно разложить в ряд по полиномам Фабера для эллипса L_{1i}^1 [2]

$$\varphi_3^1(z_3^1) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k P_k(z_3^1) \tag{1.4}$$

Здесь

$$P_0 = 1, \quad P_k(z_3^1) = \zeta_3^k + m_3^{1k} \zeta_3^{-k} \tag{1.5}$$

ζ_3 — переменная, определяемая из зависимости

$$z_3^1 - h = R_3^1\left(\zeta_3 + \frac{m_3^1}{\zeta_3}\right); \quad R_3^1 = \frac{a + \beta_3^1 b}{2}; \quad m_3^1 = \frac{a - \beta_3^1 b}{a + \beta_3^1 b} \tag{1.6}$$

Из условий идеального контакта (напряжения и перемещения на поверхности равны) получим

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi_3(z_3) = 2\,\mathrm{Re}\,\varphi_3^1(z_3^1); \quad 2\,\mathrm{Re}\,[i\varphi_3(z_3)] = \frac{\varkappa^1}{\varkappa} 2\mathrm{Re}\,[i\varphi_3^1(z_3^1)] \tag{1.7}$$

При этом

$$\varkappa = \sqrt{1/G_{xz}G_{yz}}; \quad \varkappa^1 = \sqrt{1/G_{xz}^1 G_{yz}^1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.7) на контуре L_1 (при этом в случае двух включений условия на L_2 в силу использованной симметрии удовлетворяются автоматически) таким же образом, как и в работе [1], получим следующую систему линейных алгебраических уравнений для определения b_k, β_k:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B_{k-1} - m_3 B_{k+1}) b_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(1 + \delta_n^1 m_3) B_{k+n-1} - m_3 B_{k+n+1} + (1 + m_3^n) r (D_{kn-1} - m_3 D_{kn+1})\right] b_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \delta_n^1) m_3^k B_{k-1} b_{n-k} - \sum_{k=1}^{n-1} m_3^{k-1} B_{k-1} b_{n-k-2} + \sum_{k=n}^{\infty} (1 - \delta_n^1) m_3 B_{k-n+1} b_k -$$

$$-\sum_{k=n+2}^{\infty} B_{k-n-1} b_k - \frac{n}{R_3}(1+m_{31}^{1n})\beta_n = -(1+m_3^n) d_{30}(B_{1n-1} - m_3 B_{1n+1})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [B_{k+n-1} - m_3 B_{k+n+1} + r(D_{kn-1} - m_3 D_{kn+1})] b_k - \tag{1.8}$$

$$-\frac{n}{2R_3}\left[1 + \frac{\varkappa^1}{\varkappa} + m_{31}^{1n}\left(1 - \frac{\varkappa^1}{\varkappa}\right)\right]\beta_n = -d_{30}(B_{1n-1} - m_3 B_{1n+1})$$

где B_n, B_{1n}, D_{kn}—коэффициенты следующих разложений:

$$X^{-1}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(z_3); \quad z_3 X^{-1}(z_3) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{1n} P_n(z_3)$$

$$(-1)^{k+1} X^{-1}(z_3)[\zeta_2(z_3)]^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} D_{kn} P_n(z_3) \tag{1.9}$$

$P_n(z_3)$—полиномы Фабера для эллипса L_{31}.

После решения системы (1.8) будут известными функции $\Phi_3(z_3)$ и $\Phi_3^1(z_3^1) = \varphi_3^{\prime 1}(z_3^1)$. Это позволяет найти напряжения

$$\tau_{xz} = -2\,\mathrm{Re}\,[i\beta_3 \Phi_3(z_3)]; \quad \tau_{yz} = 2\,\mathrm{Re}\,\Phi_3(z_3)$$

$$\tau_{xz}^1 = -2\mathrm{Re}[i\beta_3^1 \Phi_3^1(z_3^1)]; \quad \tau_{yz}^1 = 2\,\mathrm{Re}\,\Phi_3^1(z_3^1) \tag{1.10}$$

а также коэффициент интенсивности напряжений [1]

$$k_3^{\pm} = 2d_{30}\sqrt{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2b_k}{\pm\sqrt{l}}\left[\frac{1}{\zeta_1^k(\pm l)} + \frac{r(-1)^{k+1}}{\zeta_2^k(\pm l)}\right] \tag{1.11}$$

При вычислении $\Phi_3^1(z_3^1)$ нужно пользоваться формулой [2]

$$P'_{k+1}(z_3^1) = \frac{k+1}{k}\,\frac{z_3^1 - h}{R_3^1} P'_k(z_3^1) - \frac{k+1}{k-1} m_3^1 P'_{k-1}(z_3^1) \quad (k=2, 3, \ldots)$$

$$P'_1(z_3^1) = \frac{1}{R_3^1}; \quad P'_2(z_3^1) = \frac{2(z_3^1 - h)}{(R_3^1)^2} \tag{1.12}$$

§ 2. Численные исследования были проведены для случая, когда упругие постоянные включений были пропорциональны упругим постоянным тела

$$G_{xz}^1 = \lambda G_{xz}; \quad G_{yz}^1 = \lambda G_{yz} \tag{2.1}$$

Для таких включений

$$\beta_3^1 = \beta_3; \quad R_3^1 = R_3; \quad m_3^1 = m_3; \quad \varkappa^1/\varkappa = \lambda^{-1} \tag{2.2}$$

В табл. 1 приведены значения k_{30}—отношения коэффициента интенсивности напряжения k_3 к соответствующему коэффициенту $k_3^0 = p\sqrt{l}$ для бесконечного однородного тела с трещиной, а в табл. 2 с точностью до множителя p—значения максимальных нормальных напряжений в теле около контура его контакта с правым включением. При этом считалось, что $b/a=1$, $h/a=1{,}25$; $\varepsilon=l/(h-a)=0{,}5$. Коэффициент $k_{30}^{\pm}$ и данные табл. 2 относятся к случаю двух включений, k_{30}^{+}, k_{30}^{-}—коэффициенты для правого и левого концов трещины соответственно; значение $\lambda^{-1}=\infty$ соответствует случаю неподкрепленных полостей.

Таблица 1

G_{xz}/G_{yz}	k_{30}	λ^{-1}						
		∞	100	10	2	0.5	0.1	0.01
0.5	$k_{30}^{\pm}$	3.267	3.192	2.648	1.509	0.630	0.254	0.160
	k_{30}^{+}	1.913	1.891	1.716	1.263	0.769	0.480	0.295
	k_{30}^{-}	1.682	1.665	1.536	1.197	0.826	0.607	0.542
1.0	$k_{30}^{\pm}$	3.147	3.083	2.601	1.521	0.602	0.178	0.067
	k_{30}^{+}	1.781	1.765	1.634	1.254	0.752	0.401	0.286
	k_{30}^{-}	1.621	1.608	1.506	1.204	0.800	0.514	0.420
2.0	$k_{30}^{\pm}$	2.977	2.919	2.482	1.493	0.606	0.155	0.027
	k_{30}^{+}	1.635	1.624	1.529	1.227	0.753	0.352	0.204
	k_{30}^{-}	1.532	1.523	1.445	1.192	0.789	0.440	0.310

Таблица 2

G_{xz}/G_{yz}	λ^{-1}	τ	θ°							
			0	30	60	90	120	150	165	180
0.5	∞	τ_θ	2.69	1.90	0.86	0.16	0.56	1.94	3.16	4.80
	2	τ_θ	1.45	1.14	0.59	0.03	0.54	1.15	1.49	1.93
	0.5	τ_r	0.00	0.62	1.07	1.23	−1.01	−0.56	−0.31	0.00
	0.1	τ_r	0.00	0.78	1.31	1.51	−1.22	−0.58	−0.27	0.00
1.0	∞	τ_θ	2.22	1.96	1.25	0.28	0.77	2.01	2.82	4.29
	2	τ_θ	1.38	1.20	0.71	0.05	0.62	1.20	1.43	1.87
	0.5	τ_r	0.00	0.66	1.13	1.29	−1.07	−0.55	−0.29	0.00
	0.1	τ_r	0.00	0.88	1.51	1.69	−1.32	−0.54	−0.22	0.00
2	∞	τ_θ	1.89	1.90	1.70	0.49	1.00	1.96	2.53	3.89
	2	τ_θ	1.31	1.22	0.89	0.10	0.74	1.20	1.37	1.80
	0.5	τ_r	0.00	0.70	1.21	1.37	−1.11	−0.53	−0.26	0.00
	0.1	τ_r	0.00	1.03	1.75	1.93	−1.44	−0.47	−0.15	0.00

Из таблиц следует, что подкрепление полостей упругими включениями приводит к снижению концентрации напряжений около трещины и полостей. Анизотропия материала существенно влияет на напряженное состояние тела, если жесткость включений значительно отличается от жесткости материала тела ($\lambda\geqslant 10$; $\lambda\leqslant 0{,}1$).

ՃԱՔՈՎ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐԱԿՆԵՐՈՎ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱԿԱՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆ

Ս. Ա. ԿԱԼՈԵՐՈՎ

Ամփոփում

[1] աշխատանքում բերված է ճաքով բազմաշերտ մարմնի հակահարթ դեֆորմացիայի համար լարվածային վիճակի և լարումների ինտենսիվության

գործակցի որոշման մեթոդ։ Ներկա աշխատանքում հետազոտված է լարումների կոնցենտրացիայի փոփոխման վրա առաձգական ներդրակների ազդեցությունը։

ANTIPLANE BODY DEFORMATION WITH CRACH AND ELLIPTICAL ELASTIC INCLUSIONS

S. A. KALOYEROV

S u m m a r y

The distribution of strains in an anisotropic or isotropic body with „tunnel" crack and elliptical elastic inclusions is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоеров С. А.* Антиплоская деформация многосвязных тел с трещинами.—Изв. АН Арм. ССР. Механика, 1985, т. 38, № 6.
2. *Космодамианский А. С., Калоеров С. А.* Температурные напряжения в многосвязных пластинках. Киев-Донецк: Вища школа. Головное изд-во 1982 159 с.
3. *Atkinson C.* The interaction between a crack and an inclusion.—Int. J. Eng. Sci., 1972, vol. 10, № 2, p.p. 127—136.
4. *Erdogan F., Gupta G. D.* The inclusion problem with a crack crossing the boundary.—Int. J. Fract., 1975, vol. 11, № 1, pp. 13—27.
5. *Erdogan F., Gupta G. D., Ratwani M.* Interaction between a circular inclusion and an arbitrarily oriented crack.—J. Appl. Mech., Trans. ASME, ser. E, 1974, vol. 41, № 4, pp. 1007—1013.
6. *Hsu Y. C., Shivakumar V.* Interaction between an elastic circular inclusion and two symmetrically placed collinear cracks.—Int. J. Fract., 1976, vol. 12, № 4, pp. 619—630.
7. *Tamate O.* The effect of a circular inclusion on the stresses around a line crack in a sheet under tension.—Int. J. Fract. Mech., 1968, vol. 4, № 3, pp. 257—266.

Донецкий государственный университет

Поступила в редакцию
14.II.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, №1, 1986 Механика

УДК 519.6

СТАБИЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ В СЛУЧАЕ m ЦЕЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

ГАБРИЕЛЯН М. С.

Рассматриваются вопросы построения стабильных дорожек и интегральных многообразий для дифференциальных игр в случае m целевых множеств. На базе этих мостов определяются стратегии игроков для игры, изученной в [1]. При определенных условиях указываются наиболее узкие классы стратегий, в которых существует седловая точка игры.

§ 1. Стабильные дорожки

Пусть задана конфликтно-управляемая система

$$\dot{x}=f(t,\ x,\ u,\ v) \tag{1.1}$$

где $x\in R^n$, $u\in P\subset R^p$, $v\in Q\subset R^q$, функция $f(\cdot)$ и множества P, Q удовлетворяют условиям из [2].

Допустим, что заданы компакты M_k и N $(k=1,\ \dots,\ m)$ в пространстве $\{t,\ x\}\in R^{n+1}$.

Определим стабильную дорожку [2] для первого игрока, распоряжающегося выбором u.

Рассмотрим уравнение в контингенциях

$$\dot{x}\in H(t,\ x) \quad (H(t,\ x)\neq\varnothing) \tag{1.2}$$

где
$$H=\bigcap_{v\in Q} co\{f: f=f(t,\ x,\ u,\ v),\quad u\in P\}$$

Пусть числа t_0 и c таковы, что $\varepsilon(t_0,\ \dots,\ t_0)\leqslant c$; $t\in[t_0,\ \vartheta]$; здесь функция $\varepsilon(t_1,\ \dots,\ t_m)$ и момент окончания игры ϑ определены в [1].

Пусть система (1.2) допускает хотя бы одно решение, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\{t_{i_k},\ x=w(t_{i_k})\}\in M_{i_k};\quad \{t,\ x=w(t)\}\in N \tag{1.3}$$

где $\quad t_{i_k}\in[t_0,\ \vartheta]$; $i_k,\ i_l\in I=(1,\ \dots,\ m)$;

$$i_k\neq i_l;\quad k\neq l;\quad \varepsilon(t_1,\ \dots,\ t_m)\leqslant c$$

Обозначим через $W_{(i_k)}$ дорожку $\{t,\ x=w(t)\}$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть множества $H(t,\ x)\neq\varnothing$ для всякой позиции $\{t,\ x\}$ из открытого множества D пространства $\{t,\ x\}\in R^{n+1}$ и пусть существует по крайней мере одно абсолютно-непрерывное решение $x=w(t)$ уравнения (1.2), находящееся в области D и удовлетворяющее условиям (1.3). Пусть также в открытой области $D^*\subset D$ выполняется условие седловой точки [2] для маленькой игры. Тогда позиционная стратегия $U_e\div u_e(t, x)$, экстремальная к мосту $W_{(t_k)}$, обеспечит перемещение всех позиций $\{t, x[t, t_0, x_0, U_e]\}$ до встречи со всеми множествами M_k внутри N с показателем

$$\gamma(x[\cdot])=\sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot]))\leqslant c,$$

как бы ни действовал второй игрок.

(Функционалы $\tau_k(x[\cdot])$ $k\in I$ определены в [1]).

С целью построения v-стабильной дорожки $W^{(v)}_{(t_k)}$ рассмотрим следующие уравнения в контингенциях:

$$\dot{x}\in G(t, x) \qquad (G(t, x)\neq\varnothing) \tag{1.4}$$

где $\quad G(t, x)=\bigcap\limits_{u\in P} co\{f: f=f(t, x, u, v), v\in Q\}$

Пусть система (1.4) допускает хотя бы одно решение $\{t, x=w(t)\}$ при начальных условиях $\{t_0, x_0=w(t_0)\}$, уклоняющееся от множеств M_k внутри N, то есть удовлетворяющее условиям (1.3), причем

$$\gamma(W(\cdot))=\sigma(t_1, \ldots, t_m)>c.$$

Здесь t_k—первый момент встречи решения $\{t, x=w(t)\}$ с множеством M_k внутри N. Обозначим через $W^{(v)}_{(t_k)}$ дорожку

$$\{t, x=w(t)\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.2. Пусть $G(t, x)\neq\varnothing$ для всякой позиции $\{t, x\}\in R^{n+1}$ и пусть существует по крайней мере одно абсолютно-непрерывное решение $x=w(t)$ уравнения (1.4), проходящее в области D, удовлетворяющее начальному условию $x_0=w(t_0)$ и уклоняющееся от множеств M_k внутри N в смысле $\sigma(t_1, \ldots, t_m)>c$. Пусть, также, в открытой области D^*, охватывающей кривую $\{t, x=w(t)\}$, выполняется условие седловой точки маленькой игры [2]. Тогда позиционная стратегия $V_e\div v_e(t, x)$, экстремальная к мосту $W^{(v)}_{(t_k)}$, обеспечит уклонение всех позиций $\{t, x[t, t_0, x_0, V_e]\}$ от встречи с множествами M_k внутри N так, чтобы $\gamma(x[\cdot])=\sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot]))>c$, как бы ни действовал первый игрок.

Доказательства теорем 1.1 и 1.2 подобны доказательству аналогичных утверждений из [2].

§ 2. Стабильные интегральные многообразия

Сначала построим стабильные интегральные многообразия для первого игрока.

Пусть множества $F(t, x)\subset R^{n+1}$ выпуклы, ограничены и полунепрерывно зависят от $(t, x)\in R^{n+1}$ в открытой области D. Рассмотрим уравнение в контингенциях

$$\dot{x} \in F(t, x) \tag{2.1}$$

Пусть множества $F(t, x)$ при всех $(t, x) \in D$ удовлетворяют условию

$$F(t, x) \cap co\{f : f(t, x, u, v),\ u \in P\} \neq \varnothing \tag{2.2}$$

при любом $v \in Q$. Пусть для любой точки $(t_*, x_*) \in D$ определен пучок решения $\varkappa(t_*, x_*, D)$, каждое решение $x = x(t, t_*, x_*)$ которого удовлетворяет уравнению (2.1) и продолжено или до границы области D, или до выхода из области N.

Сформулируем следующее условие.

Условие 2.1. Примем, что выполнено это условие для точки $(t_0, x_0) \in D$ и c, если каждое решение $x = x(t, t_0, x_0)$, входящее в пучок $\varkappa(t_0, x_0, D)$, проходит через все множества M_k, $k \in I$ внутри N с показателем $\gamma(x(\cdot)) = \gamma(\tau_1(x(\cdot)), \ldots, \tau_m(x(\cdot))) \leqslant c$.

Пусть $t_0 \leqslant t_{i_1} \leqslant \ldots t_{i_m} \leqslant \vartheta$ — произвольный набор чисел. Определим следующие множества:

$$\begin{gathered}
L_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k}) = \{(t, x) : t = t_{i_k},\ x \in M_{i_k}(t_{i_k}) \cap \\
\cap [x(t_{i_k}, t_{i_{k-1}}, x_*) : x(\cdot\,; t_{i_{k-1}}, x_*) \in \varkappa(t_{i_{k-1}}, x_*, D); \\
x(t, t_{i_{k-1}}, x_*) \cap [UM_i(t) : i \in I \setminus (i_1, \ldots, i_k)] = \varnothing \quad \text{при} \\
t_{i_{k-1}} \leqslant t < t_{i_k};\ x(t, t_{i_{k-1}}, x_*) \cap N(t) \neq \varnothing \quad \text{при} \\
t_{i_{k-1}} \leqslant t \leqslant t_{i_k}];\ (t_{i_{k-1}}, x_*) \in L_{k-1}(\cdot)\} \ (k = 0, \ldots, m-1;\ L_0 = (t_0, x_0))
\end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\text{где} \qquad M(t_*) = M \cap \Gamma_{t_*} = M \cap [(t, x) : t = t_*;\ x \in R^n].$$

Обозначим через $W_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})$ замыкание в R^{n+1} множества $\{(t, x) : x = x(\cdot\,; t_{i_k}, x_*) \in \varkappa(t_{i_k}, x_*, D);\ t_{i_k} \leqslant t \leqslant \tau(x(\cdot), [UM_i : i \in I \setminus (i_1, \ldots, i_k)]; (t_{i_k}, x_*) \in L_k(\cdot)\}$ $(k = 0, \ldots, m-1;\ W_0(t_{i_0}, M_{i_0}) = W_0)$.

Если $W_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k}) \neq \varnothing$, то оно является u-стабильным мостом, обрывающимся на целевом множестве $[UM_i : i \in I \setminus (i_1, \ldots, i_k)]$ не позже, чем в момент ϑ внутри N. (Последнее утверждение следует из условия 2.1.). Здесь через $\tau(x(\cdot), M)$ обозначен первый момент выхода $x(\cdot)$ на множество M внутри N.

Прежде чем определить кусочно-позиционную стратегию U_e (КПСU_e), сформулируем следующее утверждение, справедливость которого легко проверяется.

Л е м м а 2.1. Пусть система непрерывных функций $\Phi = \{\varphi(x)\} \times (\varphi(x) : [a, b] \to R^n)$ компактна в себе в метрике $C_{[a,b]}$, а последовательность $\{(x_k, y_k)\}$ сходится в метрике R^{n+1} к точке $(\bar{x}, \bar{y})$ и для всех k существует $\varphi_k \in \Phi$ такое, что $y_k = \varphi_k(x_k)$. Тогда существует такое $\bar{\varphi}(\bar{x}) \in \Phi$, что $\bar{y} = \varphi(\bar{x})$.

Определим КПСU_e следующим образом.

Пусть система выходит из позиции (t_0, x_0) и первый игрок выбирает экстремальную стратегию относительно моста $W_0 \neq \varnothing$. Из условия 2.1 следует, что $W_0 \neq \varnothing$ и обрывается на $[UM_i : i \in I]$ внутри N не позже, чем в момент ϑ. Следовательно, эта стратегия обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$, например, с множеством M_{j_1} $(j_1 \in I)$ в момент t_{j_1}, причем $\sigma(t_{j_1}, \ldots, t_{j_1}) \leqslant c$. Позиция $(t_{j_1}, x[t_{j_1}, t_0, x_0, U_e])$ принадлежит замыканию в R^{n+1} множества $L_1(t_{j_1}, M_{j_1}) \neq \varnothing$ Из условия 2.1 и леммы 2.1 следует, что мост $W_1(t_{j_1}, M_{j_1}) \neq \varnothing$

$$(t_{j_1}, x[t_{j_1}, t_0, x_0, U_e]) \in W_1(t_{j_1}, M_{j_1})$$

и обрывается на множестве $[UM_i : i \in I \setminus j_1]$ не позже, чем в момент ϑ. Выбирая экстремальную стратегию относительно моста $W_1(\cdot)$, первый игрок обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ с некоторым целевым множеством M_{j_2} $(j_2 \in I \setminus j_1)$ в момент t_{j_2}, причем $\sigma(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \leqslant c$, где $\vartheta_{j_1} = t_{j_1}$, $\vartheta_{j_k} = t_{j_2}$, $k = 2, \ldots, m$. (Так как в противном случае хотя бы на одном решении $x(\cdot; t_0, x_0) \in x(t_0, x_0, D)$ значение $\gamma(x(\cdot)) > c$, что противоречило бы условию 2.1). Таким образом, КПСU_e и движение $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ для двух шагов определены.

Продолжая построение КПСU_e и движения $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ до последнего шага, придем в позицию $(t_{j_{m-1}}, x[t_{j_{m-1}}, t_0, x_0, U_e])$, принадлежащую замыканию множества $L_{m-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_{m-1}}, M_{j_{m-1}}) \neq$ $\neq \varnothing$ (2.3), причем $\sigma(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \leqslant c$, где $\vartheta_{j_1} = t_{j_1}, \ldots, \vartheta_{j_{m-1}} = \vartheta_{j_m} = t_{j_{m-1}}$. Затем выбирая экстремальную стратегию относительно моста

$$W_{m-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_{m-1}}, M_{j_{m-1}}) \neq \varnothing$$

первый игрок обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_e])$ с множеством M_{j_m} в момент t_{j_m}, причем $\sigma(\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m) \leqslant c$, где $\vartheta_{j_k} = t_{j_k}$, $k \in I$. (Так как в противном случае хотя бы на одном решении $x(\cdot; t_0, x_0)$ из пучка $x(t_0, x_0, D)$ значение $\gamma(x[\cdot]) > c$, что противоречило бы условию 2.1).

Отметим, что при формировании КПСU_e функция $\alpha(t, x, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ и функционалы $\varphi_k(x[\cdot])$, приведенные в [1], формально определяются следующим образом.

Пусть $t \in [t_{j_{k-1}}, \vartheta]$. Функция $\alpha(t, x, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_m)$ определяется как экстремальная стратегия $u_e(t, x)$ относительно моста $W_{k-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots$ $\ldots, t_{j_{k-1}}, M_{j_{k-1}})$. Момент t_{j_k} и функционал $\varphi_k(x[\cdot])$ определяются из условия

$$\varphi_k(x[\cdot]) = t_{j_k} = \begin{cases} \infty & \text{при} \quad t_0 \leqslant t < \varkappa_{j_k} \\ \varkappa_{j_k} & \text{при} \quad \varkappa_{j_k} \leqslant t < \infty \end{cases}$$

$$\varkappa_{j_k} = \min\{t \geqslant t_{j_{k-1}} : R_k(t, x, x[t, t_0, x_0, U_e], t_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}) \cap$$

$$\cap [UM_i : i \in I \setminus (j_1, \ldots, j_{k-1})] \neq \varnothing\}$$

где $R_k(t, x, x[t, t_0, x_0, U_e], t_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}) = \{(t, \omega_0) : (t, \omega_0) \in W_{k-1}(\cdot)$, $\|x - \omega_0\| = \min \|x - \omega\|$, при $(t, \omega) \in W_{k-1}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}, M_{j_{k-1}})\}$

Номер j_k определяется как наименьший из номеров $l \in I \setminus (j_1, \ldots, j_{k-1})$, для которого $R_k(t, x, x[t, t_0, x_0, U_e], t_{j_1}, \ldots, t_{j_{k-1}}) \cap M_l \neq \varnothing$ $(k \in I)$.

Таким образом, КПСU_ε и движение $(t, x[t, t_0, x_0, U_\varepsilon])$ полностью определены. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Пусть для всякой позиции $(t, x)\in D$ выполнено условие (2.2), а для $(t_0, x_0)\in D$ и c выполнено условие 2.1. Тогда построенная КПСU_ε обеспечит первому игроку сближение движения $(t, x[t, t_0, x_0, U_\varepsilon])$ со всеми множествами M_k $(k\in I)$ внутри N с показателем $\sigma(\tau_1(x[\cdot]), \dots, \tau_m(x[\cdot]))\leq c$, как бы ни действовал второй игрок.

Построим стабильные интегральные множества для второго игрока. Рассмотрим систему уравнений (2.1) при выполнении всех вышеуказанных условий относительно множеств $F(t, x)$ и предположим, что вместо условия (2.2) имеет место следующее условие:

$$F(t, x)\cap co[f: f=f(t, x, u, v);\ v\in Q]\neq\varnothing \tag{2.4}$$

при любом $u\in P$ и всех $(t, x)\in D$.

Пусть для любой точки $(t_*, x_*)\in D$ определен пучок решений $\varkappa(t_*, x_*, D)$, каждое решение из которого удовлетворяет уравнениям (2.1) при (2.4) и продолжено до границы области D.

Обозначим через $G(M)$ и $H(N)$ открытые окрестности множеств M и N в пространстве $(t, x)\in R^{n+1}$.

Символом $\bar{A}$ обозначим замыкание множества A.

Сформулируем следующее условие.

Условие 2.2. Примем, что выполнено это условие для точки $(t_0, x_0)\in D$ и c, если каждое решение $x(\cdot\,; t_0, x_0, D)$, входящее в пучок $\varkappa(t_0, x_0, D)$, удовлетворяет условию $\gamma(x(\cdot))=\sigma(\tau_1(x(\cdot)), \dots, \tau_m(x(\cdot)))>c$, то есть каждое решение $x(\cdot, t_0, x_0)$ или не встречается хотя бы с одним из множеств M_k $(k\in I)$ внутри N до момента ϑ, или выходит из N раньше, чем встречается со всеми множествами M_k $k\in I$, или проходит через N и встречается со всеми множествами с показателем $\gamma(x(\cdot))>c$.

Пусть $t_0\leq t_{i_1}\leq\dots\leq t_{i_m}\leq\vartheta$ — произвольный набор чисел. Определим следующие множества:

$$\begin{gathered}
L_k^{(v)}(t_{i_1}, M_{i_1}, \dots, t_{i_k}, M_{i_k})=\{(t, x): t=t_{i_k};\ x=x(t_{i_k}, t_{i_{k-1}}, x_*);\\
x(\cdot\,; t_{i_{k-1}}, x_*)\in\varkappa(t_{i_{k-1}}, x_*, D);\ x(t, t_{i_{k-1}}, D)\cap[G(\cup M_i);\\
i\in I\setminus(i_1, \dots, i_{k-1}))\cap\Gamma_t]=\varnothing \quad \text{при} \quad t_{i_{k-1}}\leq t<t_{i_k};\ x(t_{i_k}, t_{i_{k-1}};\\
x_*)\cap[G(M_{i_k})\cap\Gamma_{t_{i_k}}]\neq\varnothing;\quad x(t, t_{i_{k-1}}, x_*)\cap[H(N)\cap\Gamma_t]\neq\varnothing
\end{gathered} \tag{2.5}$$

при $t_{i_{k-1}}\leq t\leq t_{i_k}$; $(t_{i_k}, x_*)\in L_{k-1}^{(v)}(\cdot)\}$ $(k=0, \dots, m;\ L_0^{(v)}(t_{i_0}, M_{i_0})=(t_0, x_0))$

$$\begin{gathered}
S_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \dots, t_{i_k}, M_{i_k})=\{[R^{n+1}\setminus H(N)]\cap[(t, x): t_{i_{k-1}}\leq t\leq\vartheta,\ x\in R^n]\}\cup\\
\cup\{R^{n+1}\setminus\overline{L_{k+1}^{(v)}}(t_{i_1}, M_{i_1}, \dots, t_{i_k}, M_{i_k}, t_j, M_j): j\in I\setminus(i_1, \dots, i_k);\\
t_{i_k}\leq t_j\leq\vartheta\}\quad k=0, \dots, m-1.
\end{gathered} \tag{2.6}$$

Обозначим через $W_k^{(v)}(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})$ замыкание в R^{n+1} следующего множества:

$$\{(t, x) : x = x(t, t_{i_{k-1}}, x_*);\ x(\cdot\,; t_{i_{k-1}}, x_*) \in x(t_{i_{k-1}}, x_*, D);$$

$$t_{i_{k-1}} \leqslant t \leqslant \tau(x(\cdot), S_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})) : (t_{i_k}, x_*) \in L_k(\cdot)\} \tag{2.7}$$

$$k = 0, \ldots, m-1$$

Множество $W_k^{(v)}(\cdot)$ является v-стабильным и обрывается на множестве $S_k(t_{i_1}, M_{i_1}, \ldots, t_{i_k}, M_{i_k})$.

Затем подобными рассуждениями, как при доказательстве теоремы 2.1, используя условие 2.2 вместо условия 2.1, строится КПСV_ε— экстремальная к системе мостов $W_k^{(v)}(t_{j_1}, M_{j_1}, \ldots, t_{j_k}, M_{j_k})$. Имея в виду, что моменты $t_{j_1}, \ldots, t_{j_m}$, участвующие в определении мостов $W_k^{(v)}(\cdot)$, на движениях $x[t, t_0, x_0, V_\varepsilon]$ удовлетворяют условию 2.2, а $t_{i_k} < \tau_{i_k}(x[\cdot])$ при $k \in I$, заключаем, что на всех движениях $x[t, t_0, x_0, V_\varepsilon]$ выполняется неравенство $\gamma(x[\cdot\,; t_0, x_0, V_\varepsilon]) > c$.

Таким образом, справедливо утверждение

Теорема 2.2. Пусть для всякой позиции $(t, x) \in D$ выполнено условие (2.4), а для $(t_0, x_0) \in D$ и c выполнено условие 2.2. Тогда КПСV_ε, экстремальная к системе мостов $W_k^{(v)}(\cdot)$ (2.7), обеспечит второму игроку результат $\gamma(x[\cdot]) = \sigma(\tau_1(x[\cdot]), \ldots, \tau_m(x[\cdot])) > c$, на всех движениях $x[t, t_0, x_0, V_\varepsilon]$, как бы ни действовал первый игрок.

§ 3. Альтернативные утверждения и оптимальные стратегии на базе априори стабильных мостов

Покажем, что в рассматриваемой игре имеют место утверждения типа альтернативы [2] в классах чисто-позиционных стратегий первого игрока и кусочно-позиционных стратегий второго игрока и в классах кусочно-позиционных стратегий первого игрока и чисто-позиционных стратегий второго.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Пусть для всех позиций (t, x) из некоторой открытой области D, содержащей начальную позицию (t_0, x_0), выполнены условия седловой точки в маленькой игре и условия леммы 49.3 из [2]. Если при этом существует решение $x = w(t, t_0, x_0)$ уравнения (1.4), для которого позиция $(t, w(t, t_0, x_0))$ уклоняется от множеств M_i $(i \in I)$ внутри N в смысле $\sigma(\cdot) > c$, то экстремальная к дорожке $W_{(t_k)}^{(v)}$ стратегия $V_\varepsilon \div v_\varepsilon(t, x)$ обеспечит перемещение всех позиций $\{t, x[t, t_0, x_0, U_\varepsilon]\}$ с показателем $\sigma(\cdot) > c$. В противном случае КПСU_ε обеспечит сближение движения $\{t, x[t, t_0, x_0, U_\varepsilon]\}$ со всеми множествами M_i внутри N с показателем $\sigma(\cdot) \leqslant c$.

Справедливость первой части теоремы вытекает из теоремы 1.2, а второй части—из теоремы 2.1.

Из теоремы 1.1 и 2.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.2. Пусть для всех позиций (t, x) из некоторой открытой области D, содержащей (t_0, x_0) и множество N, выполнены условие седловой точки в маленькой игре и условие леммы 49.4 из [2]. Если при этом существует решение $x=w(t, t_0, x_0)$ уравнения (1.2), для которого позиция $(t, w(t, t_0, x_0))$ сближается со всеми множествами M_i $(i \in I)$ внутри N в смысле $\sigma(\cdot) \leqslant c$ [1], то позиционная стратегия $U_c \div u_c(t, x)$, экстремальная к дорожке $(t, x=w(t, t_0, x_0))$, гарантирует для всех движений $(t, x[t, t_0, x_0, U_c])$ сближение со всеми множествами M_i $i \in I$ внутри N в смысле $\sigma(\cdot) \leqslant c$. В противном случае кусочно-позиционная стратегия второго игрока (КПСV_c), определенная на множестве пучков из решений уравнения (1.2), обеспечит уклонение движения $(t, x[t, t_0, x_0, V_c])$ от множеств M_i внутри N в смысле $\sigma(\cdot) > c$.

В заключение этого параграфа покажем, что при определенных условиях на базе стабильных дорожек и стабильных интегральных многообразий существуют оптимальные стратегии из класса чисто-позиционных для первого игрока и кусочно-позиционных для второго игрока. Докажем следующую теорему.

Теорема 3.3. Пусть все условия теоремы 3.2. выполнены. Тогда игра на минимакс-максимин полунепрерывного снизу функционала $\sigma(\cdot)$ [1] имеет седловую точку $(U^0$, КПС$V^0)$ в классе чисто-позиционных стратегий первого игрока и кусочно-позиционных стратегий второго.

Доказательство. Пусть $(t_0, x_0) \in D$ и из точки (t_0, x_0) выходит пучок решений $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$ уравнения (1.2) в случае, когда условия леммы 49.4 из [2] выполнены. Предположим, что среди этих решений найдется, по крайней мере, одно решение $x = w(t, t_0, x_0)$, на котором функционал $\sigma(\tau_1(w(\cdot)), \ldots, \tau_m(w(\cdot)))$ принимает конечное значение. Продолжим все решения пучка $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$ в замыкание множества $[(t, x) : (t, x) \in R^{n+1}, (t, x) \bar{\in} N]$ до момента ϑ так, чтобы полученный пучок был компактным в себе в метрике $C_{[t_0, \vartheta]}$. Здесь момент ϑ определяется как в [1], но для $c = \sigma(\tau_1(w(\cdot)), \ldots, \tau_m(w(\cdot)))$. Тогда определенный на компактном в себе множестве функций из $C_{[t_0, \vartheta]}$ полунепрерывный снизу функционал $\sigma(\cdot)$ принимает конечное значение

$$\gamma^0 = \sigma(\tau_1(w^0(\cdot)), \ldots, \tau_m(w^0(\cdot)))$$

Покажем, что γ^0 определит цену игры. В самом деле, с одной стороны, чисто-позиционная стратегия $U_c^0 \div u_c^0(t, x)$, экстремальная к дорожке $(t, w^0(t, t_0, x_0))$, обеспечит сближение позиции $(t, x[t, t_0, x_0, U_c^0])$ со всеми множествами M_k $k \in I$ внутри N с показателем $\sigma(\cdot) \leqslant \gamma^0$, с другой стороны, при любом $c < \gamma^0$, согласно теореме 3.2, на базе пучка $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$ всех решений уравнения (1.2) можно определить КПСV_c второго игрока, обеспечивающая уклонения всех движений $(t, x[t, t_0, x_0, V_c])$ от множеств M_k внутри N с показателем $\sigma(\cdot) > c$. Но так как обе стратегии $(U_c^0$, КПС$V_c^0)$ формируются на одном и том же пучке, то КПСV_c^0 обеспечит второму игроку результат $\sigma(\cdot) \geqslant \gamma^0$ на движениях $\{t, x[t, t_0, x_0, V_c^0]\}$.

Пусть теперь, среди решений уравнения (1.2) нет ни одного, на котором функционал $\gamma(\cdot)$ принимал бы конечное значение. Тогда КПС V_e^0, определенная на базе пучка $\{t, w(t, t_0, x_0)\}$, обеспечит уклонения всех движений $\{t, x[t, t_0, x_0, V_e^0]\}$ в смысле $\gamma(x[\cdot])=\infty$.

Утверждение теоремы 3.3 будет справедливым, если полагать $\gamma^0=\gamma_0=\infty$.

Таким образом, теорема 3.3 полностью доказана.

Автор благодарит академика Н. Н. Красовского за постановку задачи.

ՍՏԱԲԻԼ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԵՐՈՒՄ m ՆՊԱՏԱԿԱՅԻՆ ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Մ. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում են ստաբիլ ճանապարհների և ինտեգրալ բազմաձևերի կառուցման հարցերը. համապատասխան կոնտինգենցիաներում հավասարումների լուծումների հիման վրա․ ելնելով այդ լուծումները հատուկ ձևով ընտրված բազմությունների վրա կառուցվում են ստաբիլ կամուրջների համակարգեր, որոնց նկատմամբ էքստրեմալ ստրատեգիան ապահովում է m բազմությունների հետ մոտեցման և նրանցից գոնե մեկից շեղման խնդիրների լուծումը։ Որոշակի պայմանների դեպքում նշվում են ստրատեգիաների ամենանեղ դասերը, որոնցում գոյություն ունեն օպտիմալները, երբ խաղի գինը որոշվում է մեկ ներքևից կիսաանընդհատ բավականին ընդհանուր տեսքի ֆունկցիոնալով։

STABLE SETS IN DIFFERENTIAL GAMES IN CASE OF m AIM SETS

M. S. GABRIELIAN

S u m m a r y

The question of building stable paths and integral manifolds are considered here on the basis of solutions of corresponding equations at contingations. Breaking these solutions into specially chosen sets, stable bridges are constructed. The extremal strategies related to those bridges provide the necessary result of the game, as well as the approach to every set or the derivation from at least one of the m aim sets.

In certain conditions the narrowest classes of strategies, in which the optimal ones exist, are indicated, when the value of the game is determined by a semi-continued functional from below, which has a rather general form.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габриелян М. С.* Игровые задачи о встрече с m целевыми множествами.—ПММ. 1979, т. 43, № 2.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию 17.IV. 1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

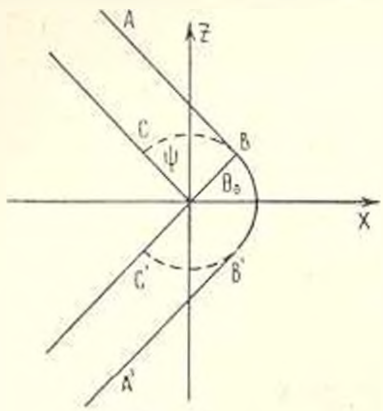
Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

УДК 534.221.

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ СОУДАРЕНИЯ УПРУГИХ ТЕЛ КОНЕЧНОЙ ВЫСОТЫ, ОГРАНИЧЕННЫХ СПЕРЕДИ ДВУХГРАННЫМИ УГЛАМИ

МАРТИРОСЯН А. Н., САФАРЯН Ю. С.

Задачи соударения плоских тел, ограниченных прямыми двухгранными углами, и полуполос решены методом [1] в [2,3]. Для цилиндрических стержней подобная задача рассмотрена в [4]. Плоские и осесимметричные задачи соударения тел, часть поверхностей которых свободна, а другая находится на жесткой заделке, а также ограниченных жидкостью, исследованы в [5, 6]. Уравнение коротких волн в газовой динамике получены в [9], а для произвольной среды—в [10].



Фиг. 1

В настоящей статье рассматривается соударение тел конечной высоты $2h$, ограниченных спереди двухгранными углами раствора $\pi-2\psi$ (фиг. 1) и плоскими поверхностями $y=\pm h$, которые движутся навстречу друг другу с постоянными скоростями $\pm v_0$. Определено решение линейной задачи в виде пластинчатых продольных волн. Затем выведены уравнения коротких волн для продольных волн в пластинках. Найдено их решение, которое сращивается с линейным. Рассчитано распределение скоростей на ударной волне. При $t\geq 0$, где t—время после соударения, образуется плоский слой и следует решить задачу с условиями, заданными на его верхней и нижней плоскостях и заданными начальными условиями.

Рассмотрим задачу со свободными поверхностями. Выберем начало координат o в вершине соударяющихся углов на их оси симметрии, ось ox направим по направлению скоростей движения, которые совпадают с осью симметрии, ось oy—перпендикулярно поверхностям тел, ось oz находится в плоскости симметрии тела и перпендикулярна оси ox. Обозначим через u_j ($j=1, 2, 3$) компоненты вектора перемещения по осям x, y, z. Пусть u_j^0 обозначают решения задачи о соударении бесконечных по высоте тел, в которой $u_2^0=0$, $u_{1,3}^0=u_{1,3}(x, z)$.

Как для u_j, так и для u_j^0 имеют место при $t=0$ начальные условия $u_3^0=0$, $u_1^0=0$, $\frac{\partial u_3^0}{\partial t}=0$

$$\frac{\partial u_1^0}{\partial t} = -v_0\sigma(x-|z|k) + v_0\sigma(k|z|-x) \tag{1}$$

где $\sigma(x)$ – единичная функция, $k=-\operatorname{tg}\psi$.

Решение динамических уравнений упругой среды в плоской задаче для $u_{1,3}^0$ при условиях (1) можно искать методом интегральных преобразований Лапласа по z и Фурье по (x, z) [7], причем для изображения по Лапласу от u_j^0 запишем

$$\bar{u}_j^0 = \int\int_{-\infty}^{\infty} u_j^0 \exp\left[-s(\bar{\alpha}x+\bar{\gamma}z)\right] d\bar{\alpha}\, d\bar{\gamma} \tag{2}$$

где $s=-i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа. Для трансформант после решения уравнений получим

$$\bar{u}_1^0 = \frac{v_0 k(b^2\bar{\alpha}^2 + a^2\bar{\gamma}^2 - \omega^2)}{\pi^2\omega^2(\bar{\gamma}^2-\alpha^2k^2)\bar{\mu}}, \qquad \bar{u}_3^0 = -\frac{v_0 k(a^2-b^2)\bar{\alpha}\bar{\gamma}}{\pi^2\omega^2(\bar{\gamma}^2-\alpha^2k^2)\bar{\mu}}$$

$$\mu' = (a^2\bar{\alpha}^2 + b^2\bar{\gamma}^2 - \omega^2)(b^2\bar{\alpha}^2 + a^2\bar{\gamma}^2 - \omega^2) - (a^2-b^2)^2\bar{\alpha}^2\bar{\gamma}^2 \tag{3}$$

где a, b – скорости продольных и поперечных волн, $\mu'=0$ дает дисперсионные соотношения для этих волн

$$\bar{\gamma}_1 = \sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\bar{\alpha}^2}, \quad \bar{\gamma}_2 = \sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\bar{\alpha}^2}, \quad \alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\omega}, \quad \gamma = \frac{\bar{\gamma}}{\omega} \tag{4}$$

Для преобразования от $\Delta^0 = \frac{\partial u_1^0}{\partial x} + \frac{\partial u_3^0}{\partial z}$ получится

$$\bar{\Delta}^0 = \frac{i v_0 k\bar{\alpha}}{\pi^2\omega^2a^2(\bar{\gamma}^2-\alpha^2k^2)(\bar{\gamma}^2-\bar{\gamma}_1^2)} \tag{5}$$

Следует отметить, что полюсы знаменателя $\gamma=\pm\alpha k$ соответствуют плоским продольным волнам AB и $A'B'$ (фиг. 1) и соответствующим поперечным волнам, причем слагаемые в решении, дающие эти волны, можно получить выделением особенности в решении, поэтому при вычислении интегралов в $\bar{\Delta}^0$ учитываются только полюсы $\gamma=\bar{\gamma}_1$ для продольных волн. Тогда можно получить при $z>0$

$$\bar{\Delta}^0 = \frac{v_0 k}{\pi\omega^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\bar{\alpha}\exp\left(i\omega(\bar{\alpha}x+\bar{\gamma}z)\right)}{(\gamma_1^2-\alpha^2k^2)\bar{\gamma}_1} \tag{6}$$

Полное решение плоской задачи для u_1^0, u_3^0 дано в [11]. Обозначим

$$u_i = u_j^0 + U_i \tag{7}$$

причем начальные условия для U_j нулевые, а граничные условия на поверхностях $y=\pm h$, $\sigma_{xy}=\sigma_{yy}=0$, $\sigma_{zz}=0$ запишутся в виде

$$a^2\frac{\partial U_2}{\partial y}+K\left(\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_3}{\partial z}\right)=-K\left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x}+\frac{\partial u_3^0}{\partial z}\right) \tag{8}$$

$$y=\pm h,\quad \frac{\partial U_1}{\partial y}+\frac{\partial U_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial U_3}{\partial z}+\frac{\partial U_2}{\partial y}=0,\quad -\infty<x,\ z<\infty$$

где $K=a^2-2b^2$.

Решение уравнений теории упругости можно искать в виде

$$\bar{U}_{1,3}=\sum_{n=1}^{2}\iint_{-\infty}^{\infty}\bar{U}_{1,3}^{(n)}\exp\left(i(\bar{\alpha}x+\bar{\gamma}z)\right)\cos\bar{\beta}_n y\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\gamma} \tag{9}$$

$$\bar{U}_2=\sum_{n=1}^{2}\iint_{-\infty}^{\infty}\bar{U}_2^{(n)}\exp\left(i(\bar{\alpha}x+\bar{\gamma}z)\right)\sin\bar{\beta}_n y\,d\bar{\alpha}\,d\bar{\gamma}$$

где $\bar{\beta}_1=\sqrt{\frac{\omega^2}{a^2}-\bar{\alpha}^2-\bar{\gamma}^2}$, $\bar{\beta}_2=\sqrt{\frac{\omega^2}{b^2}-\bar{\alpha}^2-\bar{\gamma}^2}$, причем можно получить

$$\bar{U}_2^{(1)}=-\frac{\bar{\beta}_1}{i\bar{\alpha}}\bar{U}_1^{(1)},\quad \bar{U}_3^{(1)}=\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\alpha}}\bar{U}_1^{(1)},\quad \bar{U}_3^{(2)}=-\frac{1}{\bar{\gamma}}\left[\bar{\alpha}\bar{U}_1^{(2)}-i\bar{\beta}_2\bar{U}_2^{(2)}\right] \tag{10}$$

Подставляя (9) и (10) в (8), можно получить

$$\bar{U}_1^{(1)}=-\frac{\bar{\alpha}K(u_1^0\bar{\alpha}+u_3^0\bar{\gamma})\left[\omega^2-2b^2(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\right]}{R_1(\bar{\alpha},\bar{\gamma})\cos\bar{\beta}_1 h}$$

$$\bar{U}_1^{(2)}=\frac{b^2K(u_1^0\bar{\alpha}+u_3^0\bar{\gamma})\,2\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\bar{\alpha}\sin\bar{\beta}_1 h}{\sin\bar{\beta}_2 h\cos\bar{\beta}_1 h\,R_1(\bar{\alpha},\bar{\gamma})} \tag{11}$$

$$\bar{U}_2^{(2)}=-\frac{i2b^2K\bar{\beta}_1\sin\bar{\beta}_1 h\,(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\,v_0k\bar{\alpha}}{\pi^2\rho^2a^2\sin\bar{\beta}_2 h\cos\bar{\beta}_1 h\,R(\bar{\alpha},\bar{\gamma})(\bar{\gamma}^2-\alpha^2k^2)(\bar{\gamma}^2-\bar{\gamma}_1^2)}$$

где $R_1(\bar{\alpha},\bar{\gamma})=\left[\omega^2-2b^2(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\right]+4\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2b^4(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\operatorname{tg}\bar{\beta}_1 h\operatorname{ctg}\bar{\beta}_2 h$

Для упрощения полученного решения можно рассматривать область на некотором удалении от места соударения и полагать $\frac{h}{x}\gg 1$, что соответствует длинноволновому приближению $\bar{\alpha}h\ll 1$, $\bar{\beta}_{1,2}h\ll 1$. Тогда можно получить, полагая, что

$$\Delta=\Delta^0+\Delta'$$

$$\Delta=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial u_3}{\partial z},\quad \Delta'=\frac{\partial U_1}{\partial x}+\frac{\partial U_2}{\partial y}+\frac{\partial U_3}{\partial z}$$

$$\bar{U}_1^{(1)}=-\frac{v_0Kk\bar{\alpha}^2\left[\omega^2-2b^2(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\right]}{\omega^4\pi^2\rho^2a^2(\bar{\gamma}^2-\alpha^2k^2)(\bar{\gamma}^2-\bar{\gamma}_1^2)\left[1-c_0^2(\alpha^2+\gamma^2)\right]}$$

$$\bar{\Delta}'=\frac{iv_0Kk\bar{\alpha}\left[\omega^2-2b^2(\bar{\alpha}^2+\bar{\gamma}^2)\right]}{\pi^2\omega^4a^4(\gamma^2-\alpha^2k^2)(\bar{\gamma}^2-\bar{\gamma}_1^2)\left[1-c_0^2(\alpha^2+\gamma^2)\right]},\quad c_0^2=\frac{4b^2}{a^2}(a^2-b^2) \tag{12}$$

где c_0 есть скорость продольных волн в пластинках [5].

Вычисляя в $\bar{\Delta}$ интегралы по $\bar{\gamma}$ в полюсах, соответствующих продольным $\bar{\gamma}=\bar{\gamma}_1$ волнам и волнам в пластинах $\bar{\gamma}=\bar{\gamma}_3$, $\bar{\gamma}_3=\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2}-\bar{\alpha}^2}$, получим при $z>0$

$$\bar{\Delta}'=-\bar{\Delta}^0+\frac{v_0Kk}{\pi\omega a^4c_0^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\alpha\left(1-\frac{2b^2}{c_0^2}\right)\exp\left(i\omega(\alpha x+\gamma z)\right)}{(\gamma_3^2-\alpha^2k^2)(\gamma_3^2-\gamma_1^2)\gamma_3}d\alpha \tag{13}$$

где $\gamma_3=\sqrt{\frac{1}{c_0^2}-\alpha^2}$.

Для получения значения Δ можно к полученному интегралу применить метод [5] вычисления интегралов, основанный на замене контура интегрирования контуром, на котором $\alpha x+\gamma_3 z$ вещественно.

Учитывая, что $\partial\bar{\Delta}/\partial t$ содержит под знаком интеграла ω только в показательной функции, можно видеть, что обратное преобразование от нее будет иметь вид $\delta(t-\alpha x-\gamma_3 z)$ и вычисление интеграла дает

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=-2\operatorname{Re}\frac{iv_02b^2k}{\pi c_0^2a^2}\,\frac{\alpha_2}{[\gamma_3^2(\alpha_2)-\alpha_2^2k^2][-x-\gamma_3'(\alpha_2)z]\gamma_3(\alpha_2)} \tag{14}$$

где α_2 находится из уравнения

$$\gamma_3=\gamma_3(\alpha_2),\quad t-\alpha_2x-\gamma_3z=0,\quad \alpha_2=\frac{tx+iz\sqrt{t^2-\frac{x^2+z^2}{c_0^2}}}{x^2+z^2} \tag{15}$$

Тогда можно получить

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}=-2\operatorname{Re}\frac{v_0k2b^2}{\pi c_0^2a^2}\,\frac{\alpha_2}{\frac{1}{c_0^2}-\alpha_2^2(1+k^2)}\,\frac{1}{\sqrt{t^2-\frac{x^2+z^2}{c_0^2}}} \tag{16}$$

Как видно из решения, оно будет верно не только для $z>0$, но и для произвольного z.

Можно из (16) получить асимптотику решения вблизи точечной волны $r=\sqrt{x^2+z^2}=c_0t$. Согласно (15) $\alpha_2\approx\frac{x}{c_0^2t}$ и обозначая $x=r\cos\theta$, из (15), (16) получится

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t}\approx-\frac{2v_0k2b^2}{\pi a^2c_0}\,\frac{\cos^2\psi\cos\theta}{\cos^2\psi-\cos^2\theta}\,\frac{1}{\sqrt{t^2-\frac{r^2}{c_0^2}}} \tag{17}$$

Вдали от B_1B' (фиг. 1) $\theta-\psi=O(1)$ и можно записать

$$\Delta\approx\frac{2v_0\sin2\psi b^2}{\pi a^2\sqrt{c_0}}\,\frac{\cos\theta}{\cos^2\psi-\cos^2\theta}\,\frac{\sqrt{2\left(t-\frac{r}{c_0}\right)}}{\sqrt{r}} \tag{18}$$

При $r=c_0t$ $\Delta=0$, но при $\theta=\psi$ знаменатель обращается в нуль.

Рассмотрим решение около B. Поскольку

$$\varphi_2 = \frac{t\cos\theta + i\sin\theta\sqrt{t^2 - \frac{r^2}{c_0^2}}}{r}$$

для малых $t - \frac{r}{c_0}$ и $\theta - \psi$ можно записать

$$\frac{1}{\frac{1}{c_0^2} - \alpha_2^2\frac{1}{\cos^2\psi}} \approx \frac{c_0^2 \operatorname{ctg}\psi(\theta-\psi) + i\sqrt{\frac{2c_0}{r}}\sqrt{t-\frac{r}{c_0}}}{2\left[(\theta-\psi)^2 + \frac{2c_0}{r}\left(t-\frac{r}{c_0}\right)\right]}$$

В рассматриваемой окрестности $\theta-\psi \sim \sqrt{t-\frac{r}{c_0}}$, тогда получится

$$\Delta \approx -\frac{2v_0 b^2 \cos\psi}{\pi a^2 c_0} \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2\left(t-\frac{r}{c_0}\right)}}{\sqrt{t}\,(\psi-\theta)} \tag{19}$$

при $\theta<\psi$, что соответствует окрестности BB'. Принимая в (19), что $\operatorname{arctg}(-0)=\pi$, получим при $\theta>\varphi$ в области около касания плоской и точечной волны решение $\Delta = -\frac{2v_0 b^2 \cos\psi}{\pi a^2 c_0}$, что дает также решение на плоской волне AB, и при $k=0$ дает [3]. Как и в [5], можно в решении учесть следующие по порядку слагаемые и получить сглаженный профиль за счет дисперсии.

Таким образом, получено решение линейной задачи вблизи точечной волны в виде формулы (18) и около B — точки касания плоской и точечной волны в виде (19). Для устранения особенности вблизи волны следует учесть нелинейность. Выведем нелинейные уравнения в окрестности волны для продольных упругих волн в пластинках, которые соответствуют полученной асимптотике. Учитывая только геометрическую нелинейность, можно записать лагранжиан для продольных перемещений в пластинке в виде [12]

$$\alpha = U - T,\quad U = \frac{9}{2}K'\varepsilon_0^2 + \frac{3}{4}\bar{\mu}\psi_0^2,\quad T = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right] \tag{20}$$

где $u_1 = u$, $u_2 = v$, ρ — плотность, $K' = \frac{2\bar{\mu}(1+\bar{\nu})}{3(1-2\bar{\nu})}$ — модуль объемного сжатия, $\bar{\mu}$ — модуль сдвига, $\bar{\nu}$ — коэффициент Пуассона

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_z + \varepsilon_y) = \frac{(1-2\bar{\nu})(\varepsilon_x+\varepsilon_z)}{3(1-\bar{\nu})}$$

$$\psi_0^2 = \frac{8}{9}\left\{\frac{1-\bar{\nu}+\bar{\nu}^2}{(1-\bar{\nu})^2}(\varepsilon_x^2+\varepsilon_z^2) + \frac{4\bar{\nu}-1-\bar{\nu}^2}{(1-\bar{\nu})^2}\varepsilon_x\varepsilon_z + \frac{3}{4}\varepsilon_{xz}^2\right\}$$

ψ_0 — интенсивность тензора деформаций

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$$

$$\varepsilon_{xz}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}$$

Подставляя вышеуказанные соотношения в (20), оставляя малые до третьего порядка относительно производных u и v, можно получить

$$\mathcal{L}=\frac{1}{1-\bar{\nu}}\bar{\mu}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^3\right]+$$
$$+\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{1}{2}\bar{\mu}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\right. \tag{21}$$
$$\left.+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\frac{\partial v}{\partial z}\right]-\frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2\right]$$

Варьируя $\mathcal{L}$ по u, v, получим уравнения

$$\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}}2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\mu}\frac{\partial v}{\partial x\partial z}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial z}\right)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}}\left[3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]+\frac{2\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\bar{\mu}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]=0 \tag{22}$$

$$\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}}2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{2\bar{\nu}\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\bar{\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+$$
$$+\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}}\left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+3\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{2\bar{\mu}\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\bar{\mu}}{2}\left[2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z}\right)+4\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}\right)+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]=0 \tag{23}$$

Дифференцируя (22) по x, а (23) по y, складывая их, учитывая, что согласно (18) и (19) производные по r значительно превосходят производные по θ, а также радиальные перемещения U' превосходят по порядку касательные к волне перемещения U_θ, что позволяет в малых нелинейных членах полагать

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r},\quad \frac{\partial}{\partial z}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r},\quad u=U'\cos\theta,\quad v=U'\sin\theta$$

после преобразований можно получить уравнение

$$c_0^2 = \frac{2\mu}{1-\nu}$$

$$c_0^2\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Delta}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}+3c_0^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U'}{\partial r}\,\frac{\partial^2 U'}{\partial r^2}\right)=0$$

где $\Delta=\frac{\partial U'}{\partial r}+\frac{U'}{r}+\frac{\partial U_\theta}{r\partial\theta}$, и поскольку $\frac{\partial U'}{\partial r}\gg\frac{U'}{r}$, $\Delta\approx\frac{\partial U'}{\partial r}$, можно сделать упрощение в последнем члене уравнения, которое примет вид

$$c_0^2\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\Delta}{\partial\theta^2}\right)-\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}+3c_0^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial r}\right)=0 \qquad (24)$$

Согласно теории [9] коротких волн в окрестности точечной волны можно ввести переменные $\xi=r-c_0t$, θ, t, причем

$$\frac{\partial\Delta}{\partial r}=\frac{\partial\Delta}{\partial\xi},\ \frac{\partial\Delta}{\partial t}\Big|_r=\frac{\partial\Delta}{\partial t}\Big|_\xi-c_0\frac{\partial\Delta}{\partial\xi},\ \frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}\approx-2c_0\frac{\partial^2\Delta}{\partial\xi\partial t}+c_0^2\frac{\partial^2\Delta}{\partial\xi^2}$$

Тогда получится уравнение

$$c_0^2\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}+\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\Delta}{\partial\theta^2}\right)+2c_0\frac{\partial^2\Delta}{\partial\xi\partial t}+3c_0^2\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\Delta\,\frac{\partial\Delta}{\partial\xi}\right)=0 \qquad (25)$$

В силу линейного решения можно считать $\Delta=\Delta\left(\frac{\xi}{t},\theta\right)$ и, кроме того

$$r\approx c_0t,\quad \Delta\approx\frac{\partial U'}{\partial r}=-\frac{1}{c_0}v_r,\ v_r=\frac{\partial U'}{\partial t} \qquad (26)$$

тогда

$$\frac{\partial v_r}{\partial\xi}-\frac{1}{c_0t}\,\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}-2\frac{\partial^2 v_r}{\partial\xi\partial t}+3\frac{\partial}{\partial\xi}\left(v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial\xi}\right)=0$$

Введем $v_\theta=\frac{\partial U_\theta}{\partial t}$, тогда можно показать, что

$$\frac{\partial v_r}{r\partial\theta}\approx\frac{\partial v_\theta}{\partial r} \qquad (27)$$

Вводя переменные $\frac{2\xi}{3\gamma c_0t}=\delta$, $\theta-\theta_0=\sqrt{\frac{3}{2}}\,\gamma Y$, $\frac{v_r}{c_0\gamma}=-\mu$, $\frac{v_\theta}{c_0\gamma\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}}=\nu$,

где γ—постоянная, $\theta_0=\psi$, можно получить известные из газовой динамики уравнения [5]

$$\frac{\partial\mu}{\partial Y}=\frac{\partial\nu}{\partial\delta},\quad(\mu-\delta)\frac{\partial\mu}{\partial\delta}+\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\,\frac{\partial\nu}{\partial Y}=0 \qquad (28)$$

В отличие от волн в жидкости [9], [10] и в металлах [8], как видно из уравнения (24), нелинейность имеет обратный знак, что приводит к непрерывным волнам сжатия и ударным волнам разгрузки. В настоящей задаче имеет место сжатие около BC (фиг. 1).

Выбирая $\gamma = \frac{2v_0 b^2 \cos\psi}{c_0 a^2}$, можно (19) записать в следующем виде:

$$\mu = -\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{-2\delta}}{-Y} \tag{29}$$

Формула (29) дает линейное решение вблизи B. Решение уравнений (28), переходящее вдали от волны [13] в (29), определено в [14] и имеет вид

$$\delta = -\frac{1}{2}(Y+c)^2 \operatorname{tg}^2\mu\pi + \mu + \frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi + B\sin^2\mu\pi,\quad \gamma = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\mu\pi - \mu\right)(Y+c) \tag{30}$$

где c—постоянная величина, имеющая порядок 1.

Как показано в [13], для непрерывного перехода в одномерное по радиусу решения около точечной волны, следует выбирать $B=0$. Линии постоянных μ даны в [13], [14]

Определим нелинейное решение вблизи точечной волны вдали от B при $\theta<\theta_c$. Уравнения (28) можно применять всюду в волновой области, причем для немалых $\theta-\theta_c$ производные по Y можно отбросить и $\mu - \delta + \frac{1}{2}\mu\frac{d\delta}{d\mu} = 0$. Решение полученного одномерного уравнения имеет вид

$$\delta = 2\mu + \frac{\mu^2}{c_1} \tag{31}$$

где c_1—постоянная. Для определения c_1 следует использовать тот факт, что вдали от волны $-\delta \gg 1$ и правый член первой части можно отбросить. Тогда линейное решение примет вид $\delta = \frac{\mu^2}{c_1}$, или переходя к δ, v_r, получим $v_r = \sqrt{\frac{2c_1 c_0 \gamma\delta}{3\pi}}$. С другой стороны, из (18) можно получить, после сравнения с данным значением v_r, что

$$c_1 = \frac{3v_0 \sin^2 2\psi\, b^2}{\pi^2 a^2 c_0 \cos\psi}\,\frac{2\cos^2\psi}{(\cos^2\psi - \cos^2\theta)^2} \tag{32}$$

Тогда нелинейное одномерное решение вблизи точечной волны $\mu = -c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_1\delta}$, где c_1 указано выше. Знак перед корнем выбран из условия $\mu=0$ при $\delta=0$, поскольку и в нелинейной задаче на волне имеется непрерывность μ. Следует отметить, что при малых γ, $\mu\sim\gamma$, $v_r\sim\gamma^2$, решение вблизи точечной волны имеет второй порядок малости. При подходе к B имеем $\theta\approx\psi$

$$c_1 \approx -\frac{3v_0\cos\psi\, 2b^2}{\pi^2 a^2 c_0 (\theta-\psi)^2}$$

Тогда получится нелинейное решение в виде $\delta \approx 2\mu - \frac{1}{2}Y^2\pi^2\mu^2$. То же значение получится из формулы (30) при $Y \gg 1$, $\mu\sim\gamma$. Решения (31),

(32) описывают окрестность точечной волны нелинейной задачи, в то время как (30) дает значения δ, ν в окрестности касания волн AB и BB'. Вне точечной волны $B'BC$ позади плоского фронта AB имеют место волны сжатия непрерывного вида. Она состоит из параллельных прямых $x\cos\theta - y\sin\theta = c_n t$, где c_n—нормальная скорость нелинейной волны. На основании уравнения (24) можно показать, что скорость характеристик $c_n \approx c_0 - \frac{3}{2} v_r$. Подставляя в уравнение прямых, на которых $v_r = \mathrm{const}$, и используя переменные δ, Y, μ, ν, получим вблизи B

$$\mu' = \delta - \frac{1}{2} Y^2$$

где через μ', ν' обозначены μ, ν впереди волны BC. Интегрируя первое уравнение (28) и удовлетворив условию на AB $\nu' = 0$, $\mu' = 0$, получим $\nu' = -\delta Y + \frac{1}{2} Y^3$. Полученное решение удовлетворяет уравнениям (28), и в силу него $\mu' = 0$ на первой волне, $\mu' = -1$ на последней волне, позади которой идет постоянное течение. Поскольку позади BC значение μ меньше значения впереди, имеет место ударная волна разрежения BC. Условия на ударной волне имеют вид [10]

$$\nu - \nu' = (\mu - \mu')\sqrt{2\delta - \mu - \mu'}, \quad \frac{d\delta}{dY} = -\sqrt{2\delta - \mu - \mu'},$$

подставляя сюда μ', ν', а также δ и ν из (30), получим вдоль ударной волны уравнение

$$\frac{d\mu}{dY} = \frac{(Y+c)\,\mathrm{tg}^2\mu\pi - \sqrt{-\frac{1}{2}(Y+c)^2\,\mathrm{tg}^2\mu\pi + \frac{1}{2\pi}\sin 2\mu\pi + B\sin^2\mu\pi + \frac{1}{2}Y^2}}{-(Y+c)^2\,\mathrm{tg}\,\mu\pi\,\frac{\pi}{\cos^2\mu\pi} + 1 + \cos 2\mu\pi + \pi B \sin 2\mu\pi}$$

при начальных условиях $Y = 0$, $\mu = 0$.

Величина c выбирается из требования, чтобы $\mu = -\frac{1}{2}$ при $Y = -c$. Помимо нелинейности, вообще говоря, нужно учитывать и дисперсию, что приведет к добавлению в (24) члена с производными четвертого порядка, однако принятая в данной работе схема без дисперсии, как и в теории мелкой воды, достаточно хорошо отражает явление соударения в окрестностях волн. Разумеется, данный вывод верен для достаточно сильных волн.

Учтем геометрическую и физическую нелинейность [15] согласно [8]

$$U = \frac{\bar{\mu}}{4}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{K}{2} - \frac{\bar{\mu}}{3}\right)\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^2 + \left(\bar{\mu} + \frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_e}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_e}{\partial x_k} +$$

$$+\left(\frac{B+K}{2}-\frac{\bar{\mu}}{3}\right)\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2+\frac{A}{12}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_e}\frac{\partial u_e}{\partial x_i}+\frac{B}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_e}+$$

$$+\frac{c}{3}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3,\quad i,\ k,\ e=1,\ 2,\ 3$$

где A, B, C — постоянные модули второго порядка, дающие физическую нелинейность. Запишем нелинейную часть. Отделив индекс 2 и учитывая, что

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\approx 0,\qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\approx-\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

получим нелинейную часть U в виде

$$\left(\bar{\mu}+\frac{A}{4}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_e}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_k}+\left(\frac{B+K}{2}-\frac{\bar{\mu}}{3}\right)\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2+\frac{A}{12}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_e}\frac{\partial u_e}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{B}{2}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_e}+\frac{c}{3}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3-\left(\bar{\mu}+\frac{A}{4}\right)\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^3+\left(\frac{B+K}{2}-\frac{\bar{\mu}}{3}\right)\times$$

$$\times\left\{\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^2\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3-\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2-\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^3\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3\right\}-$$

$$-\frac{A}{12}\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^3\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3+\frac{B}{2}\left[-\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_e}{\partial x_e}+\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^2\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3\right]+$$

$$+\frac{c}{3}\left(\frac{\partial u_e}{\partial x_e}\right)^3\left[\frac{-3\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}+3\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^2-\left(\frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}}\right)^3\right],\quad i,\ k,\ e=1,\ 3$$

Учитывая, что наибольшими по порядку являются компонента перемещения U' и производные по r, можно полагать $u_i\approx U'n_i$, где

$$n_1=\cos\theta,\quad n_3=\sin\theta,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\approx\frac{\partial U'}{\partial z}n_i-n_k,\quad \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)^2\approx\left(\frac{\partial U'}{\partial r}\right)^2$$

Тогда получим для нелинейного члена в U

$$\left(\frac{\partial U'}{\partial r}\right)^3\frac{\bar{\mu}}{1-\bar{\nu}}\xi,\quad \xi=1+\frac{1}{\bar{\mu}(1-\bar{\nu})^2}\left[\frac{1}{3}A(1-3\bar{\nu}+3\bar{\nu}^2-2\bar{\nu}^3)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}B(2-8\bar{\nu}+12\bar{\nu}^2+7\bar{\nu}^3)+\frac{c}{3}(1-2\bar{\nu})^3\right]$$

Первое слагаемое в ξ дает геометрическую, а остальные члены соответствуют физической нелинейности.

Тогда нелинейное уравнение (24) примет вид

$$c_0^2\left(\frac{\partial^2\Delta}{\partial r^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Delta}{\partial\theta^2}\right)-\frac{\partial^2\Delta}{\partial t^2}+3\xi c_0^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\Delta\frac{\partial\Delta}{\partial r}\right)=0$$

Подобно тому, как получено (25), можно ввести переменные ξ, θ, r и получить

$$\frac{\partial v_r}{c_0 t\,\partial\theta} \approx \frac{\partial v_\theta}{\partial\xi}, \quad -\frac{2\partial v_r}{\partial t} - \frac{1}{t}\,v_r - \frac{1}{t}\,\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + 3\xi v_r \frac{\partial v_r}{\partial\xi} = 0$$

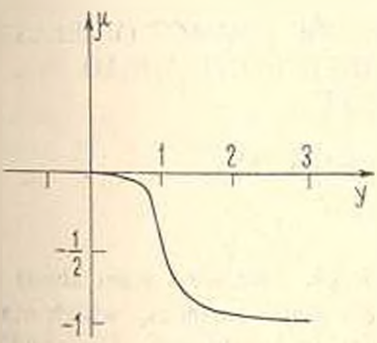
Для $\xi > 0$, что соответствует полимерам, можно ввести вышеуказанную замену, где вместо $\frac{3}{2}$ стоит $\frac{3}{2}\xi$, и получить (28). Все приведенные решения и уравнения при этом не меняются. Для отрицательных ξ, что соответствует металлам [8], или жидкостям, вводим переменные

$$\frac{v_r}{c_0\gamma} = \mu, \quad \frac{v_\theta}{c_0\gamma^{3/2}\sqrt{-\frac{3}{2}\xi}} = \nu, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{-\frac{3}{2}\xi\gamma}\; Y$$

и уравнения снова имеют вид (28). AB является ударной волной сжатия, на которой

$$\frac{\partial\delta}{\partial Y} = \sqrt{2\delta - \mu}, \quad \nu = -\mu\sqrt{2\delta - \mu}$$

Области, позади AB, соответствует $\mu = 1$, $\nu = -Y$. В точке B $\delta = 1$, $\nu = -1$, $Y = 1$. Таким образом, задача совпадает с рассмотренной в [10], [13], [14], только знаки Y, ν меняются на обратные. Решение в окрестности B дается (30), где $c = 0$, $B = 0$ и условия на ударной волне в ходе решения уравнения на ней удовлетворены достаточно точно [14]. Таким образом, для жидких и твердых тел [8], [9], [16], которым соответствует $\xi < 0$, что приводит к ударным волнам сжатия, решение получается в конечном виде. Для $\xi > 0$ результаты расчетов ударной волны BC приведены на фиг. 2. Отметим, что вблизи BC вдали от B имеет место одномерное по δ решение, причем впереди BC $\mu' = -1$, $\nu' = Y$ и вместо (31) можно получить



Фиг. 2

$$\delta + 1 = 2(\mu + 1) + \frac{(\mu + 1)^2}{c_2} \qquad (33)$$

Постоянная c_2 вдоль луча $\theta = \mathrm{const}$ находится из сравнения с линейным решением (29) и имеет вид

$$\mu \approx -1 + \frac{\sqrt{-2\delta}}{\pi Y}, \quad c_2 = -\frac{2}{\pi^2 Y^2}$$

при этом $\nu = Y$. Для $Y \gg 1$, $\mu \approx -1$ из (30) можно получить асимптотический переход от (30) к (33). То же самое относится к μ', ν', где имеется непрерывный переход от решения вблизи B к решению вдали от B. На ударной волне BC вдали от B $2\delta - \mu - \mu' = 0$ или $\nu = Y$, $\mu + 1 = \frac{3}{\pi^2 Y^2}$, при этом условие на BC удовлетворяется.

Полученное решение переходит в решение, найденное численным методом и показано на фиг. 2, где ему соответствуют значения $Y > 1{,}5$.

При расчетах выбрано $c = -1$, при этом условия на ударной волне выполнены достаточно точно.

Авторы благодарят А. Г. Багдоева за ценные советы.

ԱՌՋԵՎԻՑ ԵՐԿՆԻՍՏ ԱՆԿՅՈՒՆՆԵՐՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԽՈՐՈՒԹՅԱՄԲ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄԻՆՆԵՐԻ ԲԱԽՄԱՆ ԳԾԱՅԻՆ ԵՎ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է $2h$ վերջավոր խորությամբ մարմինների բախումը, որոնք առջևից սահմանափակված են $\pi-2\varphi$ բացվածքով երկնիստ անկյուններով և հարթ մակերևույթներով, որոնք շարժվում են իրար հանդեպ հաստատուն արագություններով։ Գծային խնդրի լուծումը որոշվում է երկայնական սալային ալիքների տեսքով։ Ստացված է լուծման ասիմպտոտիկայի բանաձևը և որոշված է լուծումը ճակատային ալիքների մոտ։

Այնուհետև դուրս է բերված սալերի մեջ երկայնական ալիքների համար կարճ ալիքների հավասարումները։ Գտնված է նրանց լուծումը, որոնք միացվում են գծայինի հետ։ Հաշվարկված է հարվածային ալիքների վրա արագությունների բաշխումը։

LINEAR AND NONLINEAR PROBLEMS OF IMPACT OF ELASTIC BODIES OF FINITE DEPTH. BOUNDED FROM AHEAD BY DIHEDRAL ANGLES

A. N. MARTIROSIAN, Y. S. SAFARIAN

S u m m a r y

The impact of bodies of finite depth $2h$, bounded from ahead by two-sided angles with opening $\pi-2\varphi$ and plane surfaces, which move towards one another with constant velocities is considered. The solution of linear problem in the form of plate longitudinal waves is determined. The formula for the asymptotic of the solution is obtained and the solution near the wave fronts is determined.

Furthermore short waves equations for longitudinal waves in plates are obtained. Their solution which is matched with the linear one is found. The distribution of velocities on shoch wave is calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
2. *Малков М. А.* Двумерная задача об упругом соударении стержней.—Докл. АН СССР, 1965, т. *148*, №4, с. 782—785.
3. *Малков М. А.* Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней.—ПММ, 1968, т. *32*, вып. 3, с. 467—475.
4. *Skalak R.* Longitudinal impact of some infinite bars.—Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, 1, 59—64.
5. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях.—ДАН СССР, 1976, т. *226*, №3, с. 537—540.
6. *Мартиросян А. Н.* Некоторые нестационарные граничные задачи для упругой среды, граничащей с жидкостью.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1982, т. *35*, №2.
7. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений с частными производными. М.: ИЛ, 1962.
8. *Заремба Л. К., Красильников В. А.* Введение в нелинейную акустику. М.: Наука, 1966. 519 с.
9. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн.—ПММ, 1980, т. *22*, №5, с. 586—599.
10. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1974, т. *27*, №2, с. 15—23.
11. *Мартиросян А. Н.* Решение некоторых нестационарных граничных задач теории упругости. Кандидатская диссертация, Ереван: ЕрГУ, 1977, 150 с.
12. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М.: ИЛ, 1961.
13. *Zahalak G. I., Myers M. K.* Conical flow near singular rays.—Journal of Fluid Mechanic, 1974, vol. 64, № 3.
14. *Багдоев А. Г., Гургенян А. А.* Приближенное решение ряда нелинейных задач определения ударных волн в сжимаемой жидкости.—Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1968, т. *21*, №1, с. 39—55.
15. *Бленд Д.* Нелинейная динамическая теория упругости. М.: Мир, 1974.
16. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Таллин: Изд. АН ЭССР, 1972. 174 с.

Армянский государственный педагогический
институт им. Х. Абовяна

Поступила в редакцию
13.IX.1983

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

УДК 624.074.4

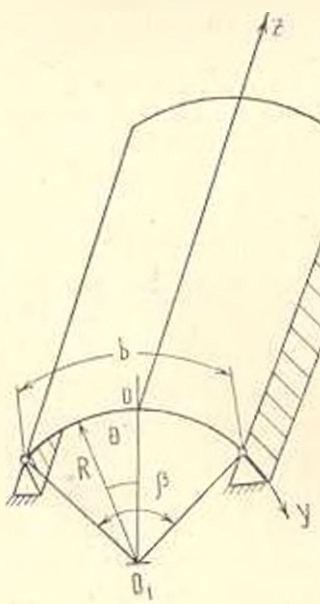
К ОДНОМУ МЕТОДУ РАСЧЕТА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПАНЕЛИ В НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСИВНЫХ НАГРУЗОК

НГУЕН ХОА ТХИНЬ

В статье рассматривается расчет цилиндрической панели (фиг. 1) в нелинейно-упругой среде под действием импульсивных нагрузок. Уделено внимание исследованию взаимодействия среды с панелью и влияния на него параметров уравнения поведения среды и жесткости панели.

Исследуется идеальная плотная среда и жидкая многокомпонентная среда, в которых отсутствуют касательные напряжения. Для этих сред замыкается система уравнений движения частиц среды и неразрывности только одним уравнением, определяющим объемную сжимаемость среды

$$p=f(V) \quad \text{или} \quad p=\varphi(\varepsilon) \tag{1}$$



Фиг. 1

где p — давление, V — удельный объем среды, ε — объемная деформация, причем $V=V_0(1+\varepsilon)$, V_0 — удельный объем среды в невозмущенной зоне.

В приближенной линеаризованной постановке задачи кривая „деформация—напряжение“ заменяется ломаной с прямолинейными звеньями вида

$$p_{(k)}=A_{(k)}\varepsilon+B_{(k)} \tag{2}$$

где $A_{(k)}$, $B_{(k)}$ — параметры уравнения поведения k-ого звена.

Для диаграммы, которая выпукла к оси деформаций, $B_{(k)}<0$.

Пусть волна в среде создается ударной нагрузкой, равномерно распределенной по поверхности полупространства, меняющейся во времени по закону

$$p=\begin{cases} p_m\left(1-\dfrac{t}{T}\right) & \text{при} \quad 0\leqslant t<T \\ 0 & \text{при} \quad t\geqslant T \end{cases} \tag{3}$$

где T — продолжительность действия нагрузки.

Приняв поверхность полупространства за начальное сечение, запишем систему уравнений движения частиц среды и неразрывности в поле падающей волны в виде [2]

$$
\begin{gathered}
\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \\
\frac{\partial \rho}{\partial t}+v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v_x}{\partial x}=0
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Эта система уравнений замыкается уравнением поведения среды (2), которое записывается в виде

$$
p_{(n)}=A_{(n)}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho}\right)+B_{(n)} \tag{5}
$$

В уравнениях (4) — (5) p—давление, v_x—скорость движения частиц среды в направлении распространения падающей волны, ρ—плотность среды, ρ_0 —плотность в невозмущенной зоне.

Решение системы уравнений (4) — (5) должно удовлетворять следующим условиям: условию (3) при $x=0$;

$$
p=p_0,\quad \rho=\rho_0,\quad v_x=v_0=0 \quad \text{при} \quad t=0,\ x>0 \tag{6}
$$

и условиям на скачке и на поверхности панели; последние будут изложены ниже.

В некоторый момент времени t_1 волна напряжений достигает поверхности панели и отражается от нее.

Отражение от поверхности панели, кроме ее верхней части, происходит как наклонное отражение от плоскости. Однако, вследствие того, что значение угла θ (фиг. 1) малое, можно считать, что давление в отраженной волне не зависит от угла θ и характер его изменения во времени такой же, как при $\theta=0$ (то есть в верхней точке поверхности оболочки). В этом случае отраженную волну от поверхности панели приближенно считаем плоской, уравнения движения частиц среды и неразрывности в поле отраженной волны имеют вид

$$
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{\partial p}{\partial r}=0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial \tau}+v\frac{\partial \rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial v}{\partial r}=0 \tag{7}
$$

Между t и τ, x и r существуют следующие соотношения:

$$
r=H-x,\quad \tau=t-t_1,
$$

где H—расстояние от поверхности полупространства до верхней точки поверхности панели.

Система уравнений (7) замыкается также уравнением поведения среды (5) и ее решение должно удовлетворять следующим условиям:

условию на поверхности панели

$$v=\frac{\partial x}{\partial\tau}-\frac{\partial w}{\partial\tau} \quad \text{при } r=0, \text{ то есть при } x=H \qquad (8)$$

где $(\partial x/\partial\tau)$ — скорость движения панели как твердого тела в направлении координаты x, $\partial w/\partial\tau$ — радиальная составляющая скорости движения элементов панели

условию (3) при $r=H$ (то есть при $x=0$),

условиям на скачке, и начальным условиям

$$\rho=\rho(t_1), \quad v=v(t_1), \quad p=p(t_1) \quad \text{при } \tau=0, \text{ (то есть при } t=t_1) \qquad (9)$$

Отражающаяся от панели волна двигается в сторону поверхности полупространства и в некоторый момент времени t_2 достигает этого сечения, отражается от него, возникает третья волна, движущаяся к панели. В некоторый момент времени t_3 третья волна достигает поверхности панели и происходит отражение, зарождается четвертая волна напряжений.

Описанный процесс распространения и отражения возмущений в среде продолжается до того момента времени, когда максимальное значение давления вторичных волн уменьшается приблизительно до нуля.

Для исследования влияния упругих деформаций панели на взаимодействие между средой и панелью и для определения напряженно-деформируемого состояния панели нужно решать совместно систему уравнений (7), (5) и уравнение движения элементов панели.

Предположим, что панель шарнирно закреплена вдоль сторон, параллельных образующей, к основанию с большой массой. Поэтому можно считать $(\partial x/\partial t)\sim 0$, то есть что панель неподвижна.

Вследствие того, что нагрузка равномерно распределена по поверхности полупространства, условия закрепления одинаковые по обоим торцам и всей длине панели, причем среда однородная и изотропная, в рассматриваемой задаче можно считать, что все параметры движения среды и панели не зависят от координаты z.

В этом случае уравнение движения элементов панели примет вид

$$\frac{D}{h}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{R}\sigma_y+\frac{p_2}{y}-\rho_*\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2} \qquad (10)$$

где D — цилиндрическая жесткость, ρ_* — плотность материала панели; h, R — толщина и радиус панели, p_* — сила, вызванная взаимодействием среды с панелью, величину σ_y найдем из условия закрепления краев.

Применяем выражение для прогибов

$$w=\sum_n f_n\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (11)$$

Поскольку движение панели начинается лишь с момента времени, когда падающая волна достигает панели, начальные значения для прогибов и радиальных составляющих скоростей движения элементов панели берутся нулевыми

$$w = \partial w/\partial \tau = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0 \tag{12}$$

Здесь время отсчитывается от момента контакта падающей волны с панелью.

После интегрирования уравнения (10) с учетом выражения для прогибов (11) методом Бубнова-Галёркина в первом приближении (при $n=1$) получим обыкновенное дифференциальное уравнение [1]

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)}\,\frac{c^2h^2}{b^4}\left(1+\frac{96}{\pi^2}k^2\right)(\zeta - M\zeta^2 + N\zeta^3) - \frac{q_n}{h} = 0 \tag{13}$$

где $\zeta = f/h$, $k = b^2/Rh$, $c = \sqrt{E/\rho_*}$, $M = \dfrac{3k}{\dfrac{\pi^2}{12} + \dfrac{8}{\pi^2}k^2}$

$$N = \frac{1}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{32}{\pi^6}k^2}, \quad q_n = \frac{p_{2n}}{\rho_* h^2}, \quad p_{2n} = \frac{2}{b}\int\limits_{-y_1}^{y_1} p_2 \cos\frac{\pi y}{b}\,dy, \quad 0 \leq y_1 \leq \frac{b}{2}$$

Перейдем к методике решения системы уравнений (5), (7), (13) при заданных начальных и граничных условиях.

При пренебрежении влияния упругих деформаций панели на взаимодействие ее с средой, то есть в случае, когда отражение от поверхности панели происходит как от твердого недеформируемого препятствия, сначала можно отдельно решить систему уравнений движения частиц среды и неразрывности (7), замыкающуюся уравнением поведения среды (5), после чего найдем силу, действующую на поверхность панели. Затем, решив дифференциальное уравнение (13), определим параметры движения и напряженно-деформируемое состояние панели.

Задача взаимодействия волны с плоской преградой была решена Ляховым Г. М. и другими методом характеристик [2]. Здесь к решению системы уравнений (7), (5) применяется разностный метод, описанный Рихтмайером Р., Мортоном К. [3]. Для того, чтобы обойти трудность выполнения условий на скачке, введем фиктивную силу псевдовязкости в следующем виде [3]:

$$Q = \begin{cases} l^2\rho\left(\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)^2 & \text{при } \dfrac{\partial v}{\partial r} < 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{14}$$

где $l = a\Delta r$, Δr — шаг переменной Эйлера r, a — число узлов сетки, захватываемых скачками.

В этом случае вместо системы уравнений (7) следует решить систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\partial(p+Q)}{\partial r} = 0 \\ &\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Эта система уравнений замыкается уравнением поведения (5) и выражением для силы псевдовязкости (14).

Разностная система уравнений, соответствующая системе (5), (14), (15) при применении первоначальной схемы имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\rho^n_{j+1/2}(v_j^{n+1}-v_j^n)/\Delta\tau+\rho^n_{j+1/2}v_j^n(v^n_{j+1}-v^n_j)/\Delta r+ \\
&+[(p^n_{j+1/2}-p^n_{j-1/2})+(Q^n_{j+1/2}-Q^n_{j-1/2})]/\Delta r=0 \qquad (a)
\end{aligned}
$$

$$(\rho^{n+1}_{j+1/2}-\rho^n_{j+1/2})/\Delta\tau+v_j^{n+1}(\rho^n_{j+1/2}-\rho^n_{j-1/2})/\Delta r+\rho^n_{j+1/2}(v^{n+1}_{j+1}-v_j^{n+1})/\Delta r=0 \qquad (b)$$

$$p^{n+1}_{j+1/2}=A_{(k)}\left(1-\frac{\rho_0}{\rho^{n+1}_{j+1/2}}\right)+B_{(k)} \qquad (c)$$

$$Q^{n+1}_{j+1/2}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}a^2(\rho^{n+1}_{j+1/2}+\rho^n_{j+1/2})(v^{n+1}_{j+1}-v_j^{n+1})^2 & \text{при } v^{n+1}_{j+1}-v_j^{n+1}<0 \qquad (d)\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

(16)

Заменяя граничные условия на начальном сечении и на поверхности панели, применяемые к системе уравнений (16), их конечноразностными эквивалентами и разрешая полученную систему уравнений, найдем значения искомых параметров в момент времени $t=t^{n+1}$, если все искомые параметры известны при $t=t^n$.

Вышеуказанная схема расчета принадлежит Рихтмайеру Р. и Мортону К. [3].

В численном расчете было выбрано значение $a=2$, отношение шагов $\Delta t/\Delta r$ выбрано из условия обеспечения устойчивости решения задачи.

После определения параметров движения частиц среды и давления, действующего на поверхность панели, перейдем к решению уравнения (13). Это уравнение будем интегрировать методом Рунге-Кутта. Расчет проводится на ЭВМ по стандартной программе RKGS. Программа, используемая для решения системы уравнений (16), входит в программу RKGS как ее подпрограмма.

Таким образом, при пренебрежении влияния упругих деформаций панели на взаимодействие ударных волн с нею решение совместно системы уравнений (7), (5) и уравнения (13) можно разделить на два этапа. Первым из них будет определение внешней нагрузки, действующей на поверхности панели, а вторым—собственно решение уравнения движения элементов панели (13) при найденной внешней нагрузке.

При учете влияния упругих деформаций панели на взаимодействие ударных волн с нею вышеуказанная схема двухэтапного расчета не применима, а необходимо решить совместно систему уравнений (7), (5) и уравнение движения элементов панели (13) как единую систему уравнений. Ее решение должно удовлетворить условию на поверхности панели (8)

$$v=-\partial w/\partial\tau \quad \text{при } r=0$$

В этом случае расчет проводится по разностному методу.

В качестве примера исследуется цилиндрическая панель, погруженная в грунты. К грунтам применяется модель нелинейно-упругой среды. Кривая «деформация—напряжение» среды заменяется двумя звеньями вида (5), параметры которой для четырех вариантов приведены в таблице 1.

Таблица 1

Варианты среды	$p_г$ (МПа)	A_1 (МПа)	B_1 (МПа)	A_2 (МПа)	B_2 (МПа)
1	3,00	45,6	0	140	—7,12
2	2,00	34,5	0	135	—5,85
3	1,00	20,0	0	132	—5,68
4	1,00	16,0	0	105	—5,85

В табл. 1 $p_г$—значение давления в точке пересечения двух звеньев диаграммы «деформация-напряжение».

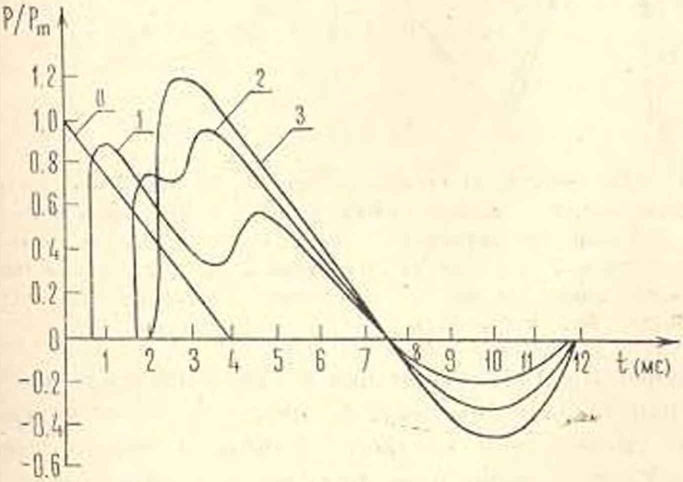
Панель изготовляется из стали с размерами $h/R=0{,}1$; 0,02; 0,03; 0,04; $b=6$ м; $H=0{,}5$ м.

Давление на поверхности полупространства изменяется во времени по закону (3), причем $T=4\cdot10^{-3}$ с.

При расчете выбран шаг по времени $\Delta t=2\cdot10^{-5}$ с., шаг по координате $\Delta r=0{,}005$ м.

На фиг. 2 представлена зависимость $p(t)$ в различных сечениях и на поверхности панели, на фиг. 3 приведены зависимости прогибов и скоростей движения элементов панели при $\theta=0$ от времени.

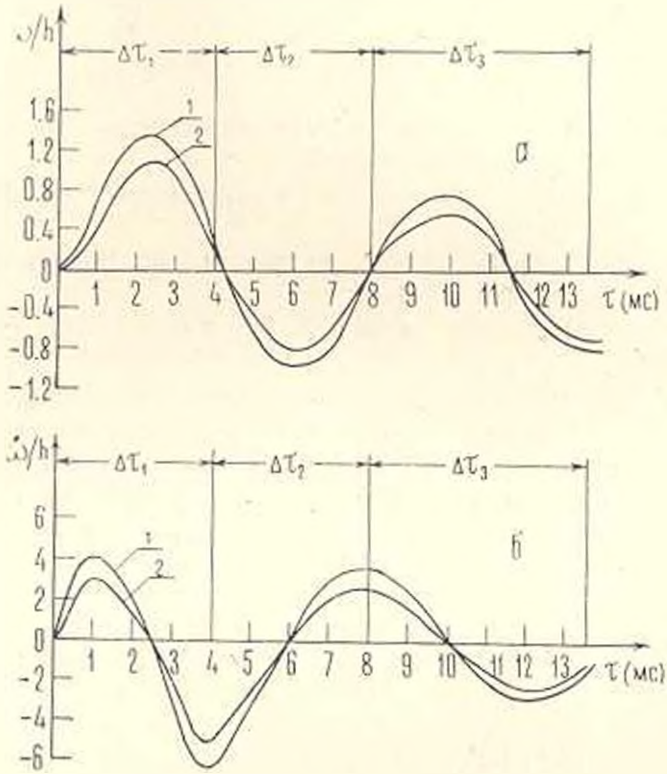
В табл. 2 приведены максимальные значения прогибов и радиальных составляющих скоростей движения при разных значениях h/R и разных вариантах среды.



Фиг. 2. Зависимость $P(t)$ в различных сечениях и на поверхности панели: 0—в начальном сечении, 1—при $x/H=0{,}25$; 2—при $x/H=0{,}75$; 3—на поверхности панели. (среда №3).

Из анализа приведенных результатов следует:

1. С одной стороны, чем больше выпуклость диаграммы «деформация-напряжение» относительно оси деформации, тем больше интенсивность угасания давления с увеличением расстояния от поверхности полупространства, с другой стороны, тем больше значение коэффициента отражения от поверхности панели. Поэтому закономерность влияния параметров уравнения поведения среды на напряженно-деформируемое состояние панели определяется только через конкретный анализ численных соотношений между соответствующими параметрами (H, $A_{(*)}$, $B_{(*)}$, ρ_0, E, ρ_*, h/R, ...).



Фиг. 3. Зависимости от времени а) прогиба, б) радиальной составляющей скорости верхней точки панели: 1—при пренебрежении влияния скоростей движения элементов панели на взаимодействие с нею среды, 2—с учетом этого влияния. $\Delta\tau_i$, $i=1, 2, 3, \ldots$—интервал времени пробега волны на расстояниях, кратных $2H$ (среда варианта № 3, $h/R = 0{,}01$).

2. Влияние упругих деформаций и скоростей движения точек поверхности панели на взаимодействие между средой и панелью увеличивается с уменьшением жесткости панели (здесь с уменьшением значений h/R) и с увеличением параметров уравнения поведения среды.

Из фиг. 3 видно, что наибольшее значение прогибов и скоростей движения элементов панели возникает в процессе распространения первых вторичных волн после соприкосновения падающей волны с панелью и отражения от нее. Поэтому решение задачи на этом этапе имеет важное значение для практики.

Таблица 2

Значения w_{max}/h при $w_{max}\,h$ при разных значениях h/R и разных вариантах сред

Варианты сред	h/R	(1)		(2)	
		$w_{max}\,h$	w_{max}/h	$w_{max}\,h$	w_{max}/h
1	0,01	1,37	6,09	1,02	5,01
2	0,01	1,39	6,17	1,09	5,08
	0,01	1,42	6,24	1,14	5,25
	0,02	0,380	1,56	0,320	1,41
3	0,03	0,157	0,700	0,134	0,630
	0,04	0,071	0,310	0,067	0,290
4	0,01	1,45	6,18	1,17	5,12

В табл. 2 в графе (1) дан результат расчета при пренебрежении влияния скоростей движения элементов панели на взаимодействие ее с средой, а в графе (2)—с учетом этого влияния.

ԻՄՊՈՒԼՍԱՅԻՆ ԲԵՌՆԵՐԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ՍԱԼԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

ՆԳՈՒԵՆ ԽՈԱ ՏԽԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում կատարված է գլանաձև սալի հաշվարկը ոչ գծային առաձգական միջավայրում իմպուլսային ուժի ազդեցության տակ։

Ավելորդ ճնշումը հետադարձ ալիքի դաշտում որոշվում է սալի մակերևույթի կետերում ելնելով ճակատային ալիքի ճնշումից։

Ներկայացված է կատարված հաշվարկի արդյունքները, ցույց է տրված միջավայրի վիճակի հավասարման ազդեցության չափերը և սալի ամրությունը միջավայրի և սալի միջև եղած ազդեցությունից։

A METHOD OF DETERMINING CYLINDRICAL PANEL IN NON-LINEAR ELASTIC MEDIUM ON ACTION OF IMPULSIVE LOADS

NGUYEN HOA THINH

S u m m a r y

The paper considers the estimation of cylindrical panel in non-linear elastic medium with impulsive actions.

Excessive pressure in the field of the reflected wave at the points of shell surfaces is determined from the general ratio on the front of wave of tention.

The results of calculation are presented. The influence of the parameters of equation of the state of medium and the rigidity of the shell on the interaction between the shell and the medium is shown.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 1982. 286 с.
2. *Ляхов Г. М.* Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах. М.: Наука, 438 с.

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступила в редакцию
4.I. 1985

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

УДК 539.374

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ПРОНИКАНИЯ В ГРУНТ

КИРИЛЕНКО Г. А., САГОМОНЯН А. Я.

Проникание заостренных тел вращения по нормали к поверхности сухого слабосвязного грунта рассмотрено в работах [1], [2].

В работе [3] численные расчеты в задаче проникания использовались для проверки точности приближенной теории расширения цилиндрической полости в туфе. Одно- и двумерные расчеты проведены как для гидродинамической модели грунта, так и с учетом его прочности.

Известно, что многие грунты при нагружении деформируются необратимым образом [2]. При этом в слабосвязных грунтах при достаточно больших нагрузках можно пренебречь влиянием касательных составляющих напряжений на процесс деформирования по сравнению с влиянием среднего давления.

Предположим, что в условиях высокоскоростного проникания вблизи поверхности тела применима модель идеальной пластически сжимаемой среды.

Динамическая система уравнений для описания поступательного движения жесткого тела и вызванного им движения грунта в указанных предположениях имеет вид

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}=-\operatorname{grad}P,\quad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\vec{V}=0$$

$$m_\tau\frac{dV_\tau}{dt}=-\int\limits_{S_k(t)}Pn_x\,ds$$

$$P=\begin{cases} f_k(\rho), & \dfrac{d\rho}{dt}>0,\quad \rho^*=\rho\\ f_p(\rho,\rho^*), & \dfrac{d\rho}{dt}<0,\quad \dfrac{d\rho^*}{dt}=0\\ f_p(\rho,\rho^*), & \dfrac{d\rho}{dt}>0,\quad \rho<\rho^*\\ & \dfrac{d\rho^*}{dt}=0\end{cases}$$

где $\rho=\rho(t,x)$, $V=V(t,x)$, $P=P(t,x)$, $\rho^*=\rho^*(t,x)$; ρ^* — максимальная плотность частицы среды, полученная ею в процессе предшествующего нагружения и сохраняющаяся в дальнейшем при разгрузке и повторной нагрузке до ρ^*; $f_н$—функция нагружения; $f_р$—функция разгрузки; $m_т$—масса тела; $V_т$—скорость движения тела; $S_к(t)$—поверхность контакта среды и тела; n_z—осевая компонента внешней к поверхности $S_к$ нормали.

На свободной поверхности, совпадающей в начальный момент с границей нижнего полупространства, занятого грунтом, имеем

$$P_{св}(t, z, r)=0$$

На оси симметрии выполнено

$$V_r(t, z, 0)=0$$

На поверхности тела

$$V_т n_z = v_r n_r + v_z n_z$$

где (v_r, v_z)—компоненты скорости среды.

Рассмотрим для определенности нормальное проникание конуса конечного раствора: $r = z\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, $z \leqslant h_{кон}$, $z \geqslant 0$, $t=0$, где γ—угол раствора конуса, $h_{кон}$—высота конуса.

В начальный момент времени известна скорость $V_т(0)$ подхода тела к поверхности грунта. Грунт однороден: $\rho_0=\mathrm{const}$. Нет остаточных деформаций: $\rho^*|_{t=0}=\rho_0$. Всюду $P=0$ и $\vec{V}=0$. Для решения задачи от системы уравнений, приведенной выше, перейдем к интегральным соотношениям, записанным с помощью обобщенной эйлеровой формулировки законов сохранения. Это дает возможность пользоваться комбинированными лагранжево-эйлеровыми подвижными сетками.

Для расчета значений параметров на промежуточном слое явной разностной схемы используется алгоритм решения задачи о распаде произвольного разрыва в идеальной пластически сжимаемой среде на границе между двумя соседними ячейками в предположении локальной автомодельности.

Решение получено для конуса с параметрами [2]:

$$\gamma=\pi/3, \quad m_т=10 \text{ кг}, \quad h_{кон}=0{,}13 \text{ м}, \quad V_т(0)=-600 \text{ м/с}$$

Параметры грунта (суглинок воздушной влажности):

$$f_н(\varepsilon)=\frac{\alpha\varepsilon}{\beta-\varepsilon}, \quad \varepsilon=1-\rho_0/\rho$$

$$f_р(\varepsilon, \varepsilon^*)=P^*[(\varepsilon-\varepsilon_0)/(\varepsilon^*-\varepsilon_0)]^m$$

$$\alpha=10^8 \text{ н/м}^2, \quad \beta=0{,}5; \quad \rho_0=1529 \text{ кг/м}^3$$

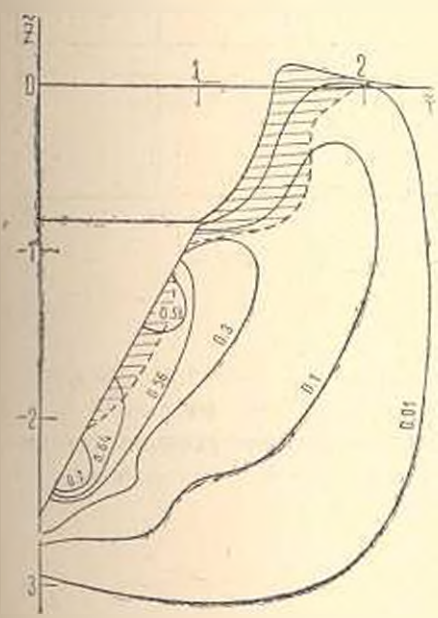
где $\varepsilon_0=q\varepsilon^*$—остаточная деформация; $q=0{,}6$; $\varepsilon^*=1-\rho_0/\rho$—максимальная деформация; $m=5$

$$P^*=\frac{\alpha\varepsilon^*}{\beta-\varepsilon^*}$$

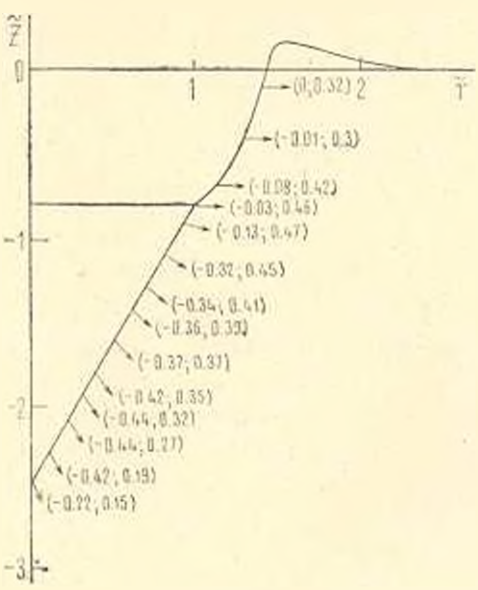
На фиг. 1 приведено поле давлений и вид свободной поверхности для момента времени $\bar{t}=1,53$, когда конус полностью погрузился в грунт. Здесь: $\bar{t}=tC_0/r_{\text{кон}}$, $r_{\text{кон}}=h_{\text{кон}}\operatorname{tg}\gamma\ 2$, C_0—скорость звука в невозмущенной среде, $\bar{z}=z/r_{\text{кон}}$, $\bar{r}=r/r_{\text{кон}}$, $\bar{P}=P/(\rho_0 C_0^2)$.

Изобары имеют характерную чечевицеподобную форму. Заштрихована область пластичности. Для нее выполнено: $\rho<\rho^*$. Характерной особенностью решения является наличие на поверхности конуса двух максимумов давления. На наш взгляд, это является результатом специфической формы ударной волны и двумерности течения грунта. Второй максимум давлений вблизи свободной поверхности постепенно исчезает по мере развития волны пластической разгрузки и увеличения глубины проникания.

Вид поля скоростей (фиг. 2) $\vec{V}=v/C_0$ вблизи поверхности тела (цифры в скобках—значения компонент) примерно соответствует гипотезе нормального движения среды [1].



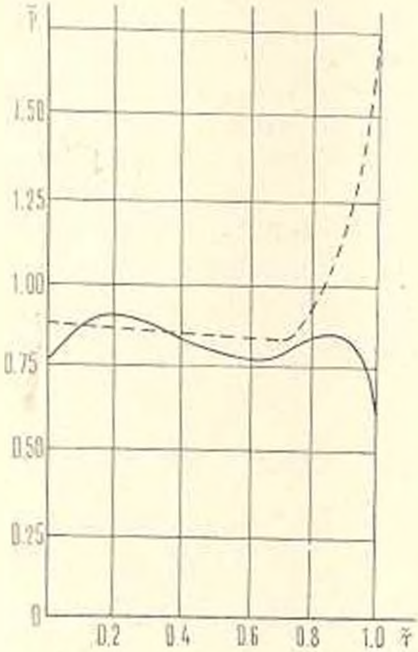
Фиг. 1



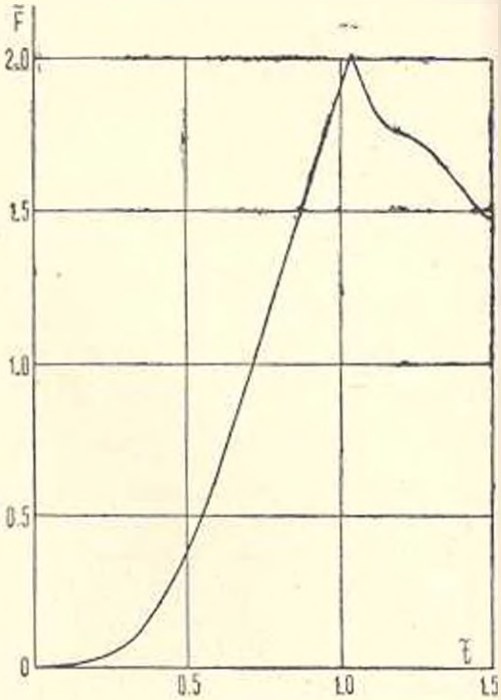
Фиг. 2

На фиг. 3 сплошной линией изображен профиль давления вдоль поверхности конуса в момент времени $\bar{t}=1,01$, когда он погружен на глубину $z=-h_{\text{кон}}$. Здесь штриховая линия—решение по одномерной теории [1]. Существенное различие решений имеется вблизи свободной поверхности. Однако, его влияние локализовано довольно узкой зоной, что позволяет сделать вывод об обоснованности гипотезы [1].

Зависимость силы сопротивления $\bar{F}=F/(\pi\rho_0 C_0^2 r_{\text{кон}}^2)$ от глубины проникания — $\bar{z}$ изображена на фиг. 4. Максимум достигается в момент, когда $\bar{z} = -1{,}73$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Следует отметить высокие сглаживающие свойства разностной схемы вследствие использования задачи о распаде разрывов. Это, в сочетании с подвижными перестраиваемыми по ходу решения сетками, позволяет ограничиться предельно малым числом счетных ячеек, что делает метод весьма экономичным.

ԳԵՏՆԱՀՈՂՈՒՄ ՆԵՐԹԱՓԱՆՑՄԱՆ ԹՎԱՅԻՆ ՄՈԴԵԼ

Դ. Ա. ԿԻՐԻԼԵՆԿՈ, Ա. ՅԱ. ՍԱԳՈՄՈՆՅԱՆ

Ամփոփում

Թվային մեթոդներով լուծված է գերբարձր արագությամբ մարմինների ներթափանցման խնդիրը, բերված են դիմադրության ուժի անչափ ժամանակից կախման գրաֆիկները։

THE NUMERICAL MODEL OF PENETRATION INTO THE SOIL

G. A. KIRILENKO, A. Y. SAGOMONIAN

S u m m a r y

The problem of high velocity penetration in an ideal plastic medium is solved by means of numerical methods. The graphs of drag force from dimensionless time are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сагомонян А. Я.* Проникание. М.: изд. МГУ, 1974.
2. *Рахматулин Х. А., Сагомонян А. Я., Алексеев Н. А.* Вопросы динамики грунтов. М. изд. МГУ, 1964.
3. *Hicks D. H., Norwood F. R., Trucano T. G.* Toody—Wandy calculations of penetration events. „Shock Waves condens. Matter. Con. Menlo Park. Calif., 23–25 June, 1981", New Jork: 1982, p. 544–547.

Механико-математический факультет МГУ
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28.VI. 1984

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXIX, № 1, 1986 Механика

УДК 551.49

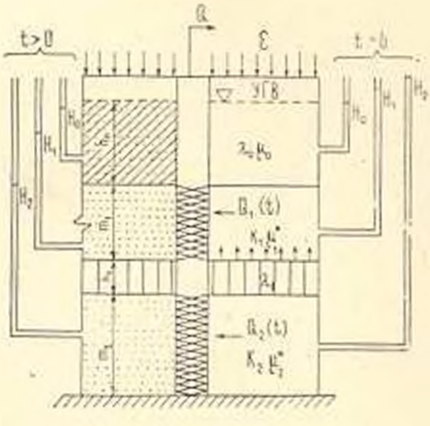
ДВИЖЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД К СКВАЖИНЕ В НЕОДНОРОДНО-СЛОИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ ОТКАЧКЕ ИЗ ДВУХ СЛОЕВ

КАЗАРЯН С. М.

Задача о неустановившемся движении подземных вод в слоисты водоносных толщах пород является одной из важных в гидрогеологии поскольку в реальных природных условиях мы имеем дело с комплексом водоносных горизонтов, разделенных слабопроницаемыми глинистыми слоями. Поэтому учет реальной природной обстановки дает возможность получить истинную картину работы вертикального дренажа и гидрогеологической обстановки на орошаемом массиве.

Задача откачки из скважины в двухпластовой системе в жестком режиме рассматривалась В. М. Шестаковым [7, 8]. В этих работах не учитывается инфильтрационное питание, принимаются равные напоры в водоносных слоях. Кроме того, не осуществляется переход от изображений к оригиналу при интегральном преобразовании Лапласа. Задача решается интерпретацией опытных данных.

Данное аналитическое решение и вытекающие из него практические рекомендации относятся к задаче более общей постановки. Рассматривается неустановившееся движение подземных вод в неограниченной трехслойной гидравлически связанной среде (фиг. 1) с учетом инфильтрации поверхностных вод и перетекания при жестком режиме в покровном и раздельном пласте.



Фиг. 1

Напоры в водоносных слоях разные, а отбор воды производится из двух нижележащих напорных слоев с постоянным суммарным расходом. Процесс фильтрации описывается следующей системой дифференциальных уравнений [2,4]

$$b_0(S_1-S_0)-e=\frac{\partial S_0}{\partial t}$$

$$a_1\left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S_1}{\partial r}\right)-b_1(S_1-S_2)-$$

$$-b_1^*(S_1-S_0)=\frac{\partial S_1}{\partial t}$$

$$a_2\left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S_2}{\partial r}\right)-b_2(S_2-S_1)=\frac{\partial S_2}{\partial t} \tag{1}$$

В системе (1) введены следующие обозначения:
a_i—коэффициент пьезопроводности ($i=1, 2$) первого и второго водоносных пластов: b_i—коэффициент перетекания, S_i—понижение уровня подземных вод ($i=0, 1, 2$) в любой точке покровного и I и II водоносных горизонтов в любой момент времени.

$$a_1=\frac{(km)_1}{\mu_1^*},\quad b_0=\frac{\lambda_0}{h_0\mu_0},\quad b_1^*=\frac{\lambda_0}{h_0\mu_1^*},\quad e=\frac{\varepsilon}{\mu_0},\quad a_2=\frac{(km)_2}{\mu_2^*},\quad b_1=\frac{\lambda_1}{h_1\mu_1^*}$$

$$b_2=\frac{\lambda_1}{h_1\mu_2^*},\quad S_i(r,t)=H_{ie}-H_i(r,t),\quad (i=0,1,2) \tag{2}$$

Здесь $(km)_i=T_i$ ($i=1, 2$) — водопроводимость-произведение коэффициента фильтрации мощности I и II напорных пластов:

μ_i^*—коэффициент упругой водоотдачи этих же слоев по В. Н. Щелкачеву [9]:

λ_1—коэффициент фильтрации раздельного слоя, h_1—мощность того же слоя, λ_0 — коэффициент фильтрации покровного слоя, μ_0—коэффициент водоотдачи того же слоя, h_0—некоторое постоянное среднее значение, $H_0(r, t)$; ε—постоянная интенсивность инфильтрации; H_{ie}—пьезометрический напор, соответственно, в покровном, I и II водоносных горизонтах в естественных условиях.

Решение системы (1) будем искать при следующих начальных и граничных условиях:

$$t=0,\ S_i(r,t)=0,\quad (i=0,1,2);\quad t>0,\ r\to\infty,\ S_i(r,t)=0$$

$$\lim_{r\to 0} r\left(\frac{\partial S_1}{\partial r}+\alpha_T\frac{\partial S_2}{\partial r}\right)=q;\quad r\to 0,\quad S_1(r,t)+\Delta H=S_2(r,t) \tag{3}$$

где $$q=-\frac{Q}{2\pi T_1}=\text{const},\quad \alpha_T=\frac{T_2}{T_1},\quad \Delta H=H_{2e}-H_{1e}$$

Применяя для уравнений (1) преобразование Лапласа относительно переменной t и учитывая начальные условия, получим [10]

$$b_0\bar S_1-(p+b_0)\bar S_0=\frac{e}{p}$$

$$a_1\left(\bar S_1''+\frac{1}{r}\bar S_1'\right)-(p+b_1+b_1^*)\bar S_1+b_1\bar S_2+b_1^*\bar S_0=0$$

$$a_2\left(\bar S_2''+\frac{1}{r}\bar S_2'\right)-(p+b_2)\bar S_2+b_2\bar S_1=0 \tag{4}$$

Из совместного решения системы (4) получим

$$a_1\left(\bar S_1''+\frac{1}{r}\bar S_1'\right)-\frac{p^2+\gamma_1 p+\gamma_2}{p+b_0}\bar S_1+b_1\bar S_2=\frac{b_1^* e}{p(p+b_0)}$$

$$a_2\left(\bar{S}_2'' + \frac{1}{r}\bar{S}_2'\right) + b_2\bar{S}_1 - (p+b_2)\bar{S}_2 = 0$$ (5)

Система уравнений (5) имеет частное решение вида $\bar{S}_{i0}$. Легко видеть, что $\bar{S}_{i0}$ имеют вид [5]

$$\bar{S}_{00}(\lambda) = -\frac{\delta_1\lambda + d_2}{\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2+f_1\lambda+d_1)} - \frac{\bar{e}}{\lambda(\lambda+1)}$$

$$\bar{S}_{10}(\lambda) = -\frac{\delta_1\lambda + d_2}{\lambda^2(\lambda^2+f_1\lambda+d_1)}, \quad \bar{S}_{20}(\lambda) = -\frac{d_2}{\lambda^2(\lambda^2+f_1\lambda+d_1)}$$ (6)

где

$$f_1 = 1 + B_1^0 + B_1^{*0} + B_2^0, \quad d_1 = B_2^0 B_1^{*0} + B_1^0 + B_2^0, \quad d_2 = B_2^0 B_1^{*0}\bar{e}, \quad \delta_1 = B_1^{*0}\bar{e}$$

$$B_1^0 = \frac{b_1}{b_0}, \quad B_1^{*0} = \frac{b_1^*}{b_0}, \quad B_2^0 = \frac{b_2}{b_0}, \quad \bar{e} = \frac{e}{b_0}, \quad p = \lambda b_0$$ (7)

Общее решение соответствующей линейной однородной системы (5) с учетом граничных условий (3) и свойств функций K_0 и I_0, следуя [1, 3], будем искать в виде

$$\bar{S}_1 = A_1 K_0(\omega r), \quad \bar{S}_2 = A_2 K_0(\omega r)$$ (8)

где I_0 и K_0—цилиндрические функции мнимого аргумента, соответственно первого и второго рода нулевого порядка.

Подставляя значения $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ в однородную систему (5) и используя рекуррентные формулы Бесселя [1,3], получаем систему алгебраических уравнений относительно ω, A_1 и A_2. Отсюда для нетривиального решения получим корни характеристического уравнения:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{b_0}{2a_2}\,\frac{a_0\lambda^2 + b\lambda + c \mp f(\lambda)}{\lambda+1}}, \quad a_0 = A^0 - 1, \quad A^0 = \frac{a_2}{a_1}, \quad c = B_2^0 + A^0 B_1^0$$ (9)

$$b = 1 + B_2^0 + A^0(1 + B_1^0 + B_1^{*0}); \quad \gamma_3 = 1 + B_1^0 + B_1^{*0} + B_2^0, \quad \gamma_4 = B_1^0 + B_2^0(1 + B_1^{*0})$$

$$\gamma_5 = A^0(1 + B_1^0 + B_1^{*0}) - (1 + B_2^0); \quad \gamma_6 = A^0 B_1^0 - B_2^0$$

$$f(\lambda) = \sqrt{(a_0\lambda^2 + b\lambda + c)^2 - 4A^0(\lambda+1)(\lambda^3 + \gamma_3\lambda^2 + \gamma_4\lambda)}$$ (10)

Подставляя ω_i^2 в систему алгебраических уравнений, находим значения A_1 и A_2 с точностью до постоянного множителя

$$A_{11} = C_1, \quad A_{21} = C_1\nu_1; \quad A_{12} = C_2, \quad A_{22} = C_2\nu_2$$ (11)

где

$$\nu_{1,2} = \frac{N\lambda^2 + \gamma_5\lambda + \gamma_6 \mp f(\lambda)}{2A^0 B_1^0(\lambda+1)}$$ (12)

Решение системы (5) будет

$$\bar{S}_1 = C_1 K_0(\omega_1 r) + C_2 K_0(\omega_2 r) + \bar{S}_{10}$$

$$\bar{S}_2 = C_1\nu_1 K_0(\omega_1 r) + C_2\nu_2 K_0(\omega_2 r) + \bar{S}_{20}$$ (13)

где C_1 и C_2—постоянные, определяемые из условия (3)

$$C_1=\frac{q(1-\lambda_2)}{(1+\alpha_T)(\lambda_2-\lambda_1)\lambda}-\frac{\Delta H}{1+\alpha_T}\,\frac{1+\alpha_T\lambda_2}{\lambda(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)}+\frac{\Delta\bar{S}}{1+\alpha_T}\,\frac{1+\alpha_T\lambda_2}{(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)}$$

$$C_2=-\frac{q}{1+\alpha_T}\,\frac{1-\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1)\lambda}+\frac{\Delta H}{1+\alpha_T}\,\frac{1+\alpha_T\lambda_1}{\lambda(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)}-\frac{\Delta\bar{S}}{1+\alpha_T}\,\frac{1+\alpha_T\lambda_1}{(\lambda_2-\lambda_1)K_0(\omega_1 r_0)} \qquad (14)$$

С учетом (14), подставляя все значения в систему (5) и переходя от отображающей функции к ее оригиналу, применяя теорему обращения для преобразования Лапласа, получим [10]

$$S_i(r,t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\exp(\lambda\tau)\Big|\bar{S}_{i0}(\lambda)+\frac{q}{1+\alpha_T}\left(\Phi_{i1}(\lambda)K_0(\omega_1 r)-\Phi_{i2}(\lambda)K_0(\omega_2 r)\right)-$$

$$-\frac{\Delta H}{1+\alpha_T}\left(\Phi_{i3}(\lambda)\frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)}-\Phi_{i4}(\lambda)\frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)}\right)+\frac{\lambda_1}{1+\alpha_T}\left(\Phi_{i5}(\lambda)\frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_2 r_0)}-\right.$$

$$\left.-\Phi_{i6}(\lambda)\frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)}\right)\Big|d\lambda; \quad (i=0,\ 1,\ 2) \qquad (15)$$

где $\Phi_{0i}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda+1}\Phi_{1i}(\lambda)$; $\Phi_{11,12}(\lambda)=\dfrac{A^0B_1^0(\lambda+1)}{\lambda f(\lambda)}-\dfrac{1}{2\lambda}(\varphi(\lambda)\pm1)$

$$\Phi_{13,14}(\lambda)=\frac{A^0B_1^0(\lambda+1)}{\lambda f(\lambda)}+\frac{\alpha_T}{2\lambda}(\varphi(\lambda)\pm1);\quad \Phi_{15,16}(\lambda)=\frac{A^0B_1^0(\lambda+1)}{\beta(\lambda)f(\lambda)}+$$

$$+\frac{\alpha_T}{2\beta(\lambda)}(\varphi(\lambda)\pm1);\quad \Phi_{21,22}(\lambda)=\frac{1}{2\lambda}(\varphi(\lambda)\mp1)-\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda};\quad \Phi_{23,24}(\lambda)=$$

$$=\frac{1}{2\lambda}(\varphi(\lambda)\mp1)+\alpha_T\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda};\quad \Phi_{25,26}(\lambda)=\frac{1}{2\beta(\lambda)}(\varphi(\lambda)\mp1)+\alpha_T\frac{\Psi(\lambda)}{\beta(\lambda)}$$

$$\Psi(\lambda)=\frac{N^2(\lambda)-f^2(\lambda)}{4A^0B_1^0(\lambda+1)f(\lambda)} \qquad (16)$$

Линейные интегралы для $S_i(r,t)$, полученные с помощью теоремы обращения, обычно вычисляются посредством перехода к замкнутому контуру с применением теоремы вычетов [1, 3, 10]. При вычислении линейных интегралов (15) встречались случаи:

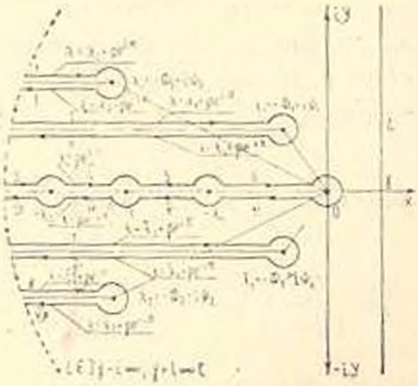
1) $\bar{S}(\lambda)$ есть однозначная функция от λ со счетным множеством полюсов. В этом случае, применяя теорему Коши, интегралы можно представить в виде

$$\int\limits_L = 2\pi i \sum \mathrm{Res} \qquad (17)$$

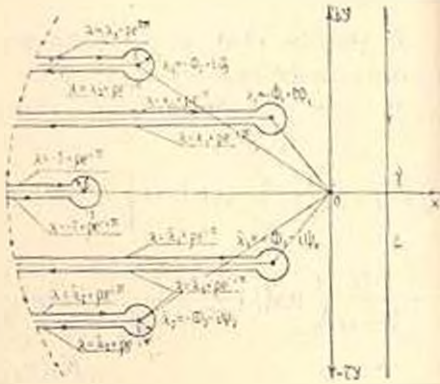
2) $\bar{S}(\lambda)$ имеет точки разветвления и конечное число полюсов. В этих случаях, используя контуры интегрирования по фиг. 2 и 3 и применяя к ним леммы Жордана и теорему Коши, интегралы (15) можно представить в виде

$$\int\limits_L=\int\limits_\Gamma+\int\limits_1+\int\limits_l+\ldots+\int\limits_k+\sum \mathrm{Res} \qquad (18)$$

Подынтегральные функции (15) имеют особые точки в виде простых полюсов и точки разветвления.



Фиг. 2



Фиг. 3

1. Для функции $\overline{S}_{00}(\lambda)$ точки $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=-k_{1,2}$ — простые полюсы, а $\lambda_4=0$ есть полюс второго порядка.

2. Для функции $\overline{S}_{10}(\lambda)$ точки $\lambda_{1,2}=-k_{1,2}$ — простые полюсы, $\lambda=0$ есть полюс второго порядка.

3. Для функции $\overline{S}_{20}(\lambda)$ точки $\lambda_{1,2}=-k_{1,2}$ также простые полюсы, а $\lambda=0$ есть полюс второго порядка, где

$$k_{1,2}=\frac{f_1}{2}\mp\sqrt{\frac{f_1^2}{4}-d_1} \qquad (19)$$

4. Для функции $\omega_1(\lambda)$ точки $\lambda_j=-\Phi_{1,2}\pm i\Psi_{1,2}$ являются нулями внутреннего квадратного корня и представляют собой точки разветвления. Точка $\lambda_3=-1$ есть точка разветвления.

5. Для функции $\omega_2(\lambda)$ точки λ_1, $\bar{\lambda}_1$, λ_2 и $\bar{\lambda}_2$ также являются точками разветвления.

Точки $\lambda_{3,4}=-n_{1,2}$ и $\lambda_5=0$ — нули внешнего квадратного корня являются точками разветвления. $\lambda_6=-1$ есть точка разветвления.

Подкоренная функция внутреннего квадратного корня приводится к уравнению 4-ой степени, имеющему вид

$$\lambda^4+\alpha\lambda^3+\beta\lambda^2+\gamma\lambda+\delta=0 \qquad (20)$$

где

$$\alpha=\frac{2}{N^2}(a_0b-2A^0)(1+\gamma_3), \quad \beta=\frac{1}{N^2}(2a_0c+b^2-4A^0(\gamma_2+\gamma_4))$$

$$\gamma=\frac{2}{N^2}(bc-2A^0\gamma_4); \quad \delta=\frac{c^2}{N^2} \qquad (21)$$

Значения $\Phi_{1,2}$ и $\Psi_{1,2}$ определяются по формулам

$$\varphi_{1,2}=-\frac{\alpha}{4}\mp\sqrt{\frac{3\zeta_0-p}{6}},\quad \psi_{1,2}=\sqrt{\frac{3\zeta_0+2p}{6}\pm\frac{q}{2\sqrt{2(\zeta_0-p/3)}}} \tag{22}$$

где при $D\geqslant 0$

$$\zeta_0=\sqrt[3]{-\left(\frac{pr}{6}-\frac{p^3}{216}-\frac{q^2}{16}\right)+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{-\left(\frac{pr}{6}-\frac{p^3}{216}-\frac{q^2}{16}\right)-\sqrt{D}} \tag{23}$$

при $D<0$

$$\zeta_0=2\times$$

$$\times\sqrt[6]{\frac{1}{4}\left(\frac{pr}{3}-\frac{p^3}{108}-\frac{q^2}{8}\right)+|D|}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{\left(\frac{q^2}{8}+\frac{p^3}{108}-\frac{pr}{3}\right)}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{pr}{3}-\frac{p^3}{108}-\frac{q^2}{8}\right)+|D|}}\right) \tag{24}$$

$$\text{здесь}\quad D=\frac{1}{4}\left(\frac{pr}{3}-\frac{p^3}{108}-\frac{q^2}{8}\right)-\frac{1}{27}\left(\frac{p^2}{12}+r\right)^3 \tag{25}$$

$$p=\beta-\frac{3\alpha}{8},\quad q=\frac{\alpha^3}{8}-\frac{\alpha\beta}{2}+\gamma;\quad r=\delta-\frac{\alpha\gamma}{4}+\frac{\alpha^2\beta}{16}-\frac{3\alpha^4}{256} \tag{26}$$

Подкоренная функция внешнего квадратного корня приводится к квадратному уравнению.

Значения $\gamma_{1,2}$ определяются по формулам

$$\gamma_{1,2}=\frac{\gamma_3\mp\sqrt{\gamma_3^2-4\gamma_4}}{2} \tag{27}$$

Используя свойство функций $\bar{S}_{i0}(\lambda)$, $(i=0,\ 1,\ 2)$, по формуле (17) получены оригиналы изображения

$$S_{00}(t)=\frac{\delta_1-d_2}{1-f_1+d_1}\exp(-\tau)+\frac{k_1\delta_1-d_2}{k_1^2(1-k_1)(k_2-k_1)}\exp(-k_1\tau)+$$

$$+\frac{k_2\delta_1-d_2}{k_2^2(1-k_2)(k_1-k_2)}\exp(-k_2\tau)-\left(\frac{d_2}{d_1}\tau+\frac{\delta_1d_1-d_1d_2-f_1d_1}{d_1^2}\right)-\bar{e}(1-\exp(-\tau))$$

$$S_{10}(t)=\frac{k_1\delta_1-d_2}{k_1^2(k_2-k_1)}\exp(-k_1\tau)-\frac{k_2\delta_1-d_2}{k_2^2(k_2-k_1)}\exp(-k_2\tau)-\left(\frac{d_2}{d_1}\tau+\frac{d_1\delta_1-f_1d_2}{d_1^2}\right)$$

$$S_{20}(t)=\frac{d_2}{k_1^2(k_1-k_2)}\exp(-k_1\tau)-\frac{d_2}{k_2^2(k_1-k_2)}\exp(-k_2\tau)-\frac{d_2}{d_1}\tau+\frac{f_1d_2}{d_1^2} \tag{28}$$

Вычислим обобщенные контурные интегралы такого вида [6]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{\exp(\lambda\tau)K_0(\omega_{1,2}r)}{f(\lambda)}\,d\lambda \tag{29}$$

Легко видеть, что интегралы (15) получаются из контурных интегралов (29) после умножения на соответствующие функции от λ.

Подынтегральные функции (29) имеют точки разветвления. Поэтому при дополнении контура L влево полукругом большого радиуса надо обойти все точки разветвления.

Полученные контуры изображены на фиг. 2 и 3, соответственно для функции $\varphi_{2,1}(\lambda)$.

При $R\to\infty$ интегралы по полукругу Γ стремятся к нулю, а интегралы по малым кругам будут стремиться к нулю при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, при $R\to\infty$, $\varepsilon\to 0$ вычисление интегралов сводится к интегралам по прямолинейным путям, лежащим на противоположных берегах соответствующих разрезов.

Исходные ветви многозначных функций должны быть выбраны в соответствии с условиями $\operatorname{Re}\omega_{1,2}>0$, а значения подынтегральной функции на прямолинейных путях получаются аналитическим продолжением.

Если условиться аргумент $\lambda(\varphi)$ на L считать изменяющимся от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, то соответственно можно получить значения аргументов на прямолинейных путях.

Установив исходные значения аргументов φ_i, представим их изменение, а также изменение всех величин, входящих в подынтегральные функции, в табл. 1 для контуров 3, 4, 5, 6, VI, V, IV, III.

Таблица

Путь интегрирования	φ	λ	ρ	$\bar\rho_1$	$\bar\varphi_1$	$\bar\rho_2$	$\bar\varphi_2$	$\bar\rho_3$	$\bar\varphi_3$	$\lvert\omega_2 r\rvert$ (верхн. часть табл.) $\lvert\omega_1 r\rvert$ (нижн. часть табл.)
3	π	$-\rho$	∞, r_2	A_1	0	A_2	0	$A_3^{(3)}$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(3)}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
4	π	$-\rho$	$r_2, 1$	A_1	0	A_3	$\frac{\pi}{2}$	$A_3^{(4)}$	0	$(\sqrt{r}A_3^{(4)})$
5	π	$-\rho$	$1, r_1$	A_1	0	A_2	$\frac{\pi}{2}$	$A_3^{(6)}$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(6)}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
6	π	$-\rho$	$r_1, 0$	A_1	0	A_3	$\frac{\pi}{2}$	$A_3^{(5)}$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(5)}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
VI	$-\pi$	$-\rho$	$0, r_1$	A_1	0	A_3	$-\frac{\pi}{2}$	$A_3^{(6)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(6)}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
V	$-\pi$	$-\rho$	$r_1, 1$	A_1	0	A_2	$-\frac{\pi}{2}$	$A_3^{(6)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(6)}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
IV	$-\pi$	$-\rho$	$1, r_2$	A_1	0	A_3	$-\frac{\pi}{2}$	$A_3^{(4)}$	0	$(\sqrt{r}A_3^{(4)})$
III	$-\pi$	$-\rho$	r_2, ∞	A_1	0	A_2	0	$A_3^{(3)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(3)}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
3,4	π	$-\rho$	$\infty, 1$	A_1	0	$A_2^{(3,4)}$	0	$A_3^{(3,4)}$	$\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(3,4)}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)$
IV,III	$-\pi$	$-\rho$	$1, \infty$	A_1	0	$A_2^{(3,4)}$	0	$A_3^{(3,4)}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\left(\sqrt{r}A_3^{(3,4)}\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Для удобства вычислений вводим обозначения

$$
\lambda = |\lambda| \exp(i\varphi), \quad f(\lambda) = \bar{\rho}_1 \exp(i\bar{\varphi}_1); \quad a_0(\rho) = a_0\rho^2 - b\rho + c
$$

$$
F(\lambda) = \sqrt{a_0(\lambda) + f(\lambda)} = \bar{\rho}_2 \exp(i\bar{\varphi}_2), \quad \frac{F(\lambda)}{\sqrt{\lambda + 1}} = \bar{\rho}_3 \exp(i\bar{\varphi}_3) \tag{30}
$$

В табл. 1 приняты следующие обозначения:

$$
A_1(\rho) = \sqrt{a_0^2(\rho) + 4A^0\rho(1-\rho)(\rho-\nu_1)(\rho-\nu_2)} = N\sqrt{((\rho-\Phi_1)^2+\Psi_1^2)((\rho-\Phi_2)^2+\Psi_2^2)}
$$

$$
A_2^{(3,4)}(\rho) = \sqrt{a_0\rho^2 + c + A_1(\rho) - b\rho}, \quad A_2(\rho) = \sqrt{a_0\rho^2 + c - (b\rho + A_1(\rho))}
$$

$$
A_3(\rho) = \sqrt{A_1(\rho) + b\rho - (a_0\rho^2 + c)}; \quad A^{(3)} = \frac{A_2}{\sqrt{\rho - 1}}; \quad A_1^{(1)} = \frac{A_3}{\sqrt{\rho - 1}}
$$

$$
A_1^{(5)} = \frac{A_2}{\sqrt{1-\rho}}; \quad A_1^{(2,4)} = \frac{A_2^{(3,4)}}{\sqrt{\rho - 1}}, \quad A_1^{(6)} = \frac{A_3}{\sqrt{1-\rho}}; \quad \bar{r} = \sqrt{\frac{b_0 r^2}{2A^0 a_1}} \tag{31}
$$

Аналогичные вычисления проведены и для остальных контуров.

Проделанными вычислениями доказано, что сумма интегралов (29) на контурах L_i — 1, I; 2, II; 7, VII; 8, VIII равна нулю, то есть

$$
\sum \frac{1}{2\pi i} \int_{L_i} \frac{\exp(\lambda\tau)}{f(\lambda)} (K_0(\omega_1 r) - K_0(\omega_2 r)) d\lambda = 0 \tag{32}
$$

Следует отметить, что отдельные интегралы (29) на указанных контурах не равны нулю, они приводятся к обычным вещественным интегралам. Значения этих интегралов в данной работе не приводятся, так как из (15) следует, что необходимо использовать (29) в виде (32).

Таким образом, следует вычислить значения (32) на контурах 3, III, 4, IV, 5, V, 6, VI.

По данным табл. 1 после довольно громоздких выкладок получим оригинал следующих функций:

$$
\frac{1}{f(\lambda)} (K_0(\omega_1 r) - K_0(\omega_2 r)) = -\frac{1}{2} \left| \int_0^{\nu_1} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} J_0(\bar{r} A_1^{(1)}) d\rho + \right.
$$

$$
\left. + \int_{\nu_2}^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} J_0(\bar{r} A_1^{(3)}) d\rho - \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} J_0(\bar{r} A_1^{(2,4)}) d\rho \right|
$$

$$
\frac{1}{f(\lambda)} \left(\frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} - \frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} \right) = -\frac{1}{2} \left| \int_0^{\nu_1} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \mathrm{Bes}\,1 d\rho - \right.
$$

$$
\left. - \frac{4}{\pi^2} \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \mathrm{Bes}2 d\rho + \frac{2}{\pi} \left(\int_{\nu_2}^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \mathrm{Bes}3_1 d\rho - \int_1^{\infty} \frac{\exp(-\rho\tau)}{A_1(\rho)} \mathrm{Bes}3 d\rho \right) \right| \tag{33}
$$

где $$\mathrm{Bes}1 = \frac{J_0(rA^{(6)}_\gamma)}{K_0(\bar r_0 A^{(5,6)}_\gamma)}; \quad \mathrm{Bes}2 = \frac{K_0(\bar r A^{(4)}_\gamma) J_0(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma)}{J_0^2(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) + Y_0^2(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma)}$$

$$\mathrm{Bes}3_1 = \frac{Y_0(\bar r A^{(3)}_\gamma) J_0(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) - Y_0(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) J_0(\bar r A^{(3)}_\gamma)}{J_0^2(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) + Y_0^2(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma)}$$

$$\mathrm{Bes}3 = \frac{Y_0(\bar r A^{(3,4)}_\gamma) J_0(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) - Y_0(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) J_0(\bar r A^{(3,4)}_\gamma)}{J_0^2(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma) + Y_0^2(\bar r_0 A^{(3,4)}_\gamma)} \tag{34}$$

Затем, использованием теоремы свертки легко вычисляются все интегралы системы (15).

Расчетные формулы при этом будут

$$S_i(r, t) = S_{i0}(t) - \frac{Q}{4\pi T} R_i^{(1)}(r, t) - \frac{\Delta H}{4T} T_1 R_i^{(2)}(r, t) + \frac{\delta_1}{4T} T_1 R_i^{(3)}(r, t);$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2) \tag{35}$$

где $$R_i^{(1)}(r, t) = \frac{1}{2}\Bigg(\int_0^\infty \Phi_{i1}(\rho) J_0(\bar r A^{(6)}_\gamma) d\rho - \int_1^\infty \Phi_{i2}(\rho) J_0(\bar r A^{(3,4)}_\gamma) d\rho +$$

$$+ \int_{\nu_2}^\infty \Phi_{i3}(\rho) J_0(\bar r A^{(3)}_\gamma) d\rho + \int_{\nu_1}^1 \Phi_{i1}(\rho) J_0(\bar r A^{(6)}_\gamma) d\rho \Bigg)$$

$$R_i^{(2)}(r, t) = \int_0^\infty F_{i1}(\rho) \mathrm{Bes}1 d\rho - \frac{4}{\pi^2} \int_1^\infty F_{i2}(\rho) \mathrm{Bes}2 d\rho +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \Bigg(\int_{\nu_2}^\infty F_{i3}(\rho) \mathrm{Bes}3_1 d\rho - \int_1^\infty F_{i4}(\rho) \mathrm{Bes}3 d\rho + \int_{\nu_1}^1 F_{i1}(\rho) \mathrm{Bes}3_1 d\rho \Bigg)$$

$$R_i^{(3)}(r, t) = \int_0^\infty \eta_{i1}(\rho) \mathrm{Bes}1 d\rho - \frac{4}{\pi^2} \int_1^\infty \eta_{i2}(\rho) \mathrm{Bes}2 d\rho +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \Bigg(\int_{\nu_1}^\infty \eta_{i3}(\rho) \mathrm{Bes}3_1 d\rho - \int_1^\infty F_{i4}(\rho) \mathrm{Bes}3 d\rho + \int_{\nu_1}^1 \eta_{i1}(\rho) \mathrm{Bes}3_1 d\rho \Bigg) \tag{36}$$

Здесь

$$\Phi_{01}(\rho) = -[2A^0B_1^0(1-\rho)(\exp(-\rho\tau)-1) - N_1(\rho) f(\tau)]G(\rho)$$

$$\Phi_{02}(\rho) = [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) + N_2(\rho) f(\tau)]G(\rho)$$

$$\Phi_{03}(\rho) = [2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1) + N_1(\rho) f(\tau)]G(\rho)$$

$$\Phi_{11}(\rho) = [2A^0B_1^0(1-\rho) - N_1(\rho)](\exp(-\rho\tau)-1)G_1(\rho)$$

$$\Phi_{12}(\rho) = [2A^0B_1^0(\rho-1) + N_1(\rho)(1-\exp(-\rho\tau))]G_1(\rho)$$

$$\Phi_{13}(\rho) = [2A^0B_1^0(\rho-1) + N_2(\rho)(1-\exp(-\rho\tau))]G_1(\rho)$$

$$\Phi_{21}(\rho) = -\frac{N_2(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0}[2A^0B_1^0(1-\rho)(\exp(-\rho\tau)-1) - N_1(\rho) f(\tau)]$$

$$\Phi_{22}(\rho)=\frac{N_1(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0}[2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1)+N_2(\rho)f(\tau)]$$

$$\Phi_{23}(\rho)=\frac{N_2(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0}[2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1)+N_1(\rho)f(\tau)]$$

$$G(\rho)=\frac{1}{\rho(\rho-1)A_1(\rho)};\quad G_1(\rho)=\frac{1}{\rho A_1(\rho)},\quad f(\tau)=\rho(1-\exp(-\tau))+\exp(-\rho\tau)-1$$

$$F_{01}(\rho)=F_{02}(\rho)=F_{03\cdot 04}(\rho)=[2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1)-\alpha_T N_{1,2}(\rho)f(\tau)]\,G(\rho)$$

$$F_{11}(\rho)=F_{12}(\rho)=F_{13}(\rho)=[2A^0B_1^0(1-\rho)+\alpha_T N_1(\rho)](\exp(-\rho\tau)-1)G_1(\rho)$$

$$F_{14}(\rho)=[2A^0B_1^0(1-\rho)+\alpha_T N_2(\rho)](\exp(-\rho\tau)-1)G_1(\rho)$$

$$F_{21}(\rho)=F_{22}(\rho)=F_{23}(\rho)=-\frac{N_2(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0}[2A^0B_1^0(1-\rho)(\exp(-\rho\tau)-1)+$$
$$+\alpha_T N_1(\rho)f(\tau)]$$

$$F_{24}(\rho)=\frac{N_1(\rho)G(\rho)}{2A^0B_1^0}[2A^0B_1^0(\rho-1)(\exp(-\rho\tau)-1)-\alpha_T f(\tau)N_2(\rho)]$$

$$\gamma_{01}(\rho)=\gamma_{02}(\rho)=\gamma_{03\cdot 04}(\rho)=[2A^0B_1^0\varphi(k,\tau)+\alpha_T N_{1,2}(\rho)\Psi(\rho,k,\tau)]G_1(\rho)$$

$$\gamma_{11}(\rho)=\gamma_{12}(\rho)=\gamma_{13\cdot 14}(\rho)=[2A^0B_1^0(1-\rho)+\alpha_T N_{1,2}(\rho)]\varphi(k,\tau)G_1(\rho)$$

$$\gamma_{21}(\rho)=\gamma_{22}(\rho)=\gamma_{23,24}(\rho)=\frac{N_{2,1}(\rho)G_1(\rho)}{2A^0B_1^0}[2A^0B_1^0\varphi(k,\tau)+\alpha_T N_{1,2}(\rho)\Psi(\rho,k,\tau)]$$

$$N_{1,2}(\rho)=N(\rho)+A_1(\rho);\quad N(\rho)=N\rho^2-\gamma_1\rho+\gamma_0$$

$$\varphi(k,\tau)=\frac{1}{k_2-k_1}\left[\frac{(\rho-k_2)\exp(-k_1\tau)-(\rho-k_1)\exp(-k_2\tau)+(k_2-k_1)\exp(-\rho\tau)}{(\rho-k_1)(\rho-k_2)}+\right.$$
$$\left.+\frac{k_2\exp(-k_1\tau)-k_1\exp(-k_2\tau)+k_1-k_2}{k_1k_2}\right]$$

$$\Psi(\rho,k,\tau)=\frac{1}{k_2-k_1}\times$$

$$\times\left[\frac{\sigma_1(\exp(-\tau)-\exp(-k_1\tau))-\sigma_2(\exp(-\tau)-\exp(-k_2\tau))+\sigma_3(\exp(-\tau)-\exp(-\rho\tau))}{\sigma_1(\rho-k_1)(k_1-1)}+\right.$$
$$\left.+\frac{k_2(k_2-1)(\exp(-\tau)-\exp(-k_1\tau))-k_1(k_1-1)(\exp(-\tau)-\exp(-k_2\tau))+\sigma_3}{k_1k_2(k_1-1)(k_2-1)}\right]$$

$$\sigma_1=(\rho-k_2)(\rho-1)(k_2-1);\quad \sigma_2=(\rho-k_1)(\rho-1)(k_1-1)$$

$$\sigma_3=(k_2-k_1)(k_2-1)(k_1-1) \tag{37}$$

Для максимальных понижений расчетные формулы принимают вид

$$S_0(r_0,t)=S_{00}(t)+\frac{Q}{4\pi T}R_0(r_0,t)-\frac{\Delta H}{T}T_2(1-\exp(-\tau))-\frac{\delta_1}{T}T_2S_{00}(t)$$

$$S_1(r_0,t)=S_{10}(t)+\frac{Q}{4\pi T}R(r_0,t)-\frac{\Delta H}{T}T_2+\frac{T_2}{T}(S_{20}(t)-S_{10}(t))$$

$$S_2(r_0, t) = S_{20}(t) + \frac{Q}{4\pi T} R(r_0, t) + \frac{\Delta H}{T} T_1 - \frac{T_1}{T} (S_{10}(t) - S_{10}(t)) \qquad (38)$$

где

$$R_0(r_0, t) = \int_1^{\infty} \frac{f(\tau)}{\rho(\rho-1)} J_0(\bar{r}_0 A_1^{(\rho,\theta)}) d\rho; \quad R(r_0, t) = \int_1^{\infty} \frac{1-\exp(-\rho\tau)}{\rho} J_0(\bar{r}_0 A_1^{(\rho,\theta)}) d\rho$$

$$S^1_{00}(t) = \frac{1}{d_1} - \frac{\exp(-\tau)}{1-f_1+d_1} + \frac{\exp(-k_1\tau)}{k_1(k_1-k_2)(1-k_1)} + \frac{\exp(-k_2\tau)}{k_2(k_2-k_1)(1-k_2)} \qquad (39)$$

Здесь J_0 и Y_0 – цилиндрические функции истинного аргумента.

Интегральные функции $R_i(r, t)$ табулированы для различных значений безразмерных комплексов, которые выражаются через гидрогеологические параметры пластов.

В результате, впервые получены оригиналы изображений функций (33) и расчетные формулы (35) и (38).

Предлагаемые решения позволяют разрешить сложные гидрогеологические задачи, связанные с проблемами осушения и использования подземных вод. Кроме этого, они могут служить критерием для оценки решения подобных задач численным методом на ЭВМ.

ԵՐԿՈՒ ՇԵՐՏԵՐԻՑ ՋՐՀԱՆՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՍՏՈՐԵՐԿՐՅԱ ՋՐԵՐԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԴԵՊԻ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀՈՂԱՇԵՐՏԻ ՀՈՐԱՏԱՆՑՔԸ

Ս. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է հիդրավլիկական կապի մեջ գտնվող երեք անսահմանափակ ջրատար հողաշերտում ճնշումների հաշվարկման խնդիրը, երկու շերտերից դամարային հաստատուն ելքի ջրառման դեպքում:

Հավասարումների (1) համակարգը լուծված է օպերացիոն հաշվի մեթոդով: Առաջին անգամ ստացված է (29) պատկերի օրիգինալը և հաշվային (32) բանաձևերը:

THE MOTION OF UNDERGROUND WATER TO THE WELL IN A NON-UNIFORM LAYERED STRATUM BY PUMPING-OUT FROM TWO LAYERS

S. M. GHAZARIAN

S u m m a r y

In the article the problem of unestablished motion of underground water to the well, covered with unlimited three layered hydraulic linked medium has been considered.

Seepage of surface water, unequal head of water carrying layers and overflow by a hard regime in a separate layer have been taken into account.

According to limited conditions the choice of water from the two lower head layers is foreseen with a constant total expense and at the same time expense from separate layers are functions depending on time.

The problem is solved by an operative method and the calculation formulae is obtained by which the hydrological state of underground waters can be estimated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андре-Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров (перевод с франц.). М.: Наука, 1964. 772 с.
2. *Бочевер Ф. М.* К методике гидрогеологических расчетов водозаборных сооружений в слоистых водоносных толщах. Болгарская АН, сер. гидрогеология и гидрология, кн. V, 1966.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного, изд. 2-е. М.: Наука, 1958. 736 с.
4. *Олейник А. Я.* Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. Киев: Наукова думка, 1978. 192 с.
5. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. *Уфлянд Я. С.* Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин.—ПММ, 1948, т. *12*, с. 287—300.
7. *Шестаков В. М.* Интерпретация опытных откачек при перетекании между пластами. Вестник МГУ, геология, № 6, 1983, с. 49—64.
8. *Шестаков В. М.* Фильтрационный расчет откачки из скважины в двухпластовой системе. Изв. Вузов. геология и разведка, 1982, № 1, с. 67—75.
9. *Щелкачев В. Н.* Упругий режим пластовых водонапорных систем. М.: Гостехиздат, 1959. 144 с.
10. *Эфрос А. М., Данилевский Л. М.* Операционное исчисление и контурные интегралы. Х.: Госнаучтехиздат, 1937. 383 с.

Армянский
сельскохозяйственный
институт

Поступила в редакцию
27.VII. 1984