ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1982

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 2, 1982 Механика

А. М. СИМОНЯН

О ВЕРОЯТНОСТНОМ РАСЧЕТЕ СТАТИЧЕСКИ-НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-ДЕФОРМИРУЕМОГО МАТЕРИАЛА

Как известно, напряжения, возникающие в стержнях статически-неопределимых систем, зависят от деформативных характеристик этих стержней. Как правило, параметры, определяющие связь между деформациями и напряжениями, принимаются достоверными и приравниваются усредненным из достаточно большого количества соответствующих экспериментов. Однако, у элементов реальных конструкций параметры, определяющие деформационные свойства, не будут тождественно равны их усредненным экспериментальным значениям, причем расхождения эти будут тем больше, чем больше разброс экспериментальных данных, несмотря на то, что эти усредненные данные являются наиболее вероятными значениями рассматриваемых параметров. Этот вопрос приобретает особое значение в условиях ползучести, когда разброс деформационных кривых значителен.

В настоящей работе рассматривается вероятностный расчет статически-неопределимых стержневых систем, целью которого является определение вероятности того, что напряжения в стержнях систем заключены в произвольно заданных пределах. В терминологии [1] задача сведена к определению вероятностных свойств выходных параметров на основе вероятностных свойств стохастической системы. Определяются аналитические выражения для функции распределения выходных параметров без каких-либо ограничений в отношении изменчивости случайных величин, определяющих деформационные свойства материала.

1. *Постановка задачи.* Задаются функции распределений параметров, определяющих деформационные свойства стержней некоторой статически-неопределимой системы, и ищутся функции плотностей распределений напряжений, возникающих в этих стержнях.

В качестве плотностей распределения основного параметра ползучести здесь рассматриваются исследованные в работе [2] нормальный закон

$$f(x) = 1/\sqrt{2\pi\bar{D}}\,\exp[(x-\bar{m})^2/2\bar{D}] \qquad (1.1)$$

где x — коэффициент при функционале ползучести, $\bar{m}$ — среднее арифметическое его значение, $\bar{D}$ — выборочная дисперсия,

III тип распределения Пирсона

$$f(x)=\begin{cases} a^{\gamma}x^{\gamma-1}\exp(-ax)/\Gamma(\gamma), & 0<x<\infty, \quad \gamma>1 \\ 0, & x\leqslant 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

где $a=\dfrac{\tilde{m}}{\tilde{D}}$, $\gamma=\dfrac{\tilde{m}^2}{\tilde{D}}$, Γ — гамма-функция,

а также распределение

$$f(x)=\begin{cases} (bx^n+cx^k)\exp(-a^2x^2), & 0\leqslant x<\infty, \; b\geqslant 0, \; c\geqslant 0, \; n>0, \; k>0 \\ 0, & x<0 \end{cases} \tag{1.3}$$

где

$$a=\frac{(k-n)\tilde{m}}{4(\tilde{D}+\tilde{m}^2)A(k,\,n)}+$$

$$+\sqrt{\frac{(k-n)^2\tilde{m}^2}{16A^2(k,\,n)(\tilde{D}+\tilde{m}^2)^2}+\frac{k+1}{2(\tilde{D}+\tilde{m}^2)}-\frac{(k-n)\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{2A(k,\,n)(\tilde{m}^2+\tilde{D})\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}}$$

$$b=\frac{4a^{n+3}}{(k-n)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\frac{k+1}{2a^2}-\tilde{D}-\tilde{m}^2\right)$$

$$c=\frac{2a^{k+1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}-ba^{k-n}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}; \quad A(k,\,n)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

$$B(k,\,n)=(k+1)\frac{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}-(n+1)\frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}$$

k и n — коэффициенты, подлежащие подбору при удовлетворении ряду условий [2]. Положим, что соотношения между деформациями и напряжениями в элементе i системы могут быть записаны согласно какой-либо из нижеприведенных теорий:

$$\varepsilon_i=x_i\sigma_i^p f(t) \quad \text{(теория старения [3])}$$

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt}=x_i\sigma_i^p f(t) \quad \text{(теория течения [3])}$$

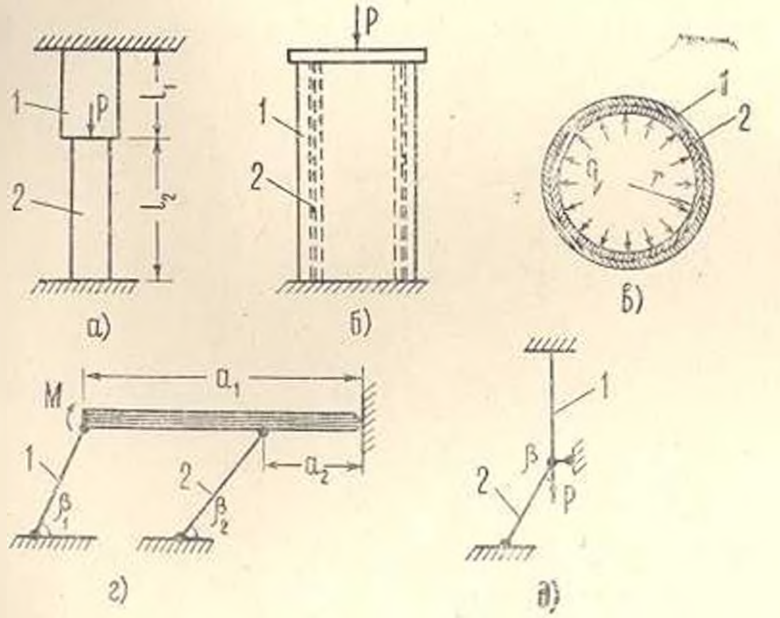
$$\varepsilon_i^{1/p}=x_i^{1/p}\left[\sigma_i(t)+\int_0^t K(t,\,\xi)\,\sigma_i(\xi)\,d\xi\right] \quad \text{(теория наследственности [4])}$$

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial t} = x_i\,\sigma_i^{\nu}\,\varepsilon_i^{1-\nu} \quad \text{(гипотеза уравнения состояния [4])}$$

$$\varepsilon_i = x_i \int_0^t \sigma_i^{\rho-2\nu}(\tau) \left| \int_0^{\tau} \sigma_i^{\nu}(\xi)\, d\xi \right|^2 d\tau \quad \text{(вариант теории разупрочнения [5]).} \tag{1.4}$$

2. *Двухстержневые статически-неопределимые системы.* Рассмотрим задачи *а—д*, показанные на фиг. 1. Уравнения совместности и статики запишутся так:

$$\varepsilon_2 = \xi\varepsilon_1 \tag{2.1}$$



Фиг. 1.

$$\sigma_2 = P - \eta\sigma_1 \tag{2.2}$$

где значения ξ, η и P, соответственно рассмотренным задачам, можно взять из табл. 1 (индексы приняты соответственно номерам стержней).

Таблица 1

Задачи	*а*	*б*	*в*	*г*	*д*
ξ	$-l_1/l_2$	1	1	$\dfrac{a_2 l_1 \sin\beta_1}{a_1 l_2 \sin\beta_2}$	$\dfrac{l_1 \cos\beta}{l_2}$
P	$-P/F_2$	$-P/F_2$	qr/δ_2	$\dfrac{M}{a_2 F_2 \sin\beta_2}$	$\dfrac{P}{F_2 \cos\beta}$
η	$-F_1/F_2$	F_1/F_2	δ_1/δ_2	$\dfrac{F_1 a_1 \sin\beta_1}{F_2 a_2 \sin\beta_2}$	$\dfrac{F_1}{F_2 \cos\beta}$

Решая уравнения (2.1) и (2.2), согласно любой из теорий (1.4), получим

$$\sigma_1 = P\xi^{-1/\rho}\left[(x_1/x_2)^{1/\rho} + \eta\xi^{-1/\rho}\right]^{-1} \tag{2.3}$$

Здесь и впоследствии для отрицательных значений аргумента степенная функция продолжается нечетно: $x^n \equiv |x|^n \operatorname{sign} x$.

Рассмотрим распределение y, определяемого равенством

$$y = \left[(x_1/x_2)^{1/\rho} + \theta\right]^{-1} \tag{2.4}$$

в зависимости от распределения x_1 и x_2. Для этого достаточно зафиксировать некоторое значение y и определить область изменения x_1 и x_2, в которой значения y, согласно (2.4), меньше фиксированного, а затем в этой области осуществить интегрирование плотности распределения $f(x_1, x_2)$. При этом для функции распределения $G(y)$ согласно [6], (с. 146), получим

$$G(y) = \int_{-\infty}^{0} dx_2 \left| \int_{-\infty}^{\chi(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_1 + \int_{-\zeta(x_2)}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1 \right| +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} dx_2 \int_{\chi(x_1)}^{\infty} f(x_1, x_2)\, dx_1, \quad y > 0 \tag{2.5}$$

$$G(y) = \int_{-\infty}^{0} dx_2 \int_{-\zeta(x_2)}^{-\chi(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_1 + \int_{0}^{\infty} dx_2 \int_{-\zeta(x_2)}^{-\zeta(x_1)} f(x_1, x_2)\, dx_1, \quad y < 0 \tag{2.6}$$

где $\zeta(x_2) = x_2\theta^{\rho}$, $\chi(x_2) = x_2\left|\dfrac{1}{y} - \theta\right|^{\rho}$.

Для плотности распределения $g(y) = dG(y)/dy$ получим из (2.5) и (2.6)

$$g(y) = \frac{\rho}{y^2}\left|\frac{1}{y} - \theta\right|^{\rho-1} \int_{-\infty}^{\infty} |x_2| f\left| x_2\left(\frac{1}{y} - \theta\right)^{\rho}, x_2 \right| dx_2 \tag{2.7}$$

Отметим, что, вследствие независимости деформационных свойств стержней друг от друга,

$$f(x_1, x_2) = f(x_1)\, f(x_2) \tag{2.8}$$

Принимая, что для распределения параметров x_1 и x_2 имеет место нормальный закон (1.1), после ряда выкладок получим

$$g(y) = \frac{\rho\left|\dfrac{1}{y} - \theta\right|^{\rho-1}}{2\pi y^2\sqrt{D_1 D_2}}\; \frac{\exp\left|\Omega(y) - \dfrac{m_1^2}{2D_1} - \dfrac{m_2^2}{2D_2}\right|}{\dfrac{1}{2D_1}\left|\dfrac{1}{y} - \theta\right|^{2\rho} + \dfrac{1}{2D_2}} \times$$

$$\times \left|\exp[-\Omega(y)] + \sqrt{\pi\Omega(y)}\, \operatorname{erf}\sqrt{\Omega(y)}\right|, \quad -\infty < y < \infty \tag{2.9}$$

где $\quad \Omega(y) = \frac{1}{4}\left[\frac{m_1}{D_1}\left(\frac{1}{y}-\theta\right)^{\rho}+\frac{m_2}{D_2}\right]^2\left[\frac{1}{2D_1}\left|\frac{1}{y}-\theta\right|^{2\rho}+\frac{1}{2D_2}\right]^{-1}$

а индексы при m и D соответствуют номеру стержня.

Плотности распределения σ_1 и σ_2 соответственно запишутся так:

$$\varphi_1(\sigma_1) = \xi^{1/\rho} g(\xi^{1/\rho}\sigma_1/P)/P \tag{2.10}$$

$$\varphi_2(\sigma_2) = \frac{1}{\eta P}\xi^{1/\rho} g\left(\frac{P-\sigma_2}{\eta P}\xi^{1/\rho}\right) \tag{2.11}$$

Для определения нероятности p нахождения σ_i в произвольно заданных пределах, например $\sigma_i' \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_i''$, достаточно проинтегрировать (2.10) или (2.11) в этих пределах

$$p(\sigma_i' \leqslant \sigma_i \leqslant \sigma_i'') = \int_{\sigma_i'}^{\sigma_i''} \varphi_i(\sigma_i)\, d\sigma_i \tag{2.12}$$

При использовании более точного для описания ползучести [2] распределения (1.3) после ряда выкладок получим

$$g(y) = \frac{\rho}{y^2}\left(\frac{1}{y}-\theta\right)^{\rho-1}\left\{b_1\left(\frac{1}{y}-\theta\right)^{\rho n_1}[T(y, n_1, n_2)\, b_1 + c_2 T(y, n_1, k_2)] + \right.$$

$$\left. + c_1\left(\frac{1}{y}-\theta\right)^{\rho k_1}[b_2 T(y, n_2, k_1) + c_2 T(y, k_1, k_2)]\right\}, \quad 0 < y < \frac{1}{\theta} \tag{2.13}$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0 \text{ и } y > \frac{1}{\theta}$$

где

$$T(y, n, k) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n+k+2}{2}\right)\left[a_2^2 + a_1^2\left(\frac{1}{y}-\theta\right)^{2\rho}\right]^{-\frac{n+k+2}{2}}$$

Менее громоздким оказывается выражение $g(y)$ при использовании для x_1 и x_2 распределений Пирсона III типа (1.2)

$$g(y) = \frac{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2)}{\Gamma(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)}\rho y^{-2} a_1^{\gamma_2} a_2^{\gamma_1}(1/y-\theta)^{\rho\gamma_1-1}\left[a_1\left(\frac{1}{y}-\theta\right)^{\rho}+a_2\right]^{-\gamma_1-\gamma_2}$$

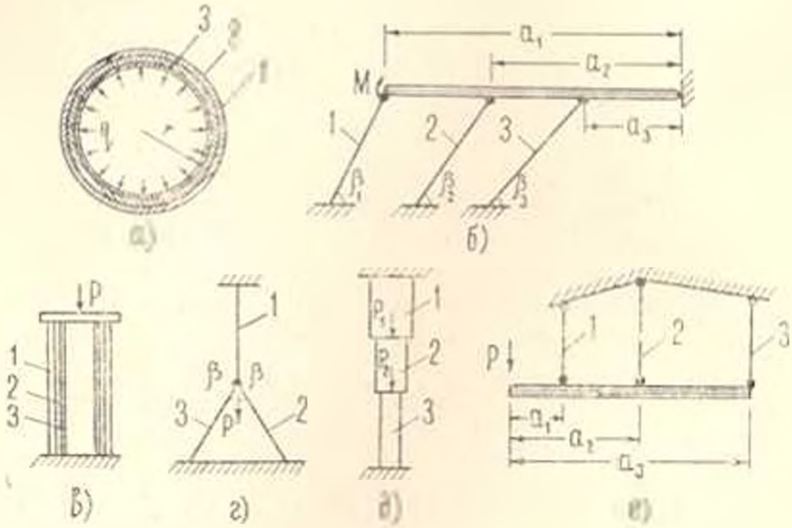
$$0 < y < \frac{1}{\rho} \tag{2.14}$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0 \text{ и } y > \frac{1}{\rho}$$

Отметим, что использование нормального закона распределения (1.1) для параметра ползучести x вряд ли приемлемо, так как для x имеют смысл лишь положительные значения, с другой стороны, в этом случае выражение $g(y)$ (формула (2.9)) менее удобно для применения, чем формулы

(2.13) и (2.14). Это усложнение усугубляется при рассмотрении более сложных задач, вследствие чего ниже будут рассматриваться лишь распределения (1.2) и (1.3).

3. *Трехстержневые статически-неопределимые системы.* Рассматривая задачи *а*—*е*, показанные на фиг. 2, разделим их на три группы. Для задач *а*, *б* и *в*, входящих в первую группу, решение уравнений статики и совместности деформаций дает



Фиг. 2.

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= P_1\left[1+\theta_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/m}+\lambda_1\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{1/m}\right]^{-1}\\
\sigma_2 &= P_2\left[1+\theta_2\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{1/m}+\lambda_2\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{1/m}\right]^{-1}\\
\sigma_3 &= P_3\left[1+\theta_3\left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{1/m}+\lambda_3\left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{1/m}\right]^{-1}
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $\theta_2=\theta_1^{-1}$, $\lambda_2=\lambda_1\theta_1^{-1}$, $\theta_3=\lambda_1^{-1}$, $\lambda_3=\theta_1\lambda_1^{-1}$, причем для задачи *а*

$$\theta_1=\delta_2/\delta_1,\ \lambda_1=\delta_3/\delta_1,\ P_1=qr/\delta_1,\ P_2=qr/\delta_2,\ P_3=qr/\delta_3$$

для задачи *б*

$$\theta_1=\frac{F_2a_2\sin\beta_2}{F_1a_1\sin\beta_1}\left(\frac{l_1a_2\sin\beta_2}{l_2a_1\sin\beta_1}\right)^{1/m},\quad \lambda_1=\frac{F_3a_3\sin\beta_3}{F_1a_1\sin\beta_1}\left(\frac{l_1a_3\sin\beta_3}{l_3a_1\sin\beta_1}\right)^{1/m}$$

$$P_i=\frac{M}{F_i\,a_i\sin\beta_i},\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

для задачи *в*

$$\theta_1=F_2/F_1,\ \lambda_1=F_3/F_1,\ P_1=-P/F_1,\ P_2=-P/F_2,\ P_3=-P/F_3$$

Положим

$$y = [1 + \theta_1 (x_1/x_2)^{1/\rho} + \theta_2 (x_1/x_3)^{1/\rho}]^{-1} \qquad (3.2)$$

Аналогично процедурам п. 2. а также учитывая $x_i > 0$, что соответствует (1.2) и (1.3), получим

$$G(y) = \int_{r_1(y)}^{\infty} g_{12}(x)\,dx \int_0^{\infty} g_{13}(x)\,dx + \int_0^{r_1(y)} g_{12}(x)\,dx \int_{r_2(y)}^{\infty} g_{13}(x)\,dx, \quad 0<y<1 \qquad (3.3)$$

где $r_1(y) = (1/y - 1)^{\rho}\,\theta_1^{-\rho}$, $r_2(y) = (1/y - 1 - \theta_1 x^{1/\rho})\,\theta_2^{-\rho}$, а через $g_{ij}(x_{ij})$ обозначена плотность распределения $x_{ij} = x_i/x_j$, которая определяется так:

$$g_{ij}(x_{ij}) = \frac{dG_{ij}(x_{ij})}{dx_{ij}} = \frac{d}{dx_{ij}} \left| \int_0^{\infty} f(x_j)\,dx_j \int_0^{x_j x_{ij}} f(x_i)\,dx_i \right| \qquad (3.4)$$

Для распределения Пирсона III рода (1.2) из соотношения (3.4) получим

$$g_{ij}(x_{ij}) = \frac{\Gamma(\gamma_i + \gamma_j - 1)}{\Gamma(\gamma_i)\Gamma(\gamma_j)}\, a_i^{\gamma_i} a_j^{\gamma_j} x_{ij}^{\gamma_i - 1} (a_j + a_i x_{ij})^{1-\gamma_i-\gamma_j} \qquad (3.5)$$

Отсюда для $g(y)$ находим выражение

$$g(y) = \frac{\rho a_1^{2\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3} \Gamma(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\Gamma(\gamma_1 + \gamma_3 - 1)}{(\theta_1\theta_2)^{\rho\gamma_1} \Gamma^2(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\gamma_3)\, y^2} \left(\frac{1-y}{y}\right)^{2\rho\gamma_1 - 1} \times$$

$$\times \int_0^1 \left| a_2 + a_1 \left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\rho} \xi \theta_1^{-\rho} \right|^{1-\gamma_1-\gamma_2} \left[a_3 + a_1 \left(\frac{1}{y} - \theta\right)^{\rho} (1 - \xi^{1/\rho})^{\rho} \theta_2^{-\rho} \right|^{1-\gamma_1-\gamma_3} \times$$

$$\times (1 - \xi^{1/\rho})^{\rho\gamma_1 - 1} \xi^{\gamma_1 - 1}\, d\xi, \quad 0 < y < 1 \qquad (3.6)$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0, \; y > 1$$

Аналогично п. 2 здесь имеем

$$\varphi_1(\sigma_1) = 1/P\, g(\sigma_1/P)$$

$$p(\sigma_1' < \sigma_1 < \sigma_1'') = \int_{\sigma_1'}^{\sigma_1''} \varphi_1(\sigma_1)\, d\sigma_1 \qquad (3.7)$$

Для вероятностного расчета σ_2 достаточно в формулах (3.6) и (3.7) поменять местами индексы 1 и 2, для расчета же σ_3 — индексы 1 и 3.

Если распределение (1.2) для основного параметра ползучести x неудовлетворительно для описания разброса экспериментальных данных, представляется целесообразным использование распределения (1.3), в котором путем выбора показателей k и n возможно приближение к экспериментальным данным. Для нижеследующих аналитических выражений распределение (1.3) в применении к i-му стержню удобнее записать в виде

$$f_i(x_i) = \sum_{j=1,2} b_{ij} x^{n_{ij}} \exp(-a_i^2 x_i^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad 0 < x < \infty \tag{3.8}$$

После ряда выкладок получим

$$g(y) = \frac{\rho (1/y - 1)^{2\rho - 1}}{4\theta_1^{\rho} \theta_2^{\rho} y^2} \sum_{i, j, k, l}^{1, 2} b_{1i} b_{1j} b_{2k} b_{3l} \theta_1^{-\rho n_{1i}} \theta_2^{-\rho n_{1j}} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n_{1i} + n_{2k} + 1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_{1j} + n_{2l} + 1}{2}\right) (1/y - 1)^{\rho(n_{1i} + n_{1j})} \times$$

$$\times \int_0^1 [a_2^2 + a_1^2 (1/y - 1)^{2\rho} \theta_1^{-2\rho} \xi^{2\rho}]^{-\frac{n_{1i} + n_{2k} + 1}{2}} \times$$

$$\times [a_3^2 + a_1^2 (1/y - 1)^{2\rho} \theta_2^{-2\rho} (1 - \xi^{2\rho})^{2\rho}]^{-\frac{n_{1j} + n_{2l} + 1}{2}} \times$$

$$\times \xi^{n_{1i}} (1 - \xi)^{\rho n_{1j} + \rho - 1} d\xi, \quad 0 < y < 1 \tag{3.9}$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0, \quad y > 1$$

где суммирование производится по всем комбинациям i, j, k, l, принимающим значения 1 и 2, то есть в данном случае складываются из 16 членов. Использование (3.9) для вероятностного расчета σ_1, σ_2 и σ_3 совершенно аналогично вышеописанному использованию (3.6).

Рассмотрим теперь задачу г (фиг. 2). Напряжения в стержнях определяются формулами

$$\sigma_1 = \frac{P}{F_1} \left[1 + \frac{2F_2 \cos\beta}{F_1} \left(\frac{2l_1 \cos\beta}{l_2} \right)^{1/\rho} \left(\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_1} \frac{F_2^{\rho}}{F_1^{\rho}} \right)^{-1/\rho} \right]^{-1}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_1 \sigma_1 - P}{2F_2 \cos\beta}, \quad \sigma_3 = \frac{F_2 \sigma_2}{F_3} \tag{3.10}$$

Положим

$$y = [1 + \omega (x_{21} + \alpha x_{31})^{-1/\rho}]^{-1} \tag{3.11}$$

где $x_{ij} = x_i / x_j$.

Функция распределения $G(y)$ для (3.11) в предположении $x_i > 0$, что соответствует (1.2) и (3.8), запишется так:

$$G(y) = \int_0^{\varphi_1(y)} g_{21}(x)\, dx \int_0^{\varphi_2(y)} g_{31}(x)\, dx \quad 0 < y < 1 \tag{3.12}$$

где

$$q_1(y) = \left(\frac{\omega y}{1-y}\right)^{\rho}, \quad q_2(y) = \frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{\theta y}{1-y}\right)^{\rho} - \varkappa\right]$$

а $g_{21}(\varkappa)$ и $g_{31}(\varkappa)$ — плотности распределения $\varkappa_{21}$ и $\varkappa_{31}$. После ряда выкладок для плотности распределения $g(y) = dG(y)/dy$ соответственно III типу распределения Пирсона (1.2) получим следующее выражение:

$$g(y) = \rho\omega^{\rho(\gamma_1+\gamma_2)}\alpha^{-\gamma_3}a_1^{\gamma_1}a_2^{\gamma_2}\frac{\Gamma(\gamma_1+\gamma_2-1)\Gamma(\gamma_1+\gamma_3-1)}{\Gamma^2(\gamma_1)\Gamma(\gamma_2)\Gamma(\gamma_3)y^2}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{\rho(\gamma_2+\gamma_3)+1} \times$$

$$\times \int_0^1 \left[a_1 + a_2\xi\left(\frac{\omega y}{1-y}\right)^{\rho}\right]^{1-\gamma_1-\gamma_2}\left[a_1 + \frac{a_3}{\alpha}\left(\frac{\omega y}{1-y}\right)^{\rho}(1-\xi)\right]^{1-\gamma_1-\gamma_3} \times$$

$$\times \xi^{\gamma_2-1}(1-\xi)^{\gamma_3-1}\,d\xi, \quad 0 < y < 1 \tag{3.13}$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0, \ y > 1$$

соответственно же распределению (3.8) или, что то же, (1.3) будем иметь

$$g(y) = \frac{\rho}{4}\sum_{i,j,k,l}^{1,2}\alpha^{-n_{1j}}b_{1i}b_{1j}b_{2k}b_{3l}(1-y)^{\rho(n_{1i}+n_{1j})-1}y^{\rho(n_{2k}+n_{3l}+2)-1} \times$$

$$\times \Gamma\left(\frac{n_{1i}+n_{2k}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_{1j}+n_{3l}+1}{2}\right)\omega^{\rho(n_{2k}+n_{3l}+2)} \times$$

$$\times \int_0^1 [a_1^2(1-y)^{2\rho} + a_2^2\omega^{2\rho}y^{2\rho}\xi^2]^{-\frac{n_{1i}+n_{2k}+1}{2}} \times$$

$$\times [a_1^2\alpha^2(1-y)^{2\rho} + a_3^2\omega^{2\rho}y^{2\rho}(1-\xi)^2]^{-\frac{n_{1j}+n_{3l}+1}{2}}\xi^{n_{2k}}(1-\xi)^{n_{3l}}\,d\xi, \tag{3.14}$$

$$0 < y < 1$$

$$g(y) = 0, \quad y < 0, \ y > 1$$

Принимая $\alpha = (F_2/F_1)^{\rho}$, $\omega = 2F_2/F_1(\cos\beta)^{1+1/\rho}(2l_3/l_2)^{1/\rho}$, при сравнении (3.10) и (3.11) получим

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{F_1}{P}g\left(\frac{F_1\sigma_1}{P}\right)$$

$$\varphi_2(\sigma_2) = \frac{2F_2\cos\beta}{P}g\left(1 + \frac{2}{P}F_2\sigma_2\cos\beta\right) \tag{3.15}$$

$$\varphi_3(\sigma_3) = \frac{2F_3\cos\beta}{P}g\left(1 + \frac{2}{P}F_3\sigma_3\cos\beta\right)$$

Рассмотрим теперь задачи g и e (фиг. 2). Для определения напряжения σ_1 получим уравнение

$$A(\sigma_1) \equiv \sigma_1^{\rho} - s_1(1-b\sigma_1)^{\rho}\, x_2/x_1 - s_2(1-c\sigma_1)^{\rho}\, x_3/x_1 = 0 \qquad (3.16)$$

где для задачи д

$$s_1 = \frac{l_2}{l_1}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^m, \quad s_2 = \frac{l_3}{l_1}\left(\frac{P_1+P_2}{F}\right)^m, \quad b = \frac{F_1}{P_1}, \quad c = \frac{F_1}{P_1+P_2}$$

для задачи е

$$s_1 = \frac{(a_3-a_1)\,a_3^m l_2}{(a_3-a_2)^{1+m} l_1}\left(\frac{P}{F_1}\right)^m, \qquad s_2 = \frac{(a_2-a_1)\,a_2^m l_3}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)^m l_1}\left(\frac{P}{F_1}\right)^m$$

$$b = (1-a_1/a_3)\,F_1/P, \quad c = (1-a_1/a_2)\,F_1/P$$

Функция распределения $G(\sigma_1)$, согласно (3.16), при условии $x_i \geqslant 0$ определится так:

$$G(\sigma_1) = \int_0^{v_1(\sigma_1)} g_{21}(x)\,dx \int_0^{v_2(\sigma_1,\,x)} g_{31}(x)\,dx, \quad 0 < \sigma_1 < \frac{1}{b}$$

$$G(\sigma_1) = \int_0^{\infty} g_{21}(x)\,dx \int_0^{v_2(\sigma_1,\,x)} g_{31}(x)\,dx, \quad \frac{1}{b} < \sigma_1 < \frac{1}{c} \qquad (3.17)$$

где

$$v_1(x) = \frac{1}{\Omega_1}\left(\frac{x}{1-bx}\right)^{\rho}, \quad v_2(x,y) = \frac{x^{\rho} - \Omega_1(1-bx)^{\rho} y}{\Omega_2(1-cx)^{\rho}}$$

В применении к распределению Пирсона (1.2) отсюда получим нижеследующие выражения для $\varphi_1(\sigma_1)$ — плотности распределения σ_1

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{\rho a_1^{2\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3}\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_2-1)\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_3-1)\,\sigma_1^{\rho(\gamma_2+\gamma_3-1)}}{\Omega_1^{\gamma_2}\Omega_2^{\gamma_3}\,\Gamma^2(\gamma_1)\,\Gamma(\gamma_2)\,\Gamma(\gamma_3)\,(1-b\sigma_1)^{\rho\gamma_2}(1-c\sigma_1)^{\rho\gamma_3+1}} \times$$

$$\times \int_0^1 \left\{\left[a_1 + a_2\frac{\sigma_1^{\rho}\xi}{\Omega_1(1-b\sigma_1)^{\rho}}\right]^{1-\gamma_1-\gamma_2}\left[a_1 + a_3\frac{\sigma_1^{\rho}(1-\xi)}{\Omega_2(1-c\sigma_1)^{\rho}}\right]^{1-\gamma_1-\gamma_3} \times \right. \qquad (3.18)$$

$$\left. \times\, \xi^{\gamma_2-1}(1-\xi)^{\gamma_3-1}\sigma_1^{\rho-1}\left[1 + (b-c)\frac{\sigma_1\xi}{1-b\sigma_1}\right]\right\} d\xi, \qquad 0 < \sigma_1 < \frac{1}{b}$$

$$\varphi_1(\sigma_1) = \frac{\rho a_1^{2\gamma_1} a_2^{\gamma_2} a_3^{\gamma_3}\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_2-1)\,\Gamma(\gamma_1+\gamma_3-1)\,\sigma_1^{\rho(\gamma_2+\gamma_3-1)}}{\Omega_2^{\gamma_3}\Omega_1^{\gamma_2}\,\Gamma^2(\gamma_1)\,\Gamma(\gamma_2)\,\Gamma(\gamma_3)\,(1-c\sigma_1)^{\rho\gamma_3+1}(b\sigma_1-1)^{\rho\gamma_2}} \times$$

$$\times \int_0^1 \left\{\frac{\xi^{\gamma_2-1}(1+\xi)^{\gamma_3-1}\left[\sigma_1^{\rho-1} + (b-c)\dfrac{\sigma_1^{\rho}\xi}{b\sigma_1-1}\right]}{\left[a_1 + \dfrac{a_2\sigma_1^{\rho}}{\Omega_1(b\sigma_1-1)^{\rho}}\xi\right]^{\gamma_1+\gamma_2-1}\left[a_1 + a_3\dfrac{\sigma_1^{\rho}(1+\xi)}{\Omega_2(1-c\sigma)^{\rho}}\right]^{\gamma_1+\gamma_3-1}} + \right.$$

$$+\frac{\xi^{2\gamma_1-3}(1+\xi)^{\gamma_2-1}\left[(b-c)\dfrac{\sigma_1^{\rho}}{b\sigma_1-1}+\xi\sigma_1^{\rho-1}\right]}{Q}\Bigg\}d\xi \qquad \frac{1}{b}<\sigma_1<\frac{1}{c} \tag{3.19}$$

$$Q=\left|\frac{a_2\sigma_1^{\rho}}{\Omega_1(\sigma_1 b-1)^{\rho}}+a_1\xi\right|^{\gamma_1+\gamma_2-1}\left\{\frac{a_2\sigma_1^{\rho}}{\Omega_2(1-c\sigma_1)^{\rho}}+\right.$$

$$\left.+\xi\left|a_1+\frac{a_3\sigma_1^{\rho}}{\Omega_2(1-c\sigma_1)^{\rho}}\right|\right\}^{\gamma_1+\gamma_3-1}$$

$$\varphi_1(\sigma_1)=0 \quad \text{при} \quad \sigma_1<0, \quad \sigma_1>\frac{1}{c}$$

В применении же к распределению (1.3), получим

$$\varphi_1(\sigma_1)=\frac{\rho}{4}\sum_{i,j,k,l}^{1,2} b_{1i}b_{2k}b_{1j}b_{3l}\,\Gamma\left(\frac{n_{1i}+n_{2k}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_{1j}+n_{3l}+1}{2}\right)\times$$

$$\times\,\Omega_1^{n_{1i}}\Omega_2^{n_{1j}}(1-c\sigma_1)^{\rho n_{1j}-1}(1-b\sigma_1)^{\rho n_{1i}-1}\sigma_1^{\rho(n_{2k}+n_{3l}+1)}\times$$

$$\times\int_0^1\frac{[1-b\sigma_1+\xi(b-c)\sigma_1]\xi^{n_{2k}}(1-\xi)^{n_{3l}}d\xi}{Q_1} \qquad 0\leqslant\sigma_1\leqslant\frac{1}{b} \tag{3.20}$$

$$Q_1=[a_1^2\Omega_1^2(1-b\sigma_1)^{2\rho}+a_2^2\xi^2\sigma_1^{2\rho}]^{\frac{n_{1i}+n_{2k}+1}{2}}[a_1^2\Omega_2^2(1-c\sigma_1)^{2\rho}+$$

$$+a_3^2\sigma_1^{2\rho}(1-\xi)^2]^{\frac{n_{1j}+n_{3l}+1}{2}}$$

$$\varphi_1(\sigma_1)=\frac{\rho}{4}\sum_{i,j,k,l}^{1,2} b_{1i}b_{2k}b_{1j}b_{3l}\,\Gamma\left(\frac{n_{1i}+n_{2k}+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_{1j}+n_{3l}+1}{2}\right)\times$$

$$\times\,\Omega_1^{n_{1i}}\Omega_2^{n_{1j}}(1-c\sigma_1)^{\rho n_{1j}-1}(b\sigma_1-1)^{\rho n_{1i}-1}\sigma_1^{\rho(n_{2k}+n_{3l}+1)}\times$$

$$\times\int_0^\infty\frac{[b\sigma_1-1+\xi(b-c)\sigma_1]\xi^{n_{2k}}(1+\xi)^{n_{3l}}d\xi}{Q_2} \qquad \frac{1}{b}\leqslant\sigma_1\leqslant\frac{1}{c} \tag{3.21}$$

$$Q_2=[a_1^2\Omega_1^2(b\sigma_1-1)^{2\rho}+a_2^2\xi^2\sigma_1^{2\rho}]^{\frac{n_{1i}+n_{2k}+1}{2}}[a_1^2\Omega_2^2(1-c\sigma_1)^{2\rho}+$$

$$+a_3^2\sigma_1^{2\rho}(1+\xi)^2]^{\frac{n_{1j}+n_{3l}+1}{2}}$$

$$\varphi(\sigma_1)=0 \quad \text{при} \quad \sigma_1<0, \quad \sigma_1>1/c$$

Плотности распределения σ_2 и σ_3 определяются по формулам

$$\varphi_2(\sigma_2) = d_2\varphi_1\left(\frac{1}{b} - d_2\sigma_2\right)$$

$$\varphi_3(\sigma_3) = d_3\varphi_1\left(\frac{1}{c} + d_3\sigma_3\right) \tag{3.22}$$

где для задачи g

$$d_2 = \frac{F_2(a_3 - a_2)}{F_1(a_3 - a_1)}, \quad d_3 = \frac{F_3(a_3 - a_2)}{F_1(a_2 - a_1)}$$

а для задачи e

$$d_2 = -\frac{F_2}{F_1}, \quad d_3 = \frac{F_3}{F_1}$$

4. *Расчет на прочность.* Положим, что прочностные характеристики стержней являются достоверными. В этом случае задача сводится к определению вероятности p_i выполнения условия

$$-[\sigma_i] < \sigma_i < [\sigma_i], \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{4.1}$$

где $[\sigma_i]$ — значение допускаемого напряжения для стержня i. Принимая $\sigma_i' = -[\sigma_i]$ и $\sigma_i'' = [\sigma_i]$, искомую вероятность можно определить соответственно по формуле (2.12). Если прочностные характеристики рассматривать не как достоверные, а с учетом разброса их экспериментальных данных, то, обозначая функцию распределения $[\sigma_i]$ через $f_i([\sigma_i])$, запишем формулу определения вероятности p_i, с которой удовлетворяется условие прочности (4.1):

$$p_i([\sigma_i] \geqslant |\sigma_i|) = \int_0^{\infty} \varphi(\sigma_i) \int_{\sigma_i}^{\infty} f([\sigma_i])\, d[\sigma_i]\, d\sigma_i +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \varphi(\sigma_i) \int_{-\infty}^{\sigma_i} f([\sigma_i])\, d[\sigma_i]\, d\sigma_i \tag{4.2}$$

5. *Численный пример.* Рассмотрим двухслойную трубу под действием внутреннего давления (фиг. 1, задача *в*), принимая, что оба слоя трубы имеют одну и ту же толщину ($\delta_1 = \delta_2 = \delta$) и изготовлены из материала, разброс механических свойств которого можно описать распределением Пирсона. Плотности распределения напряжений в слоях 1 и 2 можно определить согласно формулам (2.10), (2.11) и (2.14).

В зависимости от разброса D_i/m_i^2 показателя x_i механических свойств, определяемых уравнениями (1.4), в табл. 2 даны вероятности того, что напряжения σ_1 и σ_2 не превосходят σ, для которого слева таблицы даны значения $\sigma\delta/qr$.

Таблица 2

Значения вероятности $p(\sigma_i \leqslant \sigma)$

$\sigma\delta/qr$	$\frac{D_1}{m_1^2}=\frac{D_2}{m_2^2}=0.1$	$\frac{D_1}{m_1^2}=\frac{D_2}{m_2^2}=0.2$	$\frac{D_1}{m_1^2}=\frac{D_2}{m_2^2}=0.3$	$\frac{D_1}{m_1^2}=\frac{1}{3};$	$\frac{D_2}{m_2^2}=0.2$
				для σ_1	для σ_2
0.1	0	0.0009	0.0086	0.0015	0.0071
0.2	0.0007	0.0197	0.0579	0.0264	0.0517
0.3	0.0285	0.0988	0.1631	0.1024	0.1559
0.4	0.1497	0.2665	0.3174	0.2720	0.3208
0.5	0.5	0.5	0.5	0.4753	0.5247
0.6	0.8503	0.7335	0.6826	0.6792	0.7280
0.7	0.9715	0.9012	0.8369	0.8441	0.8976
0.8	0.9993	0.9803	0.9421	0.9483	0.9736
0.9	1.0000	0.9991	0.9914	0.9929	0.9985

Отметим, что согласно достоверным значениям параметров x_i, как это делается в обычных расчетах без вероятностей, мы имели бы

$$p\left(\sigma_i < 0.5\,\frac{qr}{\delta}\right) = 0 \text{ и } p\left(\sigma_i > 0.5\,\frac{qr}{\delta}\right) = 1, \quad i = 1.2.$$

СКТБ Института механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 XI 1980

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՍՈՂՔԻ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ ՍՏԱՏԻԿՈՐԵՆ–ԱՆՈՐՈՇ ՁՈՂԱՅԻՆ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ինչպես հայտնի է նյութերի սողքի վերաբերյալ փորձարարական տվյալները ունեն բավականին մեծ ցրվածություն և սովորական հաշվարկները, որոնք հիմնված են տվյալ միջինացված, արժեքների վրա հուսալի չեն հանդիսանում։ Այս աշխատանքում որոշվում են տարբեր տեսակի երկու և երեք ստատիկորեն-անորոշ ձողային սիստեմներում լարումների բաշխման խտությունները՝ հիմնված ձողերի մեխանիկական բնութագրերի ստատիստիկական ցուցանիշների վրա։ Կիրառված ձևը հնարավորություն է տալիս որոշել լարումները գտնելու հավանականությունը ձողերում ցանկացած տված սահմաններում՝ ինտեգրելով լարումների բաշխման խտությունը այդ սահմաններում։

Որպես ֆունկցիաներ դեֆորմացիայի բնութագրերի բաշխման համար դիտարկված են նորմալ բաշխման օրենքը, Պիրսոնի բաշխման 3-րդ տիպը, ինչպես նաև բաշխման մի նոր տեսակ, որը փորձարարական հիմնավորում է ստացել մի շարք նյութերի համար։

Որպես օրինակ է քննարկված սողքի վիճակում գտնվող երկշերտ խողովակի ամրության հավանականային հաշվարկը ներքին ճնշման պայմաններում։

ON PROBABILITY CALCULATION OF PIVOTED STATICALLY-INDEFINITE SYSTEMS TAKING ACCOUNT CREEP

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

Experimental properties of creep of materials have considerable distribution and therefore the usual calculation based on the overage data of these properties are not hopefull. The distribution densities of stresses in different double and triple-pivoted statically-indefinite systems on the basis of statistical data of mechanical properties of pivots are defined in this work. It becomes possible to determine the probability of finding the stresses in any pivot in the arbitrary given limits by the integration of the stress distribution densities in these limits. As a distribution function of strain properties the normal distribution, Pearson type III distribution and a new type of distribution are considered each having experimental confirmation for some materials.

As an example the probability calculation of two-layer cylinders under internal pressure is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах конструкций. М.: Стройиздат, 1971. 255 с.
2. *Симонян А. М.* К вопросу о выборе функции распределения при высокотемпературной ползучести металлов.— Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1978, т. 31, № 2, с. 55—66.
3. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960, 450 с.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323 с.
5. *Симонян А. М.* Исследование ползучести стали Х18Н10Т при больших деформациях. Проблемы прочности, 1975, № 6, с. 63—66.
6. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: Физматгиз, 1961. 406 с.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 2, 1982 Механика

А. В. БЕЛОКОНЬ, Е. П. МАЛИКОВ

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА

Осесимметричная деформация трансверсально-изотропного цилиндра конечной длины при заданных на всей поверхности напряжениях изучалась в работе [1], где поставленная краевая задача известным способом [2] сводилась к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В настоящей статье метод интегральных уравнений, предложенный в работе [3] для изотропного тела, обобщен на краевые задачи для трансверсально-изотропного цилиндра с произвольными граничными условиями. Получающиеся здесь системы интегральных уравнений решаются методом Бубнова-Галеркина с учетом особенности решения рассматриваемой краевой задачи. Излагается способ определения этой особенности из систем интегральных уравнений. Приведенные численные результаты для конкретной краевой задачи об изгибе жестко заделанного по боковой поверхности цилиндра иллюстрируют эффективность предлагаемого метода.

§ 1. Рассмотрим прямой круговой цилиндр высотой $2h$ и радиусом a из трансверсально-изотропного материала. Примем ось симметрии цилиндра за ось Z цилиндрической системы координат, а начало координат поместим в центре цилиндра. Уравнения обобщенного закона Гука имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = c_{11}\varepsilon_{11} + c_{12}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33}, \quad \sigma_{13} = 2c_{44}\varepsilon_{13}\\
&\sigma_{22} = c_{12}\varepsilon_{11} + c_{11}\varepsilon_{22} + c_{13}\varepsilon_{33} \qquad (1.1)\\
&\sigma_{33} = c_{13}\varepsilon_{11} + c_{13}\varepsilon_{22} + c_{33}\varepsilon_{33}
\end{aligned}$$

где индексы 1, 2, 3 соответствуют цилиндрическим координатам r, Θ, Z.

В дальнейшем будем использовать следующие безразмерные величины:

$$\rho = r/a, \quad \zeta = Z/a, \quad \zeta_0 = h/a$$

$$a_{ij} = c_{ij}/c_{11}, \quad v_i = u_i/a, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij}/c_{11}$$

Используя формулы (1.1) и уравнения равновесия сплошного тела, обычным образом получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях. Ее общее решение будем отыскивать через две функции $f_1(\rho, \zeta)$ и $f_2(\rho, \zeta)$, которые введем так:

$$v_1 = \partial f_1/\partial\rho, \quad v_3 = \partial f_2/\partial\zeta \qquad (1.2)$$

В этом случае $f_i(\rho, \zeta)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}\partial/\partial\rho\,[\Delta_0 f_1 + a_{44}\partial^2 f_1/\partial\zeta^2 + (a_{13} + a_{44})\,\partial^2 f_2/\partial\zeta^2] = 0 \\ \partial/\partial\zeta\,[a_{44}\Delta_0 f_2 + (a_{13} + a_{44})\,\Delta_0 f_1 + a_{33}\partial^2 f_2/\partial\zeta^2] = 0\end{gathered} \tag{1.3}$$

где $\Delta_0 = \partial^2/\partial\rho^2 + 1/\rho\,\partial/\partial\rho$.

Здесь нужно отметить, что при решении задачи можно было бы воспользоваться известными представлениями общего решения системы дифференциальных уравнений статики либо через одну функцию, удовлетворяющую уравнению четвертого порядка [7], либо через две функции, удовлетворяющие уравнениям второго порядка [10]. Авторами использовались представления (1.2) лишь по той причине, что они оказались удобными и при решении динамических задач [5].

По существу, подход к построению общего решения, используемый в данной работе, тесно смыкается с методом суперпозиции, берущим свое начало с идеи, высказанной еще Ламе в лекциях по теории упругости, и получившим свое дальнейшее развитие в работах Б. Л. Абрамяна [2], А. А. Баблояна [1], Г. М. Валова [8], В. Т. Гринченко [9] и др.

Здесь дадим несколько иную трактовку этого подхода. Основой для дальнейших рассуждений служит следующая лемма:

Пусть функция $\varphi(\rho, \zeta)$ такова, что в области $W = \{0 \leq \rho \leq 1;\ -\zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0\}$ она может быть разложена в двойной ряд по полным ортогональным системам функций $P_{1k}(\rho)$ и $P_{2k}(\zeta)$. Тогда в этой области функция $\varphi(\rho, \zeta)$ представима, и причем единственным образом, в виде

$$\varphi(\rho, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{1k}(\zeta)\,P_{1k}(\rho) + \sum_{k=0}^{\infty} l_{2k}(\rho)\,P_{2k}(\zeta) \tag{1.4}$$

где произвольно заданы либо функции $l_{1k}(\zeta)$, либо $l_{2k}(\rho)$.

На доказательстве леммы, вследствие его простоты, останавливаться не будем.

Сформулированная лемма позволяет искать решение системы (1.3) в виде

$$\begin{gathered}f_1(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} l_{1k}(\zeta)\,J_0(\nu_k\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} l_{2k}(\rho)\cos\alpha_k(\zeta - \zeta_0) + l_{10}(\zeta) + l_{20}(\rho) \\ f_2(\rho, \zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} m_{1k}(\zeta)\,J_0(\nu_k\rho) + \sum_{k=1}^{\infty} m_{2k}(\rho)\cos\alpha_k(\zeta - \zeta_0) + m_{10}(\zeta) + m_{20}(\rho)\end{gathered} \tag{1.5}$$

где функции l_{ik}, m_{ik} — пока произвольные; ν_k таковы, что $J_1(\nu_k) = 0$; α_k для случая антисимметричного деформирования цилиндра имеют вид: $\alpha_k = \pi(2k - 1)/(2\zeta_0)$.

Подставляя теперь функции $f_1(\rho, \zeta)$ и $f_2(\rho, \zeta)$ в виде (1.5) в уравнения системы (1.3), получим

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{44}l_{1k}''(\zeta)-\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)+(a_{13}+a_{44})m_{1k}'(\zeta)\right]\nu_k J_1(\nu_k\rho)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\partial/\partial\rho\left[\Delta_0 l_{2k}(\rho)-a_{44}\alpha_k^2 l_{2k}(\rho)-(a_{13}+a_{44})\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)\right]\cos\alpha_k(\zeta-\zeta_0)+ \tag{1.6}$$

$$+\Delta_0 l_{20}(\rho)=0$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\partial/\partial\zeta\left[a_{33}m_{1k}''(\zeta)-a_{44}\nu_k^2 m_{1k}(\zeta)-(a_{13}+a_{44})\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)\right]J_0(\nu_k\rho)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{44}\Delta_0 m_{2k}(\rho)-a_{33}\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)+\right. \tag{1.7}$$

$$\left.+(a_{13}+a_{44})\Delta_0 l_{2k}(\rho)\right]\alpha_k\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)+a_{33}m_{10}'''(\zeta)=0$$

Равенства (1.6), (1.7) можно рассматривать как разложения нуля в ряды вида (1.4).

Воспользовавшись имеющимся произволом, выберем функции $l_{2k}(\rho)$ и $m_{1k}(\zeta)$ так, чтобы они удовлетворяли дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned}
&\Delta_0 l_{2k}(\rho)-a_{44}\alpha_k^2 l_{2k}(\rho)-(a_{13}+a_{44})\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)=0\\
&\Delta_0 l_{20}(\rho)=0\\
&a_{33}m_{1k}''(\zeta)-a_{44}\nu_k^2 m_{1k}(\zeta)-(a_{13}+a_{44})\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)=0\\
&m_{10}'''(\zeta)=0
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Тогда, по доказанной лемме

$$\begin{aligned}
&a_{44}l_{1k}''(\zeta)-\nu_k^2 l_{1k}(\zeta)+(a_{13}+a_{44})m_{1k}'(\zeta)=0\\
&a_{44}\Delta_0 m_{2k}(\rho)-a_{33}\alpha_k^2 m_{2k}(\rho)+(a_{13}+a_{44})\Delta_0 l_{2k}(\rho)=0
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Кроме того, такой выбор функций $l_{2k}(\rho)$ и $m_{1k}(\zeta)$ однозначно определяет функции $l_{1k}(\zeta)$ и $m_{2k}(\rho)$ в представлении (1.5) по заданным $f_1(\rho,\zeta)$ и $f_2(\rho,\zeta)$, которые уже не являются произвольными, а должны удовлетворять уравнениям системы (1.3).

Решая полученные системы (1.8)—(1.9), нетрудно найти $f_1(\rho,\zeta)$ и $f_2(\rho,\zeta)$, а по ним, используя формулы (1.2), следующие представления для компонент вектора смещений:

$$\begin{aligned}
u_1(\rho,\zeta)=&-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}A_{jk}\,\mathrm{sh}(\delta_{jk}\zeta)\,\nu_k J_1(\nu_k\rho)+\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}B_{jk}\beta_{jk}I_1(\beta_{jk}\rho)\cos\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\\
u_3(\rho,\zeta)=&\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}(a_{33}-a_{44}\xi_j^2)/\xi_j^2 A_{jk}\delta_{jk}\,\mathrm{ch}(\delta_{jk}\zeta)\,J_0(\nu_k\rho)-\right.\\
&\left.-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}(\xi_j^2-a_{44})B_{jk}I_0(\beta_{jk}\rho)\,\alpha_k\sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)\right]\Big/(a_{13}+a_{44})+C
\end{aligned} \tag{1.10}$$

где A_{jk}, B_{jk}, C — произвольные постоянные.

$$\xi_{1,2} = \sqrt{(-a_{13}^2 - 2a_{13}a_{44} + a_{33}) \pm \sqrt{(-a_{13}^2 - 2a_{13}a_{44} + a_{33})^2 - 4a_{33}a_{44}^2}} \Big/ \sqrt{2a_{44}} \tag{1.11}$$

$$\delta_{1k} = \nu_k/\xi_2, \quad \delta_{2k} = \nu_k/\xi_1, \quad \beta_{jk} = \xi_j \alpha_k$$

Отметим, что построенное таким образом общее решение (1.10) системы дифференциальных уравнений равновесия обладает необходимым функциональным произволом для удовлетворения любых граничных условий как в смещениях, так и в напряжениях на граничных поверхностях цилиндра.

§ 2. Имея ввиду то обстоятельство, что в дальнейшем при решении задачи будет использоваться метод, предложенный в работе [3], введем в рассмотрение вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(\rho, \zeta_0) &= \varphi_1(\rho), \quad v_3(\rho, \zeta_0) = \varphi_2(\rho) \\ \tau_{13}(1, \zeta) &= \varphi_3(\zeta), \quad v_1(1, \zeta) = \varphi_4(\zeta) \end{aligned} \tag{2.1}$$

где, в силу свойств симметрии решаемой задачи (антисимметричная деформация), функции $\varphi_3(\zeta)$ и $\varphi_4(\zeta)$ должны удовлетворять соотношениям:

$$\varphi_3(-\zeta) = \varphi_3(\zeta), \quad \varphi_4(-\zeta) = -\varphi_4(\zeta)$$

Решение задачи (2.1) нетрудно получить в замкнутой форме, при этом произвольные постоянные из (1.10) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \frac{(-1)^{j-1}}{(\xi_2^2 - \xi_1^2)\,\delta_{jk}\,\mathrm{ch}\,(\delta_{jk}\zeta_0)\,J_0(\nu_k)} \left[\frac{\xi_j^2 - a_{44}}{a_{44}\nu_k}\varphi_{1k} + (\xi_j^2 + a_{13})\varphi_{2k} \right] \\ B_{jk} &= \frac{(-1)^{j-1}(a_{13} + a_{44})}{a_{44}(\xi_2^2 - \xi_1^2)\,\beta_{jk} I_1(\beta_{jk})} \left[\frac{1}{\alpha_k}\varphi_{3k} + \frac{a_{33} - a_{13}^2}{\xi_j^2 + a_{13}}\varphi_{4k} \right], \quad C = \varphi_{20} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где

$$\varphi_{1k} = \frac{2}{J_0(\nu_k)} \int_0^1 \rho\varphi_1(\rho)\,J_0(\nu_k\rho)\,d\rho$$

$$\varphi_{20} = 2\int_0^1 \rho\varphi_2(\rho)\,d\rho, \qquad \varphi_{2k} = \frac{2}{J_0(\nu_k)} \int_0^1 \rho\varphi_2(\rho)\,J_0(\nu_k\rho)\,d\rho$$

$$\varphi_{3k} = \frac{2}{\zeta_0}\int_0^{\zeta_0} \varphi_3(\zeta)\sin\alpha_k(\zeta - \zeta_0)\,d\zeta, \qquad \varphi_{4k} = \frac{2}{\zeta_0}\int_0^{\zeta_0} \varphi_4(\zeta)\cos\alpha_k(\zeta - \zeta_0)\,d\zeta$$

Подставляя теперь найденные значения постоянных в выражения для перемещений и напряжений, получим следующие, необходимые для дальнейшего решения задачи, формулы:

$$v_1(\rho, \zeta_0) = M_{11}(\rho, \varphi_1(\rho)) + M_{12}(\rho, \varphi_2(\rho)) + M_{13}(\rho, \varphi_3(\zeta)) + M_{14}(\rho, \varphi_4(\zeta)) \tag{2.3}$$

$$v_3(1, \zeta) = M_{21}(\zeta, \varphi_1(\rho)) + M_{22}(\zeta, \varphi_2(\rho)) + M_{23}(\zeta, \varphi_3(\zeta)) + M_{24}(\zeta, \varphi_4(\zeta)) \tag{2.4}$$

$$\tau_{11}(1, \zeta)=M_{31}(\zeta, \varphi_1(\rho))+M_{32}(\zeta, \varphi_2(\rho))+M_{33}(\zeta, \varphi_3(\zeta))+M_{34}(\zeta, \varphi_4(\zeta)) \quad (2.5)$$

$$\tau_{33}(\rho, \zeta_0)=M_{41}(\rho, \varphi_1(\rho))+M_{42}(\rho, \varphi_2(\rho))+M_{43}(\rho, \varphi_3(\zeta))+M_{44}(\rho, \varphi_4(\zeta)) \quad (2.6)$$

где, в частности, оператор $M_{11}(\rho, \ldots)$ имеет вид:

$$M_{11}(\rho, \ldots)=\frac{2}{a_{11}(\xi_2^2-\xi_1^2)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_1(\nu_k\rho)}{\nu_k J_0^2(\nu_k)}\left[\xi_1(\xi_2^2-a_{44})\,\mathrm{th}(\delta_{2k}\zeta_0)-\right.$$

$$\left.-\xi_2(\xi_1^2-a_{41})\,\mathrm{th}(\delta_{1k}\zeta_0)\right]\int_0^1 \rho \ldots J_1(\nu_k\rho)\,d\rho$$

остальные операторы в силу громоздкости не приведены, но могут быть легко получены из формул (1.1), (1.10) и (2.2).

Соотношения (2.3)—(2.6) позволяют свести любую краевую задачу для цилиндра в случае антисимметричного деформирования к системе интегральных уравнений.

Проиллюстрируем это утверждение на примере следующих задач.

Задача 1. На всей поверхности цилиндра заданы напряжения:

$$\begin{aligned} &\tau_{13}(\rho, \zeta_0)=\varphi_1(\rho), \quad \tau_{13}(1, \zeta)=\varphi_3(\zeta) \\ &\tau_{11}(1, \zeta)=\sigma_1(\zeta), \quad \tau_{33}(\rho, \zeta_0)=\sigma_3(\rho) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

Решение задачи в этом случае сводится к определению двух неизвестных функций $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_4(\zeta)$ из системы интегральных уравнений вида (2.5), (2.6).

Задача 2. На торцах цилиндра заданы напряжения, на боковой поверхности — перемещения:

$$\begin{aligned} &\tau_{13}(\rho, \zeta_0)=\varphi_1(\rho), \quad v_1(1, \zeta)=\varphi_4(\zeta) \\ &\tau_{33}(\rho, \zeta_0)=\sigma(\rho), \quad v_3(1, \zeta)=u(\zeta) \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Аналогично предыдущей, эта задача сводится к отысканию функций $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ из системы вида (2.4), (2.6).

Задача 3. Боковая поверхность цилиндра жестко защемлена, а на торцах заданы условия контактного типа:

$$\begin{aligned} &v_1(1, \zeta)=v_3(1, \zeta)=0, \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0 \\ &\tau_{33}(\rho, \zeta_0)=\tau_{13}(\rho, \zeta_0)=0, \quad \rho_0<\rho \leqslant 1 \qquad (2.9) \\ &v_1(\rho, \zeta_0)=g_1(\rho), \quad v_3(\rho, \zeta_0)=g_2(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 \end{aligned}$$

Задача может быть сведена к системе теперь уже трех интегральных уравнений вида (2.3), (2.4), (2.6), где неизвестными будут являться

$$\varphi_1(\rho), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0; \quad \varphi_2(\rho), \quad \rho_0<\rho \leqslant 1; \quad \varphi_3(\zeta), \quad 0 \leqslant \zeta \leqslant \zeta_0$$

Очевидно, что список задач может быть продолжен. Однако, и приведенных здесь достаточно для понимания существа предлагаемого метода.

§ 3. Доказательства теорем существования и единственности решения получающихся систем интегральных уравнений можно провести так же, как это сделано, например, в работах [3, 4, 6]. Здесь они не приводятся.

Основное внимание в настоящей работе уделяется методам построения приближенного решения систем интегральных уравнений. Хорошо известно, что эффективность приближенных методов существенно зависит от того, насколько выбранное приближение правильно описывает свойства искомого решения задачи. Поэтому, в первую очередь, займемся выяснением характера поведения решения вблизи ребра цилиндра, а также на линии смены граничных условий в контактной задаче.

Поведение решения в окрестности особых линий можно выяснить двумя способами. Первый способ связан с изучением ядер интегральных операторов, второй способ, изложением которого мы займемся, основан на предположении о поведении решения в окрестности этих линий.

Пусть в задаче 1 искомые функции в окрестности ребра цилиндра ведут себя следующим образом:

$$\varphi_2(\rho) = A(1-\rho^2)^{\beta}, \quad \varphi_4(\zeta) = B\zeta(\zeta_0^2-\zeta^2)^{\gamma} \tag{3.1}$$

Подставляя формулы (3.1) в систему интегральных уравнений, соответствующую рассматриваемой задаче, без учета поведения заданных граничных функций, получим, что $\beta = \gamma$ определяется из уравнения

$$\operatorname{ch}(\delta\beta) = 1 + \frac{(\xi_1-\xi_2)^2}{2\xi_1\xi_2}\sin^2\frac{\pi\beta}{2}, \qquad \delta = \ln\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) \tag{3.2}$$

а постоянные A и B связаны соотношением

$$(\xi_2-\xi_1)\sin\frac{\pi\beta}{2}A + (\xi_2^{\beta}-\xi_1^{\beta})\zeta_0^{\beta+1}B = 0 \tag{3.3}$$

Проводя аналогичное исследование системы интегральных уравнений в задаче 2, получим, что искомые функции в окрестности ребра цилиндра ведут себя следующим образом:

$$\varphi_2(\rho) = C(1-\rho^2)^{\gamma}, \quad \varphi_3(\zeta) = D(\zeta_0^2-\zeta^2)^{\alpha-1} \tag{3.4}$$

где постоянные C и D связаны между собой

$$\frac{(\xi_2^2+a_{13})\xi_2^{-\alpha}-(\xi_1^2+a_{13})\xi_1^{-\alpha}}{\xi_2-\xi_1}\alpha C + \frac{a_{44}+\xi_1\xi_2}{2a_{44}\xi_1\xi_2}\sin\frac{\pi\alpha}{2}\zeta_0^{\alpha-1}D = 0 \tag{3.5}$$

а α является корнем уравнения [5, 6]:

$$\operatorname{ch}(\delta\alpha) = Q_1 + Q_2\cos^2\frac{\pi\alpha}{2} \tag{3.6}$$

где

$$Q_1 = \frac{a_{13}^2+2a_{13}a_{44}+a_{33}}{2a_{33}(a_{13}+a_{44})}\xi_1\xi_2, \qquad Q_2 = \frac{(a_{44}\xi_1\xi_2+a_{33})(\xi_1-\xi_2)^2}{2a_{33}(a_{13}+a_{44})}$$

В задаче 3 поведение решения в окрестности ребра такое же, как и в задаче 2, а на границе контактной области характер особенности определяется из уравнения

$$\cos 2\pi\alpha = -\frac{2a_{11}(\sqrt{a_{33}} - a_{12}) + (\sqrt{a_{33}} + a_{12})(a_{11} - \sqrt{a_{33}})}{(\sqrt{a_{33}} + a_{12})(a_{11} + \sqrt{a_{33}})} \qquad (3.7)$$

Перейдем теперь к изложению методов решения получающихся систем интегральных уравнений. Причем, все дальнейшие рассуждения будем иллюстрировать, изучая рассмотренную выше задачу 2.

Очевидно, что полученная в этой задаче система интегральных уравнений (2.4), (2.6) может быть сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Такой подход к этим задачам естественен и, как показали исследования Б. А. Абрамяна и В. Т. Гринченко, достаточно эффективен. Особо здесь следует отметить метод В. Т. Гринченко [9], который позволяет учитывать в решении характер напряженного состояния цилиндра вблизи ребра, что, в конечном итоге, в отличие от метода простой редукции, позволяет найти весь набор неизвестных бесконечной системы по решению всего лишь конечной.

Вместе с тем, как показали численные расчеты [5, 6], весьма эффективным при решении подобных задач является метод Бубнова-Галеркина, к описанию которого мы переходим.

Будем отыскивать функции $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ в виде

$$\varphi_2(\rho) = C_0 + \sum_{k=1}^{N} C_k \frac{J_0(\nu_k\rho)}{J_0(\nu_k)} + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{S} \frac{C_{N+j}}{\nu_k^{\alpha_j+1}} + \sum_{j=1}^{T} \frac{C_{N+S+j}}{\nu_k^{j+2}} \right] \frac{J_0(\nu_k\rho)}{J_0(\nu_k)}$$

$$\varphi_3(\zeta) = \sum_{k=1}^{M} D_k \sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0) + \sum_{k=M+1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{S} \frac{D_{M+j}}{(\alpha_k\zeta_0)^{\alpha_j}} + \right. \qquad (3.8)$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{T} \frac{D_{M+S+j}}{(\alpha_k\zeta_0)^{j+1}} \right] \sin\alpha_k(\zeta-\zeta_0)$$

где C_j, D_j – неизвестные постоянные, α_1 — вещественный корень, α_j ($j = 2, 3, \ldots, S$) — комплексные корни уравнения (3.6).

Если сравнить формулы (3.8) с соответствующими разложениями функций $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ в ряды Фурье-Дини, то станет очевидной идея предлагаемого метода, основанного, в конечном счете, на аппроксимации не самих функций, а коэффициентов их разложений. Числа N и M есть соответственно номера выхода на асимптотику этих коэффициентов, а выражения, записанные в квадратных скобках в (3.4), являются их асимптотическими формулами. Причем, первые слагаемые в квадратных скобках ответственны за учет особенности решения вблизи ребра цилиндра, вторые слагаемые — за учет поведения правых частей рассматриваемой системы интегральных уравнений.

Подставляя теперь функции $\varphi_2(\rho)$ и $\varphi_3(\zeta)$ в виде (3.8) в эту систему и используя ортогональность координатных функций $J_0(\nu_k\rho)$ и

$\sin \alpha_k (\zeta - \zeta_0)$, получим конечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных C_j и D_j.

Здесь нужно также отметить, что если в формулах (3.8) устремить N и M к бесконечности, то предлагаемый подход совпадет с методом решения подобных задач, берущим начало в работах Б. Л. Абрамяна. Если же в формулах (3.8) положить $S = 1$, $T = 0$, то мы придем к методу, развитому В. Т. Гринченко.

Другой подход к решению рассматриваемой системы основан на ее сведении к одному интегральному уравнению относительно функции $\varphi_3(\zeta)$:

$$L(\zeta, \varphi_3(\zeta)) = F(\zeta) \tag{3.9}$$

где

$$L(\zeta, ...) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_{1k}} \left| n_2 \frac{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta_0)} + n_3 \frac{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta_0)} \right| \times$$

$$\times \left| n_2 \int_0^{\zeta} ... \frac{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{2k}\zeta_0)} d\zeta + n_3 \int_0^{\zeta} ... \frac{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta)}{\operatorname{ch}(\delta_{1k}\zeta_0)} d\zeta \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} n_{4k} \sin \alpha_k (\zeta - \zeta_0) \int_0^{\zeta} ... \sin \alpha_k (\zeta - \zeta_0)\, d\zeta$$

$$n_{1k} = \frac{a_{33} - a_{13}^2}{2(\xi_2^2 - \xi_1^2)} \left[\xi_2 \operatorname{th}(\delta_{1k}\zeta_0) - \xi_1 \operatorname{th}(\delta_{2k}\zeta_0)\right] \alpha_k$$

$$n_2 = (\xi_1^2 + a_{13})/(\xi_2^2 - \xi_1^2), \quad n_3 = (\xi_2^2 + a_{13})/(\xi_1^2 - \xi_2^2)$$

$$n_{4k} = \frac{2}{a_{44}(\xi_2^2 - \xi_1^2)\zeta_0 \alpha_k} \left| \frac{\xi_2^2 - a_{44}}{\xi_2} \frac{I_0(\beta_{2k})}{I_1(\beta_{2k})} - \frac{\xi_1^2 - a_{44}}{\xi_1} \frac{I_0(\beta_{1k})}{I_1(\beta_{1k})} \right|$$

а $F(\zeta)$ выражается через известные функции $u(\zeta)$, $\sigma(\rho)$, $\varphi_1(\rho)$, $\varphi_4(\zeta)$.

Полученное уравнение (3.9) решалось методом Бубнова-Галеркина, в котором неизвестная функция $\varphi_3(\zeta)$ отыскивалась в виде

$$\varphi_3(\zeta) = \sum_{j=1}^{N} A_j (\zeta_0^2 - \zeta^2)^{\alpha_1 + j - 2} \tag{3.10}$$

где A_j — неизвестные постоянные, α_1 — вещественный корень уравнения (3.6).

При таком подходе к решению задачи также получаем конечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных A_j, порядок которой намного меньше порядка систем, решаемых в предыдущем случае. Однако, здесь приходится суммировать ряды с коэффициентами, содержащими бесселевы функции с нецелым индексом, что связано с определенными вычислительными трудностями.

§ 4. Предложенные выше методы решения были реализованы на ЭВМ БЭСМ-6 для конкретной краевой задачи изгиба жестко заделанного по боковой поверхности цилиндра равномерно распределенной по торцам нагрузкой. Граничные условия задачи имеют вид (2.8), где

$$\varphi_1(\zeta) = \varphi_4(\zeta) = u(\zeta) = 0, \quad \sigma(\zeta) = P$$

Расчеты проводились для трансверсально-изотропного материала со следующими значениями упругих постоянных:

$$c_{11} = 1.1\cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2, \quad c_{12} = 0.675\cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2, \quad c_{13} = 0.7\cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2$$

$$c_{33} = 1.5\cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2, \quad c_{44} = 0.22\cdot 10^{11}\ \text{н/м}^2$$

При таком наборе числа ξ_1 и ξ_2 из (1.11) вещественны

$$\xi_1 = 1.756, \quad \xi_2 = 0.665$$

а корни характеристического уравнения (3.6) имеют вид:

$$\alpha_1 = 0.682$$

$$\alpha_2 = 1.636 \pm i\,0.270, \quad \alpha_3 = 3.548 \pm i\,1.369$$

остальные $\alpha_k = \gamma_k \pm i\tau_k$ $(k = 4, 5,\ldots)$ находятся с точностью до 0.1% по асимптотической формуле [5].

Численные результаты показали, что оба метода являются эффективными для расчета напряженно-деформированного состояния цилиндра в области изменения параметра ζ_0 от 0.1 до 5.0. О качестве получаемых решений можно судить по точности удовлетворения граничных условий. Так, в обоих подходах граничные условия для осевого смещения удовлетворяются с точностью до 0.2% от его значения в центре цилиндра. При этом, в первом случае (3.8) принималось $N \leqslant 5$, $M \leqslant 5$, $S = 2$, $T = 1$ и решались системы до 16 порядка, а в случае (3.10) — $N \leqslant 3$ и решались системы 2—3 порядка.

Таблица 1

	$\zeta_0=0.1$	$\zeta_0=0.3$	$\zeta_0=1.0$	$\zeta_0=2.0$	$\zeta_0=5.0$
u_3/P	80.781	7.212	1.273	0.400	0.019
σ_{11}/P	−22.176	−2.429	−0.026	0.261	0.223
σ_{13}/P	− 1.272	−0.677	−0.506	−0.420	−0.285
σ_{33}/P	0.992	0.906	0.700	0.542	0.316

В таблице приведены значения осевого смещения, вычисленные в центре цилиндра, и значения компонент тензора напряжений, вычисленные при $\rho = 0.9$ и $\zeta = 0.9\,\zeta_0$ для различных ζ_0.

Ростовский государственный
университет

Поступила 25 XI 1980

Ա. Վ. ԲԵԼՈԿՈՆ, Ե. Պ. ՄԱԼԻԿՈՎ

ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՅԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում մշակված է մեթոդ, ըստ որի վերջավոր չափեր ունեցող մարմինների համար առաձգականության տեսության եզրային խնդիրները հանգեցվում են ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի լուծմանը: Ստացված ինտեգրալ հավասարումների համակարգերի ուսումնասիրությունը թույլատրում է կառուցել նրանց լուծելու արդյունավետ ալգորիթմներ, որոնք հիմնըվում են Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդի կիրառման վրա ու հաշվի են առնում դիտարկվող եզրային խնդրի լուծման եզակիությունը:

THE METHOD OF INTEGRAL EQUATIONS IN AXISYMMETRIC DEFORMATION OF TRANSVERSELY ISOTROPIC CYLINDER PROBLEMS

A. W. BELOKON, E. P. MALIKOV

Summary

The method of solving problems of theory of elasticity for bodies of finite dimensions which take into account the description of boundary problems with the help of systems of integral equations is presented in this paper. The investigation of the systems of integral equations helps to build effective algorithmes to solve these equations; the algorithmes are founded on the Bubnov-Galerkin method while peculiarities of the boundary problem are taken into account.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра конечной длины из трансверсально-изотропного материала.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1961, т. 14, № 4.
2. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра.— Докл. АН АрмССР, 1954, т. 19, № 1.
3. *Белоконь А. В.* Об одном методе решения задач теории упругости для тел конечных размеров.— Докл. АН СССР, 1977, т. 233, № 1.
4. *Белоконь А. В.* Применение вариационных методов к решению контактных задач.— Изв. СКНЦ ВШ, сер. естеств. наук, 1973, № 4.
5. *Белоконь А. В., Маликов Е. П.* Динамическая смешанная задача для конечного трансверсально-изотропного цилиндра.— Тезисы докладов Всесоюзной конференции по смешанным задачам механики деформируемого тела. Ростов н/Д, 1977.
6. *Белоконь А. В., Маликов Е. П.* Смешанная задача теории упругости для конечного трансверсально-изотропного цилиндра.— Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван, 1979.
7. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977.
8. *Валов Г. М.* Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины.— ПММ, 1962, т. 28, № 4.
9. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978.
10. *Elliott H. A.* Three-dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals. Proc. of the Cambridge philos. soc., 1948, 44, part 4.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 2, 1982 Механика

Ю. А. АНТИПОВ, А. Ф. ДАЩЕНКО, Г. Я. ПОПОВ

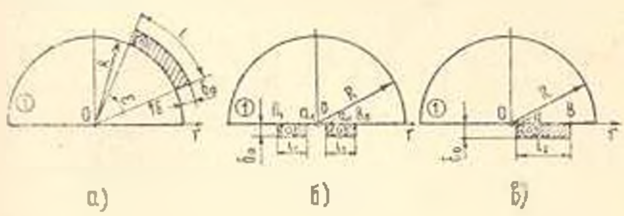
О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КРУЧЕНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕЩИН И ТОНКИХ ПОДКРЕПЛЕНИЙ

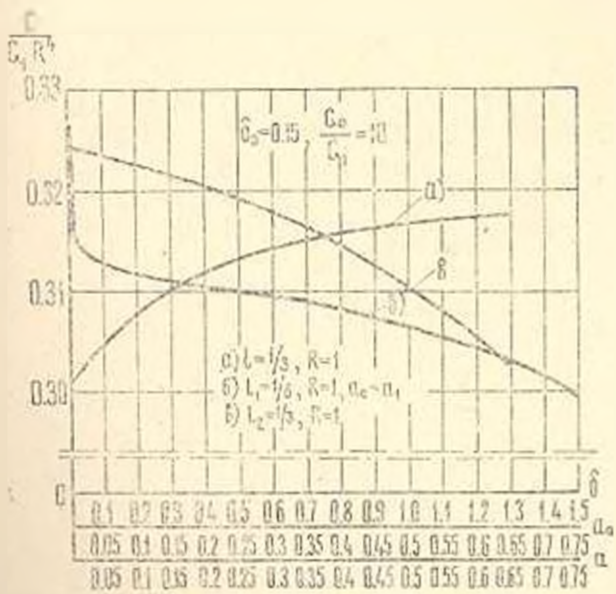
Обобщенным методом интегральных преобразований [7] решаются следующие задачи кручения упругих изотропных стержней (валов).

1. Стержень с модулем сдвига G_1, имеющий сечение Ω в виде полукруга $(0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$, с тонким подкреплением толщиной δ_0 и модулем сдвига G_0, расположенным:

а) на криволинейном участке $0 \leqslant \delta < \varepsilon \leqslant \pi$ (фиг. 1а);

б) на прямолинейном участке $0 \leqslant a_i < b_i \leqslant R$ $(i = 0, 1)$ (фиг. 1б), скручивается моментами, приложенными к торцам. Необходимо найти зависимость жесткости скручиваемого стержня от положения подкрепления на боковой поверхности.





Фиг. 1.

2. Круглый цилиндрический вал ($0 \leqslant r \leqslant R$) с несколькими кольцевыми поперечными трещинами скручивается моментами M (фиг. 3).

Требуется определить коэффициент интенсивности напряжений (K_{III}) на краях трещин.

§ 1. Согласно известной теории кручения подкрепленных стержней [1] задачи 1а и 1б сводятся к нахождению функции напряжений $\varphi(r, \theta)$, удовлетворяющей в области Ω уравнению

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\varphi = -2$$

а на контуре сечения условиям:

в случае задачи 1а

$$\varphi(r, 0) = \varphi(r, \pi) = 0, \ r \in [0, R]; \ \varphi(R, \theta) = 0, \ \theta \overline{\in} [\delta, \varepsilon] \tag{1.1}$$

$$\left|\varphi + \mu_0 \frac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \ \theta \in [\delta, \varepsilon], \ (\mu_0 = \delta_0 G_0 G_1^{-1}) \tag{1.2}$$

в случае задачи 1б

$$\varphi(R, \theta) = 0, \ \theta \in [0, \pi]; \ \varphi(r, 0) = 0, \ r \overline{\in} [a_0, b_0]; \ \varphi(r, \pi) = 0, \ r \overline{\in} [a_1, b_1]$$

$$\left|\varphi - \frac{\mu_0}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0, \ r \in [a_0, b_0]; \ \left|\varphi + \frac{\mu_0}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right|_{\theta=\pi} = 0, \ r \in [a_1, b_1] \tag{1.3}$$

Займемся решением задачи 1а. Введем функцию $\omega(\theta) = \varphi(R, \theta)$. Тогда из (1.1) следует, что $\omega(\theta) = 0$ при $0 \leqslant \theta < \delta$ и $\varepsilon < \theta \leqslant \pi$.

Применяя конечное синус-преобразование

$$\varphi_k(r) = \int_0^\pi \varphi(r, \theta) \sin k\theta d\theta, \qquad \varphi(r, \theta) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(r) \sin k\theta \tag{1.4}$$

приходим к одномерной краевой задаче

$$\left(r^2\frac{d^2}{dr^2} + r\frac{d}{dr} - k^2\right)\varphi_k(r) = 2k^{-1}[(-1)^k - 1]r^2 \quad (0 < r < R)$$

$$\varphi_k(r) = \omega_k \quad \left(\omega_k = \int_\delta^\varepsilon \omega(\tau) \sin k\tau d\tau\right) \tag{1.5}$$

Используя функцию Грина

$$G_k(r, t) = -\frac{1}{2kt}\left[e^{-k|\ln r/t|} - \left(\frac{rt}{R^2}\right)^k\right]$$

решение краевой задачи (1.5) найдем в виде

$$\varphi_k(r) = \left(\frac{r}{R}\right)^k \omega_k + \frac{2[1-(-1)^k]}{k(k^2-4)}\left[r^2 - R^2\left(\frac{r}{R}\right)^k\right]$$

Возвращаясь к оригиналу $\varphi(r, \theta)$ с помощью второй формулы из (1.4) и суммируя получающиеся при этом ряды, имеем

$$\varphi(r, \theta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\varepsilon} \sum_{k=1}^{\infty} \omega(\tau) \sin k\tau \sin k\theta \left(\frac{r}{R}\right)^{k} d\tau + g(r, \theta) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\delta}^{\varepsilon} \omega(\tau) \left[\frac{\operatorname{sh} \ln R/r}{\operatorname{ch} \ln R/r - \cos(\tau - \theta)} - \frac{\operatorname{sh} \ln R/r}{\operatorname{ch} \ln R/r - \cos(\tau + \theta)} \right] d\tau + g(r, \theta)$$

$$g(r, \theta) = 8/\pi \sum_{k=1, 3, \ldots} \frac{\sin k\theta}{k(k^2 - 4)} \left[r^2 - R^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{k} \right] \qquad (1.6)$$

Реализуя условие (1.2), приходим к следующему интегро-дифференциальному уравнению:

$$\omega(\theta) - \frac{\mu_0}{2\pi R}\int\limits_{\delta}^{\varepsilon} \omega'(\tau) \left[\operatorname{ctg}\frac{\tau - \theta}{2} - \operatorname{ctg}\frac{\tau + \theta}{2} \right] d\tau = f(\theta) \quad (\delta \leqslant \theta \leqslant \varepsilon)$$

$$f(\theta) = \frac{8R\mu_0}{\pi} \sum_{k=1, 3, \ldots} \frac{\sin k\theta}{k\ (k + 2)} \qquad (1.7)$$

Решение уравнения (1.7) ищем в классе функций, имеющих интегрируемую особенность. Анализируя поведение функции $\omega'(\tau)$ при $\tau \to \delta + 0$ и $\tau \to \varepsilon - 0$, получаем, что $\omega'(\tau) = O([\tau - \delta]^{-1/2})$, $\tau \to \delta + 0$ и $\omega'(\tau) = O([\varepsilon - \tau]^{-1/2})$, $\tau \to \varepsilon - 0$. Тогда ясно, что $\omega(\tau) = O([\tau - \delta]^{1/2})$, $\tau \to \delta + 0$ и $\omega(\tau) = O([\varepsilon - \tau]^{1/2})$, $\tau \to \varepsilon - 0$. Кроме того, $\omega(\delta - 0) = \omega(\varepsilon + 0) = 0$. Таким образом, функция $\omega(\tau)$ непрерывна в точках $\tau = \delta$ и $\tau = \varepsilon$ и равна в них нулю. Учитывая это, для решения уравнения (1.7) вводим функцию ψ

$$\omega(\theta) = \int\limits_{\delta}^{\theta} \psi\left(\frac{t - \mu}{\nu}\right) dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\delta}^{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\theta - t)\, \psi\left(\frac{t - \mu}{\nu}\right) dt \quad \left(\mu = \frac{\varepsilon + \delta}{2},\ \nu = \frac{\varepsilon - \delta}{2}\right) \qquad (1.8)$$

и после несложных преобразований запишем уравнение (1.7) в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \psi(y) \left[\frac{1}{y - x} + k_0(y, x) \right] dy = f_0(x) R^2 \quad (|x| \leqslant 1)$$

$$k_0(y, x) = \frac{\nu}{2} \left[\frac{\pi R}{\mu_0} \operatorname{sgn}(y - x) + p\left(\frac{\nu}{2}[y - x]\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\nu}{2}[y + x] + \mu\right) \right]$$

$$p(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x - 1/x \\ -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{2n} B_n}{(2n)!} x^{2n-1}, \quad |x| < \varepsilon_0 \end{cases}$$

$f_0(x) = -\pi R^{-1}/\mu_0 \cdot f(\nu x + \mu)$, $0 < \varepsilon_0 < \pi$, B_n — числа Бернулли.

Разыскивая функцию $\psi(y)$ в виде ряда по многочленам Чебышева 1-го рода

$$\psi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} R^2 \tag{1.9}$$

(так как $\omega(\varepsilon) = 0$, то $\Psi_0 = 0$) и следуя методу ортогональных многочленов, приходим к бесконечной алгебраической системе относительно коэффициентов Ψ.

$$\Psi_{m+1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \Psi_n = h_m \tag{1.10}$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} k_0(y, x) \frac{T_n(y)}{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2} U_m(x)\, dx\, dy$$

$$h_m = \frac{2}{\pi^2} \int_{-1}^{1} f_0(x) \sqrt{1-x^2} U_m(x)\, dx$$

($U_m(x)$ — многочлены Чебышева 2-го рода).

Коэффициенты a_{mn}, h_m легко вычисляются, если воспользоваться квадратурными формулами типа Гаусса

$$a_{mn} \approx \frac{2}{l(l+1)} \sum_{j=1}^{l} \cos n y_j \sum_{i=1}^{l} \sin x_i \sin(m+1) x_i k_0(\cos y_j, \cos x_i)$$

$$h_m \approx \frac{2}{\pi(l+1)} \sum_{i=1}^{l} \sin x_i \sin(m+1) x_i f_0(\cos x_i) \tag{1.11}$$

где $y_j = (2j-1)\pi/2l$, $x_i = i\pi/(l+1)$, l — число узлов квадратурной формулы.

Квазирегулярность системы (1.10) можно показать, используя приемы работ [4, 8].

Для нахождения жесткости при кручении по формуле

$$C = 2G \int_0^{\pi} \int_0^{R} \varphi(r, \theta)\, r\, dr\, d\theta \tag{1.12}$$

определим функцию ω, используя (1.9) и (1.8):

$$\omega(\nu x + \mu) = -\nu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n}{n} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(x)$$

подставляя которую в первое выражение из (1.6), по формуле (1.12) (интегралы по r и θ вычисляются точно, а для вычисления интеграла по τ используются квадратурные формулы типа Гаусса) получаем для жесткости следующее выражение:

$$\frac{C}{G_1 R^4} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} - \frac{8\nu^2}{l+1} \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{1}{k(k+2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Psi_n}{n} \sum_{i=1}^{l} \sin x_i \sin n x_i \times$$
$$\times \sin k(\nu \cos x_i + \mu)$$

Перейдем к решению задачи 1б. Вводим фукции $\chi_0(r) = \varphi(r, 0)$ и $\chi_1(r) = \varphi(r, \pi)$. Из (1.3) имеем $\chi_0(r) = 0$, $r \overline{\in} [a_0, b_0]$ и $\chi_1(r) = 0$, $r \overline{\in} [a_1, b_1]$. Следуя схеме, изложенной при решении задачи 1а, получаем для определения введенных функций χ_0, χ_1 систему двух интегро-дифференциальных уравнений

$$\chi_i(r) - \frac{\mu_0}{\pi}\left\{\int\limits_{a_i}^{b_i} \chi_i'(t)\left[\frac{1}{t-r} - \frac{R^2}{r(rt-R^2)}\right]dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{a_{1-i}}^{b_{1-i}} \chi_{1-i}'(t)\left[\frac{1}{t+r} - \frac{R^2}{r(rt+R^2)}\right]dt\right\} = h(r) \quad (a_i \leqslant r \leqslant b_i,\ i = 0, 1)$$

$$h(r) = -8\mu_0 R/\pi \sum_{k=1,3,\ldots} \frac{1}{k^2-4}(r/R)^{k-1}$$

Как и при рассмотрении задачи 1а, получаем, что функции $\chi_i(r)$ $(i = 0, 1)$ в точках $r = a_i$ и $r = b_i$ непрерывны и $\chi_i(a_i) = \chi_i(b_i) = 0$. В частных случаях, когда $a_0 = a_1 > 0$, $b_0 = b_1$ или $a_1 = b_1 = 0$ (либо $a_0 = b_0 = 0$), получаем относительно функции $\chi(r) = \chi_0(r) = \chi_1(r)$ одно интегро-дифференциальное уравнение, которое решается так же, как и в случае задачи 1а. Если же $a_0 = a_1 = 0$, $b_0 = b_1 = b$, то для определения $\chi(r)$ имеем уравнение

$$\chi(r) - \frac{\mu_0}{\pi}\int\limits_0^b \chi'(t)\left[\frac{1}{t-r} + \frac{1}{t+r} - \frac{2tR^2}{t^2r^2-R^4}\right]dt = h(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant b) \tag{1.13}$$

которое в силу того, что ядро имеет в нуле неподвижную особенность, решается иначе.

Учитывая, что $\chi(b) = 0$ и обозначая $\chi(0) = A$, вводим функцию

$$\chi(r) = A + \int\limits_0^r \psi\left(\frac{t^2}{b^2}\right)dt = \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^b \operatorname{sgn}(r-t)\,\psi\left(\frac{t^2}{b^2}\right)dt \tag{1.14}$$

После замены переменных $r^2 = b^2\rho$, $t^2 = b^2\tau$ из (1.13) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\int\limits_0^1 \psi(\tau)\left[\frac{1}{\tau-\rho} + \frac{\mu\operatorname{sgn}(\tau-\rho)}{\sqrt{\tau}} - \frac{c}{\tau\rho-c^2}\right]d\tau = R[h_0(\rho) + 2\mu A^*] \quad (0 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

Здесь

$$\mu = \frac{\pi b}{4\mu_0}, \quad c = \left(\frac{R}{b}\right)^2, \quad A^* = \frac{A}{Rb}, \quad h_0(\rho) = 8\sum_{k=1,3,\ldots}\frac{1}{k^2-4}\left(\frac{\rho}{c}\right)^{(k-1)/2}$$

Анализ интегралов типа Коши показывает, что $\psi(\tau) = O(\tau^{-1/2})$, $\tau \to +0$ и $\psi(\tau) = O([1-\tau]^{-1/2})$, $\tau \to 1-0$. Поэтому ищем функцию $\psi(\tau)$ в виде разложения

$$\psi(\tau) = R \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n q_n^{1/2,\,-1/2}(\tau) \tag{1.15}$$

$$q_n^{\alpha,\beta}(\tau) = \tau^{\alpha}(1-\tau)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2\tau) \tag{1.16}$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби.

Полагая $\Psi_n = \Psi_n^0 + 2\mu A^* \Psi_n^1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, для определения коэффициентов Ψ_n^0, Ψ_n^1 получаем бесконечные системы

$$\Psi_m^i + \sum_{n=0}^{\infty} (s_{mn} + a_{mn}) \Psi_n^i = h_m^i \quad (m = 0, 1, \ldots;\ i = 0, 1) \tag{1.17}$$

$$\begin{gathered} s_{mn} = \frac{\mu}{\pi\gamma_m} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\operatorname{sgn}(\tau-\rho)}{\sqrt{\tau}} q_n^{1/2,\,-1/2}(\tau)\, q_m^{-1/2,\,1/2}(\rho)\, d\tau d\rho \\ a_{mn} = -\frac{c}{\pi\gamma_m} \int_0^1 \int_0^1 \frac{q_n^{1/2,\,-1/2}(\tau)\, q_m^{-1/2,\,1/2}(\rho)}{\tau\rho - c^2}\, d\tau d\rho \end{gathered} \tag{1.18}$$

$$h_m^0 = \frac{1}{\pi\gamma_m} \int_0^1 h_0(\rho)\, q_m^{-1/2,\,1/2}(\rho)\, d\rho, \qquad h_m^1 = \frac{\delta_{m0}}{\pi}, \qquad \gamma_m = \frac{1}{2} \left| \frac{\Gamma(m+1/2)}{m!} \right|^2$$

Из условия $\chi(b) = 0$ находим A^*

$$A^* = -\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Psi_n^0}{1 + 2\mu \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Psi_n^1}, \qquad \lambda_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!\,(2n+1)}$$

Интегралы в (1.18) вычисляются с помощью метода, изложенного в [3]

$$s_{mn} = \frac{2\mu\lambda_n}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+m+1}(2n+1)}{\pi\gamma_m (n+m+3/2)(n+m+1/2)(n-m+1/2)(n-m-1/2)} - \delta_{m0} \right]$$

$$a_{mn} = \frac{(-1)^{n+m+1}(2n+1)\lambda_n}{\pi c \gamma_m} \times$$

$$\times \sum_{j=\max\{m,n\}}^{\infty} \frac{\Gamma(j+3/2)\,\Gamma(j+1/2)\,(j!)^2 c^{-2j}}{(j-n)!\,(j-m)!\,(j+n+1)!\,(j+m+1)!}$$

$$h_m^0 = \frac{4(-1)^m}{\pi^{3/2}\gamma_m} \sum_{j=m}^{\infty} \frac{\Gamma(j+1/2)\, j!\, c^{-j}}{(2j+3)\,(j-m)!\,(j+m+1)!}$$

Устанавливая, что для $m = 1, 2, \ldots$

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{\infty} |s_{mn}| \leqslant \frac{\mu}{\pi^2 \lambda_m (m^2 - 1/4)^2}, \quad \sigma_m < \sigma_0 \leqslant \frac{\mu}{\pi^2} [16 + \pi^2]$$

$$\alpha_m = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{mn}| \leqslant \frac{3\sqrt{\pi}\,\Gamma(m + 3/2)}{8m\,(m+1)!\,c^2}, \quad \alpha_m < \alpha_0 \leqslant \frac{3\pi}{8c^2}$$

получаем квазирегулярность систем (1.17), а при выполнении условия

$$\mu\left(1 + \frac{16}{\pi^2}\right) + \frac{3\pi}{8c^2} < 1$$

их регулярность.

Используя спектральное соотношение

$$\int_0^1 \operatorname{sgn}(\tau - \rho) \frac{P_n^{1/2, -1/2}(1 - 2\tau)}{\sqrt{1-\tau}} d\tau = \frac{2\sqrt{1-\rho}}{n + 1/2} P_n^{-1/2, 1/2}(1 - 2\rho) - 2\lambda_n$$

$$(0 \leqslant \rho \leqslant 1)$$

при подстановке разложения (1.15) в (1.14), получаем выражение для функции χ

$$\chi(b\sqrt{\rho}) = -Rb \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Psi_n}{2n+1} \sqrt{1-\rho}\, P_n^{1/2, 1/2}(1 - 2\rho)$$

с помощью которого находим жесткость при кручении

$$\frac{C}{G_1 R^4} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(1/2 + n)}{n!} \times$$

$$\times \Psi_n \sum_{i=n}^{\infty} \frac{\Gamma(i - 1/2)\, i!\, c^{-i-1}}{(i-n)!\,(i+n+1)!\,(2i+3)}$$

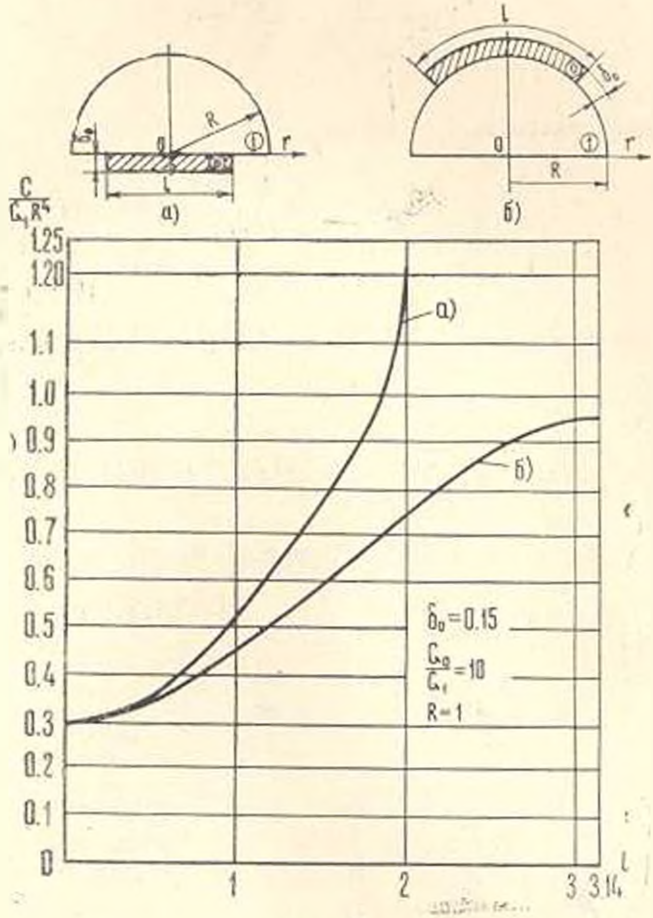
В результате численной реализации (значения величин, для которых проведена численная реализация, вынесены на фигурах) показано, что жесткость стержня достигает максимума, если подкрепление расположить в месте, где максимальны касательные напряжения в основном материале, то есть в центре прямолинейной грани (фиг. 2). Менее эффективно подкрепление дугового участка боковой поверхности, причем для длины подкрепления $l > R$ подкрепление боковой поверхности вообще неэффективно (фиг. 2). Также установлено, что в случае подкрепления стержней как прямолинейной грани, так и боковой поверхности подкреплениями небольших длин $l \leqslant R/3$ изменения жесткости стержней находятся в пределах 10% (фиг. 1).

§ 2. Рассмотрим задачу 2 в предположении, что на участках $(a_j \leqslant r \leqslant b_j,\ z = c_j,\ j = 1, 2, \ldots, k)$ имеется k — кольцевых трещин (фиг. 3). Задача эквивалентна определению функции $u = u(r, z)$ (перемещение в тангенциальном направлении), удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (0 \leqslant r \leqslant R, \ -\infty < z < \infty) \qquad (2.1)$$

краевому условию

$$\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right]_{r=R} = 0 \quad (-\infty < z < \infty) \qquad (2.2)$$



Фиг. 2.

и $2k$ условиям на трещинах

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, c_j) = -\frac{2Mr}{\pi G R^4} \quad (a_j \leqslant r \leqslant b_j) \qquad (2.3)$$

$$u(r, c_j - 0) - u(r, c_j + 0) = \chi_j(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant R)$$
$$\chi_j(r) = 0, \quad r \notin (a_j, b_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \qquad (2.4)$$

($\tau_{r\theta} = G(\partial u/\partial r - u/r)$, $\tau_{\theta z} = G\,\partial u/\partial z$, G — модуль сдвига).

Применяя к (2.1). (2.2) по схеме работы [7] преобразование Фурье

$$u_\lambda(r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(r, z) e^{i\lambda z} dz, \quad u(r, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u_\lambda(r) e^{-i\lambda z} d\lambda \tag{2.5}$$

учитывая условия (2.4). приходим к одномерной краевой задаче

$$\frac{d^2u_\lambda(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_\lambda(r)}{dr} - \frac{1}{r^2}u_\lambda(r) - \lambda^2 u_\lambda(r) = i\lambda \sum_{n=1}^{k} \chi_n(r) e^{i\lambda c_n}$$

$$\left.\frac{du_\lambda(r)}{dr}\right|_{r=R} = \left.\frac{u_\lambda(r)}{r}\right|_{r=R} \quad (0 < r \leqslant R)$$

решая которую с помощью функции Грина

$$G_\lambda(r, \xi) = -\int_0^\infty \frac{t\xi}{\lambda^2 + t^2} J_1(tr) J_1(t\xi) dt - \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} \xi I_1(\lambda\xi) I_1(\lambda r)$$

($J_n(z)$ — функции Бесселя, $I_n(z)$ и $K_n(z)$ — модифицированные функции Бесселя), переходя к функции $u(r, z)$ и реализуя условия (2.3), получаем окончательно следующую систему интегральных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{d}{dr}\int_{a_j}^{b_j} \xi\chi_n(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}k_{n,j}(r, \xi) d\xi =$$

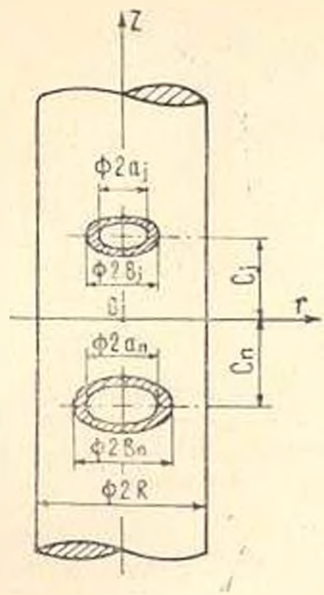
$$= f(r) \quad (a_j \leqslant r \leqslant b_j,\ j = 1, 2, \dots, k)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\xi}k_{n,j}(r, \xi) = \int_0^\infty \lambda^2 J_1(\lambda\xi) \times$$

$$\times J_1(\lambda r) e^{-\lambda|c_n - c_j|} d\lambda -$$

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)} I_1(\lambda\xi) I_1(\lambda r) \lambda^2 \cos\lambda(c_n - c_j) d\lambda$$

$$f(r) = -4Mr(\pi G R^4)^{-1}$$



Фиг. 3.

В случае одной монетообразной трещины ($k = 1$, $a_1 = 0$, $b_1 = b$, $c_1 = 0$, $\chi_1 = \chi$) имеем интегральное уравнение

$$\frac{d}{dr}\int_0^b \xi\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[W_{00}^{(1)}(r, \xi) + R(r, \xi)\right] d\xi = f(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant b) \tag{2.6}$$

$W_{00}^{(1)}(r, \xi)$ — разрывный интеграл Вебера-Сонина

$$W_{\mu\lambda}^{(\nu)}(r,\xi)=\int_0^\infty t^\nu J_\mu(tr)\,J_\lambda(t\xi)\,dt$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\xi}R(r,\xi)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)}I_1(\lambda\xi)\,I_1(\lambda r)\,\lambda^2 d\lambda$$

В случае двух трещин радиуса b, расположенных на расстояни[и] $2c$ друг от друга ($k=2,\ \ a_1=a_2=0,\ \ b_1=b_2=b,\ \ c_1=c,\ \ c_2=-c,$ $\chi_1=\chi_2=\chi$) получаем уравнение

$$\frac{d}{dr}\int_0^b\xi\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[W_{00}^{(0)}(r,\xi)+R^*(r,\xi)\right]d\xi=f(r)\quad(0\leqslant r\leqslant b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\xi}R^*(r,\xi)=\int_0^\infty\lambda^2J_1(\lambda\xi)\,J_1(\lambda r)\,e^{-2\lambda c}\,d\lambda-\qquad(2.7)$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_0^\infty\frac{K_2(\lambda R)}{I_2(\lambda R)}I_1(\lambda\xi)\,I_1(\lambda r)\,\lambda^2\cos^2\lambda c\,d\lambda$$

Согласно спектральному соотношению

$$\frac{d}{dy}\int_0^1\eta^2\sqrt{1-\eta^2}P_n^{1,1/2}(1-2\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}W_{00}^{(0)}(y,\eta)\,d\eta=$$

$$=\pi(n+1)(2n+3)\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right]^2yP_n^{1,1/2}(1-2y^2)\qquad(2.8)$$

решение уравнений (2.6), (2.7) ищем в виде

$$\chi(\xi)=\sum_{n=0}^\infty X_n\frac{\xi}{b}\sqrt{b^2-\xi^2}P_n^{1,1/2}\left(1-2\frac{\xi^2}{b^2}\right)\qquad(2.9)$$

Соотношение (2.8) устанавливается следующим образом. Интегриру[я] по частям левую часть равенства

$$\int_0^1W_{00}^{(0)}(y,\eta)\frac{\eta P_{2n}(\sqrt{1-\eta^2})}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2P_{2n}(\sqrt{1-y^2})$$

($P_n(z)$ — многочлены Лежандра), учитывая значение интеграла

$$\int_0^y\frac{\eta P_{2n}(\sqrt{1-\eta^2})}{\sqrt{1-\eta^2}}\,d\eta=\frac{y^2\sqrt{1-y^2}}{2n}P_{n-1}^{1,1/2}(1-2y^2)$$

получаем соотношение

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} W_{00}^{(0)}(y, \eta)\, \eta^2 \sqrt{1-\eta^2}\, P_{n-1}^{1,\,1/2}(1-2\eta^2)\, d\eta =$$

$$= -\frac{\pi n}{2} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 P_{2n}\left(\sqrt{1-y^2}\right)$$

дифференцируя обе части которого с учетом

$$\frac{d}{dy} P_{2n}\left(\sqrt{1-y^2}\right) = -(2n+1)\, y P_{n-1}^{1,\,1/2}(1-2y^2)$$

приходим к (2.8).

Подставляя (2.9) последовательно в уравнения (2.6) и (2.7), следуя методу ортогональных многочленов, приходим к бесконечной алгебраической системе, имеющей вид в первом случае

$$\lambda_m X_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{(0)} X_n = f_m \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

и во втором

$$\lambda_m X_m + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{mn}^{(2)} + b_{mn}\right) X_n = f_m \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

$$\lambda_m = \frac{2\pi (m+1)^2}{4m+5} \left[\frac{(2m+1)!!}{(2m+2)!!}\right]^2, \quad f_m = -\frac{8Ma\delta_{m0}}{15\pi R^4 G}$$

$$a_{mn}^{(i)} = \frac{(2n+1)(2m+1)(2n-1)!!(2m-1)!!}{(-1)^{m+n-1} m!\, n!\, 2^{m+n}} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \frac{I_{2n+5/2}(\lambda b)\, I_{2m+5/2}(\lambda b)}{\lambda} \frac{K_0(\lambda R)}{I_0(\lambda R)} \cos \lambda c\, d\lambda$$

$$b_{mn} = \frac{\sqrt{\pi}\,(2n-1)!!(2m-1)!!(2m+1)(2n+1)}{2^{m+n+2} m!\, n!} \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (m+n+k+2)!\, \rho^{m+n+k+5/2}}{k!\, \Gamma(2n+k+7/2)\, \Gamma(1/2-n+m-k)} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n+k+j+5/2)\, \Gamma(1/2-n+m-k+j)}{j!\, \Gamma(2m+j+7/2)\, \rho^{-j}}, \quad \rho = \frac{1}{1+4(c/b)^2}$$

Для этих систем можно доказать квазирегулярность [4, 8].

Наибольший интерес представляет коэффициент интенсивности напряжений

$$K_{III} = \sqrt{2} \lim_{r \to b+0} \sqrt{r-b}\, \tau_{\varphi z}(r, 0) \qquad (2.10)$$

который определим для случая одной трещины (он вычисляется аналогично, когда имеется $k \geqslant 2$ трещин). Запишем выражение для $\tau_{\theta z}$ при $z=0$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2}\left\{\frac{d}{dr}\int_0^b \xi\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}\left[W_{00}^{(0)}(r, \xi) + R(r, \xi)\right]d\xi - f(r)\right\} \tag{2.11}$$

которое при $r \to b+0$ можно представить в виде

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2}\frac{d}{dr}\int_0^b \xi\chi(\xi)\frac{\partial}{\partial\xi}W_{00}^{(0)}(r, \xi)\,d\xi + \Omega_0(r) \tag{2.12}$$

где $\Omega_i(r)$ ($i = 0, 1, \ldots, 4$) ограничены при $r \to b+0$. Учитывая, что для $W_{00}^{(0)}(r, \xi)$ при $\xi \to r \neq 0$ справедливо следующее представление:

$$W_{00}^{(0)}(r, \xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{r\xi}}\ln|\xi - r| + \Phi_0(r, \xi)$$

($\Phi_0(r, \xi)$ ограничена при $\xi \to r \neq 0$), из (2.12) имеем при $r \to b+0$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2\pi}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\int_0^b \xi\chi(\xi)\frac{d\xi}{\xi - r} + \Omega_1(r)$$

откуда с учетом (2.9) получаем при $r \to b+0$

$$\tau_{\theta z} = \frac{G}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty} X_n\frac{d}{dr}\frac{1}{r}s_n(r) + \Omega_2(r) \tag{2.13}$$

где

$$s_n(b\sqrt{t}) = b^2\int_0^1 \frac{q_n^{1,1/2}(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$$

($q_n^{\alpha,\beta}(\tau)$ определяются формулой (1.16)).

Принимая во внимание представление, получающееся из формулы 15.3 (9) из [2] при $t \to 1+0$

$$\int_0^1 \frac{q_n^{\alpha,\beta}(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = -\frac{\pi}{\sin\pi\beta}t^{\alpha}(t-1)^{\beta}P_n^{\alpha,\beta}(1-2t) + \Phi_1(t)$$

($\Phi_1(t)$ ограничена при $t \to 1+0$), имеем при $r \to b+0$

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{r}s_n(r) = \frac{1}{\sqrt{r-b}}\frac{(-1)^n\Gamma(n+3/2)}{n!}\sqrt{2\pi b} + \Omega_3(r)$$

Подставляя последнее выражение в (2.13), получаем, что при $r \to b+0$ при $\tau_{\theta z}(r, 0)$ имеет место представление

$$\tau_{\theta z} = G\sqrt{\frac{b}{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(n+3/2)}{n!}X_n\frac{1}{\sqrt{r-b}} + \Omega_0(r)$$

откуда, учитывая (2.10), находим

$$K_{III} = G\sqrt{\frac{b}{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(n+3/2)}{n!}X_n$$

Для одной трещины при $b \leqslant 0.6\,R$ получаем следующее приближенное выражение для коэффициента интенсивности напряжений $\tau_{\theta z}$, которое согласуется с результатом работы [9]

$$K_{III} \sim \frac{8}{3}\pi^{-2}Mb^{3/2}R^{-4}$$

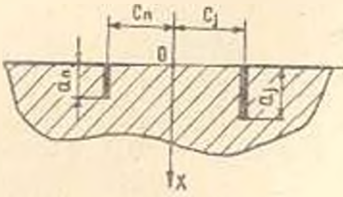
В случае двух трещин радиуса b, расположенных на расстоянии $2c$ друг от друга, обнаружено, что при $\lambda = b/c = 10$, $K_{III}^{(1)}/K_{III}^{(2)} = 1.32$ ($K_{III}^{(1)}$, $K_{III}^{(2)}$ — коэффициенты интенсивности напряжений для одной из двух трещин соответственно), то есть наблюдается эффект понижения коэффициента интенсивности напряжений при сближении трещин. Этот факт для трещин продольного сдвига был впервые отмечен Смитом [10], а затем для трещин нормального разрыва в работе [5].

§ 3. Задача 2 при $b_j = R$ ($j = 1, 2,\dots, k$), когда кольцевые трещины неглубокие ($a_j/R > 0.85$), эквивалентна антиплоской задаче теории упругости для ослабленной k-полосовыми трещинами ($0 \leqslant x < a_j$, $y = c_j$, $j = 1, 2,\dots, k$) полуплоскости ($0 \leqslant x < \infty$, $-\infty < y < \infty$), к берегам трещин которой приложена сдвигающая нагрузка, равномерно распределенная вдоль оси z (фиг. 4). В такой постановке для случая одной трещины задача рассмотрена в [6]. Здесь же иным способом решается более общая (для k-трещин) задача, которая сводится к следующей краевой задаче:

$$\Delta W = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)W = 0 \quad (3.1)$$

$$(0 \leqslant x < \infty, \ -\infty < y < \infty)$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad (-\infty < y < \infty) \quad (3.2)$$



Фиг. 4.

($\tau_{xz} = G(\partial W/\partial x)$, $\tau_{yz} = G(\partial W/\partial y)$, G — модуль сдвига) с выполнением условий на трещинах

$$\left.\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{y=c_j} = -\frac{2M}{\pi G R^3} \quad (0 \leqslant x \leqslant a_j) \qquad (3.3)$$

$$W(x, c_j - 0) - W(x, c_j + 0) = \chi_j(x) \qquad (3.4)$$

$$(\chi_j(x) = 0, \ x > a_j, \ j = 1, 2,\dots, k)$$

Применяя интегральное преобразование (2.5) по схеме [7] к (3.1), (3.2) и учитывая условия (3.4), обозначая при этом

$$W_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W(x, y) e^{i\lambda y} dy$$

приходим к краевой задаче

$$\frac{d^2 W_\lambda(x)}{dx^2} - \lambda^2 W_\lambda(x) = i\lambda \sum_{n=1}^{k} \chi_n(x) e^{i\lambda c_n}$$

$$\left.\frac{dW_\lambda(x)}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad W_\lambda(x)|_{x\to\infty} \to 0$$

решая которую с помощью функции Грина

$$G_\lambda(x, \xi) = -\frac{1}{2|\lambda|}\left[e^{-|\lambda||x-\xi|} + e^{-|\lambda|(x+\xi)}\right]$$

так же, как и в задаче 2, получаем следующую систему интегральных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{k} \int_0^{a_n} \chi'_n(\eta)\left[l_{n,j}(\eta - x) + l_{n,j}(\eta + x)\right] d\eta = f_0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a_j)$$

$$l_{n,j}(y) = \frac{y}{y^2 + (c_n - c_j)^2} \quad (1 \leqslant j,\ n \leqslant k), \quad f_0 = \frac{4M}{GK^2}$$

(производные функций $\chi_n(\eta)$ появились за счет интегрирования по частям).

В случае двух одинаковых трещин ($a_1 = a_2 = a$), расположенных на расстоянии $2c$ друг от друга ($c_1 = c$, $c_2 = -c$), имеем уравнение ($\chi_1 = \chi_2 = \chi$)

$$\int_{-a}^{a} \chi'(\eta)\left[\frac{1}{\eta - x} + \frac{\eta - x}{(\eta - x)^2 + 4c^2}\right] d\eta = f_0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a) \qquad (3.5)$$

Здесь функция $\chi'(\eta)$ нечетным образом продолжена на отрицательные значения аргумента. Вводя функцию $\psi(\eta/a) = \chi'(\eta)$, получаем уравнение ($\mu = c/a$)

$$\int_{-1}^{1} \psi(\tau)\left[\frac{1}{\tau - t} + \frac{\tau - t}{(\tau - t)^2 + 4\mu^2}\right] d\tau = f_0 \quad (|t| < 1)$$

решение которого с учетом того, что $\psi(\tau) = -\psi(-\tau)$, ищется в виде

$$\psi(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \Psi_m \frac{T_{2m+1}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}}$$

Для определения Ψ_m приходим к квазирегулярной бесконечной системе (аналогичной (1.10))

$$\Psi_m + \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\Psi_n = h_m, \quad m = 0,\ 1, \ldots$$

$$a_{mn} = \frac{2}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{T_{2m+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sqrt{1-t^2}\, U_{2n}(t)\,\frac{\tau - t}{(\tau - t)^2 + 4\rho^2}\, d\tau dt$$

$$h_m = 2 f_0 \lambda_m / \pi^2$$

Для a_{mn} получаются формулы, аналогичные (1.11).

Коэффициент интенсивности напряжений τ_{yz} определяется по схеме, изложенной при решении задачи 2, только вместо формулы (2.11) следует воспользоваться выражением

$$\tau_{yz}(x,\ c) = -\frac{G}{2\pi}\left\{\int_{-a}^{a} \chi'(\eta)\left[\frac{1}{\eta - x} + \frac{\eta - x}{(\eta - x)^2 + 4c^2}\right] d\eta - f_0\right\}$$

и окончательно имеем

$$K_{III} = \frac{G}{2}\sqrt{a}\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n$$

Таблица 1

$\lambda = a/c$	0.50	1.0	2.0	3.0
$K_{III}^{(1)}/K_{III}^{(2)}$	1.03	1.10	1.24	1.35

Как и для внутренних трещин, рассмотрен случай сближения двух трещин ($c \to 0$). Результаты вычислений сведены в таблицу, из которой видно, что при сближении трещин коэффициент интенсивности напряжений также уменьшается, причем взаимное влияние трещин друг на друга проявляется в большей степени, когда трещины выходят на границу, по сравнению с внутренними дискообразными трещинами.

В заключение авторы приносят глубокую благодарность Н. Х. Арутюняну за постановку задач.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова
Одесский политехнический институт

Поступила 10 X 1980

Յու. Ա. ԱՆՏԻՊՈՎ, Ա. Ֆ. ԴԱՇՉԵՆԿՈ, Գ. Յա. ՊՈՊՈՎ

ՃԱՔԵՐԻ ԵՎ ԲԱՐԱԿ ԱՄՐԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ ՉՈՂՆԵՐԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է բարակ ծածկույթներով ուժեղացված կիսակլոր լայնական կտրվածքով առաձգական ձողերի և լայնական օղակաձև ճաքեր ունեցող գլանային լիսեռների ոլորման խնդիրներին։

Ուժեղացված ձողերի ոլորման խնդրի համար ստացվել են ոլորման կոշտության համար առնչություններ՝ կախված ամրացման երկարությունից և դիրքից, իսկ ճաքերով գլանային լիսեռների ոլորման խնդրի համար որոշվել են լարումների ինտենսիվության գործակիցները կախված ճաքերի քանակից և դիրքից։

Բերված խնդիրների համար տրվում են թվային օրինակներ։

ON SOME PROBLEMS OF ROD TWISTING AT THE PRESENCE OF CRACKS AND THIN PROPS

J. A. ANTIPOV, A. F. DASCHENKO, G. J. POPOV

S u m m a r y

This paper deals with the problems of twisting elastic rods with semi-circular cross-sections strengthened with thin reinforced coverings and circular cylindrical shafts with transversal annular cracks. For problems with reinforcement, rigidity relationships are given: twisting depending on the position and length of reinforcement and problems concerning crack relationships of tension coefficients at the edges of cracks depending on the position and quantity of cracks are indicated.

A numerical solution is given for all problems discussed in the paper.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. М.: Физматгиз, 1963, 686 с.
2. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. т. 2. М.: «Наука», 1970, 328 с.
3. *Маричев О. И.* Метод вычисления интегралов от специальных функций. Минск: «Наука и техника», 1978, 311 с.
4. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением.— ПММ, 1970, т. 34, в. 3, с. 412—421.
5. *Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.* Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев: Изд-во «Наукова думка», 1976, 443 с.
6. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Физматгиз, 1974, 416 с.
7. *Попов Г. Я.* Об одном способе решения задач механики для области с разрезами и тонкими включениями.— ПММ, 1978, т. 42, в. 1, с. 122—135.
8. *Попов Г. Я.* О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости.— ПММ, 1969, т. 33, в. 3, с. 518—531.
9. *Си Дж., Эмбли Дж.* Мгновенное приложение крутящего момента к дискообразной трещине.— Прикл. механика, изд-во «Мир», 1972, № 2, с. 76—81.
10. *Smith E.* The extension of two parallel non-coplanar cracks by an applied stress. —Int. J. Eng. Sci., 1971, 9, 7, c. 631—638

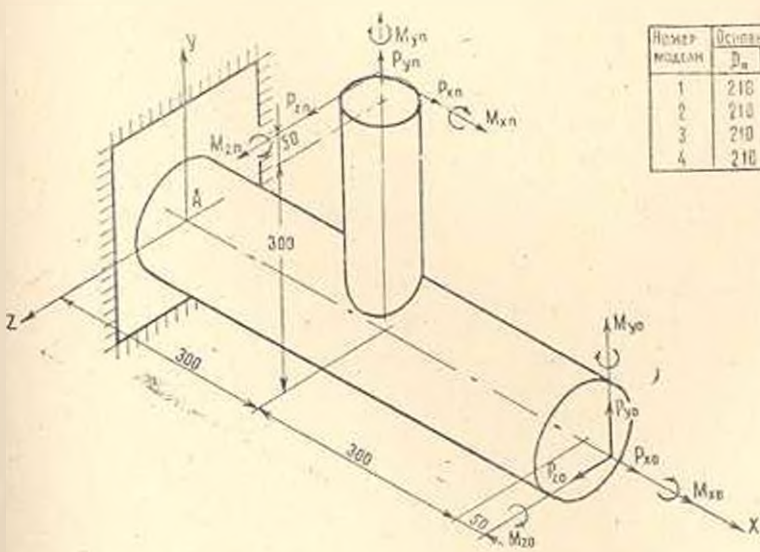
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXXV, № 2, 1982 Механика

А. Н. ЕЛЬЦОВ, А. А. ЛИВШИЦ, Э. А. МОЛДАВСКИЙ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ

В различных отраслях техники широко используются конструкции, представляющие собой пересечение цилиндрических оболочек (оболочечные тройники). Определение напряженно-деформированного состояния (НДС) таких конструкций в зоне пересечения оболочек является весьма сложной проблемой, особенно если отношение диаметров патрубка (d) и основной оболочки (D) близко к единице. Случай внутреннего давления был рассмотрен в работах [1]—[3], случай поперечной силы, действующей на патрубок — в работе [4]. Отдельные численные результаты получены в США группой профессора Корума [5], [6] для более широкого диапазона нагрузок. Однако, отсутствие алгоритма расчета не дает возможности использовать эти результаты в расчетной практике.



Номер модели	Основные размеры, мм			
	$D_н$	$d_н$	H	h
1	210	105	1	1
2	210	105	2	2
3	210	210	2	2
4	210	210	3	3

Фиг. 1. Оболочки и действующие нагрузки.

В настоящей работе экспериментально исследуется влияние вида нагружения на напряженное состояние оболочек-тройников в случае защемления торца основной оболочки. Основные размеры моделей и варианты нагружения представлены на фиг. 1. В работе излагаются лишь результаты испытаний моделей № 4, изготовленных из стали и эпоксидной смолы.

Приняты обозначения: первый индекс обозначает направление действия нагрузки, второй — объект приложения. Например, P_{xo} — сила, направленная вдоль оси Ax и приложенная к оболочке; $M_{yп}$ — пара сил, скручивающая патрубок, момент которой параллелен оси Ay.

Обе модели испытывались методом тензометрирования, а эпоксидный тройник испытывался также методом фотоупругости с «замораживанием» деформаций.

Для экспериментов применялись деформационные тензорезисторы ПКБ-5-100 с коэффициентом тензочувствительности 2,1. Количество тензорезисторов на оболочках колебалось от 368 до 480 штук. Подготовка тензорезисторов производилась по обычной методике (проверка коэффициента тензочувствительности, нанесение подслоя, сушка, вторичное нанесение подслоя), приклеивание тензорезисторов на металлические модели осуществлялось клеем БФ-2. Термообработка: нагрев до 70°С, выдержка в течение часа, нагрев до 140° С и выдержка в течение двух часов, нагрев до 180° С и выдержка два часа, затем — охлаждение вместе с термостатом.

Для приклеивания тензорезисторов на эпоксидную оболочку применялся клей того же состава, что и сама оболочка. Так как процесс полимеризации длится около трех часов, тензорезисторы при приклейке прижимались специальными пружинными поджимами.

Тензометрирование проводилось с использованием измерительно-вычислительного комплекса «Харьков» (измеритель деформаций ИД-40, ЭВМ «Днепр-21»), разработанного в Харьковском авиационном институте, который позволяет производить как регистрацию относительных деформаций тензорезисторов в двух режимах (ручном и автоматическом), так и дальнейшую обработку результатов измерений.

При проведении экспериментов на эпоксидной модели тройника регистрация показаний тензорезисторов проводилась в ручном режиме, так как на каждом этапе нагружения приходилось делать выдержку в 1,5—2 мин. для ликвидации явления последействия (из-за нагрева тензорезисторов).

Испытание эпоксидной модели методом фотоупругости проводилось на кафедре теории упругости Киевского государственного университета на стандартной аппаратуре. Срезы делались с помощью алмазных дисков, применение которых не требует дальнейшей полировки срезов.

Использование четырехдатчиковых розеток, наклеенных снаружи и внутри моделей, позволило получить достаточно полную картину НДС тройников при каждом виде нагружения. Розетки устанавливались на лучах, сходящихся (в плане) в одном центре-точке пересечения оси патрубка и поверхности основной оболочки. Первый луч (0°) лежит в поперечной плоскости симметрии и совпадает с образующей основной оболочки, остальные лучи образуют между собой углы в 30°.

Необходимость сравнения опытных данных для различных вариантов нагружения потребовала введения номинальных напряжений, которые определялись следующим образом:

осевая нагрузка $\sigma_н = P/F$, поперечная сила $\sigma_н = Pa(r_1/J)$, изгибающий момент $\sigma_н = M_и(r_1/J)$, крутящий момент $\sigma_н = M_{кр}(r_1/J_p)$, где

P — величина действующей осевой (поперечной) силы; $M_{и}$ — величина изгибающего момента; $M_{кр}$ — величина крутящего момента; r_1 — наружный радиус оболочки (патрубка); J — осевой момент инерции оболочки (патрубка); J_p — полярный момент инерции оболочки (патрубка); a — наименьшее расстояние от точки приложения поперечной силы до образующей оболочки (в случае нагружения патрубка) или расстояние от точки приложения силы до поперечной плоскости симметрии (в случае нагружения оболочки); F — площадь сечения оболочки (патрубка).

Относя максимальные значения нормальных напряжений, полученные в эксперименте, к номинальным напряжениям, вычисляем коэффициент концентрации напряжений

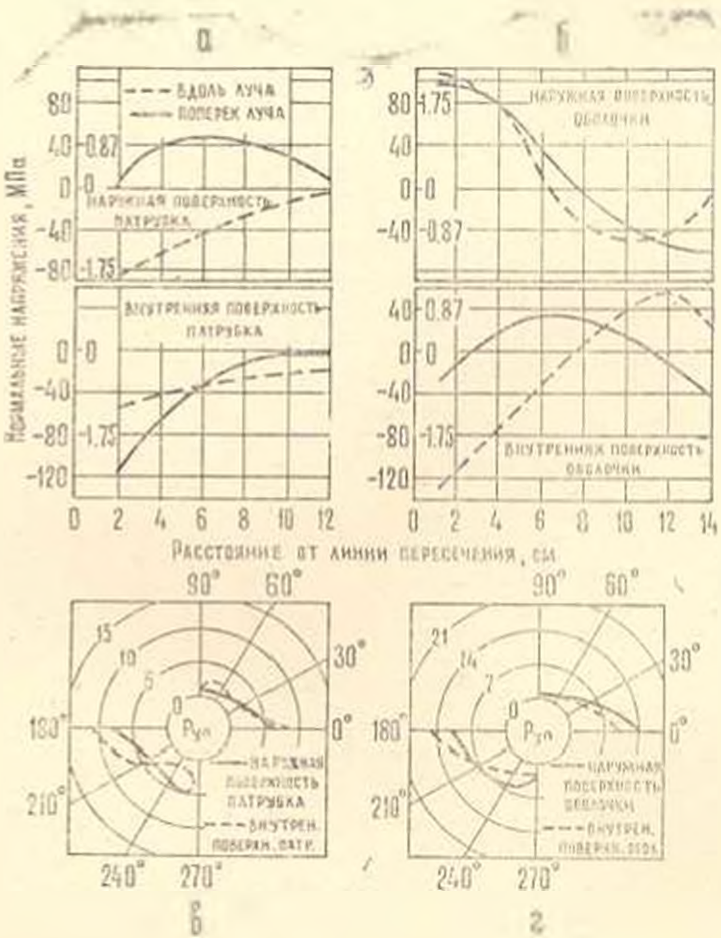
$$K = \frac{\sigma_э}{\sigma_н},$$

где $\sigma_э$ — напряжения, найденные в эксперименте; $\sigma_н$ — номинальные напряжения, вычисляемые по вышеприведенным формулам.

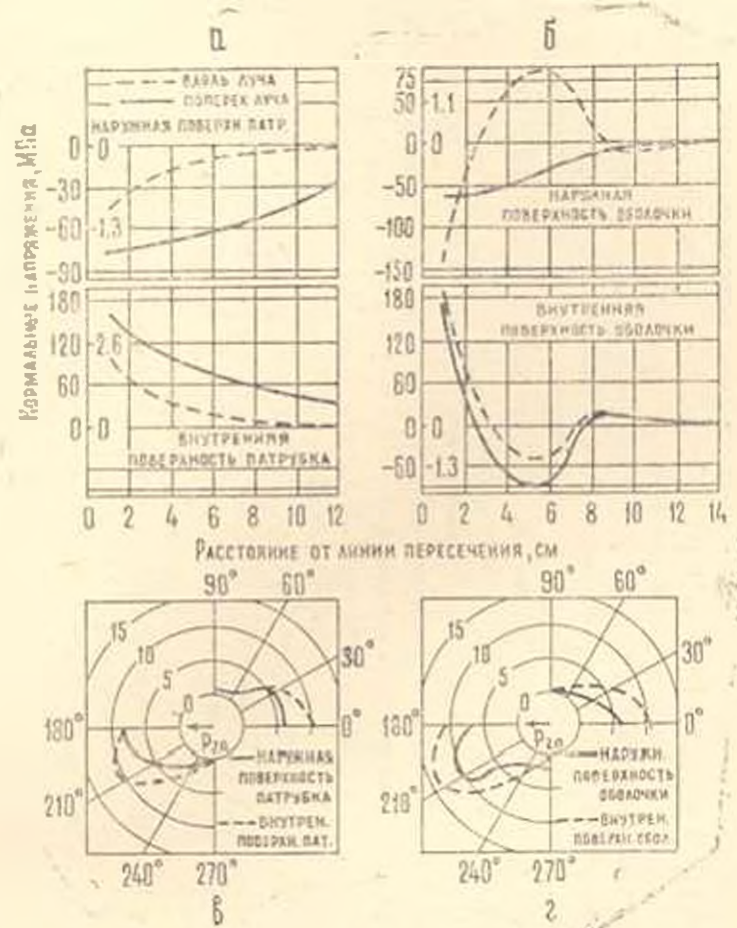
На фиг. 2—11 представлены графики, показывающие зависимость нормальных напряжений от расстояния до линии пересечения основной оболочки и патрубка (случаи а, б) на наиболее нагруженном луче при каждом виде нагружения. Левые вертикальные шкалы напряжений — для металлической модели, правые — для эпоксидной. На тех же фигурах (случаи в, г) показаны зависимости коэффициентов концентрации от расположения лучей на модели.

Таблица 1

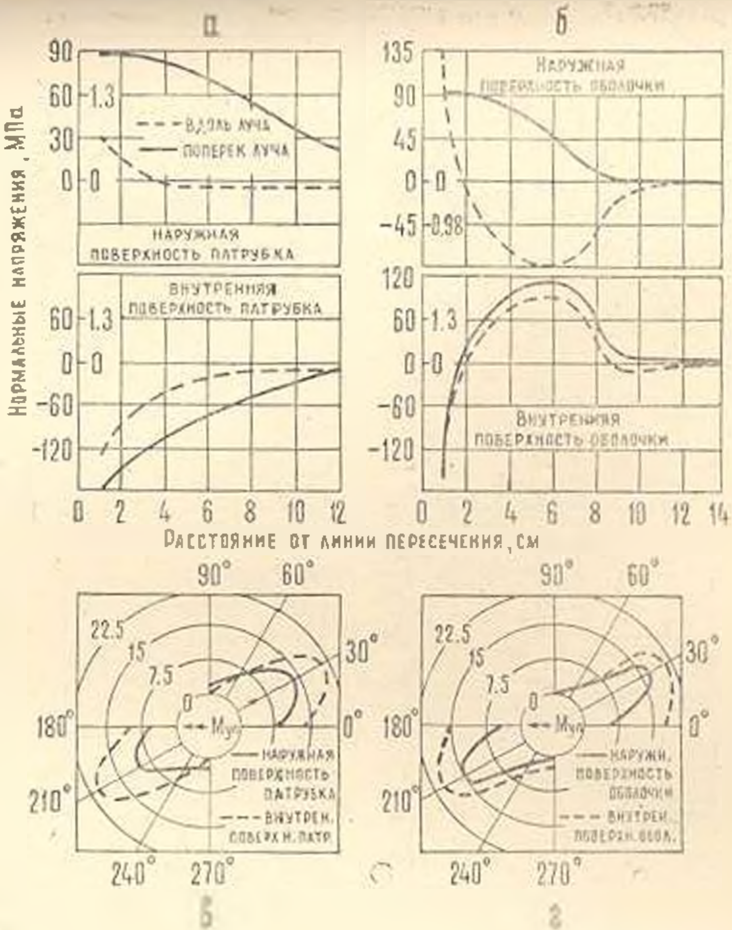
Нагрузка	Коэффициент концентрации	Зона максимальных напряжений
P_{yn} — осевая сила на патрубок	15.2	Наружная поверхность оболочки, луч 180°
P_{zn} — поперечная сила на патрубок, плоскость Ayz	13.6	Внутренняя поверхность патрубка, луч 180°
M_{yn} — крутящий момент на патрубок	21.6	Внутренняя поверхность патрубка, луч 210°
M_{zn} — изгибающий момент на патрубок, плоскость Axy	7.8	Внутренняя поверхность патрубка, луч 180°
M_{xn} — изгибающий момент на патрубок, плоскость Ayz	7.7	Внутренняя поверхность оболочки, луч 0°
P_{x0} — осевая сила на оболочку	17.8	Внутренняя поверхность патрубка, луч 180°
P_{y0} — поперечная сила на оболочку, плоскость Axy	11.3	Внутренняя поверхность патрубка, луч 180°
M_{x0} — крутящий момент на оболочку	22	Внутренняя поверхность патрубка, луч 30°
M_{z0} — изгибающий момент на оболочку, плоскость Axy	10.3	Внутренняя поверхность патрубка, луч 0°
P_{xn} — поперечная сила на патрубок, плоскость Axy	11.5	Внутренняя поверхность патрубка, луч 180°



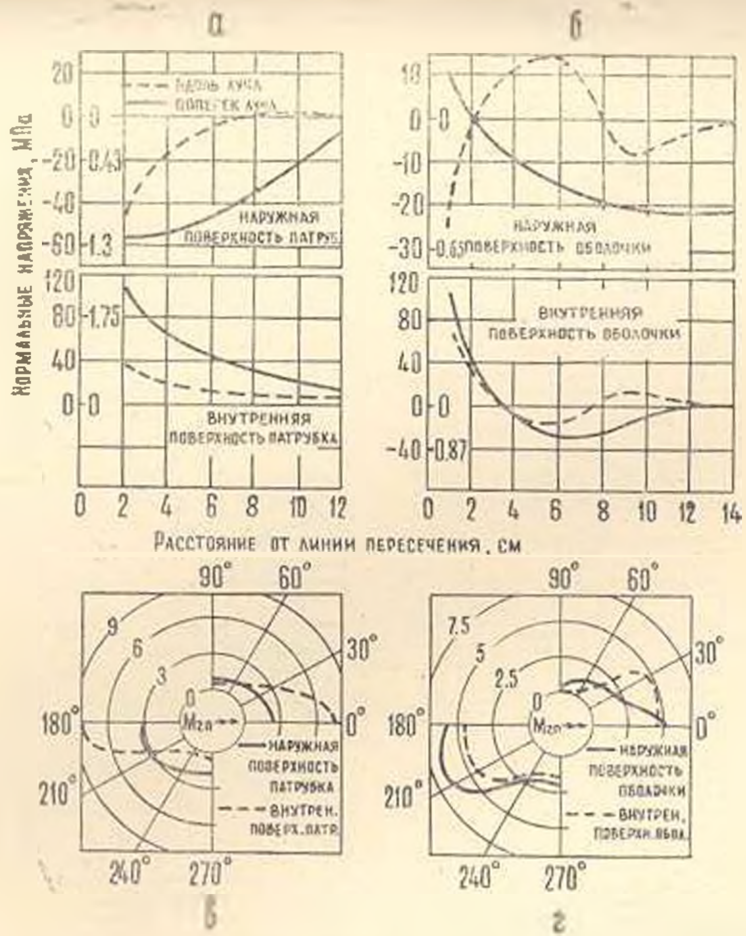
Фиг. 2. Картина напряженного состояния при действии на патрубок осевой силы P_{yn}.



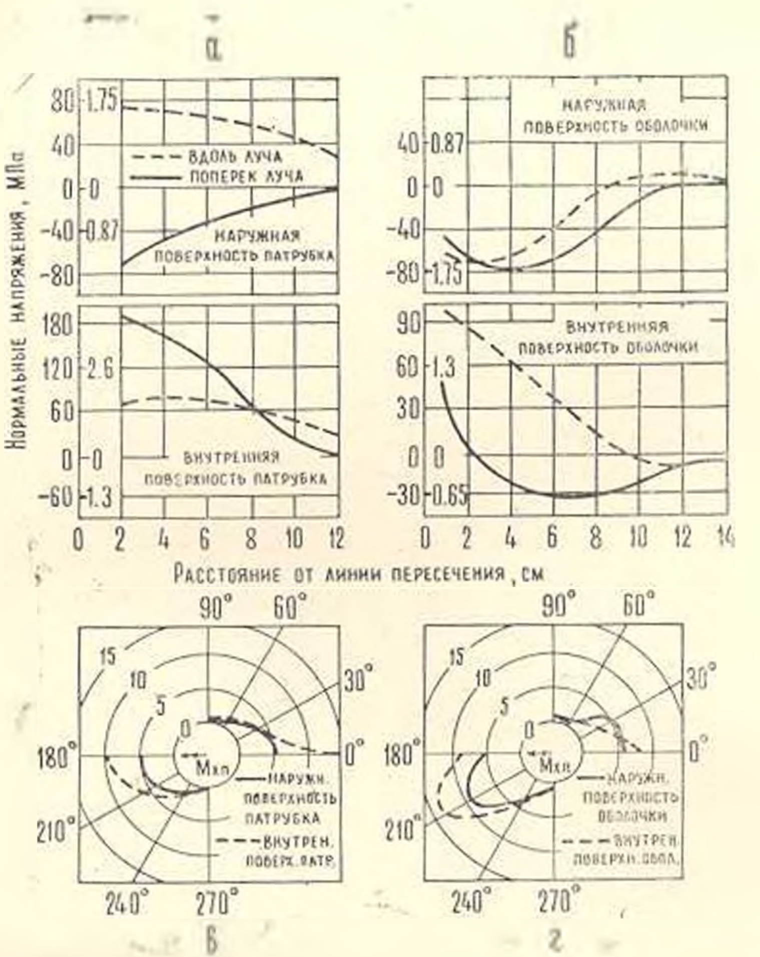
Фиг. 3. Картина напряженного состояния при действии на патрубок поперечной силы, плоскость A_{zz}



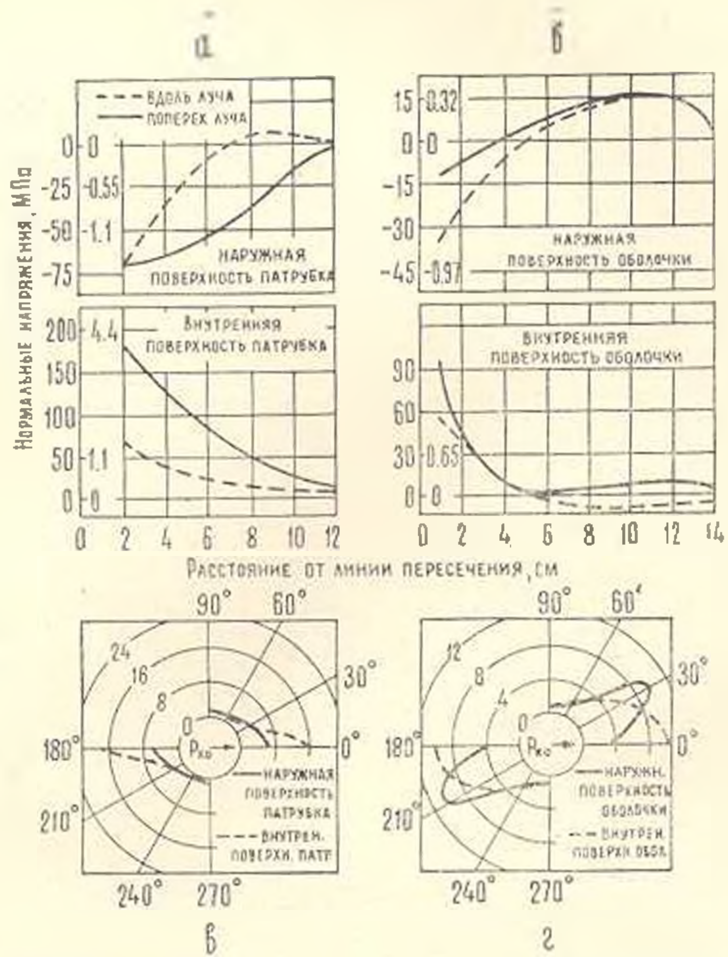
Фиг. 4. Картина напряженного состояния при действии на патрубок крутящего момента M_{yn}



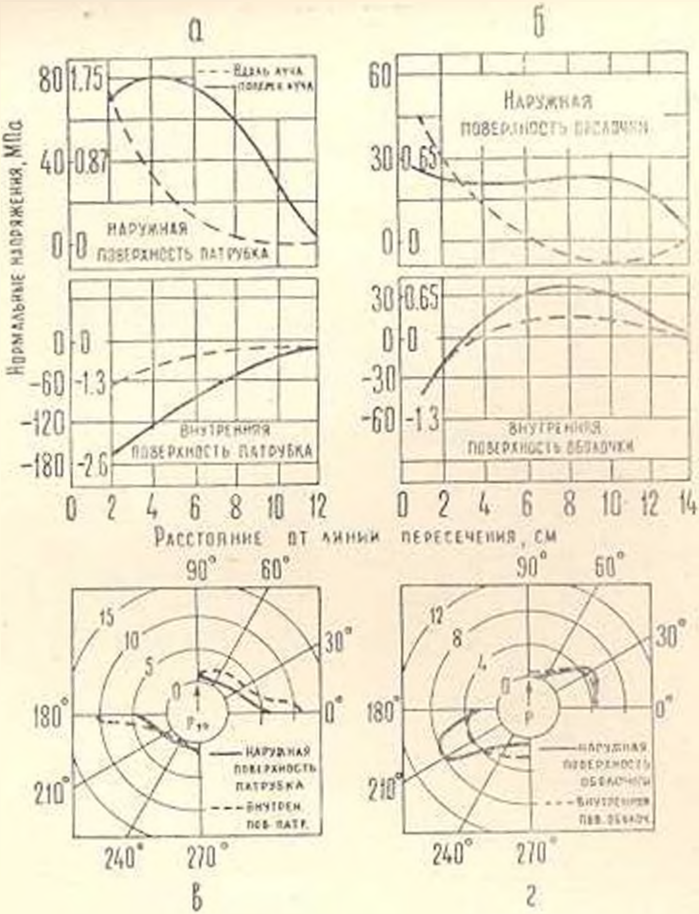
Фиг. 5. Картина напряженного состояния при действии на патрубок изгибающего момента, плоскость A_{xy}



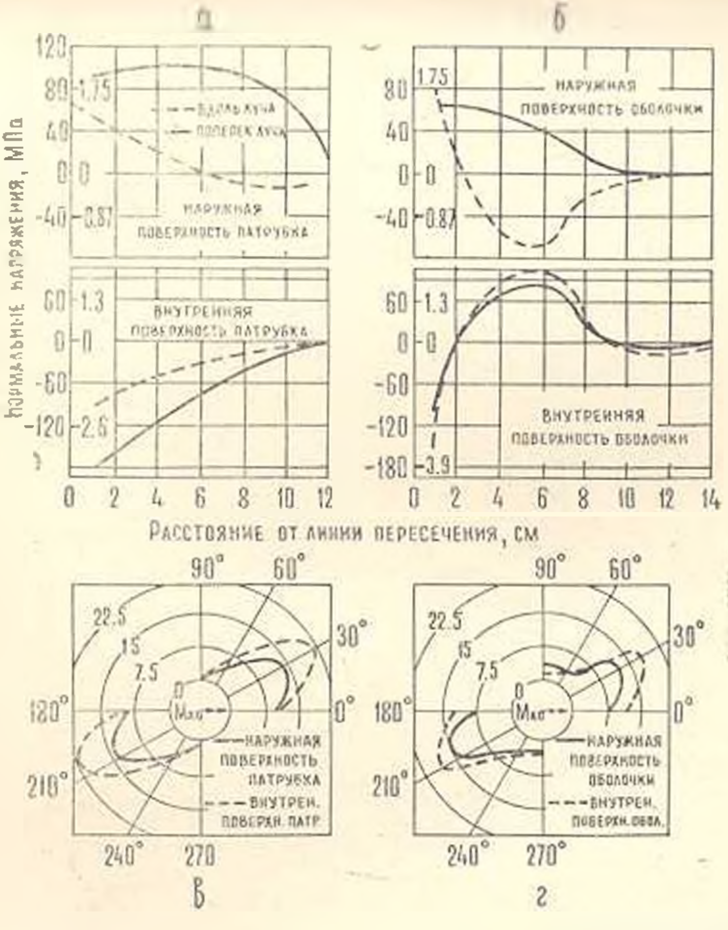
Фиг. 6. Картина напряженного состояния при действии на патрубок изгибающего момента, плоскость A_{xz}



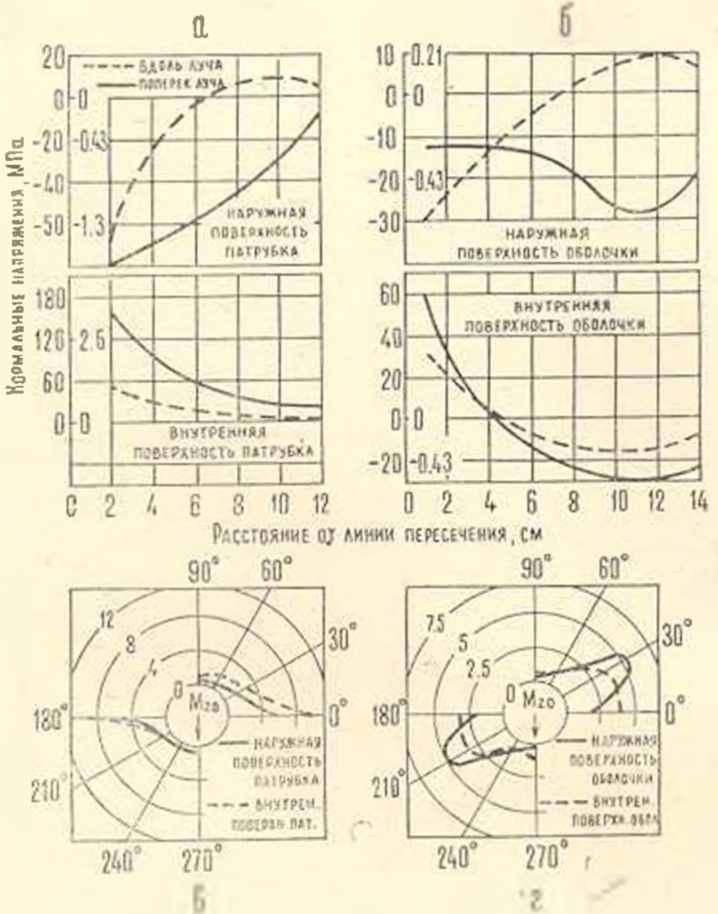
Фиг. 7. Картина напряженного состояния при действии на основную оболочку осевой силы P_x^0



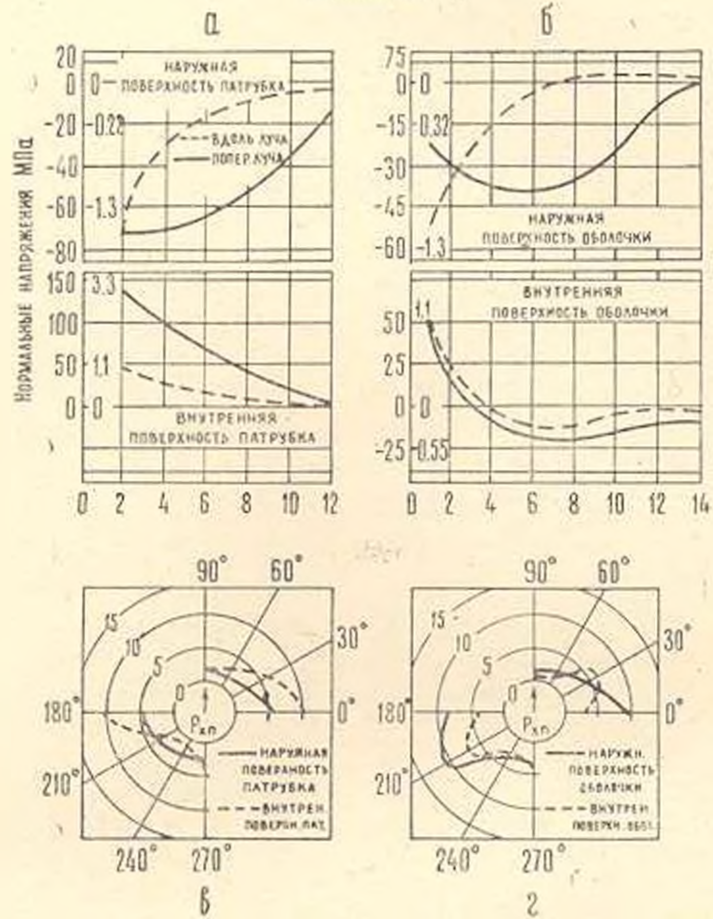
Фиг. 8. Картина напряженного состояния при действии на основную оболочку поперечной силы, плоскость A_{zy}



Фиг. 9. Картина напряженного состояния при действии на основную оболочку крутящего момента M_{x0}



Фиг. 10. Картина напряженного состояния при действии на основную оболочку изгибающего момента, плоскость A_{xy}



Фиг. 11. Картина напряженного состояния при действии на патрубок поперечной силы, плоскость A_{xy}

В таблицу внесены наибольшие для каждого вида нагружения коэффициенты концентрации напряжений и указаны местоположения розеток, в которых обнаружены наибольшие коэффициенты концентрации.

Из таблицы видно, что при действии на тройники большинства нагрузок коэффициенты концентрации имеют величины порядка 10—15, самые низкие коэффициенты концентрации (7,7—7,8) наблюдаются при действии моментов M_{xn}, M_{zn}, максимальные коэффициенты концентрации напряжений (порядка 22) — при действии крутящих моментов на патрубок и основную трубу.

В таблице не приведены результаты испытаний тройников при действии на оболочку поперечной силы в плоскости A_{xz} и изгибающего момента в той же плоскости из-за нестабильности показаний приборов при этих нагрузках, которую можно объяснить резкими градиентами напряжений в зоне пересечения, что подтвердил дальнейший расчет методом конечных элементов. Это отмечается и в работах [5] и [6].

Наиболее нагруженные участки (для большинства нагрузок) располагаются в зонах 0—30° и 180—210°, то есть в плоскости поперечной симметрии, где и следует производить усиление конструкции в случае необходимости.

НИИ Харьковского завода
«Электротяжмаш»

Поступила 17 IX 1980

Ա. Ի. ԷԼՉՈՎ, Ա. Լ. ԼԻՎՇԻՑ, Ե. Ա. ՄՈԼԴԱՎՍԿԻ

ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՑԵՆՏՐԱՑԻԱՆ ՀԱՏՎՈՂ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում են փորձարարական արդյունքները լարումը որոշելու համար, միատեսակ կորություններ ունեցող գլանային թաղանթների հատման շրջակայքում։

STRESS CONCENTRATION NEAR CYLINDER-TO-CYLINDER INTERSECTION

A. I. ELCHOV, A. L. LIVSHITS, E. A. MOLDAVSKY

Summary

The paper gives the results of the experimental determination of stress near cylinder-to-cylinder intersections of equal diameters.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reidelbach W.* Der Spannungzustand im übergangsgebiet einer rechtwinkligen Rohrabzweigung — Ingenior Archiv. 1961. Bd. 30. No. 5, s. 293-316.

2. *Bijlard P. P., Dohrmann R. J., Wang I. C.* Stresses in junction of nozzle to cylindrical pressure vessel for equal diameter of vessel and nozzle. — Nuclear engineering and design, 1967, v. 5, p.p. 349—369.
3. *Куликов Ю. А., Стасенко И. В.* Расчет тройникового соединения тонкостенных труб методом конечных элементов. — В кн.: Расчеты на прочность. Вып. 18, М.: Машиностроение, 1977, с. 141—152.
4. *Ando Y., Yagawa G., Kikuch F.* Stress distributions in thin-walled intersecting cylindrical shells subjected to internal pressure and in-plane force. — Preprints on the first international conference of structural mechanics in reactor technology, v. 3, Berlin, 1971, G. 2—2/1—G. 2—2/13.
5. *Corum J. M., Greenstreet W. L.* Experimental elastic stress analysis of cylinder-to-cylinder shell models and comparisons with theoretical predictions. — Preprints of the first international conference of structural mechanics in reactor technology, v. 3, Berlin, 1971, G. 2.5, p.p. 1—24.
6. *Gwaltneg R. C., Corum J. M., Bolt S. E., Bryann J. W.* Experimental stress analysis of cylinder-to-cylinder shell models and comparisons with teoretical predictions. — Transactions of ASME. Journal of pressure vessel technology, Petroleum division, 1976, V. J. 98, No. 4, p.p. 283—290.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXXV, № 2, 1982 Механика

А. Н. МАРТИРОСЯН

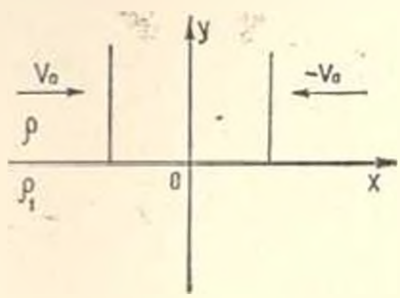
НЕКОТОРЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОЙ СРЕДЫ, ГРАНИЧАЩЕЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Рассматриваются задачи о соударении упругих плоских и осесимметричных тел, граничащих с жидкостью и движущихся в противоположных направлениях со скоростью V. Метод решения динамических задач теории упругости для изотропной среды предложен Смирновым и Соболевым [1]. Решение ряда задач динамической теории упругости методом Смирнова Соболева и методом интегральных преобразований получено в [1—6]. Решение динамических задач при наличии трещин дано в [7, 4], а с применением метода Каньяра [8] — в работе [9]. Близкий по идее к [8] метод обращения интегральных преобразований с приведением решения к форме Смирнова—Соболева развит в [10, 11, 12, 13]. Применение указанного метода к задачам с трещинами дано в [14, 15]. Задача соударения плоских тел (стержней) со свободными поверхностями методом [3] решена в [16, 17]. Задача соударения цилиндрических стержней со свободными поверхностями решена в [18].

Плоская и осесимметричная задачи о соударении тел при наличии смешанных граничных условий методом [11, 14] решены в [19].

В настоящей работе дано решение плоских и осесимметричных задач соударения упругих тел, граничащих с жидкостью. Определена асимптотика задачи соударения тонких стержней. Для задач со смешанными граничными условиями определены коэффициенты интенсивности напряжений.

§ 1. Рассмотрим формулировку граничной задачи соударения полубесконечных упругих тел, ограниченных поверхностями прямых двугранных углов, которые по терминологии работы [16, 17] называем стержнями, и граничащих с сжимаемой жидкостью, (фиг. 1).



Фиг. 1.

Если бы стержни были бесконечными в обе стороны, то задача была бы одномерной по x, где ось x направлена вдоль поверхности стержней параллельно скоростям их движения, и для проекций перемещений u, v на оси x, y имело бы место [14] в условиях неупругого соударения стержней

$$
\frac{\partial u_0}{\partial t} = -V_0\sigma(x-at) + V_0\sigma(-x-at)
$$

$$
\frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{V_0}{a}\sigma(at-|x|), \quad V_0 = 0 \tag{1.1}
$$

Вводя двумерные возмущения $U = u - u_0$, $V = v$, можно записать уравнения движения для упругих сред при $y > 0$

$$
\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + (a^2 - b^2)\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}
$$

$$
\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (a^2 - b^2)\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \tag{1.2}
$$

Уравнения движения жидкости в полуплоскости $y < 0$ имеют вид:

$$
\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)
$$

$$
\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}\right) \tag{1.3}
$$

где a и b — скорости продольных и поперечных волн соответственно, $\sigma(x)$ есть единичная функция, c — скорость волн в жидкости. Предположим, что на границе $y = 0$, $-\infty < x < \infty$ удовлетворяются следующие граничные условия:

$$
K\frac{\partial U}{\partial x} + a^2\frac{\partial V}{\partial y} + K\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\rho_1}{\rho}c^2\left(\frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial x}\right)
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad V = V_1, \quad K = a^2 - 2b^2
$$

Переходя к преобразованиям Лапласа $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$ от U, V, U_1, V_1 по t, граничные условия можно записать в виде

$$
K\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + a^2\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} = K\frac{V_0}{as}e^{-|x|s/a} + \frac{\rho_1}{\rho}c^2\left(\frac{\partial \overline{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x}\right)
$$

$$
\frac{\partial \overline{V}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = 0, \quad \overline{V} = \overline{V}_1 \tag{1.4}
$$

где $s = -i\omega$ есть параметр преобразования Лапласа, а ρ, ρ_1 — плотность соответствующих сред. Ищем решение уравнений (1.2), (1.3), записанных для $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$, в виде

$$
\overline{U}, \overline{V} = \sum_{1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{U}}^{(n)}, \overline{\overline{V}}^{(n)} e^{i(\overline{\alpha}x + \overline{\beta}_n y)}\, d\overline{\alpha}
$$

$$
\overline{U}_1, \overline{V}_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{\overline{U}}_1, \overline{\overline{V}}_1 e^{i(\overline{\alpha}x + \overline{\beta}_3 y)}\, d\overline{\alpha} \tag{1.5}
$$

$$\overline{V}^{(n)} = \frac{a^2\overline{\beta}_1^2 - b^2\overline{\beta}_n^2}{(a^2 - b^2)\overline{\alpha}\overline{\beta}_n}\overline{U}^{(n)}, \quad \overline{U}_1 = \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}_3}\overline{V}_1$$

$$\overline{\beta}_n = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_n^2} - \overline{\alpha}^2}, \quad \overline{\beta}_3 = -\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \overline{\alpha}^2}, \quad c_1 = a, \quad c_2 = b$$

Подставляя (1.5) в (1.4) и проводя обратное преобразование Фурье по x, получим алгебраические системы уравнений относительно $\overline{U}^{(1)}$, $\overline{V}_1$, $\overline{U}^{(2)}$, решение которых дается в виде

$$\overline{U}^{(1)} = -\frac{iKV_0 b^2 \overline{\alpha}\,\overline{\beta}_3 \overline{\gamma}}{a^2\pi\overline{\beta}_1 R(\overline{\alpha})}, \qquad \overline{U}^{(2)} = \frac{2iKV_0 b^2 \overline{\alpha}\,\overline{\beta}_3\overline{\beta}_1}{\pi a^2 \overline{\beta}_1^2 R(\overline{\alpha})}$$

$$\overline{V}_1 = -\frac{iKV_0\omega^2\overline{\beta}_3}{\pi a^2\overline{\beta}_1 R(\overline{\alpha})}, \quad \overline{\gamma} = \frac{\omega^2}{b^2} - 2\overline{\alpha}^2 \tag{1.6}$$

$$R(\overline{\alpha}) = b^4\overline{\beta}_3[\overline{\gamma}^2 + 4\overline{\alpha}^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2] - \frac{\rho_1}{\rho}\overline{\beta}_1\omega^4$$

где $R(\overline{\alpha})$ — функция Рэлея, которая имеет только два корня, находящихся на вещественной оси [20].

Подставляя (1.6) в (1.5), получим решение поставленной задачи, периодическое во времени. Обратное преобразование по t, соответствующее решению нестационарной задачи, имеет вид

$$U;\ V;\ V_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \overline{U};\ \overline{V};\ \overline{V}_1 e^{st}\,ds \tag{1.7}$$

При применении обратного преобразования Лапласа по t введем вместо $\overline{\alpha}$ переменную ($\overline{\alpha} = \omega\alpha$), $s = \varepsilon - i\tau$, $\overline{\beta} = \omega\beta$, где $\varepsilon > 0$ и мало).

Существенными оказываются окрестности точек $\alpha = \alpha_n$, для которых выражения в экспонентах обращаются в нуль

$$f_n(\alpha_n) = 0, \quad f_n(\alpha) = t - \alpha x - \beta_n(\alpha)y, \quad n = 1, 2, 3 \tag{1.8}$$

причем сопряженные значения $\overline{\alpha}_n$ также удовлетворяют (1.8). Как показано в [11], можно контур интегрирования $-\infty < \alpha < \infty$ заменить контуром Γ_n, проходящим через указанные точки α_n, $\overline{\alpha}_n$ в направлении $\operatorname{Im}(\alpha x + \beta_n y) = 0$. Вычисляя интеграл по s, окончательно получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 2\operatorname{Re}\sum_{n=1}^{2}\frac{\overline{U}^{(n)}(\alpha_n)}{f_n'(\alpha_n)}, \qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = 2\operatorname{Re}\frac{\overline{V}_1(\alpha_3)}{f_3'(\alpha_3)} \tag{1.9}$$

и такое же выражение для V с заменой $\overline{U}^{(n)}$ на $\overline{V}^{(n)}$, где $r^2\alpha_n = tx + yi\sqrt{t^2 - r^2c_n^{-2}}$, $r^2\alpha_3^2 = tx - yi\sqrt{t^2 - r^2/c^2}$, $r^2 = x^2 + y^2$. Здесь $\overline{U}^{(n)}$, $\overline{V}_1$ дается (1.5), где положено $\omega = 1$.

Из (1.9) можно получить значение напряжений и перемещений при $y=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau_{xy}}{\rho}=\frac{2iKV_0c_R^2\delta(t-|x|/c_R)}{a\sqrt{a^2-c_R^2}\,R'(1/c_R)}-\mathrm{Re}\frac{2iKV_0\tau(|x|-ct)\sigma(|x|-at)}{\pi a^2xR(\tau)\beta_1(\alpha)}$$

$$\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=-\mathrm{Re}\frac{2iKV_0\beta_3^0(\alpha)\sigma(|x|-at)\sigma(|x|-ct)}{\pi a^2x\beta_1(\alpha)R(\tau)}$$

$$\tau=\frac{t}{x},\quad R\left(\frac{1}{c_R}\right)=0$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция, $\sigma(x)$ — единичная функция, а при $x=0$, то есть на поверхности соударения стержней имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau_{yy}}{\rho}=\frac{KV_0}{a}\delta(t)+\frac{2Kb^4V_0\overline{L}^2(i\alpha_1)\beta_3(i\alpha_1)}{\pi a^2yR(i\alpha_1)\beta_1^2(i\alpha_1)\beta_1(i\alpha_1)}+$$

$$+\frac{8KV_0b^4\beta_3^2(i\alpha_2)}{\pi a^2yR(i\alpha_2)\beta_1(i\alpha_2)\beta_2(i\alpha_2)},\quad \alpha_n=\sqrt{\frac{t^2}{y^2}-\frac{1}{c_n^2}},\quad n=1,2$$

Для выделения особой части решения вблизи точечных волн полагаем

$$\alpha_n\approx\alpha_n^0+\frac{iy}{r^2}\sqrt{\frac{2r}{c_n}\left(t-\frac{r}{c_n}\right)},\quad n=1,2$$

$$\alpha_3\approx\alpha_3^0-\frac{iy}{r^2}\sqrt{\frac{2r}{c}\left(t-\frac{r}{c}\right)}$$

$$\overline{U}^{(n)}(\alpha_n)\approx\overline{U}^{(n)}(\alpha_n^0)+\overline{U}^{(n)'}(\alpha_n^0)(\alpha_n-\alpha_n^0),\quad \alpha_n=tx/r^2$$

и поскольку α_n^0, $\beta_n(\alpha_n^1)$ действительны, а $\overline{U}^{(n)}(\alpha_n^0)$, $\overline{V}^{(n)}(\alpha_n^0)$, $\overline{V}_1(\alpha_3^0)$ чисто мнимые, то можно из (1.9) получить

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\sum_1^2 i\overline{U}^{(n)}(\alpha_n^0)\frac{y}{r^2}\sqrt{\frac{2r}{c_n}\left(t-\frac{r}{c_n}\right)}\,\sigma\left(t-\frac{r}{c_n}\right)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}=-2i\overline{V}_1(\alpha_3^0)\frac{y}{r^2}\sqrt{\frac{2r}{c}\left(t-\frac{r}{c}\right)}\,\sigma\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

и такое же выражение для $\partial V/\partial t$ с заменой $\overline{U}^{(n)}$ на $\overline{V}^{(n)}$.

Можно получить решение для соударения слоев конечной высоты $2h$ и получить асимптотику для больших t так, как сделано в [19], причем $\partial U/\partial x$ имеет тот же вид, что и для осесимметричной задачи, решенной в § 2.

§ 2. Получим решение задачи соударения упругих цилиндрических стержней радиуса ε, причем при $r>\varepsilon$ среда заполнена жидкостью. Уравнения движения в цилиндрических координатах при наличии осевой симметрии для возмущений $U_x=u_x-u_0$, $U_r=u_r$ имеют вид (для $r>\varepsilon$) (фиг. 2)

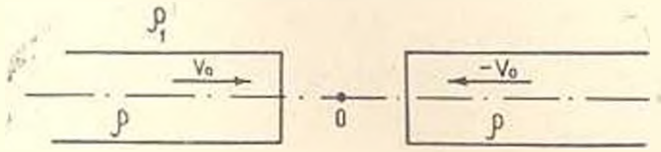
$$\frac{\partial^2U_r}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial\Delta}{\partial r}+2b^2\frac{\partial\omega_\theta}{\partial x},\quad \frac{\partial^2U_x}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial\Delta}{\partial x}-\frac{2b^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\omega_\theta)\qquad(2.1)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_r) + \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \omega_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_r}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial r}\right)$$

ω_0 дается (1.1), а для $r > \varepsilon$ уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 U_{1r}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 U_{1x}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial \Delta_1}{\partial x}$$
$$\Delta_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_{1r}) + \frac{\partial U_{1x}}{\partial x} \tag{2.2}$$



Фиг. 2.

Граничные условия на поверхности соударяющихся стержней берем в виде ($r = \varepsilon$)

$$\sigma_{rr} = \rho\left[K\Delta + 2b^2\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{KV_0}{a}\,\sigma\left(t - \frac{|x|}{a}\right)\right] = \sigma_{1rr}$$
$$\frac{\sigma_{rx}}{\rho} = b^2\left(\frac{\partial U_x}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial x}\right) = 0, \quad U_r = U_{1r}, \quad \frac{\sigma_{1rr}}{\rho_1} = c^2\Delta_1 \tag{2.3}$$

Решение задачи (2.1), (2.2), (2.3) ищем в виде

$$\overline{U}_r = \sum_{1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\overline{\alpha}x} J_1(r\overline{\beta}_n)\,\overline{U}_r^{(n)}d\overline{\alpha}, \quad \overline{U}_x = \sum_{1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\overline{\alpha}x} J_0(\overline{\beta}_n r)\overline{U}_x^{(n)}d\overline{\alpha}$$
$$\overline{U}_{1r} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\overline{\alpha}x} J_1(r\overline{\beta}_3)\,\overline{U}_{1r}d\overline{\alpha}, \quad \overline{U}_{1x} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\overline{\alpha}x} J_0(r\overline{\beta}_3)\,\overline{U}_{1x}d\overline{\alpha} \tag{2.4}$$

где

$$\overline{U}_r^{(n)} = i\frac{a^2\overline{\beta}_1^2 - b^2\overline{\beta}_n^2}{(a^2 - b^2)\,\overline{\alpha}}\overline{U}_x^{(n)}, \quad \overline{U}_{1x} = \frac{i\overline{\beta}_3}{\overline{\alpha}}\overline{U}_{1r}$$

$\overline{\beta}_n$ — дается (1.5), а J_0, J_1 — функции Бесселя.

Подставляя (2.4) в (2.3), получим

$$\overline{U}_x^{(1)} = \frac{\overline{\lambda}KiV_0\overline{\alpha}J_1(\varepsilon\overline{\beta}_2)}{\pi a^2\overline{\beta}_1 F(\overline{\alpha})}, \quad U_x^{(2)} = -\frac{2ikV_0\overline{\alpha}\overline{\beta}_2 J_1(\varepsilon\overline{\beta}_1)}{\pi a^2\overline{\beta}_1 F(\overline{\alpha})}$$
$$\overline{U}_{1x} = \frac{i\omega^2 KV_0\overline{\alpha}J_1(\varepsilon\overline{\beta}_1)J_1(\varepsilon\overline{\beta}_2)}{\pi a^2 b^2\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 J_1(\varepsilon\overline{\beta}_3)F(\overline{\alpha})} \tag{2.5}$$
$$F(\overline{\alpha}) = b^2\overline{\lambda}^2 J_0(\varepsilon\overline{\beta}_1)J_1(\varepsilon\overline{\beta}_2) + 4b^2\overline{\alpha}\overline{\beta}_1\overline{\beta}_2 J_1(\varepsilon\overline{\beta}_1)J_2(\varepsilon\overline{\beta}_2) -$$
$$-\frac{2\omega^2}{\varepsilon}J_1(\varepsilon\overline{\beta}_1)J_1(\varepsilon\overline{\beta}_2)\overline{\beta}_1 - \frac{\rho_1\omega^2 J_1(\varepsilon\overline{\beta}_2)}{\rho b^2\overline{\beta}_2 J_1(\varepsilon\overline{\beta}_3)}J_1(\varepsilon\overline{\beta}_1)J_0(\varepsilon\overline{\beta}_3)\overline{\beta}_3$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим решение поставленной задачи, периодическое во времени t, однако обратное преобразование Лапласа в простом виде записать не удается. Определим асимптотику решения для больших t, в которой $\omega s \to 0$, $\omega r \to 0$, тогда

$$
\begin{gathered}
F(\alpha) \approx \frac{\omega^4 \beta_2^2}{2a^2\beta_1^2}\,(3a^2-4b^2)\,(\alpha^2-\alpha_1^2)\,(\alpha^2-\alpha_2^2) \\
\alpha_{1,2}^4 - \frac{3a^2-4b^2-c^2}{c^2(3a^2-4b^2)}\,\alpha_{1,2}^2 + \frac{a^2-b^2-c^2}{b^2c^2(3a^2-4b^2)} = 0
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Затем подставим (2.6) в (2.5) с учетом (2.4) и того, что $\omega s \to 0$, $\omega r \to 0$. Вычисляя в интегралах по α вычеты в точках $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, a^{-1}$ при $x > 0$ и $\alpha = -\alpha_1, -\alpha_2, -a^{-1}$ при $x < 0$, можно получить асимптотику в виде

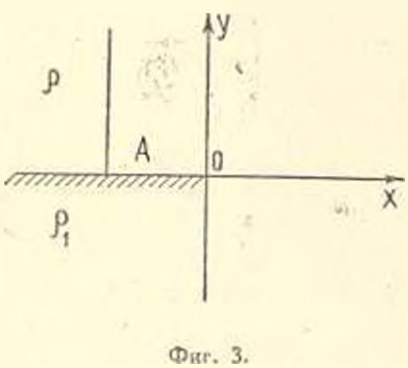
$$
\frac{\partial U_x}{\partial x} = A\left[\frac{\alpha_1\beta_2^2(\alpha_1)\,\sigma(t-\alpha_1|x|)}{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,\beta_1^2(\alpha_1)} - \frac{\alpha_2\beta_2^2(\alpha_2)\,\sigma(t-\alpha_2|x|)}{(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\,\beta_1^2(\alpha_2)}\right] - \frac{V_0}{a}\,\sigma\left(t-\frac{|x|}{a}\right)
$$

$$
\frac{\partial U_{1x}}{\partial x} = \frac{a^2 A}{K(\alpha_1^2-\alpha_2^2)}\left[\alpha_1\sigma(t-\alpha_1 x) - \alpha_2\sigma(t-\alpha_2|x|)\right], \quad A = -\frac{K^2 V_0}{a^2 b^2(3a^2-4b^2)}
$$

где $\alpha_{1,2}^{-1}$ по (2.6) дают скорости волн вдоль поверхности стержней — жидкостей. Таким образом, наличие жидкого полупространства влияет как на значения скоростей волн, так и на величину деформации.

При отсутствии жидкости $c = 0$ и получим $\alpha_1^{-1} = c_0$ [19], $\alpha_2^{-1} = 0$, и можно решать задачу соударения со смешанными граничными условиями.

§ 3. Рассматривается плоская задача соударения при смешанных граничных условиях на поверхности стержней. Обозначим через $x = -l$ координату точки соударения A, фиг. 3. Вначале рассмотрим значения $l \geqslant 0$, при которых точка A, фиг. 3, находится на жесткой опоре. Переходя к преобразованиям Лапласа $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{U}_1$, $\overline{V}_1$ от U, V, U_1, V_1 по t, граничные условия можно записать в виде ($y = 0$)



Фиг. 3.

$$
K\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + a^2\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + K\frac{\partial u_0}{\partial x} = \frac{\rho_1}{\rho}c^2\left(\frac{\partial \overline{V}_1}{\partial y} + \frac{\partial \overline{U}_1}{\partial x}\right) \quad \text{при } x > 0
$$

$$
\overline{V} = \overline{V}_1 \text{ при } x > 0; \quad \overline{V} = \overline{V}_1 = 0 \text{ при } x < 0
$$

$$\frac{\partial \bar V}{\partial x}+\frac{\partial \bar U}{\partial y}=0, \quad -\infty<x<\infty \tag{3.1}$$

$$\bar U,\ \bar V,\ \bar U_1,\ \bar V_1 = O(r^{1/2}),\quad r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$$

(условие на ребре)

где $\partial u_0/\partial x = -V_0/as\exp(-x's/a)$, $x'=x+l$, $\bar U$, $\bar V$, $\bar U_1$, $\bar V_1$ дается (1.5). Подставляя (1.5) в (3.1) и проводя обратное преобразование Фурье по x, можно получить уравнение Винера—Хопфа

$$\frac{2ib^2}{a^2}(a^2-b^2)\sqrt{\frac{\omega}{b}-\bar\alpha}\,F^-(\bar\alpha)V^-(\bar\alpha)=\frac{\Omega_0^+(\bar\alpha)}{F^+(\bar\alpha)\sqrt{\frac{\omega}{b}+\bar\alpha}}+$$

$$+\frac{V_0K\exp(i\omega l/a)}{2\pi a\omega\left(\bar\alpha-\frac{\omega}{a}\right)\sqrt{\frac{\omega}{b}+\bar\alpha}\,F^+(\bar\alpha)},\qquad \Omega_0^+=\Omega_1^+-\Omega^+ \tag{3.2}$$

$$\Omega^+=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{-i\bar\alpha x}\left(\frac{\bar\sigma_{yy}}{\rho}\right)_{y=0}dx,\qquad \Omega_1^+=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{\rho_1}{\rho}c^2\left(\frac{\partial\bar V_1}{\partial y}+\frac{\partial\bar U_1}{\partial x}\right)_{y=0}e^{-i\bar\alpha x}dx$$

$$V^-=V_1^-=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}(\bar V_1)_{y=0}\exp(-i\bar\alpha x)\,dx$$

$$F^{\pm}(\bar\alpha)=\frac{\omega/c_R\pm\bar\alpha}{\sqrt{(\omega/a\pm\bar\alpha)(\omega/b\pm\bar\alpha)}}\exp\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega/a}^{\omega/c}\ln\frac{R(\tau)}{\bar R(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-\bar\alpha}\right|$$

где $\Omega_0^+(\bar\alpha)$ и $V^-(\bar\alpha)$ аналитична соответственно в верхней и нижней полуплоскостях $\bar\alpha$. Левая часть (3.2) аналитична в нижней полуплоскости $\bar\alpha$, а правая часть в верхней полуплоскости, кроме $\bar\alpha=\omega/a$, где имеют простой полюс. Вычитая из обеих частей (3.2)

$$\frac{V_0K\exp(i\omega l/a)}{2\pi a\omega(\bar\alpha-\omega/a)\sqrt{\omega/a+\omega/b}\,F^+(\omega/a)}=B(\bar\alpha)\exp(i\omega l/a)$$

и используя условие на ребре, можно показать, что обе части полученного уравнения тождественно равны нулю, причем решение уравнения Винера-Хопфа получится в виде

$$V^-=\frac{ia^2B(\bar\alpha)\exp(i\omega l/a)}{2b^2(b^2-a^2)\sqrt{\omega/b-\bar\alpha}\,F^-(\bar\alpha)}=\bar V_1=id_2(\bar\alpha)\exp(i\omega l/a)$$

$$\bar U_1=i\frac{\bar\alpha}{\bar\beta_1}d_2(\bar\alpha)\exp(i\omega l/a)=id_1(\bar\alpha)\exp(i\omega l/a)$$

$$\overline{U}^{(1)} = \frac{ia^3\alpha\gamma B(\overline{\alpha})\exp(i\omega l/a)}{2(b^2-a^2)\omega^2\overline{\beta}_1 F^-(\overline{\alpha})\sqrt{\omega/b-\overline{\alpha}}} = ia_1(\overline{\alpha})\exp(i\omega l/a)$$

$$\overline{U}^{(2)} = \frac{ia^2\overline{\alpha}\,\overline{\beta}_2 B(\overline{\alpha})\exp(i\omega l/a)}{(a^2-b^2)\omega^2\sqrt{\omega/b-\overline{\alpha}}\,F^-(\overline{\alpha})} = ia_2(\overline{\alpha})\exp(i\omega l/a)$$

Аналогично (1.9) можно получить

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\,\mathrm{Re}\, i\sum_1^2 \frac{a_n(\alpha_n)}{f_n(\alpha_n)}, \qquad \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = -2\,\mathrm{Re}\, i\,\frac{d_1(\alpha_3)}{f_3(\alpha_3)}$$

$$f_n(\alpha_n) = t - \frac{l}{a} - \alpha_n x - \beta_n(\alpha_n)\,y = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -2\,\mathrm{Re}\, i\sum_1^2 \frac{b_n(\alpha_n)}{f_n(\alpha_n)}, \qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = -2\,\mathrm{Re}\, i\,\frac{d_2(\alpha_3)}{f_3(\alpha_3)}$$

$$b_n(\alpha) = (a^2\beta_1^2 - b^2\beta_n^2)\left[(a^2-b^2)\alpha\beta_n\right]^{-1} a_n(\alpha)$$

Из (3.3) можно получить значения коэффициента при $(\sqrt{-x})^{-1}$ в σ_{yy}, то есть коэффициента интенсивности напряжений ($y=0,\ x\to -0$)

$$\frac{\sigma_{yy}}{\rho} = \frac{2V_0 K}{\sqrt{-x}}\sqrt{t-\frac{l}{a}}\;\sigma\!\left(t-\frac{l}{a}\right)$$

$$\frac{\sigma_{1yy}}{\rho_1} = \frac{aV_0K\sqrt{ab}(-x)^{3/2}\sigma(t-l/a)}{3\pi b^4(a^2-b^2)\sqrt{a^2+b^2}\,F^+(1/a)(t-l/a)^{3/2}}$$

§ 4. Рассмотрим теперь случай, когда $l<0$, то есть соударение стержней происходит вне жесткой опоры.

Аналогично § 3 можно получить уравнение Винера-Хопфа

$$\frac{2ib^2}{a^2}(a^2-b^2)\sqrt{\frac{\omega}{b}-\overline{\alpha}}\,F^-(\overline{\alpha})\,V^- = \frac{\Omega_0^+}{\sqrt{\omega/b+\overline{\alpha}}\,F^+(\overline{\alpha})} +$$

$$+\frac{KV_0\exp(s\,l/a)}{2\pi a\omega(\omega/a+\overline{\alpha})\sqrt{\omega/b+\overline{\alpha}}\,F^+(\overline{\alpha})} + f_1(\overline{\alpha}), \qquad f_1 = \frac{fe^{i\omega l}}{\overline{\alpha}+\overline{\alpha}_R}$$

$$f(\overline{\alpha}) = \frac{V_0K}{\pi a^2 X^+(\overline{\alpha})\sqrt{\omega/a+\overline{\alpha}}\,(\overline{\alpha}-\omega/a)} \tag{4.1}$$

$$X^+(\overline{\alpha}) = \frac{F^+(\overline{\alpha})\sqrt{(\omega/a+\overline{\alpha})(\omega/b+\overline{\alpha})}}{\omega/c_R+\overline{\alpha}}$$

где V^-, F^-, Ω_0^+ дается (3.2), $\overline{\alpha}_R = \omega/c_R$.

Для того, чтобы применить метод Винера-Хопфа, необходимо $f_1(\overline{\alpha})$ представить как сумму двух функций, одна из которых аналитична в нижней полуплоскости, а другая — в верхней полуплоскости плоскости $\overline{\alpha}$,

$$f_1(\overline{\alpha}) = f_1^+(\overline{\alpha}) + f_1^-(\overline{\alpha}) \tag{4.2}$$

Можно показать, что [14]

$$f_2^-(\bar{\alpha}) = \int_{-\infty}^{-\omega/a} \varphi(\tau, \bar{\alpha}) e^{i\tau y} d\tau$$

$$\varphi(\tau, \bar{\alpha}) = \begin{cases} \xi = \varphi_1(\tau, \alpha), \quad \tau \in \left(-\infty, -\dfrac{\omega}{c}\right) \\ \dfrac{\xi b^4 \bar{\beta}_3(\tau) \chi^2(\tau)}{R(\tau)} = \varphi_2(\tau, \bar{\alpha}), \ \tau \in \left[-\dfrac{\omega}{c}, -\dfrac{\omega}{b}\right] \\ \dfrac{\xi b^4 \bar{\beta}_3(\tau)}{R(\tau)} [\bar{\chi}^2(\tau) - 4\tau^2 \bar{\beta}_1(\tau) \bar{\beta}_2(\tau)] = \varphi_3 \\ \tau \in \left[-\dfrac{\omega}{b}, -\dfrac{\omega}{a}\right] \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\xi(\tau, \bar{\alpha}) = V_0 K \left[\pi \tau a^2 X^+(\tau) \sqrt{-\frac{\omega}{a} - \tau} \left(\tau + \frac{\omega}{c_R}\right)\left(\tau - \frac{\omega}{a}\right)(\tau - \bar{\alpha})\right]^{-1}$$

причем под $X^+(\tau)$ подразумеваются граничные значения $X^+(\tau)$ сверху на участке $-\omega/c < \tau < -\omega/a$.

Подставляя (4.3), (4.2) в (4.1) и решая уравнение Винера-Хопфа, можно получить

$$\bar{U}^{(n)} = iA_1^{(n)} e^{i\bar{\alpha} l} + i \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{-\omega/c_k} A_{2,k}^{(n)}(\tau, \bar{\alpha}) e^{i\tau l} d\tau$$

$$\bar{V}_1 = iD_1 e^{i\bar{\alpha} l} + i \sum_{k=1}^{3} \int_{-\infty}^{-\omega/c_k} D_{2,k}(\tau, \bar{\alpha}) e^{i\tau l} d\tau$$

и такое же выражение для $\bar{V}^{(n)}$, где A заменено на B, причем

$$A_1^{(1)} = \frac{b^2 V_0 K \bar{\beta}_2 \bar{\alpha} \bar{\gamma}}{\pi a^2 R(\alpha) \bar{\beta}_1}, \qquad A_{2,k}^{(1)} = \frac{a^2 \alpha \bar{\gamma}(\alpha) \lambda_k(\tau, \bar{\alpha})}{2(a^2 - b^2) \sqrt{\omega/b - \bar{\alpha}}\, F^-(\bar{\alpha}) \bar{\beta}_1(\bar{\alpha}) \omega^2} \tag{4.4}$$

$$\bar{\gamma}(\alpha) A_1^{(2)} = -2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 A_1^{(1)}, \quad \bar{\gamma}(\bar{\alpha}) A_{2,k}^{(2)} = -2\bar{\beta}_1 \bar{\beta}_2 A_{2,k}^{(1)}$$

$$B_1^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\beta}_1 - b^2 \bar{\beta}_n}{(a^2 - b^2) \alpha \bar{\beta}_n} A_1^{(n)}, \qquad B_{2,k}^{(n)} = \frac{a^2 \bar{\beta}_1 - b^2 \bar{\beta}_n}{(a^2 - b^2) \alpha \bar{\beta}_n} A_{2,k}^{(n)}$$

$$D_1 = \frac{\bar{\beta}_1 \omega^2}{b^2 \alpha \bar{\gamma}} A_1^{(1)}, \qquad D_{2,k} = \frac{\bar{\beta}_1 \omega^2}{b^2 \alpha \bar{\gamma}} A_{2,k}^{(1)}$$

$$c_1 = a, \ c_2 = b, \ c_3 = c, \ \lambda_1 = \varphi_3, \ \lambda_2 = \varphi_2 - \varphi_3, \ \lambda_3 = \varphi_1 - \varphi_2$$

Аналогично (1.9) можно получить при $l < 0$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -2\,\mathrm{Re}\, i \sum_{n=1}^{2}\left[\frac{A_1^{(n)}(\alpha_1^{(n)})}{f_1^{(n)\prime}(\alpha_1^{(n)})} + \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{-\infty}^{-1/c_k}\frac{A_{2,k}^{(n)}(\alpha_2^{(n)},\xi)\,d\xi}{f_2^{(n)\prime}(\alpha_2^{(n)},\xi)}\right]$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2} = -2\,\mathrm{Re}\, i\left[\frac{D_1(\alpha_3)}{f_3'(\alpha_3)} + \sum_{k=1}^{3}\int\limits_{-\infty}^{-1/c_k}\frac{D_{2,k}(\alpha_4,\xi)\,d\xi}{f_4'(\alpha_4)}\right]$$

$$f_1^{(n)}(\alpha_1^{(n)}) = t-(x+l)\,\alpha_1^{(n)} - y\beta_n(\alpha_1^{(n)}) = 0 \tag{4.5}$$

$$f_2^{(n)}(\alpha_2^{(n)},\xi) = t-\alpha_2^{(n)}x - y\beta_n(\alpha_2^{(n)}) - \xi l = 0$$

$$f_3(\alpha_3) = t-(x+l)\,\alpha_3 - y\beta_3(\alpha_3) = 0$$

$$f_4(\alpha_4,\xi) = t - x\alpha_4 - y\beta_3(\alpha_4) - \xi l = 0$$

и такое же выражение для $\partial^2 V/\partial t^2$, где A заменено на B.

В (4.5) функции A, B, D находятся из (4.4), (4.3), где положено $\omega = 1$.

Из (4.5) можно получить значения коэффициента интенсивности напряжений для обеих сред ($y = 0$, $x \to -0$)

$$\sigma_{yy} = -4\rho\sum_{1}^{2}\int\limits_{-1/c}^{-1/c_k}\frac{\sqrt{t-\xi l}}{\sqrt{-x}}\,\mu_k(\xi)\,\sigma(t-\xi l)\,d\xi$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2\rho a^2(-x)^{3/2}}{3b^2(a^2-b^2)}\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{-1/c}^{-1/c_k}\frac{\mu_k(\xi)}{(t-\xi l)^{3/2}}\,\sigma(t-\xi l)\,d\xi$$

где $\mu_k(\xi) = \lambda_k(\xi,\alpha)(\xi-\alpha)$, причем решение равно нулю при $\xi < -1/c$.

Педагогический институт
им. Х. Абовяна

Поступила 5 II 1981

Ա. Ն. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ՄԻ ՔԱՆԻ ՈՉ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ ՀԵՂՈՒԿԻ ՀԵՏ ՍԱՀՄԱՆԱԿՑՈՂ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Ստացված է անալիտիկ լուծում հեղուկի հետ սահմանակցող շերտ և առանցքասիմետրիկ մարմինների առաձգական խնդրի համար խառը եզրային պայմանների առկայությամբ։ Լուծումը որոշված է Սմիրնով—Սոբոլևի ձևով։ Գտնված է լարումների ինտենսիվության գործակցի արժեքը ամրակցման մոտակայքում։

SOME UNSTEADY BOUNDARY PROBLEMS FOR ELASTIC MEDIUM BOUNDED BY FLUID

A. N. MARTIROSIAN

Summary

Analytic solution for the elastic problem of impact of plane and axial symmetric bodies bounded with fluid in the presence of mixed boundary conditions is obtained. The solution in the Smirnov-Sobolev form is determined; the value of coefficient of intensity of stress near the support is found. For the small value of height or radius respectively in plane or axial symmetric problems, the simple formulae for elastic displacements corresponding to the asymptotic one-dimensional solution in the form of core waves are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. М.—Л.: ОНТИ, 1937.
2. *Бабич В. М., Капилевич М. Б.* и др. Линейные уравнения математической физики. М.: Изд. Наука, 1964.
3. *Векуа И. Н.* К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. Тр. Тбилисск. геофиз. ин-та, 1937, т. 2.
4. *Черепанов Г. П.* Дифракция упругих волн на разрезе.— В сб. Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М.: Изд. Наука, 1972.
5. *Зволинский Н. В., Флитман Л. М., Костров Б. В., Афанасьев В. А.* Некоторые задачи дифракции упругих волн. В сб. Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М.: Изд. Наука, 1965.
6. *Сакало В. А.* К решению динамических задач плоской теории упругости для анизотропного тела.— ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.
7. *Мауэ А.* Die Entspannungswelle bei plötzlichen Einschnitt eines gespannten elastischen Körpers.— ZAMM, 1954, BD. 34, H. 1/2.
8. *Каньяр Л.* Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives. Paris: Gauthier — Villards, 1939.
9. *Бекер Б.* Dynamic stresses created by a moving crack.— Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1962, vol. 29, No. 3.
10. *Петрашень Г. И., Марчук Г. И., Огурцов К. И.*— Уч. зап. ЛГУ, 1950, № 135, вып. 21.
11. *Багдоев А. Г.* Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости.— Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 2.
12. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение ряда нестационарных пространственных задач для сплошной среды при наличии сосредоточенных импульсов.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 3.
13. *Будаев В. С.* Об одной краевой задаче динамической теории упругих анизотропных сред.— ПМТФ, 1974, № 3.
14. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной задачи для анизотропной упругой плоскости с полубесконечным разрезом, на границах которого заданы нормальный и касательный импульсы.— МТТ, 1976, № 1.
15. *Мартиросян А. Н.* Решение нестационарной граничной задачи для магнитоупругой среды.— Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1974, т. 27, № 6.

16. *Малков М. А.* Двумерная задача об упругом соударении стержней. — Докл. АН СССР, 1965, т. 148, № 4.
17. *Малков М. А.* Асимптотика двумерной задачи об упругом соударении стержней. — ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
18. *Skulak R.* Longitudinal Impact of some Infinite bars. — Journal of Applied Mechanics, 1957, 24, 1, 59–64.
19. *Багдоев А. Г., Мартиросян А. Н.* Задача соударения стержней при смешанных граничных условиях. — Докл. АН СССР, 1976, т. 226, № 3.
20. *Гоголадзе Л. Г.* Дисперсия волн Рэлея в слое. Тр. сейсмолог. ин-та АН СССР, 119, 1947.