

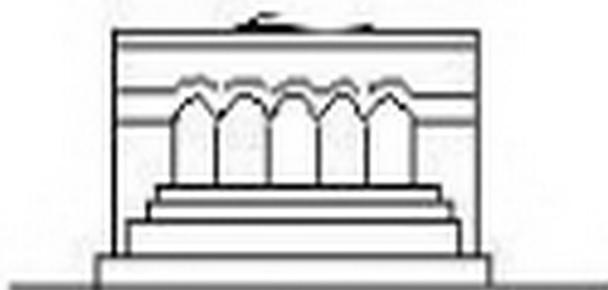
ՄԵՆԱՆԻՇՈՒ



МЕХАНИКА



MECHANICS



1977

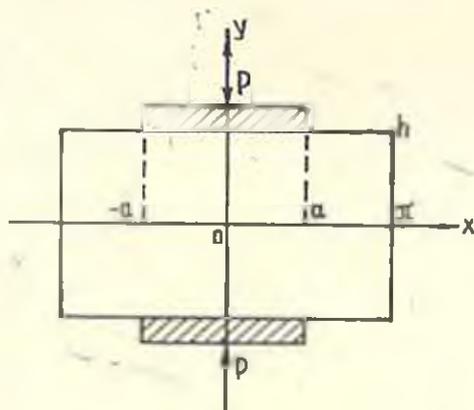
Ա. Ա. БАБЛОЯՆ, Ա. Ա. ԵՆԿԻԲԱՐՅԱՆ

### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ

Контактные задачи для прямоугольной области исследовались многими авторами [2—4], которые, в основном, при решении задачи пренебрегали трением между прямоугольником и штампом.

В работе [5] рассмотрена задача равновесия прямоугольника с заделанной кромкой, а в [6] — контакт двух прямоугольников вдоль одной кромки. Контактные задачи с выявлением характерных особенностей решались в работах [7—10, 12—13].

§ 1. Рассматривается задача о вдавливании двух одинаковых симметрично расположенных жестких штампов в упругий прямоугольник (фиг. 1).



Փիգ. 1.

Принимается, что между штампами и упругим материалом существует жесткое сцепление. Для простоты принимается также, что граница прямоугольника вне штампов свободна от внешних усилий. Задача решается только для четвертой части основной области. При этом удовлетворяем условиям симметрии

$$u(0, y) = v(x, 0) = 0; \quad \tau_{xy}(0, y) = \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (1.1)$$

и граничным условиям

$$\begin{aligned} \sigma_x(\pm, y) = \tau_{xy}(\pm, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq h) \\ u(x, h) = \varphi(x), \quad v(x, h) = f(x) \quad (0 \leq x \leq a) \\ \sigma_y(x, h) = \tau_{xy}(x, h) = 0 \quad (a < x \leq \pm) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Функцию напряжения Эри ищем в виде [1]

$$\Phi(x, y) = c_1 x^2 + c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} ky + B_k \operatorname{sh} ky + \lambda y (C_k \operatorname{ch} ky + D_k \operatorname{sh} ky)] \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + F_k \operatorname{sh} \beta_k x + \beta_k x (G_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y; \quad \beta_k = \frac{k\pi}{h} \quad (1.3)$$

Учитывая известные соотношения между функцией Эри, напряжениями и перемещениями [1], удовлетворяя условиям симметрии (1.1) и второму условию (1.2), получим

$$B_k = C_k = F_k = G_k = 0 \\ E_k \operatorname{sh} \beta_k \pi + H_k (\operatorname{sh} \beta_k \pi + \beta_k \pi \operatorname{ch} \beta_k \pi) = 0 \quad (1.4)$$

Введем обозначения

$$\sigma_y(x, h) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx = \begin{cases} \sigma(x) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a < x \leq \pi \end{cases} \quad (1.5) \\ \tau_{xy}(x, h) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \begin{cases} \tau(x) & 0 \leq x \leq a \\ 0 & a < x \leq \pi \end{cases}$$

где  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$  — неизвестные контакты напряжения, которые подлежат определению.

Удовлетворяя первому условию (1.2) и условиям (1.5), после некоторых преобразований для определения неизвестных коэффициентов получим следующие бесконечные системы:

$$X_p = \frac{\operatorname{sh}^2 ph}{\operatorname{sh} ph \operatorname{ch} ph + ph} \left[ (-1)^p (a_p \operatorname{cth} ph + b_p) - \frac{4p^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k Z_k}{(p^2 + \beta_k^2)^2} \right] \\ Z_p = -\frac{2}{h} \frac{\operatorname{sh}^2 \beta_p \pi}{\operatorname{sh} \beta_p \pi \operatorname{ch} \beta_p \pi + \beta_p \pi} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k a_k}{k^2 + \beta_p^2} + 2\beta_p^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k X_k}{(k^2 + \beta_p^2)^2} \right] \quad (1.6)$$

и равенства

$$(A_k + D_k) \operatorname{sh} kh + kh D_k \operatorname{ch} kh = \frac{a_k}{k^2} \quad (1.7)$$

$$c_1 = \frac{b_0}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_k}{k}$$

где

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^a \tau(x) \sin kx dx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^a \sigma(x) \cos kx dx$$

Коэффициенты разложения (1.3) через новые неизвестные  $X_k$  и  $Z_k$  выражаются соотношениями

$$k^2 \operatorname{sh} kh A_k = a_k - (-1)^k (1 + kh \operatorname{cth} kh) X_k, \quad k^2 \operatorname{sh} kh D_k = (-1)^k X_k$$

$$\beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k \pi E_k = (-1)^{k+1} (1 + \beta_k \pi \operatorname{cth} \beta_k \pi) Z_k, \quad \beta_k^2 \operatorname{sh} \beta_k \pi H_k = (-1)^k Z_k$$

Перемещения  $u(x, h)$  и  $v(x, h)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} Eu(x, h) = & 2x(c_2 - \nu c_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (1 + \nu) \operatorname{cth} kh a_k + (-1)^k \left[ (1 - \nu) \operatorname{cth} kh - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{(1 + \nu) kh}{\operatorname{sh}^2 kh} \right] X_k \right\} \frac{\sin kx}{k} + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Z_k}{\beta_k \operatorname{sh} \beta_k \pi} \{ [2 + (1 + \nu) \beta_k \pi \operatorname{cth} \beta_k \pi] \operatorname{sh} \beta_k x - (1 + \nu) \beta_k x \operatorname{ch} \beta_k x \} \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$Ev(x, h) = 2h(c_1 - \nu c_2) - \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + \nu) a_k - 2(-1)^k X_k] \frac{\cos kx}{k}$$

Удовлетворяя условиям для перемещений (1.2), после некоторых преобразований для определения неизвестного комплексного напряжения

$$p(x) = \sigma(x) + i\tau(x) \quad (-a \leq x \leq a) \quad (1.9)$$

получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$p(x) - \frac{i}{\pi(1-\nu)} \int_{-a}^a p(y) \operatorname{ctg} \frac{y-x}{2} dy = C(x) \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} (1 - \nu) C(x) = & E\varphi'(x) - iEj'(x) - R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} \cos kx - \\ & - i \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} \sin kx \end{aligned}$$

$$R_k^{(1)} = -\frac{\lambda_k}{kh} [(1 - e^{-2kh}) a_k + 2kh b_k] + \frac{2(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{a_p k Z_p}{\beta_p (\beta_p^2 + k^2)^2} \quad (1.11)$$

$$R_k^{(2)} = \frac{2\lambda_k}{kh} [kha_k + b_k (1 + 2kh - e^{-2kh})] + \frac{4(-1)^k k^3 \Delta_k}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2}$$

$$R_0 = 2(c_2 - \nu c_1) - \frac{1 - \nu}{\pi} \int_{-a}^a \tau(y) dy$$

$$\alpha_{pk} = 2(1 + 2\lambda_k)\beta_p^2 - 2k^2 + \beta_p(1 - \nu)(k^2 + \beta_p^2) \operatorname{cth} \beta_p \pi$$

$$(\operatorname{sh} kh \operatorname{ch} kh + kh)\lambda_k = kh, \quad kh\Delta_k = \lambda_k \operatorname{sh}^2 kh$$

При получении уравнения (1.10) были использованы бесконечные системы (1.6) и значения рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2(1 - \cos x)}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = \frac{\pi - x}{2} \quad (0 < x < 2\pi)$$

Решение уравнения (1.10), следуя [11], записывается в виде

$$p(x) = AC(x) + \frac{Bz(x)}{2\pi} \int_{-a}^{\pi} \frac{C(\tau) d\tau}{Z(\tau) \sin \frac{\tau - x}{2}} = \gamma_0(x) \quad (1.12)$$

где

$$A = \frac{(1 - \nu)^2}{(1 + \nu)(3 - \nu)}, \quad B = \frac{2i(1 - \nu)}{(1 + \nu)(3 - \nu)}$$

$$\gamma_0(x) = z(x) \left( A_1 \sin \frac{x}{2} + B_1 \cos \frac{x}{2} \right) \quad (1.13)$$

$$z(x) = \left( \sin \frac{a - x}{2} \right)^{-1/2 + \gamma i} \left( \sin \frac{a + x}{2} \right)^{-1/2 - \gamma i}, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$$

$$\operatorname{Re} p(x) = \sigma(x), \quad \operatorname{Im} p(x) = \tau(x)$$

Умножая (1.12) на  $\sin mx$  и  $\cos mx$  ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) и интегрируя по  $x$  от  $-\pi$  до  $\pi$ , в силу (1.2) для определения  $a_m$  и  $b_m$  получим следующие бесконечные системы:

$$a_m = R_0 C_{0m}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} C_{km}^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} S_{km}^{(1)} - \Phi_{0m}^{(1)} + \gamma_m^{(1)}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_m = R_0 C_{0m}^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} C_{km}^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} S_{km}^{(2)} - \Phi_{0m}^{(2)} - \gamma_m^{(2)}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

где

$$\nu_1 C_{km}^{(1)} = i \int_{-a}^a c_k(x) \sin mx dx, \quad \nu_1 C_{km}^{(2)} = \int_{-a}^a c_k(x) \cos mx dx, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\nu_1 S_{km}^{(1)} = i \int_{-a}^a s_k(x) \sin mx dx, \quad \nu_1 S_{km}^{(2)} = \int_{-a}^a s_k(x) \cos mx dx, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\nu_1 \Phi_{0m}^{(1)} = i \int_{-a}^a \Phi_0(x) \sin mx dx, \quad \nu_1 \Phi_{0m}^{(2)} = \int_{-a}^a \Phi_0(x) \cos mx dx$$

$$\pi\gamma_m^{(1)} = i \int_{-a}^a \gamma_0(x) \sin mx dx, \quad \pi\gamma_m^{(2)} = \int_{-a}^a \gamma_0(x) \cos mx dx$$

$$\Phi_0(x) = A[E\varphi(x) - iEf(x)] + \frac{Bz(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{E\varphi'(\tau) - iEf'(\tau)}{z(\tau) \sin \frac{\tau-x}{2}} d\tau \quad (1.15)$$

$$c_0(x) = -\frac{Bz(x)}{\cos \pi\beta} \sin\left(a\beta + \frac{x}{2}\right), \quad \beta = i\gamma, \quad \nu_1 = \pi(1-\nu)$$

$$c_k(x) = A \cos kx + \frac{Bz(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\cos k\tau d\tau}{z(\tau) \sin \frac{\tau-x}{2}}$$

$$s_k(x) = A \sin kx + \frac{Bz(x)}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\sin k\tau d\tau}{z(\tau) \sin \frac{\tau-x}{2}}$$

Таким образом, рассмотренная задача сводится к решению совокупности бесконечных систем (1.6) и (1.14), где неизвестными являются  $X_k, Z_k, a_k, b_k$ .

Покажем, что после введения новых неизвестных

$$\bar{X}_k = \varepsilon X_k, \quad \bar{Z}_k = Z_k, \quad \bar{a}_k = a_k k^2, \quad \bar{b}_k = b_k k^2 \quad (1.16)$$

$$\varepsilon = \frac{h}{\pi}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (0 < a < 0.5)$$

совокупность этих бесконечных систем становится квазивполне регулярной.

Суммы модулей коэффициентов при неизвестных в системе (1.16) имеют оценку

$$\sum_1 < \frac{2}{\pi} + \frac{h}{\pi} \frac{2}{p^2} \rightarrow \frac{2}{\pi} < 1 \quad (1.17)$$

$$\sum_2 < \frac{2}{\pi} + \frac{2}{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2-2}}{k^2 + \frac{9}{p^2}} = \frac{2}{\pi} + \frac{2\pi}{h^2 \frac{9}{p^2}} \left(\sin \frac{\pi a}{2}\right)^{-1} \rightarrow \frac{2}{\pi} < 1$$

Сумма модулей при неизвестных и свободные члены в системах (1.14) с учетом (1.16) стремятся к нулю при возрастании  $m$ , как  $0(m^{-1/2, a})$ .

Имея решения бесконечных систем, комплексное контактное напряжение удобно определять по формуле

$$p(x) = \sigma(x) + i\tau(x) = -\frac{1}{1-\nu} \left[ \Phi_0(x) + R_0 c_0(x) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} c_k(x) - i \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} s_k(x) \right] - \gamma_0(x) \quad (1.18)$$

которая с учетом (1.15) получается из (1.12) после некоторых преобразований.

Коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  определяются из условия разрешимости интегрального уравнения [11] и из условия статического равновесия

$$2\pi A_k = -i P \operatorname{ch} \pi \gamma \operatorname{th} a \gamma, \quad 2\pi B_k = -P \operatorname{ch} \pi \gamma \quad (1.18')$$

Удовлетворяя недифференцированному уравнению (1.8), получим связь между силой  $P$  и осадкой плоского штампа  $\delta$

$$E\delta = \frac{hP}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [2b_k + (1-\nu + \nu(-1)^k) a_k - L_k]$$

где

$$L_k = 2i_k \left[ a_k + b_k \left( \frac{e^{-ik} \operatorname{sh} kh}{kh} + i \right) + \frac{4(-1)^k k^2 \Delta_k}{\pi k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \beta_m Z_m}{(\beta_m^2 + k^2)^2} \right]$$

$\lambda_k$  и  $\Delta_k$  определяются формулами (1.11).

В качестве численного примера рассматривается сжатие прямоугольника двумя плоскими штампами, которые вдавливаются на величину  $\delta$ .

Рассмотрим численный пример при следующих значениях параметров:

$$h = \pi, \quad a = \frac{\pi}{4}, \quad \nu = 0.25 \quad (1.19)$$

Вычисления показали, что в этом случае бесконечные системы (1.6) и (1.14) вполне регулярны. Решая эти системы и подставляя полученные значения  $a_m$ ,  $b_m$ ,  $Z_m$  ( $m=1, 2, \dots, 15$ ) в (1.18), для вычисления контактных напряжений получим формулы

$$\sigma(x) = H \left[ C \sum_{k=1}^{\infty} a_k' \cos \frac{2k-1}{2} x + S \sum_{k=1}^{\infty} b_k' \sin \frac{2k-1}{2} x \right] E\delta \\ (0 \leq x < a)$$

$$\tau(x) = H \left[ C \sum_{k=1}^{\infty} a_k' \sin \frac{2k-1}{2} x + S \sum_{k=1}^{\infty} b_k' \cos \frac{2k-1}{2} x \right] E\delta$$

где

$$H = \frac{3.287299}{\sqrt{\sin \frac{a-x}{2} \sin \frac{a+x}{2}}}, \quad C = \cos \pi(x)$$

$$S = \sin \alpha(x), \quad \alpha(x) = \gamma \ln \frac{\sin \frac{a-x}{2}}{\sin \frac{a+x}{2}}$$

Значения некоторых первых коэффициентов приведены в табл. 1.

Таблица 1

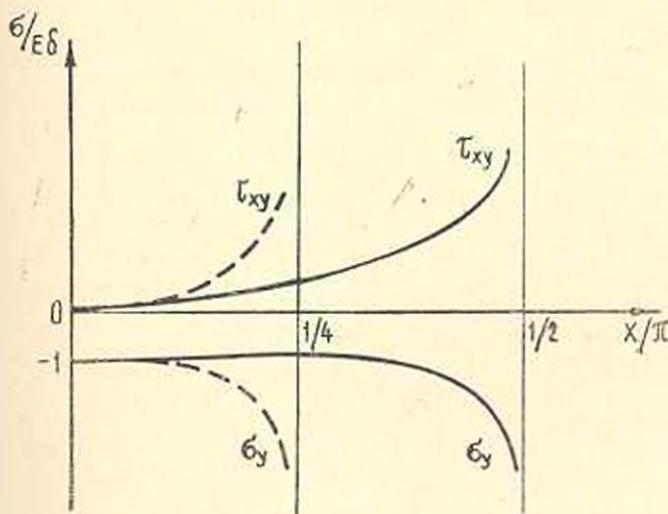
$k$	$a_k^*$	$a_k^*$	$b_k^*$	$b_k^*$
1	-0.302417	0.805837	0.836693	0.289719
2	0.190233	0.249579	0.249579	-0.190233
3	-0.065907	0.078871	0.078871	0.065907
4	-0.036894	0.046303	0.046303	0.036894
5	-0.014458	0.013504	0.013504	0.014458

При  $x \rightarrow a$ , то есть около концов штампа контактные напряжения имеют вид

$$\sigma(x) = \frac{0.523423 \sin[\alpha(x) - \alpha_1]}{\sqrt{\sin \frac{a-x}{2} \sin \frac{a+x}{2}}} E\delta, \quad \tau(x) = \frac{0.502712 \cos[\alpha_2 - \alpha(x)]}{\sqrt{\sin \frac{a-x}{2} \sin \frac{a+x}{2}}} E\delta$$

где

$$\alpha_1 = 74^\circ 32'; \quad \alpha_2 = 15^\circ 09'.$$

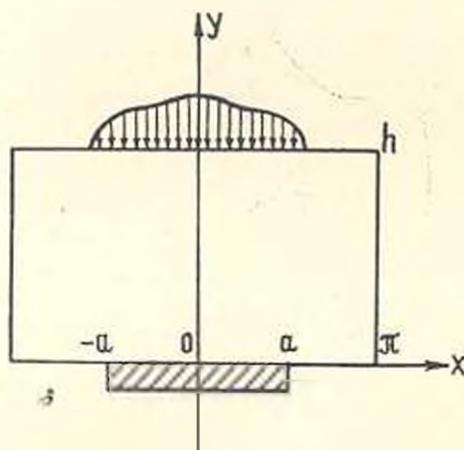


Фиг. 2.

На (фиг. 2) сплошными линиями показана форма распределения контактных напряжений  $\sigma(x)$  и  $\tau(x)$  для случая  $h = \pi$ ,  $a = \pi/2$ , а пунктирными — для случая  $h = \pi$ ,  $a = \pi/4$  при одинаковых  $\delta$ .

Чтобы штамп получил данное перемещение  $\delta$ , к штампу в случае  $a = \pi/4$  следует приложить силу  $P = 1.113326 E\delta$ , а в случае  $a = \pi/2$  —  $P = 0.722437 E\delta$ . В случае контакта без трения условия  $u(x, h) = \varphi(x)$  заменяется условием  $\tau(x, h) = 0$ . ( $0 \leq x \leq a$ ), и задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Гильберта относительно нормального контактного давления. Решение этой задачи совпадает с результатами [3].

§ 2. В этом параграфе рассматривается контактная задача для прямоугольника, сцепленного по части  $[-a, a]$  кромки  $y=0$  с жестким штампом (фиг. 3).



Фиг. 3.

Рассматривается случай симметричного нагружения. В виду наличия симметрии задача решается только для правой половины прямоугольника. Граничные условия задачи следующие:

$$\begin{aligned} u(0, y) = 0, \quad \sigma_x(\pi, y) = 0 \\ \tau_{xy}(0, y) = 0, \quad \tau_{xy}(\pi, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq h) \\ \sigma_y(x, h) = \frac{I_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} l_k \cos kx \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x, h) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi) \\ \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (a < x < \pi); \quad u(x, 0) = \varphi(x) \\ \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (a < x < \pi); \quad v(x, 0) = f(x) \end{aligned} \quad (0 \leq x \leq a) \quad (2.2)$$

Вместо условия (2.2) сначала удовлетворим условиям

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx = \begin{cases} \varphi(x) & 0 \leq x < a \\ 0 & a < x \leq \pi \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \begin{cases} \tau(x) & 0 \leq x < a \\ 0 & a < x \leq \pi \end{cases}$$

то есть найдем решение первой основной задачи теории упругости для прямоугольника при условиях (2.1), (2.3). Решение этой задачи в общем случае нагружения было получено в работе [1].

Функция напряжения Эри ищется в виде (1.3), определение коэффициентов разложения после удовлетворения граничным условиям сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $X_p, Y_p, Z_p$ :

$$\begin{aligned} \frac{X_p}{2} (1 + N_p^{(2)}) - \frac{Y_p}{2} (1 + N_p^{(2)}) &= a_p - b_p + \\ &+ \frac{e^{-p^h} a_p}{\operatorname{sh} ph} + \frac{4(-1)^p p^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k Z_k}{(\beta_k^2 + p^2)^2} \\ \frac{X_p}{2} (-1 + M_p^{(1)}) - \frac{Y_p}{2} (1 + M_p^{(1)}) &= -l_p + \\ &+ \frac{a_p}{\operatorname{sh} ph} + \frac{4(-1)^p p^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \beta_k Z_k}{(\beta_k^2 + p^2)^2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$Z_p (1 + Q_p^{(1)}) = -\frac{4\beta_p^2}{h} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{k X_k}{(k^2 + \beta_p^2)^2} - \frac{2}{h} \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{k a_k}{k^2 + \beta_p^2}$$

( $p = 1, 3, 5, \dots$ )

$$Z_p (1 + Q_p^{(2)}) = -\frac{4\beta_p^2}{h} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{k Y_k}{(k^2 + \beta_p^2)^2} + \frac{2}{h} \sum_{k=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{k a_k}{k^2 + \beta_p^2}$$

( $p = 2, 4, 6, \dots$ )

и к равенствам

$$c_1 = \frac{\delta_0}{4}, \quad c_2 = \frac{1}{2h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k a_k}{k}$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 ph N_p^{(1)} &= (1 - e^{-p^h}) (ph - \operatorname{sh} ph) - ph \operatorname{sh} ph \\ \operatorname{sh}^2 ph N_p^{(2)} &= (1 + e^{-p^h}) (ph + \operatorname{sh} ph) + ph \operatorname{sh} ph \\ \operatorname{sh}^2 ph M_p^{(1)} &= ph (\operatorname{ch} ph - 1) + \operatorname{sh} ph (1 - e^{-p^h}) \\ \operatorname{sh}^2 ph M_p^{(2)} &= ph (\operatorname{ch} ph + 1) + \operatorname{sh} ph (1 + e^{-p^h}) \\ \operatorname{sh}^2 \beta_p Q_p^{(1)} &= \beta_p \pi + \operatorname{sh} \beta_p e^{-\beta_p^2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Коэффициенты  $A_p, B_p, C_p, D_p, E_p, H_p$  выражаются через  $X_p, Y_p, Z_p$  по формулам

$$\begin{aligned}
 A_p &= \frac{X_p}{2p^2} \frac{\operatorname{ch} ph - 1}{\operatorname{sh} ph} \left( 1 - \frac{ph}{\operatorname{sh} ph} \right) - \\
 &- \frac{Y_p}{2p^2} \frac{\operatorname{ch} ph + 1}{\operatorname{sh} ph} \left( 1 + \frac{ph}{\operatorname{sh} ph} \right) - \frac{a_p}{p^2} \operatorname{cth} ph \\
 B_p &= \frac{a_p}{p^2} - \frac{X_p - Y_p}{2p^2}, \quad C_p = \frac{X_p - Y_p}{2p^2} \\
 2p^2 \operatorname{sh} ph D_p &= (1 - \operatorname{ch} ph) X_p + (1 + \operatorname{ch} ph) Y_p \\
 \beta_p^2 \operatorname{sh} \beta_p \pi H_p &= Z_p, \quad \beta_p^2 \operatorname{sh} \beta_p \pi E_p = -(1 + \beta_p \pi \operatorname{cth} \beta_p \pi) Z_p \\
 F_p &= G_p = 0
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Величины  $a_p$  и  $b_p$ , входящие в (2.6), определяются из условий для перемещений, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
 2x(c_2 - \nu c_1) + \sum_{k=1}^{\infty} [R_k^{(1)} - 2a_k + (1 - \nu)b_k] \frac{\sin kx}{k} &= E\varphi(x) \\
 Ev_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [R_k^{(2)} + (1 - \nu)a_k - 2b_k] \frac{\cos kx}{k} &= Ef(x)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
 2R_k^{(1)} &= -N_k a_k + M_k b_k - Q_k l_k + \\
 &+ \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{(1 - \nu) \operatorname{sh} kh - (1 + \nu)kh}{\operatorname{sh} kh + kh} \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} - \\
 &- \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{(1 - \nu) \operatorname{sh} kh + (1 + \nu)kh}{\operatorname{sh} kh - kh} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} - \\
 &- \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{[k^2 + (2 + \nu)\beta_p^2] Z_p}{\beta_p (\beta_p^2 + k^2)^2} \\
 R_k^{(2)} &= \bar{N}_k a_k - \bar{M}_k b_k + \bar{Q}_k l_k + \\
 &+ \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{\operatorname{sh} kh \operatorname{cth} \frac{kh}{2}}{\operatorname{sh} kh - kh} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2} - \\
 &- \frac{8(-1)^k k^2}{\pi} \frac{\operatorname{sh} kh \operatorname{th} \frac{kh}{2}}{\operatorname{sh} kh + kh} \sum_{p=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\beta_p Z_p}{(\beta_p^2 + k^2)^2}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$k^2 h^2 N_k = 4\nu_k (e^{-kh} \operatorname{sh} kh + k^2 h^2 - kh), \quad \bar{N}_k = 2\nu_k$$

$$M_k = 4\nu_k, \quad k^2 h^2 \bar{M}_k = 2\nu_k (e^{-kh} \operatorname{sh} kh + k^2 h^2 + kh)$$

$$khQ_k = -4\mu_k \operatorname{sh} kh, \quad k^2 h^2 \bar{Q}_k = 2\mu_k \operatorname{sh} kh (1 + kh \operatorname{cth} kh)$$

$$\mu_k (\operatorname{sh}^2 kh - k^2 h^2) = k^2 h^2$$

Из (2.7), учитывая (2.8), аналогичным образом для комплексного контактного напряжения  $p(x) = \sigma(x) + i\tau(x)$  получим сингулярное интегральное уравнение вида (1.10), в решении которого (1.11) следует учесть, что  $R_k^{(1)}$  и  $R_k^{(2)}$  определяются по формулам (2.8).

Уравнения для  $a_m$  и  $b_m$  в этом случае принимают вид

$$a_m = R_0 C_{0m}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} C_{km}^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} S_{km}^{(1)} - \Phi_{0m}^{(1)} + \gamma_m^{(1)}, \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

$$b_m = R_0 C_{0m}^{(2)} - \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)} C_{km}^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} R_k^{(2)} S_{km}^{(2)} + \Phi_{0m}^{(2)} - \gamma_m^{(2)}, \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$R_0$  и коэффициенты  $C_{km}^{(n)}$ ,  $S_{km}^{(n)}$ ,  $\Phi_{0m}^{(n)}$ ,  $\gamma_m^{(n)}$  определяются по формулам (1.15), где следует заменить  $B$  на  $-B$ .

Бесконечные системы введением новых неизвестных, аналогичных (1.16), приводятся к квазивполне регулярному виду.

Из условия разрешимости уравнения [11] и из условия равновесия определяем  $A$ , и  $B$ , (1.18').

Удовлетворяя недифференцированному уравнению, найдем связь между результирующей силой  $P$  и постоянной  $v_n$  (жесткое смещение системы).

Институт механики  
АН Армянской ССР  
Ереванский зооветеринарный  
институт

Поступила 16 XII 1976

Ա. Շ. ԲԱՔԱՆՅԱՆ, Ա. Ա. ՆԵՒԻՐԱՐՅԱՆ

ՌԻԶՂԱՆԿՅԱՆ, ԿՈՆՏԱԿՏԱՆՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԻՐ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Գիտարկվում են կոշտ դրոշմների և առաձգական ուղղանկյան կոնտակտի երկու դեպքեր՝

երկու կոշտ դրոշմներ սիմետրիկ ձևով հարակցված են ուղղանկյան հետ և բևեռավորված են նորմալ ուժերով:

Ուղղանկյան մի կողմը որոշ մասով ամրակցված է, իսկ եզրագծի մնացած մասերում տրված են լարումները:

Խնդիրների լուծումը Ֆուրյեի շարքի և Հիլբերտի կորիզով հատուկ ինտեգրալ հավասարումների լուծման օգնությամբ բերվել է հանրահաշվական հավասարումների բվադիլիզիվն սեղույտը անվերջ սիստեմաների:

*Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային շարումները որոշելու համար: Երկու դրոշմների դեպքում բերված են հաշվումների արդյունքները պամետրերի որոշ հարաբերությունների համար:*

## A CONTACT PROBLEM FOR A RECTANGLE WITH A COUPLING

A. A. BABLOYAN, A. A. ENGHIBARIAN

### S u m m a r y

Two instances of contact between an elastic rectangle and a punch are considered. In the first instance two rigid punches are coupled symmetrically with the rectangle and loaded with normal forces. In the second instance the rectangle is fastened on a part of one edge, and stresses are applied to other sections of the contour.

The solution to the problem by the Fourier series and that to the singular equation with the Hilbert kernel are reduced to the infinite sets of quasi-regular systems of algebraic equations.

The formulas for contact stresses are derived. For the first instance the results of calculation with actual correlations of parameters are presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
2. Баблоян А. А., Гулканян Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1969, т. 22, № 1.
3. Баблоян А. А., Мкртчян А. М. Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 2.
4. Чобанян К. С., Галфаян П. О. Об одной задаче теории упругости для составного прямоугольника. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1963, т. 16, № 2.
5. Галфаян П. О. Об изгибе защемленной прямоугольной балки. Докл. АН АрмССР, 1963, т. 37, № 3.
6. Мелконян М. Г. Об одной плоской контактной задаче термоупругости для составного прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, 1972, т. XXV, № 1.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., изд. «Наука», 1966.
8. Галлиа А. А. Контактная задача теории упругости. М., ГИТТЛ, 1953.
9. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.—Л., Гостехиздат, 1949.
10. Буфлер. Einige Strenge Lösungen für den Spannungszustand in ebenen Verhundertkörpern. ZAMM, 39 (1959), Heft 5/6.
11. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. записки Казанского ун-та, т. 122, кн. 3, 1962.
12. Нахмейн Е. А., Нуллер Б. М. Об одном методе решения задач теории упругости для полосы, полуплоскости и плоскости, ослабленных периодической системой щелей. Изв. ВНИИГ, 1975, т. 107, 14—23.
13. Нахмейн Е. А., Нуллер Б. М. Об одном методе решения контактных периодических задач для упругой полосы и кольца. Изв. АН СССР, МТТ, 1976, № 3.

С. М. МХИТАРЯН, А. А. ШЕКЯН

## ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХ ШЕРОХОВАТЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ СТЕПЕННО УПРОЧНЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ

Работа посвящена эффективному решению плоской контактной задачи для твердых тел в постановке нелинейной теории ползучести или пластичности при степенном законе связи между напряжениями и деформациями, когда учитывается поверхностная структура контактирующих тел.

Вкратце остановимся на некоторых работах, тесно примыкающих к приподнимым ниже нашим исследованиям.

Плоская контактная задача для степенно упрочняющихся твердых тел с гладкими поверхностями впервые была поставлена и решена в работах [1—3]. С другой стороны, плоская контактная задача для шероховатых твердых тел впервые была рассмотрена в монографии И. Я. Штаермана [4]. При этом поверхностная структура шероховатых контактирующих тел в [4] была учтена согласно гипотезе о пропорциональности в каждой точке контактной зоны дополнительных локальных перемещений к нормальным контактным давлениям. При этом предположении решение задачи сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмическим ядром. В рамках гипотезы И. Я. Штаермана затем были рассмотрены также пространственные контактные задачи [5].

Однако, экспериментальными исследованиями некоторых авторов [6, 7] установлено, что для многих деталей, наиболее часто встречающихся в машиностроении, дополнительные локальные перемещения, которые обусловлены шероховатостью поверхностей соприкасающихся тел, в каждой точке контактной зоны пропорциональны некоторой степени контактных давлений. При этом предположении некоторые контактные задачи были рассмотрены в работах [8—10].

В настоящей работе поверхностная структура шероховатых контактирующих тел учитывается согласно только что указанному степенному закону между дополнительными перемещениями и контактными давлениями.

Сначала рассматривается обычная статическая плоская контактная задача, которая описывается нелинейным интегральным уравнением типа Гаммерштейна. При помощи аппарата ортогональных многочленов Гегенбауэра решение этого уравнения сводится к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений. Исследование бесконечной системы проводится на основе принципа сжатых отображений Банаха.

В частных случаях в более простой форме вновь получены решения задачи И. Я. Штаермана и задачи, рассмотренной в [9].

Используя это решение, затем в рамках статической теории удара Г. Герца [11] рассматривается центральный удар штампа с прямолиней-

ным основанием о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость. При этом выясняется, что соблюдается характерная закономерность теории удара при уменьшении скорости приближения соударяемых тел.

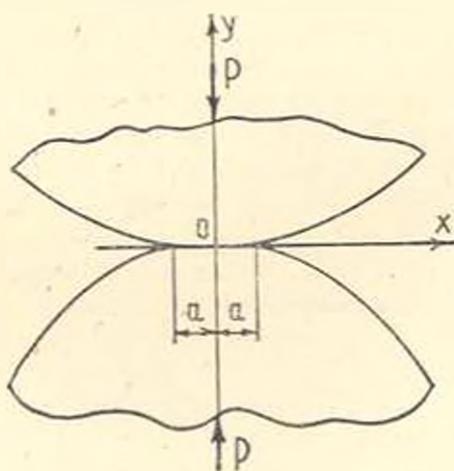
Отметим, что как было обнаружено в работе [12], эта закономерность при обычных формах поверхностей контактирующих тел без учета их поверхностной структуры нарушается.

В конце работы для случая плоского штампа приведены числовые результаты, иллюстрирующие ход изменения контактных давлений и основных механических характеристик теории удара Г. Герца.

Рассмотренную здесь задачу можно трактовать также в постановке нелинейной теории упругости.

### § 1. Постановка задачи и вывод разрешающего интегрального уравнения

Пусть два соприкасающихся между собой в точке тела, поверхности которых обладают шероховатостью, находятся в условиях установившейся ползучести при степенном законе связи между напряжениями и деформациями\*. Пусть далее, эти тела прижимаются одно к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых  $P$  перпендикулярна к оси  $oz$  и проходит через начало координат (фиг. 1).



Фиг. 1.

Вследствие шероховатости поверхностей контактирующих тел в контактной зоне помимо глобальных перемещений деформируемых тел возникают также дополнительные локальные перемещения. Основываясь на известных экспериментальных результатах [6, 7], для этих дополнительных локальных перемещений принимается, что в каждой точке контактной зоны между давлением  $p(x)$  и вертикальным перемещением  $v(x)$  существует степенная зависимость вида  $v(x) = kp^{1/\beta}(x)$ , ( $1 < \beta < 3$ ). При этих предположениях на основании обобщенного принципа суперпозиции не-

\* Материалы контактирующих тел предполагаются несжимаемыми.

ремещений, сформулированного в работе Н. Х. Арутюняна [1], решение указанной задачи относительно нормального давления  $p(x)$  приводится к решению следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$(a_1 + a_2) p^{\frac{1}{\mu}}(x) + (A_1 + A_2) \left[ \int_{-a}^a \frac{1}{|x-s|^{1-\mu}} p(s) ds \right]^m = \delta - f_1(x) - f_2(x) \quad (1.1)$$

Здесь  $a_1$  и  $a_2$  — коэффициенты, учитывающие поперечную структуру шероховатых контактирующих тел и определяемые из опыта.  $2a$  — ширина участка контакта,  $\mu$  — степень упрочнения, подчиненная условию  $0.5 < \mu \leq 1$ ,  $m = 1/\mu$ ,  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  — четные, достаточно гладкие функции, характеризующие поверхности контактирующих тел,  $\delta$  — мера взаимного сближения тел, подлежащая определению. Кроме того,

$$A_i = \frac{(2^\mu - 1) \sin(\pi/2^\mu) \sqrt{2^\mu - 1}/2^\mu}{(1 - \mu) [K_i f(\mu)]^m}, \quad (i = 1; 2)$$

$$f(\mu) = 4(m \sqrt{2^\mu - 1})^m \int_0^{\pi/2} [\cos(m\theta) \sqrt{2^\mu - 1}]^m \cos \theta d\theta$$

$K_1$  и  $K_2$  — физические константы материалов первого и второго тел соответственно.

При этом имеет место условие равновесия каждого из сжимаемых тел

$$\int_{-a}^a p(x) dx = P \quad (1.2)$$

Введя обозначения

$$\xi = \frac{x+a}{2a}, \quad \gamma = \frac{\delta}{a}, \quad p_0(\xi) = \left( \frac{a_1 + a_2}{a} \right)^{\frac{1}{\mu}} p(x), \quad \alpha = 1/\mu$$

$$\theta = 2^\mu (A_1 + A_2)^{\frac{1}{m}} \left( \frac{a}{a_1 + a_2} \right)^{\frac{1}{m}}, \quad f(\xi) = \frac{1}{a} [f_1(x) + f_2(x)]$$

$$P_0 = \frac{(a_1 + a_2)^{\frac{1}{\mu}} P}{a^{1-\mu}} \quad (1.3)$$

уравнение (1.1) и условие (1.2) представим соответственно в виде

$$p_0^\alpha(\xi) + \left| \theta \int_0^1 |\xi - \eta|^{1-\alpha} p_0(\eta) d\eta \right|^m = \gamma - f(\xi) \quad (1.4)$$

$$\int_0^1 p_0(\xi) d\xi = P_0 \quad (1.5)$$

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению нелинейного интегрального уравнения (1.4) при условии (1.5).

Утверждается, что решение нелинейного интегрального уравнения (1.4), удовлетворяющего условию (1.5), на концах отрезка  $[0, 1]$  не имеет особенностей. Предполагая противное, допустим существование особенности, например, на конце  $\xi=0$  и положим

$$p_0(\xi) = \chi(\xi) \xi^{-\nu}, \quad (0 < \nu < 1)$$

где  $\chi_i(\xi)$ , ( $i = 1; 2$ ) — функции, удовлетворяющие условию Гельдера в окрестности точки  $\xi=0$ , притом  $\chi(0) \neq 0$ . Тогда, согласно результатам работ [13, 14], в окрестности точки  $\xi=0$  имеют место соотношения

$$\int_0^1 |\xi - \eta|^{\mu-1} p_0(\eta) d\eta = \int_0^1 \frac{\chi(\eta)}{|\xi - \eta|^{1-\mu}} \eta^{-\nu} d\eta = \begin{cases} \xi^{\mu-\nu} \chi_1(\xi) & \text{при } \nu > \mu \\ \chi_2(\xi) & \text{при } \nu < \mu \end{cases}$$

где  $\chi_i(\xi)$ , ( $i = 1; 2$ ) — функции, удовлетворяющие условию Гельдера в окрестности точки  $\xi=0$ . Отсюда непосредственно вытекает, что левая часть уравнения (1.4) в точке  $\xi=0$  всегда будет иметь особенность, в то время как его правая часть в этой же точке не имеет никакой особенности. Это противоречие и доказывает высказанное утверждение.

Далее, так как нормальное давление  $p(x)$  неотрицательно, то из уравнений (1.4) следует, что

$$0 \leq p_0(\xi) \leq [\gamma - f(\xi)]^{\beta} \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

Теперь в уравнении (1.4) осуществим предельный переход  $\mu \rightarrow 1$ . С этой целью уравнение запишем в виде

$$\theta_\mu \int_0^1 \frac{|\xi - \eta|^{\mu-1} - 1}{1 - \mu} p_0(\eta) d\eta = [\gamma - f(\xi) - p_0^{\beta}(\xi)]^{\alpha} + \text{const}$$

где  $\theta_\mu = (1 - \mu) \theta$ . Поскольку

$$\lim_{\mu \rightarrow 1} \theta_\mu = \theta_1, \quad \text{где } \theta_1 = \frac{2}{\pi} \left( \frac{a}{a_1 + a_2} \right)^{\beta} \left( \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right)$$

то отсюда

$$p_0^{\alpha}(\xi) + \theta_1 \int_0^1 \ln \frac{1}{|\xi - \eta|} p_0(\eta) d\eta = -f(\xi) + \text{const} \quad (1.6)$$

что совпадает с уравнением работы [8] при несжимаемости материалов контактирующих тел.

Из последнего уравнения в свою очередь при  $\alpha = 1$  получается известное интегральное уравнение Штаермана [4].

Отметим, что основное разрешающее уравнение (1.4) можно записать также в виде

$$q(\xi) = \theta \gamma^{1-\mu} \int_0^1 K(\xi, \tau) \{1 - \gamma^{-1} f(\tau) - \omega^{-\frac{\mu}{2}}(\tau) q^{\mu}(\tau)\}^{\mu} \omega^{-\frac{1}{2}}(\tau) d\tau, \quad (1.7)$$

что представляет собой нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна [15], а условие (1.5) — в виде

$$\gamma^{-1} = P_0^{-1} \int_0^1 [1 - \gamma^{-1} f(\xi) - q_0^{-\mu}(\xi)]^{\mu} d\xi \quad (1.8)$$

Здесь введены обозначения

$$\omega(\xi) = (\xi - \xi^2)^{-\mu/2}, \quad K(\xi, \tau) = |\xi - \tau|^{-1} \sqrt{\omega(\xi) \omega(\tau)}$$

$$q(\xi) = q_0(\xi) \sqrt{\omega(\xi)}, \quad q_0(\xi) = \gamma^{-1} [\gamma - f(\xi) - p_0^{\mu}(\xi)]^{\mu} \quad (1.9)$$

В дальнейшем изложении будем исходить, в основном, из уравнения (1.7).

§ 2. Сведение разрешающего уравнения к бесконечной системе нелинейных алгебраических уравнений и ее исследование

Для эффективного построения решения нелинейного интегрального уравнения (1.7) нам понадобятся собственные функции и собственные числа ядра  $K(\xi, \eta)$ , которые согласно [16] даются интегральным соотношением

$$\int_0^1 K(\xi, \tau) \psi_n(\tau) d\tau = \lambda_n^{-1} \psi_n(\xi), \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

где

$$\psi_n(\xi) = \frac{\Gamma(\nu)}{2^{\nu} \sqrt{\pi} \Gamma(2\nu - 2 + 2\nu)} \sqrt{\omega(\xi)} C_{2(n-1)}^{(\nu)}(2\xi - 1)$$

$$\lambda_n = \frac{\cos \pi \nu}{\pi} \frac{\Gamma(2\nu) \Gamma(2n - 2)!}{\Gamma(2n - 2 + 2\nu)}, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.2)$$

$\Gamma(z)$  — известная гамма-функция Эйлера,  $\nu = (1 - \mu)/2$ ,  $C_n^{(\nu)}(t)$  — многочлены Гегенбауэра, ортогональные на отрезке  $[-1, 1]$  с весом  $\rho(t) = (1 - t^2)^{-\nu/2}$ . Теперь решение уравнения (1.7) на основе известной теоремы Гильберта-Шмидта представим в виде ряда [15]

$$q(\xi) = c \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k^{-1} \psi_k(\xi) \quad (2.3)$$

с неизвестными коэффициентами  $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ .

Здесь

$$c = \left[ \int_0^1 \xi^{2(\mu-1)} \omega(\xi) d\xi \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[ \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \mu - 1\right) \Gamma(1 - \mu/2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (1.7) и учитывая (2.1), после несложных выкладок получим нелинейную бесконечную систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$x_n = \frac{\theta}{c} \left(\frac{x_0}{h}\right)^{m-1} \int_0^1 \left| 1 - x_0^2 f^*(\xi) - \left[ c \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k^{-1} \varphi_k(\xi) \right]^m \right|^2 \varphi_n(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

( $n = 1, 2, \dots$ )

Здесь

$$x_0 = h\gamma^{-1}, \quad f^*(\xi) = h^{-2}f(\xi), \quad \varphi_n(\xi) = w^{-1,2}(\xi) \psi_n(\xi) \quad (2.6)$$

( $n = 1, 2, \dots$ )

$h$  — пока произвольная положительная постоянная. Тогда условие (1.8) принимает вид

$$x_0 = hP_0^{-1} \int_0^1 \left| 1 - x_0^2 f^*(\xi) - \left[ c \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lambda_k^{-1} \varphi_k(\xi) \right]^m \right|^2 d\xi \quad (2.7)$$

и вместе с (2.5) составляет бесконечную систему нелинейных уравнений для определения коэффициентов  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ .

Теперь перейдем к исследованию бесконечной системы (2.5), что проводится на основе принципа неподвижной точки Банаха [17]. С этой целью введем в рассмотрение  $(N+1)$ -мерное евклидово вещественное пространство  $E_{N+1}$ , метрика в котором дается формулой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=0}^N (x_k - y_k)^2}, \quad (x = (x_0, x_1, \dots, x_N), \quad y = (y_0, y_1, \dots, y_N))$$

Пусть  $\bar{S}(b, R)$  — замкнутый шар в  $E_{N+1}$  с центром  $b = (hP_0^{-1}, 0, \dots, 0)$  и с радиусом  $R$ , притом  $0 < R < hP_0^{-1} \leq 1$ . Рассмотрим в  $\bar{S}(b, R)$  оператор

$$y = A_N(x), \quad (x = (x_0, x_1, \dots, x_N), \quad y = (y_0, y_1, \dots, y_N)) \quad (2.8)$$

определяемый формулами

$$y_0 = hP_0^{-1} \int_0^1 \Phi_N(\xi) d\xi, \quad y_n = \frac{\theta}{c} \left(\frac{x_0}{h}\right)^{m-1} \int_0^1 \Phi_N(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi$$

( $n = 1, 2, \dots, N$ )

$$\Phi_N(\xi) = \left| 1 - x_0^2 f^*(\xi) - \left[ c \sum_{k=1}^N x_k \lambda_k^{-1} \varphi_k(\xi) \right]^m \right|^2 \quad (0 \leq \xi \leq 1) \quad (2.9)$$

Так как  $K(\xi, \eta)$  — квадратично суммируемое ядро и  $\varphi_n(\xi)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) — его ортонормированные собственные функции, то учитывая (1.9) и (2.6), будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{-2} \varphi_k^2(\xi) \leq \int_0^1 \frac{\omega(\xi)}{|\xi - \eta|^{1-\nu}} d\xi \quad (2.10)$$

Далее, так как [18]

$$|C_n^*(t)| \leq |C_n^*(-1)| = C_n^*(1), \quad (-1 \leq t \leq 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots)$$

то согласно (2.2), (2.6), (2.10) и (2.4), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{-2} \varphi_k^2(\xi) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^{-2} \varphi_k^2(0) \leq \int_0^1 \xi^{2(\mu-1)} \omega(\xi) d\xi = c^{-1} \quad (2.11)$$

Пусть  $x \in \bar{S}(b, R)$ . Тогда при помощи (2.11) и неравенства Коши-Буняковского для сумм находим

$$\left| c \sum_{k=1}^N x_k \xi_k^{-1} \varphi_k(\xi) \right| \leq \sqrt{c^2 \sum_{k=1}^N \xi_k^{-2} \varphi_k^2(\xi)} \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2} \leq R \quad (2.12)$$

Далее, из (2.9) и (2.12)

$$|y_0 - hP_0^{-1}| \leq hP_0^{-1} |1 - |1 - (R + hP_0^{-1})^2 f_0 - R^m|^j|$$

где  $f_0 = \max_{0 \leq \xi < 1} f^*(\xi)$ . Отсюда следует, что если

$$\frac{RP_0}{h\sqrt{2}} + (1 - R^m)^j \geq 1 \quad \text{и} \quad 0 \leq f_0 \leq \left| 1 - R^m - \right. \\ \left. - \left( 1 - \frac{RP_0}{h\sqrt{2}} \right)^j \right| (R + hP_0^{-1})^{-2} \quad (2.13)$$

то

$$(y_0 - hP_0^{-1})^2 \leq 0.5 R^2 \quad (2.14)$$

С другой стороны, согласно неравенству Бесселя из (2.9) имеем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^N y_k^2} \leq \frac{b}{c} \left( \frac{x_0}{h} \right)^{\mu-1} \left[ \int_0^1 \Phi_N^2(\xi) \omega^{-1}(\xi) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ \leq \frac{b}{c} \left( \frac{hP_0}{h - RP_0} \right)^{1-\mu} \frac{\Gamma(1 + \mu/2)}{\sqrt{\Gamma(2 + \mu)}}$$

Отсюда вытекает, что при условии

$$b \leq \left( \frac{h - RP_0}{hP_0} \right)^{1-\mu} \frac{Rc \sqrt{\Gamma(2 + \mu)}}{\Gamma(1 + \mu/2) \sqrt{2}} \quad (2.15)$$

справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^N y_k^2 \leq 0.5 R^2 \quad (2.16)$$

Пользуясь (2.14) и (2.16), легко проверить, что  $y \in \bar{S}(b, R)$ , то есть  $\rho(y, b) \leq R$ . Последнее означает, что при выполнении условий (2.13) и (2.15) оператор (2.8) отображает замкнутый шар  $\bar{S}(b, R)$  в себя.

Пусть далее

$$\begin{aligned} x^{(i)} &= (x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}) \in \bar{S}(b, R), \quad y^{(i)} = A_N(x^{(i)}) \\ y^{(i)} &= (y_0^{(i)}, y_1^{(i)}, \dots, y_N^{(i)}) \\ \Phi_N^{(i)}(\xi) &= \left| 1 - (x_0^{(i)})^\alpha f^*(\xi) - \left| c \sum_{k=1}^N x_k^{(i) \alpha-1} \varphi_k(\xi) \right|^m \right|^p \quad (2.17) \\ &(0 \leq \xi \leq 1, \quad i = 1; 2) \end{aligned}$$

Пользуясь (2.8) и (2.9), можно записать

$$|y_0^{(1)} - y_0^{(2)}| \leq h P_0^{-1} \int_0^1 |\Phi_N^{(1)}(\xi) - \Phi_N^{(2)}(\xi)| d\xi \leq h P_0^{-1} |\Phi_N^{(1)}(\xi_0) - \Phi_N^{(2)}(\xi_0)| \quad (2.18)$$

где  $\xi_0 \in [0, 1]$  — точка, в которой функция  $|\Phi_N^{(1)}(\xi) - \Phi_N^{(2)}(\xi)|$  достигает своего максимума. Затем пользуясь формулой конечных приращений Лагранжа и учитывая (2.12), после нетрудных выкладок будем иметь

$$|\Phi_N^{(1)}(\xi_0) - \Phi_N^{(2)}(\xi_0)| \leq \beta_1 |x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| + \beta_2 \left[ \sum_{k=1}^N (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

где

$$\beta_1 = f_0 (h P_0^{-1} - R)^{\alpha-1}, \quad \beta_2 = \beta m R^{\alpha-1}$$

Теперь согласно неравенству Бесселя и с учетом (2.8), (2.9) и (2.17) получим

$$\begin{aligned} \left[ \sum_{k=1}^N (y_k^{(1)} - y_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} &\leq \frac{h^{1-\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}{c |\Gamma(2 + \mu)|} \max_{0 \leq \xi \leq 1} |(x_0^{(1)})^{\alpha-1} \Phi_N^{(1)}(\xi) - \\ &- (x_0^{(2)})^{\alpha-1} \Phi_N^{(2)}(\xi)| \quad (2.20) \end{aligned}$$

Так как  $h P_0^{-1} - R \leq x_0^{(1)} \leq h P_0^{-1} + R$ , ( $i = 1; 2$ ), то опять при помощи формулы конечных приращений Лагранжа, (2.19) и (2.20) находим

$$\left[ \sum_{k=1}^N (y_k^{(1)} - y_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \leq \beta_1 |x_0^{(1)} - x_0^{(2)}| + \beta_2 \left[ \sum_{k=1}^N (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})^2 \right]^{1/2} \quad (2.21)$$

где

$$\beta_4 = \frac{\theta \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}{c \sqrt{\Gamma(2+\mu)}} \left[ \frac{P_0(1-\mu^2)}{hR - P_0} + \beta_1 \right] \left( \frac{hP_0}{h - RP_0} \right)^{1-\mu^2}$$

$$\beta_4 = \frac{\theta \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right)}{c \sqrt{\Gamma(2+\mu)}} \beta_2 \left( \frac{hP_0}{h - RP_0} \right)^{1-\mu^2}$$

Тогда из формул (2.18), (2.19) и (2.21) следует, что

$$\rho(y^{(1)}, y^{(2)}) \leq \left[ 2(P_0^{-2} h^2 \beta_1^2 + \beta_3) (x_0^{(1)} - x_0^{(2)})^2 + \right. \\ \left. + 2(P_n^{-2} h^2 \beta_2^2 + \beta_4) \sum_{k=1}^N (x_k^{(1)} - x_k^{(2)})^2 \right]^{1/2}$$

Последнее неравенство показывает, что при одновременном выполнении условий

$$2(P_0^{-2} h^2 \beta_1^2 + \beta_3) < 1, \quad 2(P_n^{-2} h^2 \beta_2^2 + \beta_4) < 1 \quad (2.22)$$

оператор (2.8) в  $\bar{S}(b, R)$  является сжимающим оператором.

Таким образом, если параметры  $\theta, j, n, R, P_n$  таковы, что выполняются условия (2.13), (2.15) и (2.22), то урезанная система

$$x_0 = hP_0^{-1} \int_0^1 \Phi_N(\xi) d\xi, \quad x_n = \frac{\theta}{c} \left( \frac{h}{x_0} \right)^{1-\mu^2} \int_0^1 \Phi_N(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi \quad (2.23)$$

$$(n = 1, 2, \dots, N)$$

имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки

$$x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_N^{(0)}) \text{ в } \bar{S}(b, K).$$

Совершенно аналогичным способом можно показать, что при выполнении условий (2.13), (2.15) и (2.22) бесконечная система

$$x_0 = \frac{h}{P_0} \int_0^1 \Phi(\xi) d\xi, \quad x_n = \frac{\theta}{c} \left( \frac{h}{x_0} \right)^{1-\mu^2} \int_0^1 \Phi(\xi) \varphi_n(\xi) d\xi, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$(2.24)$$

$$\Phi(\xi) = \left[ 1 - x_0^{\mu} f^*(\xi) - \left| c \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{\mu} k^{-1} \varphi_k(\xi) \right|^m \right]^{\beta} \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

также имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольной точки  $x^{(0)} = (x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots)$ , для которой

$$(x_0^{(0)} - hP_0^{-1})^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^{(0)})^2 \leq R^2$$

Теперь при помощи теоремы А. Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [19] можно доказать, что решение урезанной системы (2.23) при  $N \rightarrow \infty$  совпадает с решением бесконечной системы (2.24).

Наконец, отметим, что решение бесконечной системы (2.24) является решением также бесконечной системы (2.5), (2.7), что следует из положительности ядра  $K(\xi, \eta)$ .

### § 3. Некоторые частные случаи

Рассмотрим плоскую контактную задачу о давлении жесткого штампа прямолинейного основания на шероховатую упругую полуплоскость. Решение этой задачи сводится к решению нелинейного уравнения (1.6) при  $f(\xi) = \text{const}$ . Это уравнение приближенным методом решено в работе [9]. Здесь приводится другое представление решения этой задачи, удобное для вычисления контактных давлений везде вплоть до концевых точек контактной зоны.

Представляя  $p_0^*(\xi)$  в виде ряда по многочленам Чебышева первого рода, которые получаются из многочленов  $C_n(t)$  при  $2v = (1-\mu) \rightarrow 0$ , и пользуясь принципом сжатых отображений Банаха, легко доказывается, что неизвестные коэффициенты разложения можно найти методом последовательных приближений, если параметры  $\theta$ , и  $P_0$  удовлетворяют определенному условию. Однако, в разбираемом частном случае решение задачи принимает сравнительно простой вид, если воспользоваться известным интегральным соотношением [18]

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{y-x} U_{n-1}(y) \sqrt{1-y^2} dy = -\pi T_n(x), \quad (-1 < x < 1, \quad n = 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

где  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos x) / \sqrt{1-x^2}$  — многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Уравнение (1.6) после дифференцирования его обеих частей по  $\xi$  принимает вид

$$\frac{d}{d\xi} p_0(\xi) = 2\xi p_0^{1-\alpha}(\xi) \int_{\xi}^1 \frac{1}{\xi-\eta} p_0(\eta) d\eta \quad (3.2)$$

где положено  $f(\xi) = \text{const}$ .

Решение уравнения (3.2) представим в виде

$$p_0(\xi) = P_0 \left[ x_0 + 2 \int_{\xi}^1 \sum_{k=1}^{\infty} x_k U_{2k-1}(2\xi-1) \right] \quad (3.3)$$

Из условия равновесия (1.5) будем иметь

$$x_0 + \frac{\pi}{4} x_1 = 1 \quad \text{или} \quad x_0 = 1 - \frac{\pi}{4} x_1 \quad (3.4)$$

Подставляя (3.3) в (3.2), а затем учитывая (3.1) и (3.4), после некоторых операций получим относительно коэффициентов  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений

$$x_m = - \frac{2\theta_0 P_0^{1-\alpha}}{\pi(2m-1)} \int_0^1 \left[ 1 - \frac{\pi}{4} x_1 + 2\sqrt{\xi - \xi^2} \sum_{k=1}^{\infty} x_k U_{2k-1}(2\xi - 1) \right]^{1-\alpha} \times \\ \times \left[ \left( 1 - \frac{\pi}{4} x_1 \right) \ln \frac{\xi}{1-\xi} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} x_n T_{2n-1}(2\xi - 1) \right] T_{2m-1}(2\xi - 1) d\xi \quad (3.5) \\ (m = 1, 2, \dots)$$

Пользуясь принципом сжатых отображений Банаха можно доказать, что если

$$\theta_0 P_0^{1-\alpha} < \alpha H (1+R)^{\alpha-1} \min |R, [1 + (1-\alpha)(1-R)^{-1}]^{-1}|,$$

где

$$H = \left[ \frac{\pi}{4} \int_0^1 \left( \pi + 2 \left| \ln \frac{\xi}{1-\xi} \right| \right)^2 \sqrt{\xi - \xi^2} d\xi \right]^{-1/2}$$

и  $R$  — произвольное постоянное, удовлетворяющее условию  $0 < R < 1$ , то бесконечная система нелинейных алгебраических уравнений (3.5), а также соответствующая урезанная конечная система имеет единственное решение, которое можно построить методом последовательных приближений, исходя из произвольного начального значения  $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots)$ , притом

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(0)}| < R$$

Отметим, что в этом случае контактное давление в конце  $x=a$  контактной зоны определяется формулой

$$p(a) = \left( \frac{a}{a_1 + a_2} \right)^{\alpha} p_0(1) = \frac{x_0}{2a} P = \frac{4 - \pi x_1}{8a} P$$

Если же  $f(\xi) \neq \text{const}$ , а ширина участка контакта  $a$  неизвестна, то тогда должно быть  $p(a) = 0$ , откуда  $x_1 = 4/a$ . Из последнего равенства определяется  $a$ .

Наконец, остановимся на плоской контактной задаче для шероховатых упругих тел, рассмотренной Штаерманом [4].

Подставляя  $\alpha = 1$  в (3.5) и введя новые неизвестные  $y_m = 4x_m/(4 - \pi x_1)$ , ( $m = 1, 2, \dots$ ) в этом случае будем иметь бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$y_m + \delta_1 \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} y_n = b_m \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

где

$$K_{m,n} = -\frac{2}{2m-1} \left| \frac{1}{4(n-m)^2-1} + \frac{1}{4(n+m-1)^2-1} \right|$$

$$(n, m = 1, 2, \dots)$$

$$b_m = -\frac{2\delta_1}{\pi(2m-1)} \int_0^1 \ln \frac{\xi}{1-\xi} T_{2m-1}(2\xi-1) d\xi \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Легко показать, что имеют место оценки

$$\sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}| \leq \frac{4}{3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |K_{m,n}| < \frac{2}{2m-1}, \quad |b_m| \leq \frac{4\delta_1 \ln 2}{\pi(2m-1)}$$

$$(m = 1, 2, \dots)$$

откуда вытекает, что при  $\Pi_1 < 3/4$  бесконечная система (3.6) вполне регулярна, а при  $\theta_1 \geq 3/4$  она квазивполне регулярна.

§ 4. *Центральный удар штампа о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость*

Теперь в рамках теории удара Г. Герца [11] рассмотрим центральный удар штампа прямолинейного основания о шероховатую степенно упрочняющуюся полуплоскость.

Пренебрегая влиянием всех сил, за исключением силы взаимодействия между штампом и полуплоскостью, уравнение движения штампа запишем в виде

$$m \frac{d^2\delta}{dt^2} = -P \quad (4.1)$$

при начальных условиях

$$\delta|_{t=0} = 0, \quad \frac{d\delta}{dt} \Big|_{t=0} = V_0 \quad (4.2)$$

Здесь  $m$ —масса штампа,  $\delta$ —осадка штампа, то есть мера погружения штампа в основание,  $P$ —равнодействующая нормальных давлений, возникающих под штампом,  $t$ —координата времени,  $V_0$ —начальная скорость штампа. С учетом (1.3) уравнение (4.1) и условия (4.2) переходят в следующие:

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -kP_0, \quad \gamma|_{t=0} = 0, \quad \frac{d\gamma}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{V_0}{a} \quad (4.3)$$

где  $k = 2m^{-2} a^2 (a_1 + a_2)^{-2}$ . Далее, если  $q_*(z, \gamma)$ —решение интегрального уравнения

$$q_n(\xi, \gamma) = \theta_1^{2n-1} \int_0^1 |\xi - \gamma|^{2n-2} [1 - q_n^*(\gamma, \gamma)]^n d\gamma \quad (4.4)$$

при заданном  $\gamma$ , то при помощи (1.7)—(1.9) легко получить, что зависимость между  $P_0$  и  $\gamma$  дается формулой

$$P_0 = \gamma^3 \int_0^1 [1 - q_n^*(\xi, \gamma)]^3 d\xi \quad (4.5)$$

Подставляя (4.5) в (4.3), после несложных выкладок находим

$$\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = 2k\gamma^{2n+1} \int_0^1 \int_0^1 \gamma^2 [1 - q_n^*(\xi, \gamma)]^2 d\xi d\gamma \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что  $\gamma_{\max}$  удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{V_0}{a}\right)^2 = 2k\gamma_{\max}^{2n+1} \int_0^1 \int_0^1 \gamma^2 [1 - q_n^*(\xi, \gamma_{\max}, \gamma)]^2 d\xi d\gamma \quad (4.7)$$

Имея значение  $\gamma_{\max}$ , по формуле (4.5) найдем

$$(P_0)_{\max} = \gamma_{\max}^3 \int_0^1 [1 - q_n^*(\xi, \gamma_{\max})]^3 d\xi \quad (4.8)$$

Теперь вычислим максимальное контактное давление, возникающее под штампом. Из (1.7)—(1.9) и (4.4) будем иметь

$$\max_{0 < \xi < 1} p_0(\xi) = \gamma_{\max}^3 \max_{0 < \xi < 1} [1 - q_n^*(\xi, \gamma_{\max})]^3 \quad (4.9)$$

Продолжительность удара определяется формулой

$$T = \sqrt{\frac{2}{k}} \gamma_{\max}^{\frac{1-3}{2}} \left| \int_0^1 \int_0^1 \gamma^2 \{ [1 - q_n^*(\xi, \gamma_{\max}, \gamma)]^3 - x^{2n+1} [1 - q_n^*(\xi, \gamma_{\max}, \gamma x)]^3 \} d\xi d\gamma \right|^{-\frac{1}{2}} dx \quad (4.10)$$

Займемся определением функции  $q_n(\xi, \gamma)$ . При помощи принципа сжатых отображений Банаха можно доказать, что при выполнении условия

$$\theta_1^{2n-1} < 2\mu^{2n-1} \quad (4.11)$$

последовательность функций

$$q_0(\xi, \gamma) = 0, \quad q_n(\xi, \gamma) = \theta_1^{2n-1} \int_0^1 |\xi - \gamma|^{2n-2} [1 - q_{n-1}^*(\gamma, \gamma)]^n d\gamma \quad (4.12)$$

( $n = 1, 2, \dots$ )

сходится к  $q_0(\xi, \gamma)$  равномерно по  $\xi$  и  $\gamma$ . При этом условие (4.11) заведомо выполняется, если

$$V_0^2 < 2ka^2 [2\mu^2 2^{2\mu-1}]^{\frac{1+\beta}{\beta-1}} \int_0^1 (\xi - \xi^{\beta m})^{\beta} d\xi$$

которое можно проверить при помощи (4.4) и (4.7).

Используя последовательные приближения (4.12), из уравнения (4.7) легко получить приближенное выражение для  $T_{\max}$  в виде

$$T_{\max} = \left| \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{1}{1+\beta}} + J \left| \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{1}{1+\beta} + \varepsilon} + o\left(V_0^{\frac{2\beta}{1+\beta} + 4\varepsilon}\right) \quad (4.13)$$

где

$$J = \frac{(\theta m)^m}{m+1} \int_0^1 [\xi^m + (1-\xi)^m]^\theta d\xi, \quad \varepsilon = \frac{\beta m - 1}{1+\beta}$$

Далее, при помощи (4.4), (4.8)–(4.10) и (4.13) находим остальные основные характеристики удара, а именно:

$$(P_0)_{\max} = \left[ \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right]^{\frac{1}{1+\beta}} - \beta m J \left| \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{\beta}{1+\beta} + \varepsilon} + o\left(V_0^{\frac{2\beta}{1+\beta} + 4\varepsilon}\right) \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \max_{0 < \xi < 1} p_0(\xi) = & \left| \frac{(1-\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{\beta}{1+\beta}} + \\ & + \beta [J - (\theta m)^m] \left| \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{\beta}{1+\beta} + \varepsilon} + o\left(V_0^{\frac{2\beta}{1+\beta} + 4\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} T = J_1 \sqrt{\frac{2(1+\beta)}{k}} \left| \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{1-\beta}{1+\beta}} + J \frac{1}{\sqrt{2k}} [(\beta-1)J_1 \sqrt{1+\beta} + \\ + J_2] \left| \frac{(1+\beta)V_0^2}{2ka^2} \right|^{\frac{1-\beta}{2+2\beta} + \varepsilon} + o\left(V_0^{\frac{1-\beta}{1+\beta} + 4\varepsilon}\right) \end{aligned} \quad (4.16)$$

где

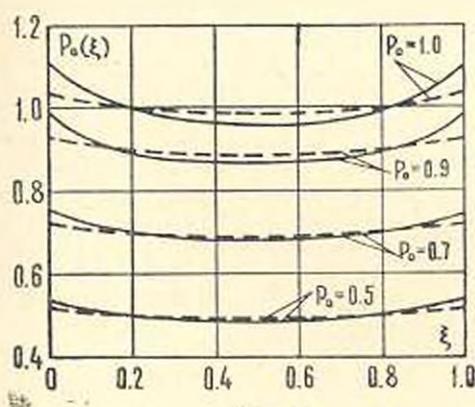
$$J_1 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^{\beta+1}}} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{2+\beta}{1+\beta}\right)}{\Gamma\left(\frac{3+\beta}{2+2\beta}\right)}, \quad J_2 = \int_0^1 (1-x^{\beta m + \beta})(1-x^{\beta+1})^{-\frac{\beta}{2}} dx$$

### § 5. Численный пример

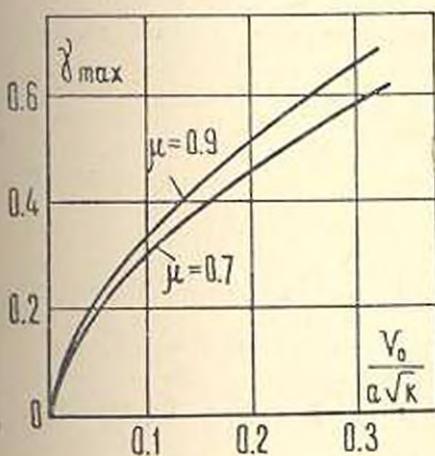
Рассмотрим задачу о давлении штампа с плоским основанием на чужужную степенно упрочняющуюся полуплоскость с шлифованной определенным образом поверхностью. В этом случае  $a_1 = A_1 = 0$ , а  $I(\xi) \equiv 0$ .

Согласно экспериментальным данным ([6], стр. 110) для некоторых конкретных чугуных образцов  $\alpha_2 = 1.289 \cdot 10^{-32} \text{ м (кг/см}^2\text{)}^{-0.4}$ ,  $\beta = 2.5$ . Для получения числовых результатов положим  $a = 0.1 \text{ м}$ ,  $r = 0.7$  и  $\mu = 0.9$ .

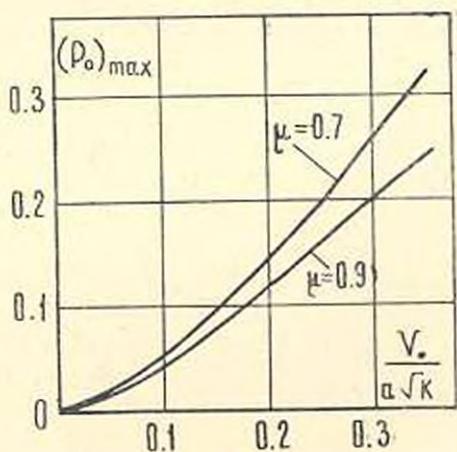
Вычисления проведены на ЭВМ «Наири-2». При указанных значениях параметров методом последовательных приближений, исходя из формул (2.5) и (2.7), должны вычисляться коэффициенты  $\{x_k\}_{k=1}^N$  в разложении (2.3), после чего из (1.9) находим давление под штампом  $p_0(\xi)$ . Однако, в разбираемом частном случае проще непосредственно исходить из уравнения (1.4), где  $f(\xi) = 0$ , что и сделано. А именно, построено второе приближение решения уравнения (1.4), отправляясь от нуля в качестве нулевого



Фиг. 2.



Фиг. 3.

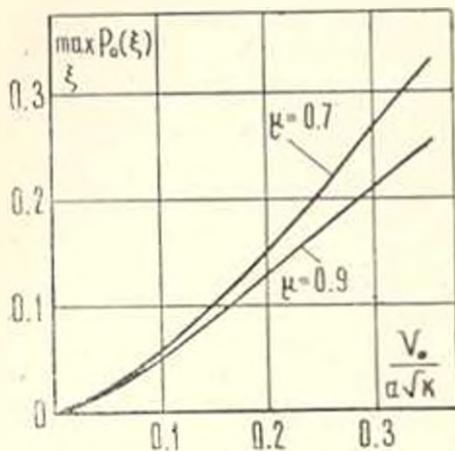


Фиг. 4.

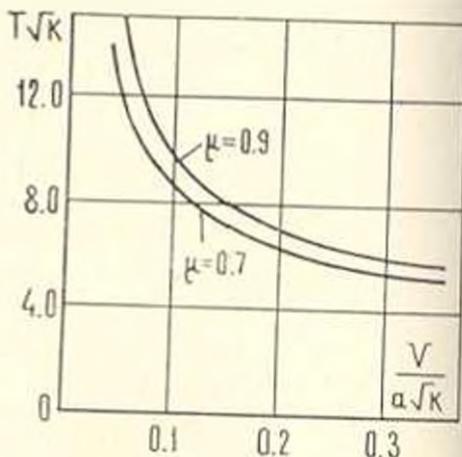
приближения. По результатам этих вычислений построены графики давления  $p_0(\xi)$  (фиг. 2) при значениях  $P_0 = 0.5; 0.7; 0.9$  и  $1.0$ , где  $P_0$  дается

\* В пространстве непрерывных функций к уравнению (1.4) можно применить принцип неподвижной точки Банаха и построить его решение методом последовательных приближений. В настоящей работе, однако, развивается метод исследования этого уравнения как уравнения Гаммерштейна.

последней формулой из (1.3). На этих графиках сплошными линиями изображено давление под штампом в случае  $\mu=0.9$ , а пунктирными—в случае  $\mu=0.7$ . Отметим, что при увеличении значения  $P_0$  давление заметно увеличивается, особенно на концах контактного участка, вследствие чего эти линии все сильнее изгибаются. Последнее обстоятельство имеет место также при возрастании  $\mu$ , когда  $P_0$  фиксировано.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

На остальных графиках (фиг. 3, 4, 5, 6) иллюстрируется ход изменения основных механических характеристик статического удара штампа с плоским основанием о границу степенно упрочняющейся чугунной полуплоскости.

Авторы благодарят Н. Х. Арутюняна за внимание к работе.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 19 VII 1976

Ս. Մ. ՄԻՒՅԱՆՅԱՆ, Է. Ա. ՇԵԿՅԱՆ

ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՕՐԵՆՔՈՎ ԱՄՐԱՊԵՂԻՆՈՎ ԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՐՔ ՊԻՆՂ  
ՄԱՐԻՐԵՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐՔ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽԵՒԻՐԸ

Ո Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Գիտարկվող խնդիրը նկարագրվում է Համմերշտեյնի սխիսի ոչ զծային ինտեգրալ հաժախարումով: Գեղենրատուէրի օրթոգոնալ բաղձանդամների ապարատի օգնությամբ այդ հաժախարումը բերվում է նրան համարժեք ոչ զծային հանրահաշվական անվերջ համակարգի վերջինիս ուսումնասիրությունը կատարվում է Բանախի սեղմող արտապատկերումների սկզբունքի հիման վրա: Գիտարկվում են մասնավոր դեպքեր:

Ստացված արդյունքների հիման վրա այնուհետև զիտարկվում է աստի-  
ճանային օրենքով ամրապնդվող անհարթ կիսահարթույթյան և ուղղագիծ հիմ-  
քով զրոզմի կենտրոնական հարվածի խնդիրը:  
Բերված է թվային օրինակ:

## A PLANE CONTACT PROBLEM FOR TWO ROUGH SOLIDS MADE OF GRADUALLY HARDENING MATERIALS

S. M. MKHITARIAN, L. A. SHEKIAN

### S u m m a r y

The problem is reduced to the solution of Hammershtein's non-linear integral equation. By the set of Hegenbouer's orthogonal polynomials the solution of this equation is reduced to the equivalent infinite system of nonlinear algebraic equations. The examination of the infinite system follows Banah's compressed reflection principles. Special instances are considered. Using this solution, the central impact of the punch with rectilinear basis against a rough gradually hardening semi-plane is examined. Numerical examples are presented.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, 1959, т. 23, вып. 5.
2. Арутюнян Н. Х. Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением материала. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1959, вып. 2.
3. Арутюнян Н. Х., Манукян М. М. Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Шварцман И. Я. Контактная задача теории упругости М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. Попов Г. Я., Савчук В. В. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта с учетом поверхностной структуры контактирующих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 3.
6. Рыжол Э. В. Основы расчета стыковых поверхностей деталей машин на контактную жесткость. М., Машино, 1962.
7. Демкин Н. Б. Контактное шероховатых поверхностей М., Наука, 1970.
8. Рабинович А. С. Плоская контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1974, № 3.
9. Рабинович А. С. Плоская контактная задача о давлении штампа с прямолинейным основанием на шероховатую упругую полуплоскость. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. 27, № 4.
10. Рабинович А. С. Осесимметричная контактная задача для шероховатых упругих тел. Изв. АН СССР, МТТ, 1975, № 4.
11. Кильчевский Н. А. Теория соударений твердых тел. Киев, Наукова думка, 1969.
12. Шекян Л. А. О соударении двух твердых тел, изготовленных из степенно упрочняющегося материала. Докл. АН АрмССР, 1974, т. 58, № 4.
13. Сахалюк К. Д. Обобщение интегрального уравнения Абеля. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4.
14. Сахалюк К. Д. Обобщение интегрального уравнения Абеля. Ученые записки Кншиневск. Госуниверситета, 1962, т. 50.
15. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. М., ИЛ, 1960.

16. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
17. Люстерник Л. А., Собольев В. И. Элементы функционального анализа. М., изд. «Наука», 1965.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., изд. «Наука», 1974.
19. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. М., изд. «Наука», 1974.

Э. И. ГРИГОЛЮК, В. М. ТОЛКАЧЕВ

МОДИФИКАЦИЯ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИН  
ДЛЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

Основные уравнения теории пластин, учитывающей поперечные сдвиги, были опубликованы Э. Рейсснером [1] в 1944 г. В 1945 г. он получил разрешающие уравнения своей теории [2]. В 1947 г. Э. Рейсснер дает несколько иной вывод уравнений, вводя углы поворота, а также дает способ преобразования системы уравнений [3]. В 1949 году А. Грин [4] вывел уравнения Э. Рейсснера энергетическим путем без использования теоремы Кастилиано. М. Шефер [5] (1952) получил статическим и геометрическим путем систему дифференциальных уравнений малого прогиба четвертого порядка относительно вертикального перемещения (в уравнении классической теории появляется неоднородный член, обусловленный нагрузкой) и второго порядка относительно некоторой моментной функции, то есть уравнения работы [3]. На примере свободно опертой пластины, подверженной распределенной по закону синуса нагрузки, он показал, что прогибы пластины по сравнению с классической теорией практически не меняются, поперечные же силы, особенно в углах, видоизменяются. Александр Кромм [6] (1953) построил уточненную теорию пластин, учитывая только деформацию поперечного сдвига и пренебрегая поперечным обжатием. Позднее [7] (1955) он для случая нагруженной синусоидальным распределенным давлением свободно опертой пластины проанализировал характер изменения контурных поперечных усилий, а также поперечные усилия в углах пластины. К. Гиркман и Р. Беер [8] (1958) исследовали случай ортотропной пластины в духе теории Э. Рейсснера. Некоторые обсуждаемые здесь результаты суммированы в монографии [9] (1963). Прием А. Грина использовал также С. П. Тимошенко [10]. Обобщение теории Э. Рейсснера [1] на произвольный закон изменения изгибных напряжений по толщине пластины дал А. Л. Гольденвейзер [11] (1958). При этом закон изменения взят одинаковым для всех трех компонентов напряжения. Л. Я. Айвица [12] (1964) показал, что функция распределения напряжений по толщине пластины, введенная А. Л. Гольденвейзером, может быть определена из вариационного принципа Кастилиано.

Перечисленные работы характерны тем, что рассматривается случай, когда пластина нагружена только нормальными усилиями, прогиб считается постоянным по толщине, закон изменения тангенциальных смещений по толщине из теории не вытекает.

Модификация теории Э. Рейсснера [1] для случая произвольных нагрузок, учитывающая поперечное обжатие, развита П. Нагди [13], который постулирует линейный закон изменения перемещений  $u$ ,  $v$  и напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  по толщине пластины, а прогиб  $w$  задает квадратной параболой

лой. Уравнения получены для оболочек с помощью вариационного соотношения Э. Рейсснера [14] и для случая пластины по существу совпадают с рейсснеровскими. Поперечное обжатие учитывается отдельной формулой.

В 1974 г. Э. Рейсснер [15] публикует модифицированный вариант своей теории для случая нормальных нагрузок, согласно которому поперечное обжатие не меняется по толщине пластины, смещения  $u, v$  изменяются по кубической параболе, напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  — по квадратной параболе. Обобщенные по толщине соотношения закона Гука сохраняют прежний вид.

Вопросы уточнения теории Э. Рейсснера рассматривались также Б. Ф. Власовым [16] и другими авторами.

Известно, что теория Э. Рейсснера, как и теория Кирхгофа-Лява, в контактных задачах приводит к формальным противоречиям при определении реакций, хотя в ряде случаев верно отражает характер напряженного состояния [17]. Эти противоречия связаны с искажением действительного характера изменения реакций вблизи краевых участков зон контакта. То же относится и к варианту П. Нагди [13]. Для устранения указанных противоречий желательна модификация теории Рейсснера. Применительно к расчету клеевых соединений такая модификация дана Ю. П. Артюхиным [18] (1975) в предположении, что клеевой слой не сопротивляется изгибу и растяжению.

Ниже дана попытка модификации теории Рейсснера, которая позволяет устранить формальные противоречия при решении контактных задач.

Рассмотрим общий случай, когда на поверхностях пластины  $z = \pm h/2$  действуют поверхностные усилия  $q_x^+, q_y^+, q_z^-$ . Граничные условия для напряжений на этих поверхностях будут иметь вид

$$\tau_{xz} = q_x^+, \quad \tau_{yz} = q_y^+, \quad \tau_{zz} = q_z^- \quad \text{при } z = \pm \frac{h}{2} \quad (1)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$q_j = q_j^+ - q_j^-, \quad m_j = \frac{h}{2} (q_j^+ + q_j^-), \quad j = x, y, z \quad (2)$$

Будем точно выполнять уравнения равновесия трехмерного тела, а закон распределения перемещений по толщине пластины определим путем точного интегрирования 3-х соотношений закона Гука

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{1}{E} [\tau_{xz} - \nu(\tau_{yz} - \tau_{zx})] \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}, \quad \frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

Здесь  $u_0, v_0, w_0$  — смещения произвольной точки пластины в направлениях осей  $x, y, z$ ;  $h$  — толщина пластины;  $E, \nu$  — модуль упругости и коэффициент Пуассона;  $G$  — модуль сдвига. В теории Э. Рейсснера соотношения (3) выполняются в интегральном по толщине пластины смысле.

Как и в теории Э. Рейсснера, зададим линейный закон изменения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  по толщине пластины

$$\sigma_x = \frac{N_x}{h} + \frac{6M_x}{h^2} t, \quad \sigma_y = \frac{N_y}{h} + \frac{6M_y}{h^2} t \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = \frac{N_{xy}}{h} + \frac{6M_{xy}}{h^2} t, \quad t = \frac{2z}{h}$$

где  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  — удельные усилия,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  — удельные изгибающие и крутящий моменты.

Интегрируя уравнения равновесия с учетом (4), найдем закон распределения напряжений  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\sigma_z$  по толщине пластины

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= q_x \frac{t}{2} + \frac{m_x}{2h} (-1 + 3t^2) + \frac{3Q_x}{2h} (1 - t^2) \\ \tau_{yz} &= q_y \frac{t}{2} + \frac{m_y}{2h} (-1 + 3t^2) + \frac{3Q_y}{2h} (1 - t^2) \\ \sigma_z &= \frac{m_z}{h} + \frac{3}{4} q_z \left( t - \frac{t^3}{3} \right) + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) (t - t^3) + \\ &\quad + \frac{h}{8} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) (1 - t^2) \end{aligned} \quad (5)$$

где  $q_x$ ,  $m_x$  — величины, определяемые формулами (2);  $Q_x$ ,  $Q_y$  — удельные поперечные силы.

Напряжения, определяемые формулами (5), удовлетворяют граничным условиям (1) на поверхности пластины. Формулы (5) справедливы при условии, что выполняются уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x &= 0, \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + q_y = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x + m_x &= 0, \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y + m_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Эти уравнения получаются при выполнении граничных условий (1).

Подставляя напряжения из формул (4) и (5) в соотношения закона Гука (3), из первого из них определим закон изменения смещения  $w_0$  по толщине пластины, из второго и третьего найдем  $u_0$ ,  $v_0$

$$\begin{aligned} w_0 &= \bar{w} + \frac{h}{2E} \left[ \frac{m_z}{h} t + \frac{3}{8} q_z \left( t^2 - \frac{t^4}{6} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \left( t^2 - \frac{t^4}{2} \right) + \frac{h}{8} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \left( t - \frac{t^3}{3} \right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\nu}{2E} \left[ (N_x + N_y) t + \frac{3}{h} (M_x + M_y) t^2 \right] \\
u_0 = & \bar{u} + \frac{h}{2G} \left[ \frac{q_x t^2}{4} + \frac{m_x}{2h} (-t + t^3) + \frac{3Q}{2h} \left( t - \frac{t^3}{3} \right) \right] - \\
& - \frac{h}{2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} t - \frac{h^2}{4E} \left[ \frac{\partial m_x}{\partial x} \frac{t^2}{2h} + \frac{1}{8} \frac{\partial q_x}{\partial x} \left( t^2 - \frac{t^4}{10} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \left( \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{10} \right) + \frac{h}{16} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \left( t^2 - \frac{t^4}{6} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{\nu h}{4E} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (N_x + N_y) \frac{t^2}{2} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (M_x + M_y) t^2 \right]
\end{aligned} \quad (8)$$

$u_0$  получается из (8) перестановкой индексов  $x$  и  $y$ .

В формулах (7), (8)  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  — смещения срединной плоскости пластины. Первая квадратная скобка в (7) характеризует вклад в прогиб напряжений  $\sigma_x$ , вторая — вклад  $\sigma_x + \sigma_y$ . В (8) слагаемые с множителем  $h/(2G)$  характеризуют вклад в смещение  $u_0$  касательных усилий  $\tau_{xz}$  остальные слагаемые от смещения  $w_0$  (см. (3)).

Соотношения обобщенного закона Гука между усилиями, моментами и смещениями, а также граничные условия получим из вариационного уравнения Кастилиано. Если считать выполненными уравнения равновесия теории упругости и соотношения закона Гука (3), вариационное уравнение Кастилиано для пластины как трехмерного тела будет иметь вид

$$\begin{aligned}
& \int \left\{ \left[ \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y - \nu \sigma_z) - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right] \delta \sigma_x + \left[ \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x - \nu \sigma_z) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial v_0}{\partial y} \right] \delta \sigma_y + \left[ \frac{\tau_{xy}}{G} \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right] \delta \tau_{xy} \right\} d\Omega + \\
& + \int [(u_0 - u^*) \delta X + (v_0 - v^*) \delta Y + (w_0 - w^*) \delta Z] d\Omega = 0
\end{aligned} \quad (9)$$

где  $\tau$  — объем,  $\Omega$  — поверхность пластины,  $u^*$ ,  $v^*$ ,  $w^*$  — заданные на поверхности смещения,  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — компоненты поверхностных усилий на оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Отметим, что из вариационного принципа Кастилиано не вытекает закон Гука (3), если задан какой-то определенный закон изменения напряжений по толщине. Для этого нужно дать полный произвол в изменении напряжений, чего нет в рассматриваемой теории. Однако, с другой стороны, выполнение уравнений (3) не противоречит уравнению Кастилиано. Оно лишь будет иметь упрощенный вид (9). Из (9) согласно формулам (4), приравняв к нулю множители при произвольных вариациях усилий и моментов, получим следующие интегральные по толщине пластины соотношения закона Гука

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left[ m_x + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right] \\
 N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\nu}{1-\nu} \left[ m_x + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$N_{xy} = Gh \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\begin{aligned}
 M_x &= D \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} \left[ q_x + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \right] \\
 M_y &= D \left( \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right) + \frac{\nu h^2}{10(1-\nu)} \left[ q_x + \frac{1}{6} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \right] \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$M_{xy} = D \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)$$

Здесь введены обозначения

$$u = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u_0 dt, \quad v = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 v_0 dt \quad (12)$$

$$\varphi_x = \frac{3}{h} \int_{-1}^1 u_0 t dt, \quad \varphi_y = \frac{3}{h} \int_{-1}^1 v_0 t dt \quad (13)$$

$u$  и  $v$  — средние по толщине пластины перемещения,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  — средние по толщине пластины углы поворота сечения.

Слагаемые с  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  в формулах (11) те же, что и в классической теории Э. Рейсснера, остальные слагаемые учитывают влияние напряжения  $\tau_{xz}$ . Аналог соотношений (10) в теории Э. Рейсснера отсутствует, так как обычно не учитываются мембранные усилия.

Подставляя смещения  $u$ , из формулы (8) в (12), получим связь между средними по толщине смещениями  $\bar{u}$  и смещениями срединной плоскости пластины  $\bar{u}$

$$\begin{aligned}
 \bar{u} = u + \frac{h(1+\nu)}{12E} q_x - \frac{h^2}{32E} \left[ \frac{4}{3h} \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{3h}{20} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \right] + \\
 + \frac{\nu h}{24E} \frac{\partial}{\partial x} (N_x + N_y) \quad (14)
 \end{aligned}$$

Аналогичное соотношение для  $v$  получится заменой  $\bar{u}$  на  $\bar{v}$  и  $x$  на  $y$ .

Подставляя  $u$ , непосредственно из закона Гука (3) в первую формулу (13), получим

$$\varphi_x = \frac{3}{4G} \int_{-1}^1 \tau_{xz} (1-t^2) dt - \frac{\partial w}{\partial x}$$

где

$$w = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 w_0 (1 - t^2) dt \quad (15)$$

— средний по толщине прогиб.

Если подставить в предыдущую формулу для  $\varphi_x$  и аналогичную формулу для  $\varphi_y$  напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  из формул (5), получим

$$\begin{aligned} \varphi_x &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{6}{5Gh} \left( Q_x - \frac{1}{6} m_x \right) \\ \varphi_y &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{6}{5Gh} \left( Q_y - \frac{1}{6} m_y \right) \end{aligned} \quad (16)$$

Эти формулы отличаются от соотношений теории Э. Рейсснера, в которой не учитываются касательные поверхностные усилия, складываемыми с  $m_x$  и  $m_y$ .

По формуле (15) с учетом (7) определим связь между средним по толщине прогибом  $\bar{w}$  и прогибом срединной плоскости  $\bar{w}$

$$w = \bar{w} + \frac{3h}{16 \cdot 70 E} \left[ 13 q_x + \frac{11}{3} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \right] - \frac{3\nu}{10Eh} (M_x + M_y) \quad (17)$$

Чтобы получить связь между смещениями  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$  произвольной точки по толщине пластинки со средними смещениями  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , нужно исключить  $\bar{u}$ ,  $\bar{w}$  из соотношений (8), (7) с помощью формул (14) и (17). Выпишем формулы для смещений поверхностей пластинки. Они используются для условий стыковки при решении контактных задач.

$$\begin{aligned} u_0(\pm 1) &= u \pm \frac{h}{2G} \left( \frac{1}{6} q_x \pm \frac{Q_x}{h} \right) \mp \frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - \\ &- \frac{h^2}{4E} \left[ \pm \frac{1}{3h} \frac{\partial m_x}{\partial x} \pm \frac{3}{70} \frac{\partial q_x}{\partial x} \pm \frac{1}{105} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \frac{h}{30} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) \Big| + \frac{\nu h}{4E} \left[ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (N_x + N_y) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{5h} \frac{\partial}{\partial x} (M_x + M_y) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} w_0(\pm 1) &= w \pm \frac{m_x}{2E} + \frac{17hq_x}{140E} + \frac{3h}{140E} \left( \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \right) \pm \\ &\pm \frac{h^2}{24E} \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) - \frac{\nu}{2E} \left[ \pm (N_x + N_y) + \frac{12}{5h} (M_x + M_y) \right] \end{aligned}$$

Верхний знак относится к поверхности пластинки  $t = +1$ , нижний — к

$t = -1$ . Слагаемые с одним знаком характеризуют симметричную часть смещений, с двумя — кососимметричную.

Остановимся на естественных граничных условиях. Разбив поверхностный интеграл в (9) на интеграл по поверхности  $t = \pm 1$  и интеграл по боковой (контурной) поверхности  $S$ , убеждаемся, что на поверхностях  $t = \pm 1$  могут быть заданы либо напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ , либо смещения  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ . Контурный интеграл будет иметь вид

$$\int_{\Gamma} ds \int_{-1}^1 [(u_{n0} - u_{n0}^*) \delta \tau_n + (u_{s0} - u_{s0}^*) \delta \tau_{sn} + (w_0 - w_0^*) \delta \tau_{nz}] dt = 0 \quad (19)$$

где  $\tau_n$ ,  $\tau_{sn}$ ,  $\tau_{nz}$  — напряжения;  $u_{n0}$ ,  $u_{s0}$  — смещения вдоль нормали и по касательной к контуру

$$\tau_n = \frac{N_n}{h} + \frac{6M_n}{h^3} t, \quad \tau_{sn} = \frac{N_{sn}}{h} + \frac{6M_{sn}}{h^3} t \quad (20)$$

$$\tau_{nz} = q_n \frac{t}{2} + \frac{m_n}{2h} (1 - 3t^2) + \frac{3Q_n}{2h} (1 - t^2) \quad (21)$$

$N_n$ ,  $N_{sn}$  — удельное нормальное и сдвигающее усилие на контуре;  $Q_n$  — удельная поперечная сила;  $M_n$ ,  $M_{sn}$  — удельный нормальный и крутящий моменты.

Из равенства (19) и формул (20), (21) следует, что на контуре пластины можно задать произвольно удельные усилия и удельные моменты

$$N_n, N_{sn}, Q_n, M_n, M_{sn} \quad (22)$$

а также поверхностные усилия или их комбинация

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha, \quad m_n = m_x \cos \alpha + m_y \sin \alpha \quad (23)$$

( $\alpha$  — угол между нормалью к контуру и осью  $x$ ).

Кинематические граничные условия, соответствующие произвольным вариациям усилий и моментов (22), будут

$$u_n = u_n^*, \quad u_s = u_s^*, \quad w = w^*, \quad \varphi_x = \varphi_x^*, \quad \varphi_y = \varphi_y^* \quad (24)$$

где  $u_n$ ,  $u_s$ ,  $w$  — средние по толщине в смысле (12) и (15) смещения,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  — углы поворота.

При решении контактных задач поверхностные нагрузки (2) подлежат переделению и могут произвольно варьироваться даже на контуре, если они там неизвестны. Кинематические граничные условия, соответствующие произвольным вариациям нагрузок (23), будут

$$\varepsilon = \varepsilon^*, \quad \gamma = \gamma^* \quad (25)$$

где

$$\varepsilon = \frac{3}{h} \int_{-1}^1 w_0 dt, \quad \gamma = \int_{-1}^1 w_0 (-1 + 3t^2) dt \quad (26)$$

а  $\varepsilon^*$ ,  $\gamma^*$  — соответствующие величины от заданного на границе смещения  $w_0^*$ . С учетом (7) найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{m_n}{Eh} + \frac{h}{10E} \left( \frac{\partial q_n}{\partial x} + \frac{\partial q_n}{\partial y} \right) - \frac{\nu}{Eh} (N_n + N_s) \\ \gamma &= \frac{3h q_n}{35E} + \frac{2h}{105E} \left( \frac{\partial m_n}{\partial x} + \frac{\partial m_n}{\partial y} \right) - \frac{4\nu}{5Eh} (M_n + M_s) \end{aligned} \quad (27)$$

Итак, кинематические граничные условия при разыскании контактных усилий сводятся к тому, что правые части выражений (27) на контуре должны быть равны интегралам (26) от заданного на контуре прогиба. Здесь  $\varepsilon$  имеет смысл величины поперечного обжатия.

Отметим, что условия (25) можно задавать независимо, если неизвестны на контуре нагрузки на обеих поверхностях пластины, а значит и их комбинации (23). Кинематические граничные условия, соответствующие каждой из неизвестных нагрузок  $q_n^+$  и  $q_n^-$  на контурных линиях поверхностей  $l = \pm 1$ , согласно формулам типа (2)

$$q_n = q_n^+ - q_n^-, \quad m_n = \frac{h}{2} (q_n^+ + q_n^-) \lambda, \quad q_n^{\pm} = q_n^{\pm} \cos^2 \alpha + q_y^{\pm} \sin^2 \alpha$$

формуле (21) и выражению (19), будут

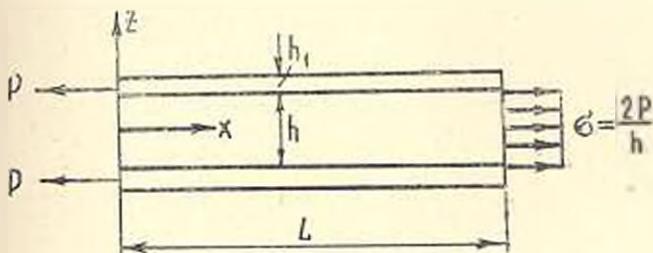
$$\pm \varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\gamma}{h} = \pm \varepsilon^* - \frac{3}{2} \frac{\gamma^*}{h} \quad (28)$$

где  $\varepsilon$  и  $\gamma$  — выражения (27), верхний знак относится к поверхности  $l = +1$ , нижний — к  $l = -1$ .

Отметим сходство и различие представленного здесь варианта теории Э. Рейсснера и варианта теории Э. Рейсснера, данного П. Нагди [13], где также учитывается эффект поперечного обжатия. Уравнения равновесия (6), естественно, являются одними и теми же, так как они не зависят ни от кинематических, ни от статических гипотез. Соотношения закона Гука (10), (11), (16) формально совпадают с аналогичными соотношениями работы [8]. Однако у П. Нагди в эти соотношения входят смещения средней плоскости. Кроме этого, соотношения типа (16) получаются в работе [8] путем отбрасывания эффекта поперечного обжатия при их получении. В настоящей работе никаких упрощений не делалось. Закон изменения смещений по толщине пластины у П. Нагди постулируется и существенно отличается от полученного в настоящей работе закона (7), (8). Аналога граничных условий типа (23) и (28) для поверхностных усилий в варианте П. Нагди нет. По существу предложенный в настоящей работе вариант теории Э. Рейсснера и нужен для того, чтобы можно было выполнять эти важные условия при решении контактных задач. Как легко можно

убедиться при формулировке даже простейших контактных задач, ни классическая теория Э. Рейсснера, ни теория П. Нагди не позволяет этого сделать. При решении же обычных задач для тонких пластин с заданными поверхностными усилиями все модификации теории пластин в большинстве случаев приводят к близким результатам, включая и теорию Кирхгофа. Иными словами, тот или иной вариант теории желательно выбирать в зависимости от класса рассматриваемых задач.

В качестве примера применения изложенного варианта теории Э. Рейсснера, рассмотрим простейшую задачу (фиг. 1) определения реакций взаимодействия в трехслойной полосе толщиной  $h+2h_1$ , и шириной  $L$ , нагруженной, как показано на фиг. 1. Среднюю пластину будем рассчитывать, используя изложенную выше теорию и теорию Э. Рейсснера, данную П. Нагди [13]. Наружные пластины будем считать мембранами, не сопротивляющимися изгибу, и, таким образом, не будем учитывать нормальные реакции взаимодействия. Касательную реакцию взаимодействия обозначим через  $q$ .



Фиг. 1.

Из уравнений равновесия (6), соотношений закона Гука (10), (11), (16) и граничных условий для средней пластины найдем

$$Q_x = M_x = \tau_x = 0, \quad N_x = 2 \int_0^x q dx, \quad \int_0^L q dx = \frac{P}{2} \quad (a)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2(1-\nu^2)}{Eh} \int_0^x q dx + \frac{\nu(1+\nu)h}{6E} \frac{dq}{dx} \quad (6)$$

Эти же соотношения имеют место для варианта П. Нагди [13]. Согласно варианту П. Нагди, смещения на поверхностях пластины  $z = \pm h/2$  определяются по формуле  $u_0 = u \pm h z_x / 2$ . Так как  $\tau_x = 0$ , то деформации  $du_x/dx$  на поверхностях пластины будет иметь вид (6), а по формулам (18)

$$\frac{du_0}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{2(1+\nu)}{6E} h \frac{dq}{dx} + \frac{h^3}{60E} \frac{d^3q}{dx^3} \quad (b)$$

где  $du/dx$  имеет вид (6).

## Деформация верхней и нижней пластины

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1-\nu^2}{E_1 h_1} \left( \frac{P}{2} - \int_0^x q dx \right) \quad (r)$$

где  $E_1$ ,  $h_1$  — модуль упругости и толщина наружных пластин.

Сравнивая деформации (6) и (r), а затем (в) и (r), получим два уравнения для определения реакции  $q$ . Уравнение, вытекающее из варианта П. Нагди

$$\int_0^x q dx + \frac{\nu h^2}{12(1-\nu)(1+\lambda)} \frac{dq}{dx} = P_1 \quad (д)$$

$$\lambda = \frac{Eh}{2E_1 h_1}, \quad P_1 = \frac{\lambda}{1+\lambda} \frac{P}{2} \quad (e)$$

я уравнение, вытекающее из изложенного варианта теории Э. Рейсснера

$$\int_0^x q dx - \frac{(2-\nu^2)h^2}{12(1-\nu)(1+\lambda)} + \frac{h^4}{120(1-\nu^2)(1+\lambda)} \frac{d^3 u}{dx^3} = P_2 \quad (ж)$$

Уравнение (д) при условии (а) имеет лишь решение типа дельта-функций на концах  $x=0, L$

$$q = P_1 \delta(x) + \left( \frac{P}{2} - P_1 \right) \delta(L-x)$$

Это сопроматовское решение, в котором пластины растягиваются, как стержни, усилия в них пропорциональны жесткостям

$$N_{x1} = \frac{P}{2(1+\lambda)}, \quad N_x = \frac{P\lambda}{1+\lambda}$$

Есть еще быстроосциллирующее решение, которое физически не объяснимо и вызвано особенностями теории.

Таким образом, классическая теория Э. Рейсснера, в том числе и ее вариант П. Нагди, учитывающий поперечное обжатие, не позволяет найти характер распределения касательных усилий.

Уравнение (ж) имеет более высокий порядок по сравнению с (д). Наличие третьего слагаемого в левой части позволяет удовлетворить условию равенства нулю реакции  $q$  при  $x=0, L$ . Это слагаемое, согласно (в) и формулы (8), связано с учетом изменения прогиба по толщине пластины, то есть с учетом обжатия. Второе слагаемое в левой части уравнения (ж) (если отвлечься от влияния коэффициента Пуассона  $\nu$ ) характеризует вклад в смещение  $u_x$  от касательных напряжений  $\tau_{xz}$ , но учтенный аккуратно, согласно формуле (8), а не в обобщенном смысле от перерезывающей силы  $Q_x$ . Если даже отбросить третье слагаемое и оставить только вто-

рое, то получим вполне определенное решение без сосредоточенных сил, оно только будет возрастать на концах зоны контакта и условие  $q=0$  при  $x=0, L$  выполнено не будет.

Уравнение (ж) имеет следующее решение, удовлетворяющее условию (а) и условиям  $q=0$  при  $x=0, L$ :

$$q = A \operatorname{sh} \bar{p} \xi \sin \bar{q} (l - \xi) + B \operatorname{sh} \bar{p} (l - \xi) \sin \bar{q} \xi$$

где

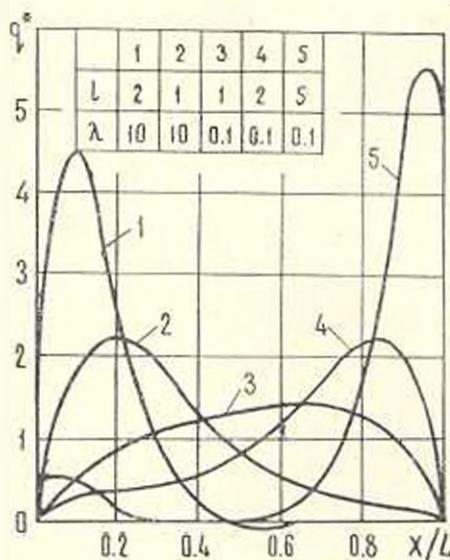
$$A = \frac{P \sqrt{\omega}}{2h} \frac{\bar{q} \operatorname{sh} \bar{p} l + i \bar{p} \sin \bar{q} l}{(1 + \lambda)(\bar{q}^2 \operatorname{sh}^2 \bar{p} l - \bar{p}^2 \sin^2 \bar{q} l)}$$

$$B = \frac{P \sqrt{\omega}}{2h} \frac{i \bar{q} \operatorname{sh} \bar{p} l + \bar{p} \sin \bar{q} l}{(1 + \lambda)(\bar{q}^2 \operatorname{sh}^2 \bar{p} l - \bar{p}^2 \sin^2 \bar{q} l)}$$

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad l = \frac{L}{h}, \quad \omega = 120(1 - \nu^2)(1 + \lambda)$$

$$\bar{p} + i \bar{q} = \sqrt[4]{\omega} \left( \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad \varphi = \arctg \frac{\sqrt{\omega - a^2}}{a}$$

$$a = 5(2 - \nu^2)$$



Фиг. 2.

Результаты численного расчета безразмерной реакции  $q^* = 2qL/P$  приведены на фиг. 2, где для каждой кривой даны также параметры  $l$  и  $\lambda$ . Видно, что максимум реакции смещается влево с увеличением относительной жесткости средней пластины.

Է. Ի. ԳՐԻԳՈԼՅԱՆԿ, Վ. Մ. ՏՈԼԿԱՉԵՎ

ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԽԱՆԵՐԻ ՃՇԴՐՏՎԱԾ  
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄՈԴԻՖԻԿԱՑԻԱՆ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Տրվում է սալերի տեսության մոդիֆիկացիան, որը հաշվի է առնում լայնական սահքը և շրջասեղմումը կոնտակտային խնդիրների լուծման բնթացքում օգտագործելու նպատակով: Մոդիֆիկացիայի էությունը կայանում է նրանում, որ ճիշտ որոշվում է տեղափոխությունների բաշխման օրինքը ըստ սալի հաստության: Այդ օրինքը համադաստասխանում է ըստ սալի հաստության մեմբրանային լարումների զծային փոփոխությանը: Ըստ հաստության ինտեգրալ արտահայտությունները շեն փոխվում է. մեյսների հայտնի տեսության և Պ. Նազդիի տարրերակի համեմատությամբ:

Հավասարումների արտածման ժամանակ օգտագործվել է Կաստիրիանոյի սկզբունքը: Տրվում է խնդրի լուծման օրինակ:

MODIFICATION OF THE REFINED THEORY OF PLATES  
FOR CONTACT PROBLEMS

E. I. GRIGOLIUK, V. M. TOLKACHEV

## S u m m a r y

A modified version of the theory of plates for contact problems is proposed offering an accurate law of displacement variation over the plate's thickness in terms of the hypothesis on linear distribution of membrane stresses across the aforesaid thickness. Accordingly, the integral thickness correlations coincide with the familiar correlations of the refined theory taking into account the lateral normal linear deformation and lateral shear.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Reissner E.* On the Theory of Bending of Elastic Plates. *Journal of Mathematics and Physics*, 1944, Vol. XXIII, No. 4, pp. 184—191.
2. *Reissner E.* The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. *J. of Applied Mechanics*, 1945, Vol. 12, No. 1, pp. A68—A77.
3. *Reissner E.* On Bending of Elastic Plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1947, Vol. 5, pp. 55—68.
4. *Green A. E.* On Reissner's Theory of Bending of Elastic Plates. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1949, Vol. VII, No. 2, pp. 223—228.
5. *Schäfer M.* Über eine Vereinerung der klassischen Theorie dünner schwach gebeugener Platten. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1952, Bd. 32, Heft 6, S. S. 161—171.
6. *Kromm A.* Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik. *Ingenieur Archiv*, 1953, Bd. 21, Heft 4, S. S. 266—286.
7. *Kromm A.* Über die Randquerkräfte bei gestürzten Platten. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1955, Bd. 35, Heft 6/7, S. S. 231—242.

8. Girkmann K. Flächentragwerke. 6 Auflage, Wien, Springer, 1963, Anhang: Verschärfte Theorie dünner Platten nach E. Reissner, S. S. 583—610.
9. Girkmann K., Beer R. Anwendung der verschärften Plattentheorie nach Eric Reissner auf orthotrope Platten. Österreichische Ingenieur — Archiv, 1958, Bd. 12, No. 1—2, S. S. 101—110.
10. Тимошенко С. П., Войновский-Кризер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1966.
11. Голландвейсер А. А. О теории изгиба пластинок Э. Рейсснера. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 4.
12. Аюла А. Я. Об уточненных теориях пластинок типа Э. Рейсснера. Сб. «Теория оболочек и пластин», Ереван, АН АрмССР, 1964.
13. Naghdì P. M. On the Theory of Thin Elastic Shells. Quarterly of Applied Mathematics, 1957, Vol. XIV, No. 4, pp. 369—380.
14. Reissner E. On the Variational Theorem in Elasticity. Journal Math. Phys., 1950, Vol. 29, pp. 90—95.
15. Reissner E. On Transverse Bending of Plates, Including the Effect of Transverse Shear Deformation. Int. Journal Solids Structures, 1975, Vol. 11, pp. 569—573.
16. Власов Б. Ф. Об уравнениях изгиба пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 12.
17. Гризолок Э. И., Толкочев В. М. Цилиндрический изгиб пластины жесткими штампами. Прикл. математ. и механ., 1975, т. 30.
18. Артюхин Ю. П. Модифицированная теория Голланда-Рейсснера жестких пластин. Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек», выпуск XI, Изд-во Казанского университета, 1975.

С. А. МОЛАСЯН

О ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ СИСТЕМЫ, СВОБОДНО ЛЕЖАЩЕЙ  
НА ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ, ПОД ДЕЙСТВИЕМ  
ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ

Хорошо известно, что если на твердое тело, лежащее на шероховатой плоскости, действует сила, вектор которой лежит внутри конуса трения, то тело остается неподвижным. В настоящей работе обращается внимание на то, что указанная закономерность не сохраняется в случае, когда тело является деформируемым, то есть имеет «внутренние колебательные степени свободы», а действующая сила является переменной во времени. В этом случае движение тела по неподвижной шероховатой плоскости может происходить также, если вектор силы лежит внутри конуса статического трения. Задача рассматривается на примере простейшей системы, представляющей собой лежащее на шероховатой плоскости твердое тело, внутри которого расположено другое тело, связанное с первым посредством упругого и демпфирующего элементов. Периодическая сила приложена именно к этому последнему телу, причем рассматриваются два случая — действие мгновенных импульсов и гармонического возмущения.

Показано, что в сравнительно широкой области изменения параметров система движется по плоскости в направлении, противоположном направлению действия импульсов. Дано физическое объяснение этого, на первый взгляд, парадоксального результата.

Рассмотренная задача представляет интерес в связи с теорией вибрационного перемещения [1], в частности, в связи с расчетом вибрационных двигателей [2, 3] и с изучением поведения свободно лежащих на грунте сооружений под действием импульсной нагрузки. Для частного случая абсолютно твердого тела изучаемая система рассмотрена в работе [4].

## § 1. Дифференциальные уравнения движения колебательной системы

Динамическая схема рассматриваемой колебательной системы представлена на фиг. 1. Основное тело, имеющее массу  $m_1$ , расположено на неподвижной шероховатой плоскости. Внутри этого тела вдоль некоторой линии, составляющей угол  $\delta$  с вертикалью, может перемещаться дополнительное тело массы  $m_2$ , связанное с основным телом линейными упругим и демпфирующими элементами.

Система координат  $xy$  неподвижна; относительно этой системы и рассматривается движение колебательной системы. Подвижная система координат  $u, v$ , относительно которой рассматривается движение дополнительного тела, жестко связана с основным телом. Предполагаем, что между основным телом и неподвижной плоскостью действует сила сухого трения.

Описанная система имеет три степени свободы. Общие уравнения движения системы под действием импульсной силы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{x} + m_2\ddot{u} \sin \delta &= F(t) + Q(t) \sin \delta \\
 m\ddot{y} - m_2\ddot{u} \cos \delta &= N(t) - mg - Q(t) \cos \delta \\
 \ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u &= \frac{1}{m_2} Q(t) + g \cos \delta - (\ddot{x} \sin \delta - \ddot{y} \cos \delta)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  — координаты основного тела в неподвижной системе координат  $xyz$ ,

$\delta$  — угол наклона оси упругого элемента к вертикали,

$c$  — жесткость упругого элемента,

$g$  — ускорение силы тяжести,

$u(t)$  — координата дополнительного тела в системе осей, связанной с основным телом,

$Q(t)$  — импульсная сила,

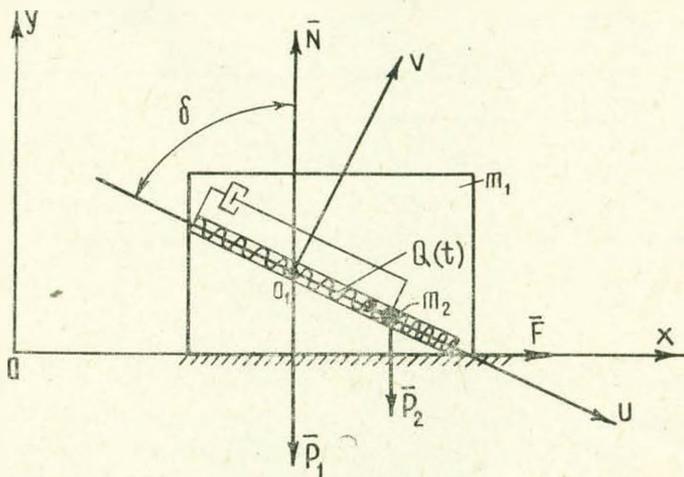
$F(t)$  — сила сухого трения

$N(t)$  — нормальная реакция,

$k = \sqrt{\frac{c}{m_2}}$  — частота свободных колебаний дополнительного тела при неподвижном основном теле,

$m = m_1 + m_2$  — масса системы,

$\mu$  — коэффициент вязкого сопротивления  $\left( n = \frac{\mu}{2m_2} \right)$ .



Фиг. 1.

Периодическую импульсную силу предполагаем заданной в виде

$$Q(t) = Q(t + T) = \begin{cases} H & \text{при } 0 < t < t_1 \\ 0 & \text{при } t_1 < t < T \end{cases}
 \tag{1.2}$$

где  $H$  — некоторая постоянная, а  $T$  — период импульсной силы (фиг. 2).

Если колебательная система не отрывается от неподвижной плоскости, то

$$N(t) > 0, \quad y = 0 \quad (1.3)$$

а сила сухого трения  $F(t)$  связана с нормальной реакцией  $N(t)$  соотношениями

$$F(t) = \begin{cases} -fN(t) & \text{при } \dot{x} > 0 \\ fN(t) & \text{при } \dot{x} < 0 \\ \varepsilon f_1 N(t) & \text{при } \dot{x} = 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

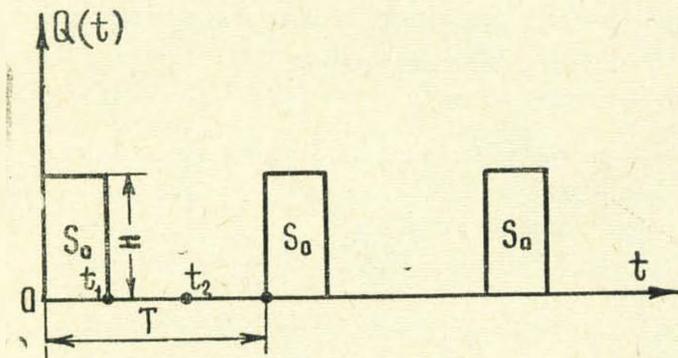
где  $f$  — коэффициент трения скольжения,

$f_1$  — коэффициент трения покоя,

$\varepsilon$  — множитель, лежащий в пределах  $-1 < \varepsilon < 1$ .

Основное тело находится в покое на плоскости ( $y=0, x=\text{const}$ ), если

$$-f_1 N(t) < F(t) < f_1 N(t) \quad (1.5)$$



Фиг. 2.

При движении основного тела вперед по плоскости

$$F(t) = -fN(t)$$

и

$$y = 0, \quad \dot{x} > 0, \quad N(t) > 0$$

Тогда из системы (1.1) получим

$$\ddot{x} = \frac{\sin(\vartheta - \rho)}{m \cos \rho} [Q(t) - m_2 \ddot{u}] - fg \quad (1.6)$$

Аналогично для случая движения назад

$$F(t) = fN(t)$$

$$y = 0, \quad \dot{x} < 0, \quad N(t) > 0$$

и

$$\ddot{x} = \frac{\sin(\delta + \rho)}{m \cos \rho} [Q(t) - m_2 \ddot{u}] + fg \quad (1.7)$$

Уравнения (1.6) и (1.7) можно записать в одной форме

$$\ddot{x} = \frac{\sin(\delta \mp \rho)}{m \cos \rho} [Q(t) - m_2 \ddot{u}] \mp fg \quad (1.8)$$

причем, верхние знаки здесь и далее соответствуют движению тела вперед ( $x > 0$ ), а нижние — назад ( $x < 0$ ).

Итак, для движения колебательной системы под действием импульсной силы при наличии контакта с плоскостью получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u &= \frac{1}{m_2} Q(t) + g \cos \delta - \ddot{x} \sin \delta \\ \ddot{x} &= \frac{\sin(\delta \mp \rho)}{m \cos \rho} [Q(t) - m_2 \ddot{u}] \mp fg \end{aligned} \quad (1.9)$$

или после простых преобразований

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= a_{\pm} [Q(t) - m_2 \ddot{u}] \mp fg \\ \ddot{u} + 2n_{\pm} \dot{u} + k^2 u &= \frac{1}{m_2} Q(t) + b_{\pm} \end{aligned} \quad (1.10)$$

где

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= \frac{\sin(\delta \mp \rho)}{m \cos \rho} \\ b_{\pm} &= \frac{g \cos(\delta \mp \rho)}{(1 - a_{\pm} m_2 \sin \delta) \cos \rho} \\ n_{\pm} &= \frac{n}{1 - a_{\pm} m_2 \sin \delta} \\ k_{\pm}^2 &= \frac{k^2}{1 - a_{\pm} m_2 \sin \delta} \end{aligned}$$

## § 2. Движение дополнительного тела под действием импульсной силы при неподвижном основном теле

Движение дополнительного тела описывается третьим уравнением (1.1). Рассмотрим частный случай, когда во время движения дополнительного тела основное тело находится в покое. В этом случае будем иметь

$$x = \text{const}, \quad y = 0, \quad N(t) > 0$$

и упомянутое уравнение принимает следующий вид:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u = \frac{1}{m_2} Q(t) + g \cos \delta \quad (2.1)$$

Найдем установившееся периодическое движение дополнительного тела, учитывая, что сила  $Q(t)$  определяется соотношением (1.2) (фиг. 2). При этом будем считать промежуток времени  $t_1$  весьма малым, а импульс  $S_0 = Ht$  — конечным. Тогда, если в начальный момент времени  $t = -0$

$$u(-0) = u_1 + u_{st}, \quad \dot{u}(-0) = \dot{u}_1 \quad (2.2)$$

где  $u_{st} = \frac{g \cos \delta}{k^2}$ , а  $u_1$  и  $\dot{u}_1$  — некоторые неизвестные величины, то в момент времени  $t = t_1 = +0$  перемещение и скорость дополнительного тела будут равны соответственно

$$\begin{aligned} u(t_1) &= u(+0) = u_{st} + u_1 \\ \dot{u}(t_1) &= \dot{u}(+0) = \dot{u}_1 + \frac{S_0}{m_2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

В интервале времени  $(t_1, T)$  движение дополнительного тела описывается уравнением

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2u = g \cos \delta \quad (2.4)$$

решение которого имеет вид

$$u = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t) + u_{st} \quad (2.5)$$

$$(k_1 = \sqrt{k^2 - n^2})$$

$$\dot{u} = e^{-nt} [(C_2 k_1 - C_1 n) \cos k_1 t - (C_2 n + C_1 k_1) \sin k_1 t] \quad (2.6)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, легко выражающиеся через  $u_1$  и  $u_2$  при учете условий (2.3)

$$\begin{aligned} C_1 &= u_1 \\ C_2 &= \frac{1}{k_1} \left( g u_1 + \dot{u}_1 + \frac{S_0}{m_2} \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В свою очередь, постоянные  $u_1$  и  $\dot{u}_1$  найдутся из условий периодичности движения дополнительного тела

$$\begin{aligned} u(T) &= u(-0) = u(+0) \\ \dot{u}(T) &= \dot{u}(-0) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Исходя из последних условий при учете равенств (2.2), (2.3), (2.5) и (2.6), получим

$$u_1 = \frac{S_0 e^{nT}}{k_1 m_2} \frac{\sin k_1 T}{(1 - 2e^{nT} \cos k_1 T + e^{2nT})}$$

$$u_1 = - \frac{S_0}{m_2} \frac{1 - e^{nT} \cos k_1 T + \frac{n}{k_1} e^{nT} \sin k_1 T}{1 - 2e^{nT} \cos k_1 T + e^{2nT}}$$

Итак, в установившемся режиме при неподвижном основном теле движение дополнительного тела происходит согласно закону

$$u(t) = u(t + T) = \frac{S_0 e^{-nt}}{m_2 k_1} \frac{\sin[k_1(T-t) + e^{nT} \sin k_1 t]}{e^{nT} + e^{-nT} - 2 \cos k_1 T} + \frac{g \cos \delta}{k^2} \quad (2.9)$$

$$(0 \leq t \leq T)$$

### § 3. Некоторые качественные закономерности поведения системы под действием периодических импульсов

Пусть система находится на плоскости, причем основное тело неподвижно. Тогда  $y=0$ ,  $x=\text{const}$  и из уравнений (1.1) получаются следующие выражения для силы трения  $F$ , нормальной реакции  $N$  (далее для упрощения пренебрегаем коэффициентом вязкого трения  $n$ ):

$$\begin{aligned} F &= m_2 g \sin \delta \cos \delta - cu \sin \delta \\ N &= m_1 g + cu \cos \delta + m_2 g \sin^2 \delta \end{aligned} \quad (3.1)$$

При  $n=0$  выражение (2.9) после простых преобразований может быть представлено в форме

$$u(t) = u(t + T) = \frac{S_0}{2m_2 k} \frac{\cos k \left( t - \frac{T}{2} \right)}{\sin \frac{kT}{2}} + \frac{m_2 g}{c} \cos \delta \quad (3.2)$$

и тогда условие отсутствия отрыва основного тела от плоскости  $N > 0$  сводится к требованию выполнения неравенства

$$\frac{k S_0 \cos \delta}{2 \sin \frac{kT}{2}} \cos k \left( t - \frac{T}{2} \right) > -mg \quad (3.3)$$

в любой момент времени  $t$ . Если период следования импульсов  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  больше периода свободных колебаний дополнительного тела  $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ , то есть  $\omega < k$ , то необходимое и достаточное условие, обеспечивающее выполнение неравенства (3.3) при любом  $t$ , можно записать в виде

$$a > |\cos \delta| \quad (3.4)$$

где обозначено

$$a = \frac{2mg}{S_0 k} \left| \sin \frac{kT}{2} \right| \quad (3.5)$$

Аналогичным образом условие (1.5) отсутствия скольжения основного тела выражается при  $\omega < k$  в виде

$$a \sin \rho_1 > |\sin (\delta \mp \rho_1)| \quad (3.6)$$

где, как и раньше, верхние знаки отвечают скольжению вперед, а нижние — назад. Очевидно, что при одновременном выполнении неравенств (3.4) и (3.6) основное тело будет покоиться на плоскости. При выполнении условий

$$\begin{aligned} a \sin \rho_1 < |\sin (\delta - \rho_1)|, \quad a \sin \rho_1 > |\sin (\delta + \rho_1)| \\ a > |\cos \delta| \end{aligned} \quad (3.7)$$

основное тело будет скользить без отрыва вперед по плоскости, а при выполнении условий

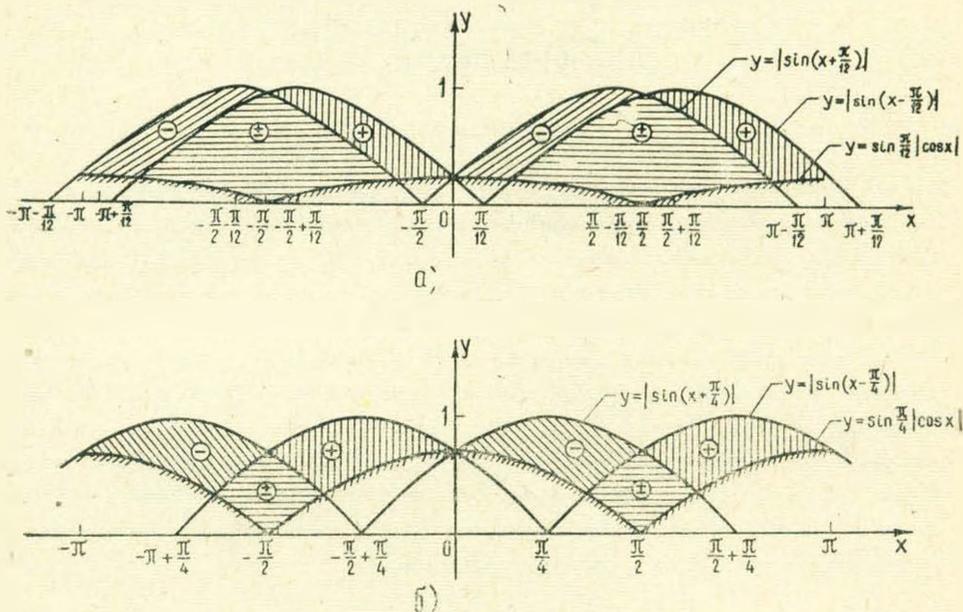
$$\begin{aligned} a \sin \rho_1 > |\sin (\delta - \rho_1)|, \quad a \sin \rho_1 < |\sin (\delta + \rho_1)| \\ a > |\cos \delta| \end{aligned} \quad (3.8)$$

оно будет скользить без отрыва назад.

На фиг. 3а, б для трех значений угла трения  $\rho_1$  ( $\rho_1 = \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}$ ) в координатах  $x = \delta$ ,  $y = a \sin \rho$ , изображены области, определяемые неравенствами (3.4), (3.6), (3.7), (3.8). Области, в которых происходит безотрывное скольжение основного тела только вперед, помечены знаком «+», а только назад — знаком «-»; в области, помеченной знаком «+-» имеет место безотрывное скольжение в обоих направлениях. Наконец, область, лежащая ниже кривой  $y = \sin \rho$ ,  $|\cos x|$  и заштрихованная вовнутрь, соответствует движению с отрывом. Из фиг. 3 следует, что поведение рассматриваемой системы существенно отличается от поведения при тех же условиях абсолютно твердого тела. В последнем случае, если вектор импульса, действующий на абсолютно твердое тело, лежит внутри конуса трения  $|\delta| < \rho_1$ , то тело остается неподвижным. Изучаемую же простейшую деформируемую систему практически при любом значении угла  $\delta$  можно заставить не только скользить по плоскости, но и периодически отрываться от последней. Для этого, согласно формуле (3.5) и фиг. 3, следует соответствующим образом выбрать величину  $S_0$  и частоту следования импульсов  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Далее, из фиг. 3 видно, что, например, при  $\delta > 0$  существует значительная область изменения параметров, при которых тело в рассматриваемом случае движется назад, то есть в направлении, противоположном направлению действия импульса (фиг. 1). Этот, на первый взгляд, неожиданный результат, допускает простое физическое истолкование: импульсы вызывают периодические колебания дополнительного тела; при этом в течение той части периода, когда это тело движется вперед-вниз, оно сжимает пружину с и прижимает основное тело к плоскости, препятствуя его продвижению вперед; в той же части периода, когда дополнительное тело движется назад-вверх, пружина с растягивается и при этом уменьшается нормальная реакция  $N$  и вместе с нею — предельная сила сухого трения; в итоге основное тело получает возможность проскальзывать назад.

Аналогично объясняется и возможность отрыва основного тела от плоскости под действием колебаний дополнительного тела.



Фиг. 3.

§ 4. Случай возмущающей силы, изменяющейся по гармоническому закону

В случае, когда сила  $Q(t)$  изменяется по гармоническому закону

$$Q(t) = Q_0 \sin \omega t \tag{4.1}$$

с амплитудой  $Q_0$  и частотой  $\omega$ , решение уравнения (2.1), отвечающее установившимся вынужденным колебаниям, имеет вид (как и ранее, полагаем  $\mu \approx 0$ )

$$u = \frac{Q_0}{m_2(k^2 - \omega^2)} \sin \omega t + \frac{m_2 g}{c} \cos \delta \tag{4.2}$$

Нетрудно заметить, что в данном случае анализ приводит к тем же неравенствам (3.4), (3.6)–(3.8) с той лишь разницей, что величина «а» определяется выражением

$$a = \frac{mg}{Q_0} \frac{m_2 \omega^2}{c} \left| \left( \frac{k}{\omega} \right)^2 - 1 \right|$$

и что в данном случае для упрощения не требуется предполагать, что  $\omega < k$ . Поэтому диаграммы, изображенные на фиг. 3, а также все качественные выводы сохраняются и в данном случае.

Ս. Ա. ՄՈԼԱՅԱՆ

ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԻՄՊՈՒԼՍՆԵՐԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԱՆՀԱՐԹ  
 ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԱԶԱՏ ՏԵՂԱԳՐՎԱԾ ԱՌԱՋԳՈՒԿԱՆ  
 ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրվող տատանողական համակարգը իրենից ներկայացնում է անհարթ հարթության վրա գտնվող պինդ մարմին, որի ներսում տեղավորված երկրորդ մարմինը կապված է առաջինի հետ առաձգական և հանգստացուցիչ էլեմենտների միջոցով: Ենթադրվում է, որ լրացուցիչ մարմնի վրա գործում է իմպուլսային ուժ:

Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ դիտարկվող համակարգի վարքը նույն պայմանների դեպքում էապես տարբերվում է բացարձակ պինդ մարմնի վարքից: Պարզվում է, որ նշված համակարգի շարժումը անհարթ հարթության վրայով հնարավոր է ազդող ուժի վեկտորի ցանկացած ուղղության դեպքում: Ցույց է տրվում, որ պարամետրերի բավականաչափ մեծ փոփոխման ափրույթում, համակարգը շարժվում է հարթության վրայով իմպուլսային ուժի ազդմանը հակադիր ուղղությամբ:

ON MOTION OF AN ELASTIC SYSTEM LYING ON A ROUGH  
 PLANE UNDER THE EFFECT OF PERIODIC IMPULSES

S. A. MOLASIAN

S u m m a r y

An oscillating system is considered that consists of a solid, lying on a rough plane, containing another body connected with the former by means of an elastic and damper element. The inner body is assumed to be affected by an impulse force.

Examination indicates that the behaviour of the system in question is unlike that of a perfect solid under the same conditions. The motion of a given system along the rough plane is found to be possible at any direction of the impulse vector. The system is shown to move along the plane in the direction contrary to that of impulse over a wide area of parameter variations.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. М., Изд. «Наука», 1964.
2. Рагулькис К. М., Бансевичюс Р. Ю. О преобразовании высокочастотных механических колебаний в непрерывное движение. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР, Каунас, Вибротехника, 3 (20), 1973.

3. Бансевичус Р. Ю., Грубляуските Д. Л., Кочилян А. В., Можелис В. В., Рагульскис К. М., Славенас А. Ю., Улозас Р. В. Некоторые вопросы высокочастотного вибрационного перемещения. Научн. тр. высших учебных заведений Литовской ССР. Каунас, Вибротехника, 3 (20), 1973.
4. Моласян С. А. К вопросу движения тела по неподвижной шероховатой плоскости под действием импульсной силы. Изв. АН АрмССР, Механика, 1976, т. XXIX, № 1.

А. М. СИМОНЯН

## О ДВУХ ВОПРОСАХ В ОДНОМЕРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Развитие техники с применением высоких напряжений и температур делает все более актуальным изучение явления ползучести. Для учета ползучести при расчете элементов конструкций необходимо иметь теорию ползучести, достаточно точно обобщающую аппроксимации деформации ползучести при постоянных напряжениях на случаи произвольно изменяющихся во времени напряжений. Теории ползучести, чисто феноменологические или основанные на физических представлениях, многочисленны, однако выбор их для конкретного материала затрудняется тем, что при одних и тех же программах изменения напряжения различные теории, зачастую предсказывают незначительные расхождения кривых ползучести, соизмеримые с разбросом экспериментальных данных. В этом смысле определенным интерес представляют качественные явления, предсказываемые той или иной теорией ползучести и относительно легко проверяемые экспериментальным путем.

В настоящей работе формулируются два подхода в одномерной теории ползучести — преемственности и допущение нарушения коммутативности, и исследуются соответствующие предсказания по ряду современных теорий ползучести — теории упрочнения, теории наследственности, энергетической теории Соснина, кинетической теории в двух вариантах, структурной теории Малинина-Хажинского, теории Лагнелборга и теории, использованной автором при изучении III стадии ползучести.

1. Примем следующую формулировку преемственности: «ползучести образца, имеющего некоторую остаточную деформацию, тем интенсивнее, чем при меньшем напряжении была достигнута эта остаточная деформация».

Преемственность имеет экспериментальные подтверждения в работах [1—4 и др.]. Схематически она показана на фиг. 1. Здесь при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  и при одном и том же напряжении  $\sigma$  кривая I выше кривой II, а та, в свою очередь, выше кривой III. Математически она может быть записана следующим образом. Принимается программа эксперимента

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon_0 & 0 < t < t_0 \\ \varepsilon_0 + \varepsilon_1 & t > t_0 \end{cases} \quad \varepsilon_1(\varepsilon_0, t_0) = \varepsilon_0, \quad \varepsilon_1 = \text{const} \quad (1.1)$$

Рассмотрим выражение

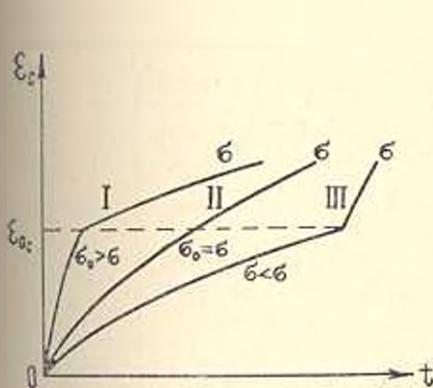
$$\varepsilon_t - \varepsilon_{0t} = F_1(\varepsilon, \theta, t) = F_2(\varepsilon, \theta, t_0); \quad t > t_0, \quad \theta = t - t_0 \quad (1.2)$$

где с помощью условия  $\varepsilon_0 = \text{const}$  в  $F_1$  устранено  $\varepsilon_0$ , а в  $F_2 - t_0$ .

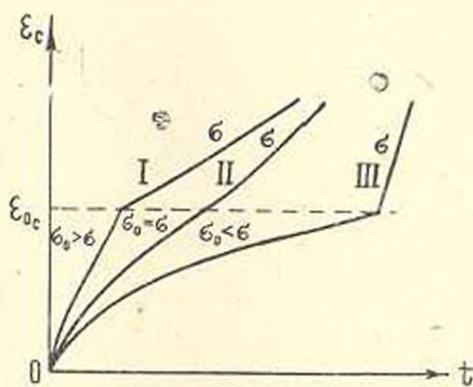
Преимственность соблюдается, если имеет место

$$\frac{\partial F_1}{\partial t_0} > 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z_0} < 0 \quad (1.3)$$

Отметим, что это допущение согласуется с высказанным в [5, 6] утверждением, что после увеличения нагрузки деформации ползучести протекают с большей скоростью, чем это предсказывается гипотезой уравнения состояния [5].



Фиг. 1.



Фиг. 2.

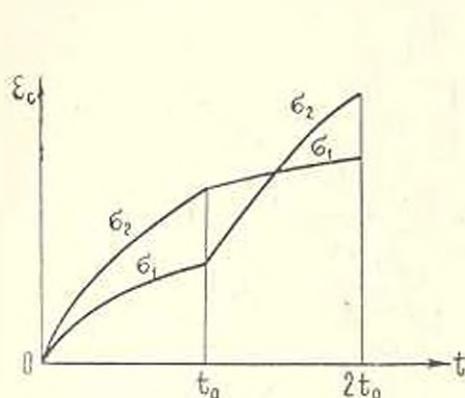
Преимственность имеет место и для ползучести на III стадии (фиг. 2), хотя здесь эксперименты для его подтверждения единичны. Как показано в работе [4] для стали X181110 при  $700^\circ\text{C}$ , удлинение образца до некоторого значения  $\varepsilon_{0c}$  тем больше разупрочняет его, чем при меньшем напряжении достигнута эта деформация  $\varepsilon_{0c}$ .

2 Ф. Оаквистом [7] в 1956 г. был введен так называемый коммутативный закон ползучести, согласно которому при ряде последовательных приложений напряжений полные пластические деформации ползучести не зависят от порядка, в котором прикладывались напряжения. В той же работе [7] приведены экспериментальные данные, не подтверждающие коммутативный закон. Дальнейшие исследования [1, 3 и др.] по проверке коммутативного закона привели к общему выводу [5, 8] о систематичности отклонений экспериментальных данных от коммутативного закона, причем общая деформация ползучести оказывается большей в том случае, когда на последней ступени нагрузка оказывается большей (фиг. 3). Такое нарушение коммутативности будем называть «нормальным». При наличии противоположной картины (фиг. 4) нарушение коммутативности будем называть «обратным».

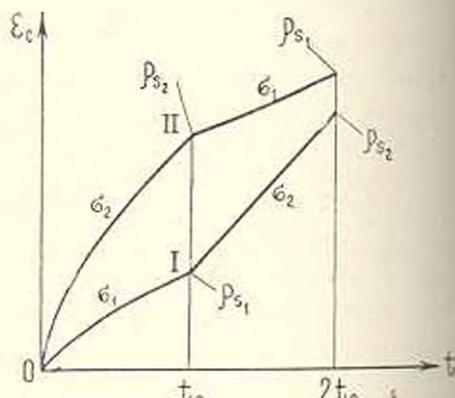
Математически допущение нарушения коммутативности может быть записано следующим образом. Принимаются следующие две программы экспериментов:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_2 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases} \\
 2) \quad & \sigma(t) = \begin{cases} \sigma_2 & 0 < t < t_0 \\ \sigma_1 & t_0 < t < 2t_0 \end{cases}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

При положительности  $\varepsilon_{1,}(2t_0) - \varepsilon_{2,}(2t_0)$  имеет место нормальное нарушение коммутативности, а при его отрицательности — обратное нарушение коммутативности.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Далее будут рассмотрены предсказания относительно принятых допущений согласно некоторым теориям ползучести.

3. Теория упрочнения (или «гипотеза уравнения состояния») [5, 9] предсказывает однозначную зависимость между скоростью ползучести  $(\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t})$ , напряжением ( $\sigma$ ) и деформацией ползучести ( $\varepsilon_c$ ) независимо от истории нагружения

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon_c) \quad (3.1)$$

Согласно (3.1), на фиг. 1 и 2 при  $\varepsilon_c > \varepsilon_{c_0}$  кривые I, II и III в точках с одинаковыми ординатами должны иметь касательные с равным наклоном, что противоречит постулату преемственности.

Как показано в работе [7], для вырожденной зависимости ( $f(\sigma, \varepsilon_c) = f_1(\sigma) f_2(\varepsilon_c)$ ), согласно теории упрочнения, имеет место коммутативный закон, то есть на фиг. 3 и 4 кривые должны пересекаться в точке  $t = 2t_1$ .

#### 4. Наследственная теория [10]

$$\varepsilon_c(t) = \int_0^t f[\varepsilon(\tau)] K(t, \tau) d\tau \quad (4.1)$$

вообще говоря, дает различные предсказания относительно преемственности в зависимости от вида аппроксимации при постоянных напряжениях или, что то же, в зависимости от вида ядра  $K(t, \tau)$ . Согласно программе (1.1) и уравнению (4.1) получим

$$\varepsilon_t - \varepsilon_0 = F_1(z, \theta, t_0) = C(\theta) f(z) - \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{C(t_0)} [C(t_0 + \theta) - C(\theta)] \quad (4.2)$$

где

$$C(t) = \int_0^t K(t, \tau) d\tau$$

Рассмотрим два простейших типа ядер  $K(t, \tau)$  — экспоненциальное  $e^{-\alpha(t-\tau)}$  (аппроксимация  $\varepsilon_t = f(z) \frac{1}{\tau} (1 - e^{-t/\tau})$ ) и степенное  $(t-\tau)^{-\alpha}$  со слабой особенностью ( $0 < \alpha < 1$ ) (аппроксимация  $\varepsilon_t = \frac{f(z)}{1+\tau} t^{1-\alpha}$ ).

Для экспоненциального ядра имеем  $\frac{\partial F_1}{\partial t_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t_0} e^{-t_0} = 0$ , то есть преемственность не соблюдается, а имеет место картина, аналогичная предсказанной теорией упрочнения.

Для степенного ядра имеем  $\frac{\partial F_1}{\partial t_0} = \frac{\partial}{\partial t_0} \left[ \frac{(t_0 + \theta)^{1-\alpha} - \theta^{1-\alpha}}{t_0^{1-\alpha}} \right] = -\frac{(1-\alpha)\theta}{t_0^{1-\alpha} (t_0 + \theta)^\alpha} \left[ \left( \frac{t_0 + \theta}{\theta} \right)^\alpha - 1 \right] > 0$ , то есть преемственность соблюдается.

Соответственно программам экспериментов (2.1), для (4.1) получим

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = [f(z_2) - f(z_1)] [2C(t_0) - C(2t_0)] \quad (4.3)$$

Выражение (4.3) в условиях затухающей скорости ползучести всегда положительно, откуда заключаем о соблюдении «нормального» нарушения коммутативности для любого наследственного оператора с затухающей памятью.

5. Согласно энергетической теории Соснина [11] имеем

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{f(z)}{(A^0 - A)^m}, \quad A = \int_0^t \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial t} dt \quad (5.1)$$

что соответствует аппроксимации по времени

$$\varepsilon_2(t) = \frac{A^0}{\alpha} \left| 1 - \sqrt[m-1]{1 - t \frac{f(z)(m+1)}{A^{m+1}}} \right| \quad (5.2)$$

вызывающей деформации с монотонно возрастающей скоростью.

Соответственно программе эксперимента (1.1) из (5.1) при  $t > t_0$  получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) - \varepsilon_c(t_0) = & \frac{A^*}{\sigma} \left\{ \sqrt[1]{1 - \frac{m+1}{A^{*m+1}} t_0 f(\varepsilon_0)} - \right. \\ & \left. - \sqrt[1]{1 - \frac{m+1}{A^{*m+1}} [t_0 f(\varepsilon_0) + \theta f(\varepsilon)]} \right\} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Устраняя здесь  $t_0$  из условия  $\varepsilon_{0c} = \text{const}$ , в обозначениях (1.2) получим

$$F_\varepsilon(\sigma, \theta, \varepsilon_0) = \frac{A^*}{\sigma} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_{0c} \varepsilon_0}{A^*} - \sqrt[1]{\left[ 1 - \frac{\varepsilon_{0c} \varepsilon_0}{A^*} \right]^{m+1} - \frac{m+1}{A^{*m+1}} \theta f(\varepsilon_0)} \right\} \quad (5.4)$$

причем

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \sigma} = \frac{\varepsilon_{0c}}{\sigma} \left\{ -1 + \frac{1}{\left[ 1 - \frac{m+1}{A^{*m+1}} \theta f(\varepsilon_0) \left( 1 - \frac{\varepsilon_{0c} \varepsilon_0}{A^*} \right)^{-m-1} \right]^{\frac{m}{m+1}}} \right\} > 0$$

то есть преемственность не соблюдается.

Для проверки нарушения коммутативности используем программы экспериментов (2.1), согласно которым имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = & \\ & - \left( \frac{A^*}{\varepsilon_1} - \frac{A^*}{\varepsilon_2} \right) \left\{ \sqrt[1]{1 - \frac{m+1}{A^{*m+1}} [f(\varepsilon_1) + f(\varepsilon_2)]} + 1 - \right. \\ & \left. + \sqrt[1]{1 - \frac{m+1}{A^{*m+1}} t_0 f(\varepsilon_1)} - \sqrt[1]{1 - \frac{m+1}{A^{*m+1}} t_0 f(\varepsilon_2)} \right\} < 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

так как  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  и функция  $\psi(\alpha) = \frac{1}{\sqrt[1]{1-\alpha-\beta}} + 1 - \frac{1}{\sqrt[1]{1-\alpha}} - \frac{1}{\sqrt[1]{1-\beta}}$  при  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha + \beta < 1$  имеет отрицательную производную  $\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = -\frac{1}{m+1} \left| \frac{1}{\sqrt[1]{(1-\alpha-\beta)^m}} - \frac{1}{\sqrt[1]{(1-\alpha)^m}} \right| < 0$ ,

$\psi(0) = 0$  и, следовательно,  $\psi(\alpha) < 0$ . Из (5.5) заключаем об обратном нарушении коммутативности.

6. Согласно одному из вариантов кинетической теории [5] имеет место соотношение

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = f\left(\varepsilon, \int_0^{\varepsilon_c} \varepsilon d\varepsilon_c\right) \quad (6.1)$$

При аппроксимации  $\varepsilon_c = \lambda \sigma^n t^n$  уравнение (6.1) запишется так

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = n \lambda \frac{1}{\sigma} \frac{m-n+1}{n} \left( \int_0^{\varepsilon_c} \varepsilon d\varepsilon_c \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad (6.2)$$

Используя программы экспериментов (2.1), из (6.2) получим выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = \\ = \lambda M_0^n \sigma_1^m \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \left\{ 1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{m+1} - \left[ 1 + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{\frac{m+1}{n}} \right]^n \right\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

второе слагаемое при любом  $n < 1$ , следовательно, в условиях ползучести с затухающей скоростью предсказывается нормальное нарушение коммутативности.

Для соблюдения преемственности, согласно кинетической теории, достаточно условие убывания  $f$  по второму аргументу. Действительно, согласно (1.1) для  $t > t_0$  имеем

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = f\{\sigma, \sigma_0 \varepsilon_0 + \sigma[\varepsilon_c(t) - \varepsilon_0]\}, \quad \sigma_0 = \text{const} \quad (6.4)$$

откуда легко видеть, что при достижении одной и той же деформации  $\varepsilon_c(t)$  скорость ползучести будет тем больше, чем меньше  $\sigma_0$ .

### 7. Рассмотрим еще один вариант кинетической теории [3]

$$\frac{d\varepsilon_c}{dt} = \nu \varepsilon_c^{-\alpha} \exp\left[\frac{\sigma}{a} + \frac{\int \varepsilon_c d\sigma}{b}\right] \quad (7.1)$$

соответствующий аппроксимации  $\varepsilon_c = [(x+1)\nu t e^{\frac{\sigma}{a}}]^{\frac{1}{1+\alpha}}$ .

Для программы экспериментов (1.1) из (7.1) получим

$$F_2[\sigma, \delta, \varepsilon_0] = \left[ \varepsilon_0^{1+\alpha} + (x+1)\nu e^{\left(\frac{\sigma}{a} + \frac{\sigma_0 \delta}{b}\right)} \varepsilon_0 \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \varepsilon_0 e \quad (7.2)$$

откуда видно, что  $\frac{\partial F_2}{\partial \sigma_0} < 0$  и, следовательно, преемственность соблюдается как для затухающей ползучести ( $\alpha > 0$ ), так и для ползучести с возрастающей скоростью ( $-1 < \alpha < 0$ ).

Для программ экспериментов (2.1) из (7.1) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = \mu \left[ 1 + e^{-(x-\alpha)\left(\frac{1}{a} + \frac{\sigma_0}{b}\right)} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} - \\ - \mu \left[ e^{\frac{2\sigma_0}{a}} + e^{-(x-\alpha)\frac{\sigma_0}{b}} e^{\alpha \frac{\sigma_0^2}{b(1+\alpha)}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} > 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

где

$$\mu = \left[ (x+1)\nu_0 e^{\frac{\sigma_0}{a}} \right]^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

следовательно, уравнением (7.1) предсказывается нормальное нарушение коммутативности и для затухающей ползучести, и для ползучести с возрастающей скоростью.

### 8. Согласно теории Малинина-Хажинского [6]

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_c}{dt} &= \dot{F}(\sigma - \rho) \\ d\varepsilon_c &= A(\sigma - \rho, \sigma) d\varepsilon_c \end{aligned} \quad (8.1)$$

где  $F$  и  $A$  — экспериментально определяемые функции, причем  $F$  — возрастающая функция, а величина  $\rho$  до нагружения равна нулю. При  $A(\sigma - \rho, \sigma) = \text{const}$  (8.1) вырождается в теорию упрочнения.

Соответственно программе эксперимента (1.3)  $\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0)$  здесь будет определяться лишь значением  $\rho(t_0)$  и напряжением  $\sigma$ , независимо от истории нагружения. Для соблюдения преемственности при достижении одного и того же  $\varepsilon_c(t_0)$  величина  $\rho_0 = \rho(t_0)$  должна быть тем меньшей, чем меньше  $\sigma_0$ , то есть при  $\varepsilon_c(t_0) = \text{const}$   $\frac{d\rho_0}{d\sigma_0} > 0$ . Используя это для второго уравнения (8.1), получим

$$\int_0^{\sigma_0} \frac{\partial}{\partial \sigma_0} \left[ \frac{1}{A(\sigma - \rho, \sigma)} \right] d\sigma = - \frac{d\rho_0}{d\sigma_0} \frac{1}{A(\sigma_0 - \rho_0, \sigma_0)} < 0$$

что во всяком случае соблюдается при  $\frac{\partial A(\sigma - \rho, \sigma)}{\partial \sigma} > 0$ .

Рассмотрим же нарушения коммутативности, в общем, здесь затруднено тем, что для этого необходимо рассматривать также и случай уменьшения напряжения, а функция  $A(\sigma - \rho, \sigma)$  в силу корректности (8.1) должна иметь различные выражения для случая нагружения и разгрузки. При этом, естественно, для разгрузки могут быть выбраны выражения, соответствующие различным предсказаниям.

### 9. Согласно теории Лагнеборга [12], имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_c}{dt} &= \varepsilon_0 \exp \{ -\beta [ | \dot{\rho}(t) - V \dot{\sigma}_0 | ] \} \\ \frac{d\varepsilon_c}{dt} + 2M\tau\dot{\rho}^2 &= C \frac{d\varepsilon_0}{dt} \end{aligned} \quad (9.1)$$

где  $\beta > 0$  и  $C > 0$  — постоянные,  $M$ ,  $\tau$  и  $\varepsilon_0$  — функции от напряжения,  $\rho$  — плотность дислокаций. Уравнения (9.1) описывают ползучесть материала в первых двух стадиях, причем скорость ползучести на второй стадии  $\dot{\varepsilon}_c$  определяется по формуле

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{2M\tau}{C} \dot{\rho}^2$$

где  $\rho_1$  — установившаяся плотность дислокаций на второй стадии ползучести, определяемая из формулы

$$C = \frac{2M\tau_0^2}{\epsilon_0} \exp\{\beta(V\bar{\rho}_1 - V\bar{\rho}_0)\}$$

В работе [12] принимается, что до нагружения образца дислокации в нем отсутствуют ( $\rho = 0$ ), но сразу после нагружения  $\rho = \rho_1(\sigma)$ ; в дальнейшем же при ступенчатых изменениях напряжения плотность дислокаций претерпевает лишь непрерывные изменения. Недостаток такой концепции иллюстрируется сравнением ползучести внавь нагруженного образца до напряжения  $\sigma$  с ползучестью образца, нагруженного от весьма малого напряжения  $\delta\sigma$  до того же напряжения  $\sigma$ . В первом случае сразу после приложения напряжения  $\sigma$  плотность дислокаций равна  $\rho_1(\sigma)$ , во втором же случае она равна  $\rho_1(\delta\sigma) = 0$ . Этот недостаток не имеет места, если в (9.1) принять

$$\rho_0(z) = 0 \quad (9.2)$$

то есть если пренебречь  $\rho_0$  в сравнении с  $\rho_1$ .

Из уравнений (9.1) вытекает, что скорость ползучести на некотором участке действия постоянного напряжения  $\sigma$  определяется величиной  $\sigma$ , а также значением  $\rho$  в начале этого участка, независимо от истории нагружения. Для программы эксперимента (1.1) после выхода на вторую стадию ползучести одна и та же деформация  $\epsilon(t_0)$  будет соответствовать различным значениям  $\rho_0 = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{C\epsilon_0}{2M}}$  в зависимости от величины  $\sigma_0$ , причем при меньшем  $\sigma_0$ , а следовательно и  $\rho_0$ , ползучесть будет более интенсивной, что подтверждает соблюдение преемственности.

Для проверки нарушения коммутативности, используя (9.1) и (9.2), запишем уравнение для дополнительной деформации  $\Delta = \epsilon_c - \epsilon_1 t$ :

$$C \frac{d\Delta}{dt} = \frac{1 - \frac{2M(z)\tau(z)\rho_1^2(z)}{\epsilon_0(z)C} \exp(\beta V \bar{\rho})}{1 - \frac{2M(z)\tau(z)\rho^2}{\epsilon_0(z)C} \exp(\beta V \bar{\rho})} \quad (9.3)$$

Принимая в (2.1), что за промежуток времени  $t$ , ползучесть устанавливается (фиг. 4) согласно программ (2.1), после ряда выкладок из (9.1), (9.2) и (9.3) получим

$$\begin{aligned} \Delta_1(2t_0) - \Delta_2(2t_0) &= \frac{1}{C} \int_0^{t_0} \frac{\exp\{\beta(V\bar{\rho}_1 - V\bar{\rho})\} - 1}{\exp\{\beta(V\bar{\rho}_1 - V\bar{\rho})\} - \frac{\rho^2}{\rho_1^2}} dt - \\ &= \frac{1}{C} \int_0^{t_0} \frac{\exp\{\beta(V\bar{\rho}_1 - V\bar{\rho})\} - 1}{\exp\{\beta(V\bar{\rho}_1 - V\bar{\rho})\} - \frac{\rho^2}{\rho_1^2}} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{C} \int_0^{\rho_{s_1}} \left\{ \frac{\exp[\beta(V\bar{\rho}_{s_1} - V\bar{\rho})] - 1}{\exp[\beta(V\bar{\rho}_{s_1} - V\bar{\rho})] - \frac{\rho^2}{\rho_{s_1}^2}} - \frac{\exp\left[\beta\left(V\bar{\rho}_{s_1} - \sqrt{\rho \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}}}\right)\right] - 1}{\exp\left[\beta\left(V\bar{\rho}_{s_1} - \sqrt{\rho \frac{\rho_{s_2}}{\rho_{s_1}}}\right)\right] - \frac{\rho_{s_2}^2}{\rho_{s_1}^4}} \right\} d\rho \quad (9.4)$$

$\rho_{s_1} < \rho_{s_2}$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(\beta) = \frac{\exp\left[\beta\left(V\bar{\rho}_{s_1} - \sqrt{\frac{\rho_{s_1}\rho}{\rho_{s_1}}}\right)\right] - 1}{1 - \frac{\rho_{s_1}^2\rho^2}{\rho_{s_1}^4}} \frac{\exp[\beta(V\bar{\rho}_{s_1} - V\bar{\rho})] - 1}{1 - \frac{\rho^2}{\rho_{s_1}^2}} \quad (9.5)$$

Поскольку  $\varphi(0) = 0$  и, кроме того,

$$\varphi'(\beta) = \frac{V\bar{\rho}_{s_1} \exp\left[\beta\left(V\bar{\rho}_{s_1} - \sqrt{\frac{\rho_{s_1}\rho}{\rho_{s_1}}}\right)\right]}{\left(1 + \frac{\rho\rho_{s_1}}{\rho_{s_1}^2}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{\rho\rho_{s_1}}{\rho_{s_1}^2}}\right)} - \frac{V\bar{\rho}_{s_1} \exp[\beta(V\bar{\rho}_{s_1} - V\bar{\rho})]}{\left(1 + \frac{\rho}{\rho_{s_1}}\right)\left(1 + \sqrt{\frac{\rho}{\rho_{s_1}}}\right)} > 0$$

то

$$\varphi(\beta) > 0 \quad (9.6)$$

при любом положительном  $\beta$ . Из соотношений (9.5) и (9.6) как для  $\rho_{s_1} < \rho_{s_2}$ , так и для  $\rho_{s_1} > \rho_{s_2}$  после ряда выкладок получаем, что подынтегральное выражение (9.4) отрицательно при любом  $\rho$  и, следовательно,

$$\Delta_1(2t_0) - \Delta_2(2t_0) < 0 \quad (9.7)$$

откуда заключаем, что теория Лагнеборга в стадии установившейся ползучести предсказывает обратное нарушение коммутативности, как и показано на фиг. 4.

10. В работе [4] при изучении деформаций с возрастающей скоростью использовалось уравнение

$$\varepsilon_0(t) = k\alpha \int_0^t \varepsilon^2(\tau) \left[ \int_0^{\tau} \sigma^v(\xi) d\xi \right]^{n-1} d\tau \quad (10.1)$$

где положим

$$\lambda = \frac{n}{z^2} (z^2 - z + 1), \quad \nu = \frac{n}{z^2} \quad (10.2)$$

Уравнение (10.1) соответствует аппроксимации  $\varepsilon_c(t) = kt^n \sigma^n$  ( $n = \lambda + \lambda - \nu - \nu$ ) и может описывать как деформации с возрастающей скоростью ( $\alpha > 1$ ), так и с затухающей скоростью ( $0 < \alpha < 1$ ).

Для программы эксперимента (1.1) из (10.1) и (10.2) получим

$$\varepsilon_c(t) - \varepsilon_c(t_0) = \varepsilon_c(t_0) \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha^2}} + 5 \sqrt[5]{\frac{k}{\varepsilon_c(t_0)}} \right]^\alpha - \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{\frac{n(\alpha-1)}{\alpha}} \right\} \quad (10.3)$$

Выражение (10.3) является убывающей функцией от  $\sigma$ , независимо от значения  $\alpha > 1$ , то есть здесь всегда предсказывается принцип преемственности.

Для программ экспериментов (2.1) имеем

$$\varepsilon_{1c}(2t_0) - \varepsilon_{2c}(2t_0) = k z_2^n t_0^n \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{\frac{z-1}{z} n} \right] \left\{ \left[ \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{\frac{n}{z^2}} + 1 \right]^\alpha - \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{\frac{n}{z}} - 1 \right\} \quad (10.4)$$

Выражение (10.4) положительно и для затухающей ползучести и для ползучести с возрастающей скоростью, следовательно, всегда предсказывается нормальное нарушение коммутативности.

Отметим, что выводы п. 10 остались бы в силе и в том случае, если соотношения (10.2) заменить более общими условиями:  $\lambda > \nu$  при  $\alpha > 1$  и  $\lambda < \nu$  при  $\alpha < 1$ .

### Выводы

1. Сформулированы два подхода в теории ползучести — соблюдение преемственности и нарушение коммутативности.

2. Рассмотрены предсказания относительно этих подходов согласно теориям упрочнения, двум вариантам кинетической теории, теории наследственности, энергетической теории Соснина, теории Малинина-Хажинского, теории Лагнелборга и теории, использованной автором при изучении III стадии ползучести.

3. Из рассмотренных теорий преемственность предсказывается наследственной теорией со степенным ядром, кинетической теорией в двух вариантах, теорией Малинина-Хажинского, теорией Лагнелборга и уравнением (10.1).

4. Нормальное нарушение коммутативности предсказывается наследственной теорией с любым ядром, соответствующим затухающей памяти, обоими вариантами кинетической теории и уравнением (10.1).

В заключение отметим, что такая постановка может помочь оптимальному выбору теории ползучести в применении к тому или иному материалу.

лу, но, конечно, не может служить однозначным критерием для оценки теории ползучести.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 12 I 1976

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ ԵՐԿՈՒ ՀԱՐՑԵՐԻ ՄԱՍԻՆ:

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Դիտարկվում են չազմաթիվ փորձարկումներով նախատված միասնական սողքի տեսության մեջ երկու մոտեցումներ: Հետազոտվում են համապատասխան զրանցումները սողքի ամրապնդման, ժառանգականության, Սոսնինի և ներգետնիկական, կինետիկական երկու վարիանտների, Մալինինի-Խաչինսկի ստրուկտուրային, Լագնեբորգի տեսությունների համաձայն և համաձայն այն համասարման, որը օգտագործված է եղել Նեդիակի կողմից սողքի երրորդ ստադիայի հետազոտումներում:

ON TWO ASPECTS OF THE ONE-DIMENSIONAL  
CREEP THEORY

A. M. SIMONIAN

S u m m a r y

The study deals with the theoretical analysis of two aspects of the one-dimensional creep theory. Some pertinent predictions in terms of the theory of strengthening, heredity, Sosnin's theory, kinetic theory in two variants, Malinin-Khazhinsky's structural theory, Lagneborg's theory and the theory used by the author in studying the third stage of creep are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С., Хвостушков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
2. Вилесова В. С., Хвостушков А. А. Ползучесть дуралюмина при постоянных и переменных нагрузках. ПМТФ, 1960, № 4.
3. Наместников В. С., Работнов Ю. Н. О гипотезе уравнения состояния при ползучести. ЖПМТФ, 1961, № 3.
4. Симонян А. М. Исследование высокотемпературной ползучести хроми-никелевой стали в условиях ступенчатых изменений напряжения. Изв. АН АрмССР, Механика, 1974, т. XXVII, № 4.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., Наука, 1966.
6. Малинин Н. И., Хажинский Г. М. К построению теории ползучести в анизотропных упрочненных МТТ, 1969, № 3.

- 7 *Odqvist F. K. G.* Engineering theories of metallic creep Symposium su la plasticità nella scienza delle costruzioni. Bologna, 1956.  
Одквист Ф. Технологические теории ползучести металлов. Механика (сб. переводов), 1959, 2.
- 8 *Навумин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. М., Машиностроение, 1968.
- 9 *Качинин А. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
- 10 *Ирригуян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехтеориздат, 1952.
- 11 *Сасин О. В.* Энергетический вариант теории ползучести и длительной прочности. Ползучесть и разрушение неупрочняющихся материалов. Сообщение 1. Проблемы прочности, 1973, № 5.
- 12 *Engelborg R.* A theoretical approach to creep deformation during intermittent load. Trans. ASME, 1971, D. 93, No. 2.

К. С. КАРАПЕТЯН, Р. А. КОТИКЯН

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОМОДУЛЬНОСТИ БЕТОНА

Как известно, сопротивляемость бетона растяжению в 10—20 раз ниже, чем сжатию. Существенно отличаются и модули упругости при растяжении и сжатии, однако этот вопрос еще совершенно мало исследован [4].

Настоящая работа посвящена исследованию разномодульности тяжелого и легкого бетонов в зависимости от размеров поперечного сечения бетонного элемента и некоторых других факторов. В работе рассматриваются результаты двух больших серий опытов авторов, из коих данные по тяжелому бетону частично опубликованы в работе [1], а по легкому бетону — полностью в работе [2]. Отметим, что в этих работах результаты указанных опытов с точки зрения разномодульности бетона не рассматривались.

В опытах над тяжелым бетоном испытывались призмы и восьмерки сечением  $7 \times 7$ ,  $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$  и  $20 \times 20$  см. Для приготовления бетона применялись: базальтовый щебень, кварцевый песок и портланд-цемент Араратского завода (Ереван) марки 500. Состав бетона (по массе) 1:2.07:2.63: ВЦ — 0.575; расход цемента 355 кг на  $1 \text{ м}^3$  бетона.

Призмы и восьмерки бетонировались в горизонтальном положении, освобождались от форм через 2 сут, после чего часть их изолировалась от влагопотерь парафином. До момента испытания в возрастах 28 и 700 сут все образцы хранились в обычных лабораторных условиях. При кратковременных испытаниях определяли: призмную прочность, прочность на растяжение и модуль деформации при сжатии и растяжении.

Вторая серия опытов была поставлена одним из авторов данной статьи с целью изучения анизотропии прочности, модуля деформации и деформаций ползучести легкого бетона на литондной пемзе при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора [2]. Хотя методика этих опытов подробно описана автором, все же отметим, что и в этом случае испытывались призмы и восьмерки сечением  $7 \times 7$ ,  $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$  и  $20 \times 20$  см. Бетон был приготовлен на песке и щебне из литондной пемзы и на пуцолановом портланд-цементе Араратского завода активностью 471 кг/см<sup>2</sup>. Состав бетона (по массе) 1:1.85:3.00: ВЦ = 1; расход цемента 252 кг на  $1 \text{ м}^3$  бетона. Образцы испытывались в возрастах 28 сут и 1 год как перпендикулярно (образцы, изготовленные в вертикальных формах), так и параллельно (образцы, изготовленные в горизонтальных формах) слоям бетонирования.

Все экспериментальные данные подвергались статистической обработке по методике [5]. Показатель точности корреляционного уравнения в большинстве случаев не превышает 7%. Среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации прочности бетона только в отдельных случаях соот-

ственно превышают: при сжатии 10—15 кгс/см<sup>2</sup> и 5%, а при растяжении — 1—1.2 кгс/см<sup>2</sup> и 7%.

Экспериментальные кривые деформаций как призм, так и восьмерок описывались корреляционным уравнением

$$\varepsilon = \frac{a \frac{\sigma}{R}}{1 - b \frac{\sigma}{R}} \quad (1.1)$$

где  $a$  и  $b$  — опытные параметры.

Касательные модули деформации при растяжении и сжатии определяли при одинаковых уровнях напряжений по зависимости

$$E = E_0 \left( 1 - b \frac{\sigma}{R} \right)^2 \quad (1.2)$$

где  $E_0$  представляет начальный модуль деформации ( $E_0 = R/a$ ).

Данные о прочности и касательном модуле деформации исследованного тяжелого бетона при растяжении и сжатии приведены в табл. 1. Отметим, что из этих данных в работе [1] были опубликованы только прочности неизолированных восьмерок и призм, прочности изолированных призм. В таблице также модули деформации по хорде при относительном напряжении 0.5.

Как видно из табл. 1, при неизолированных образцах масштабный фактор оказывает существенное влияние на прочность тяжелого бетона как при растяжении, так и при сжатии. Независимо от возраста к моменту испытания с увеличением размеров поперечного сечения образца прочность бетона как на растяжение, так и на сжатие (призменная прочность) возрастает. Отношение прочности восьмерок сечением 20×20 см к прочности восьмерок сечением 7×7 см при возрасте бетона 28 и 700 сут соответственно составляет 1.31 и 1.40. Отношение же прочностей призм аналогичных сечений в тех же возрастах составляет 1.50 и 1.24.

При изолированных образцах, испытанных в возрасте 28 сут, прочность образцов разных сечений как при сжатии, так и при растяжении отличаются незначительно и поэтому можно заключить, что в этом случае масштабный фактор практически не оказывает влияния на прочность бетона. Однако, со старением бетона влияние масштабного фактора вновь начинает проявляться и в возрасте 700 сут призменная прочность так же, как и прочность бетона на растяжение, с увеличением размера сечения образца возрастает. Изменение характера влияния масштабного фактора на прочность бетона при сжатии и растяжении является следствием частичного испарения, которое имело место из-за ненадежной изоляции образцов парафином [1]. Отрицательное влияние испарения тем больше, чем меньше сечение образца и больше возраст бетона к моменту испытания.

По данным табл. 1 прочности изолированных призм сечением 7×7; 10×10, 15×15 и 20×20 см в возрасте 700 сут соответственно составляют 373, 319, 548 и 483 кгс/см<sup>2</sup>. Наблюдаемое некоторое отступление прочности призм сечением 10×10 и 20×20 см от общей закономерности является

Таблица 1

Влияние масштабного фактора на прочность, модуль деформации и разномодульность тяжелого бетона

Условия хранения образцов	Возраст бетона в сут	Размеры сечения образцов в см	Прочность в кгс/см <sup>2</sup>		$E_p \times 10^{-3}$ и кгс/см <sup>2</sup> при уровне напряжения			$E_{сж} \times 10^{-4}$ и кгс/см <sup>2</sup> при уровне напряжения			Коэффициент разномодульности ( $E_p/E_{сж}$ ) при уровне напряжения		
			$R_p$	$R_{пр}$	0	0,25	0,50	0	0,25	0,50	0	0,25	0,50
Обычное без изоляции	28	7×7	11.7	150	300	235	178	198	161	126	1.51	1.46	1.39
		10×10	15.7	201	294	238	188	229	190	154	1.28	1.25	1.22
		15×15	15.5	229	340	271	210	233	198	166	1.46	1.37	1.27
		20×20	15.3	225	348	282	223	244	208	174	1.42	1.35	1.28
	700	7×7	13.5	212	354	262	186	195	168	143	1.82	1.56	1.30
		10×10	15.0	183	409	295	200	235	186	143	1.74	1.59	1.40
		15×15	17.5	225	324	252	190	215	187	163	1.51	1.35	1.17
		20×20	18.9	262	304	238	180	228	189	153	1.33	1.26	1.18
Обычное с изоляцией	28	7×7	19.9	341	538	424	323	334	271	214	1.61	1.56	1.51
		10×10	17.9	367	442	364	294	328	289	254	1.35	1.26	1.16
		15×15	23.0	333	488	404	328	354	273	202	1.38	1.48	1.62
		20×20	22.8	327	456	390	329	337	261	195	1.35	1.49	1.69
	700	7×7	19.2	373	467	339	232	280	265	250	1.67	1.28	0.93
		10×10	23.5	319	520	398	292	295	278	269	1.76	1.43	1.09
		15×15	26.3	548	473	389	314	375	333	294	1.26	1.17	1.07
		20×20	29.0	483	419	362	310	347	298	254	1.21	1.21	1.22

следствием как неодинаковой степени надежности наружной изоляции образцов, так и того, что ввиду необходимости в большом количестве образцов последние изготавливались группами из разных замесов исследуемого бетона. Как правило, призмы сечениями  $7 \times 7$ ,  $10 \times 10$  и  $15 \times 15$  см бетонировались из одного замеса, а призмы сечением  $20 \times 20$  см — из другого замеса. По такой же методике изготавливались и восьмерки таких сечений.

По данным табл. 1 в случае неизолированных образцов, испытанных в возрасте 28 сут. во влиянии масштабного фактора на модуль деформации тяжелого бетона как при растяжении, так и при сжатии наблюдается четкая закономерность — с увеличением размеров поперечного сечения образца модуль деформации возрастает. При возрасте же бетона 700 сут масштабный фактор уже практически не оказывает влияния на модуль деформации бетона как при растяжении, так и при сжатии. Следует обратить внимание и на то, что после 28 сут возраста модуль деформации бетона во времени возрос незначительно, а в некоторых случаях наблюдается даже его спад.

По данным испытаний изолированных образцов в возрасте 28 сут модуль деформации бетона как при растяжении, так и при сжатии практически не зависит от размеров поперечного сечения образца. Однако, со старением бетона влияние масштабного фактора начинает вновь проявляться и модуль деформации тем больше, чем больше сечение образца. Наблюдаемое некоторое отступление модулей деформаций изолированных восьмерок и призм сечением  $20 \times 20$  см от указанной закономерности, несомненно, является следствием того, что эти образцы изготовлены не из тех замесов бетона, из которых были изготовлены восьмерки и призмы сечениями  $7 \times 7$ ,  $10 \times 10$  и  $15 \times 15$  см.

Рассмотрим опытные данные коэффициента разномодульности тяжелого бетона ( $k_1$ ), который представляет отношение модуля деформации при растяжении ( $E_p$ ) к модулю деформации при сжатии ( $E_{cm}$ ). На основании этих данных, независимо от масштабного фактора, уровня напряжения, возраста бетона к моменту испытания и от того испытываются неизолированные или изолированные образцы, коэффициент разномодульности тяжелого бетона  $k_1$  почти во всех случаях больше единицы и изменяется в довольно широких пределах (от 1.07 до 1.82).

Масштабный фактор оказывает существенное влияние на коэффициент разномодульности тяжелого бетона (табл. 1). При неизолированных образцах, независимо от уровня напряжения и возраста бетона к моменту испытания, с увеличением размеров поперечного сечения образца  $k_1$  имеет тенденцию уменьшаться, причем в некоторых случаях существенно. Что касается изолированных образцов, испытанных в возрасте 28 и 700 сут, то в этом случае указанная закономерность иногда ни только не сохраняется, но даже в отдельных случаях наблюдается обратная картина, то есть с увеличением сечения образца коэффициент разномодульности возрастает.

Разномодульность тяжелого бетона существенно зависит и от уровня напряжения. Независимо от размеров поперечного сечения образца, возраста бетона к моменту испытания и от того, испытываются неизолированные

или изолированные образцы, по данным табл. 1 в большинстве случаев с увеличением уровня напряжения степень разномодульности тяжелого бетона уменьшается.

Старение бетона также оказывает существенное влияние на разномодульность тяжелого бетона, однако это влияние тесно связано с масштабным фактором. По данным табл. 1 можно заключить, что в случае как неизолированных, так и изолированных образцов существует некоторое оптимальное сечение образца, меньше и больше которого влияние старения качественно различно. При сечении образцов меньше оптимального со старением бетона коэффициент разномодульности  $k_2$  возрастает, а при сечении образцов больше оптимального — уменьшается. В данном случае оптимальное сечение  $> 10 \times 10$  см и  $< 15 \times 15$  см.

Как известно, легкие бетоны своими специфическими свойствами отличаются от тяжелых бетонов и поэтому изучение их разномодульности имеет важное как научное, так и практическое значение. Для анализа разномодульности бетона на литондной пемзе модули деформации при растяжении и сжатии были рассчитаны по формуле (1.2) при различных уровнях напряжений (табл. 2), где одновременно приводятся и прочностные показатели бетона. Подробный анализ влияния масштабного фактора на прочность бетона по этим опытам дан в работе [2] и поэтому здесь этот вопрос не рассматривается.

При анализе данных табл. 1 было показано, что коэффициент разномодульности тяжелого бетона больше единицы и изменяется в довольно широких пределах. С увеличением размеров поперечного сечения образца и уровня напряжения степень разномодульности в большинстве случаев уменьшается.

Рассматривая данные табл. 2, следует заметить, что с увеличением сечения образца коэффициент разномодульности легкого бетона на литондной пемзе уменьшается только в случае испытания образцов перпендикулярно слоям бетонирования. В остальных случаях при сечении образцов  $\geq 10 \times 10$  см наблюдается обратная картина. Кроме этого, с увеличением уровня напряжения степень разномодульности легкого бетона, как правило, не уменьшается, как это мы наблюдали при тяжелом бетоне, а, наоборот, в большинстве случаев увеличивается.

Другой особенностью легкого бетона на литондной пемзе является то, что его коэффициент разномодульности не всегда больше единицы, он может быть меньше, равен и больше единицы. С увеличением возраста бетона к моменту испытания степень разномодульности легкого бетона до уровня напряжения 0.25 уменьшается. Из сравнения данных табл. 1 и 2 можно также заключить, что степень разномодульности тяжелого бетона более существенна, чем легкого бетона на литондной пемзе.

Рассмотрим наконец, последние три графы табл. 2, где приведены значения коэффициента анизотропии разномодульности легкого бетона на литондной пемзе ( $k$ ), который представляет отношение коэффициента разномодульности образцов, испытанных перпендикулярно слоям ( $k_1$ ) к коэффициенту разномодульности образцов, испытанных параллельно слоям ( $k_2$ ). По этим данным коэффициент  $k$ , который характеризует анизотропию раз-

Таблица 2

Влияние масштабногo фактора на прочность, модуль деформации и разномодульность бетона

Возраст бетона	Размеры сечения образцов в см	Направление нагрузки по отношению к слоям бетона	Прочность в кг/см <sup>2</sup>		$E_p \times 10^{-3}$ в кг/см <sup>2</sup> при уровне напряжения			$E_{cm} \times 10^{-3}$ в кг/см <sup>2</sup> при уровне напряжения			Коэффициент разномодульности ( $E_p/E_{cm}$ ) при уровне напряжения			Коэффициент анизотропии разномодульности при уровне напряжения		
			$R_p$	$R_{cp}$	0	0.25	0.50	0	0.25	0.50	0	0.25	0.50	0	0.25	0.50
			28 сут	7x7	перпенд. парал.	9.5	84	122	100	81	111	82	57	1.10	1.22	1.42
парал.	12.5	135			134	121	108	155	115	82	0.86	1.05	1.32			
10x10	перпенд. парал.	9.4		114	157	114	77	125	100	78	1.27	1.14	0.99	1.19	1.09	0.94
	парал.	10.4		125	173	138	107	162	131	102	1.07	1.05	1.05			
15x15	перпенд. парал.	7.9		132	152	102	61	134	102	72	1.13	1.00	0.85	0.84	0.76	0.65
	парал.	8.3		138	214	162	117	160	123	90	1.34	1.32	1.30			
20x20	перпенд. парал.	8.1	134	154	120	87	149	114	84	1.07	1.05	1.03	0.98	0.83	0.67	
	парал.	9.2	128	175	155	136	160	122	89	1.09	1.27	1.53				
1 год	7x7	перпенд. парал.	—	87	—	—	—	96	80	66	—	—	—	—	—	—
		парал.	13.9	146	129	110	96	135	102	73	0.91	1.08	1.36			
	10x10	перпенд. парал.	10.0	148	115	94	75	128	100	76	0.90	0.94	0.99	1.07	0.98	0.89
		парал.	15.2	151	119	105	91	141	109	81	0.84	0.96	1.12			
	15x15	перпенд. парал.	13.3	143	106	88	72	121	93	68	0.88	0.95	1.06	0.91	0.91	0.91
		парал.	17.3	173	130	114	98	131	109	87	0.97	1.01	1.13			
20x20	перпенд. парал.	11.7	175	106	99	93	140	113	88	0.76	0.88	1.05	0.85	0.83	0.82	
	парал.	15.2	169	121	110	99	136	104	77	0.89	1.06	1.28				

номодульности бетона, в большой мере зависит от масштабного фактора, возраста бетона к моменту испытания и уровня напряжения. При всех приведенных уровнях напряжений, независимо от возраста бетона, с увеличением размеров поперечного сечения образца  $k$  уменьшается и по своей величине может быть больше, равно и меньше единицы. При сечении образцов  $7 \times 7$  см коэффициент анизотропии разномодульности больше единицы, а при сечении образцов  $> 10 \times 10$  см уже меньше единицы.

Коэффициент анизотропии разномодульности легкого бетона на литой пемзе существенно зависит и от уровня напряжения, однако ее влияние тесно связано с возрастом бетона к моменту испытания. При возрасте бетона 28 сут, независимо от размеров поперечного сечения образца, с увеличением уровня напряжения  $k$  уменьшается, а при возрасте 1 год сказанное сохраняется, если сечение образца  $\leq 10 \times 10$  см. При сечении образцов  $15 \times 15$  и  $20 \times 20$  см коэффициент анизотропии разномодульности уже практически не зависит от уровня напряжения.

#### Основные выводы

1. При одинаковых уровнях напряжений модули деформации бетона при растяжении и сжатии могут существенно отличаться. Степень разномодульности бетона зависит от большого количества факторов: размеров поперечного сечения образца, уровня напряжения, рода заполнителя, направления растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования, влажности образца и др.

2. До уровня напряжения 0.5 независимо от масштабного фактора, возраста бетона к моменту испытания и влажности образца коэффициент разномодульности тяжелого бетона ( $k_2 = E_p/E_n$ ) больше единицы и изменяется в довольно широких пределах (от 1.07 до 1.82). Коэффициент разномодульности легкого бетона на литой пемзе может быть больше, равен и меньше единицы.

3. Масштабный фактор оказывает существенное влияние на разномодульность тяжелого бетона. При неизолированных образцах независимо от уровня напряжений и возраста бетона к моменту испытания с увеличением размеров поперечного сечения образца коэффициенты разномодульности тяжелого бетона уменьшаются. При изолированных образцах эта закономерность сохраняется только в отношении начального коэффициента разномодульности (при  $\sigma = 0$ ), а при уровне напряжения  $\geq 0.25$  наблюдается обратная картина.

4. Независимо от размеров поперечного сечения образца и возраста бетона к моменту испытания, как правило, с увеличением уровня напряжения степень разномодульности тяжелого бетона уменьшается, а легкого бетона на литой пемзе — увеличивается.

5. Возраст бетона к моменту испытания оказывает существенное влияние на степень разномодульности как тяжелого, так и легкого бетонов и это влияние тесно связано с масштабным фактором. Независимо от того, испытываются неизолированные или изолированные образцы, существует некоторое оптимальное сечение образца, меньше и больше которого влияние

старения на коэффициент разномодульности тяжелого бетона качественно различно. При сечении образцов меньше оптимального со старением степень разномодульности тяжелого бетона возрастает, а при сечении образцов больше оптимального — уменьшается. Коэффициент разномодульности легкого бетона независимо от размеров поперечного сечения образца до уровня напряжения 0.25 с увеличением возраста бетона уменьшается.

6. На коэффициент разномодульности легкого бетона оказывает существенное влияние и направление растягивающей и сжимающей нагрузок по отношению к слоям бетонирования. Независимо от уровня напряжения, возраста бетона к моменту испытания с увеличением размеров поперечного сечения образца коэффициент анизотропии разномодульности легкого бетона на литондной пемзе уменьшается и по своей величине может быть больше, равен и меньше единицы.

7. Независимо от размеров поперечного сечения образца и возраста бетона к моменту испытания с увеличением уровня напряжения коэффициент анизотропии разномодульности легкого бетона на литондной пемзе уменьшается.

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 8 VII 1976

Կ. Ս. ԿՈՐԱԳԵՏՏԱՆ, Ռ. Ա. ԿՈՏԻԿՅԱՆ

## ԲԵՏՈՆԻ ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Աշխատանքը նվիրված է ծանր և թեթև բետոնների տարամոդուլությունից և քայքայիմունքի հետազոտմանը կախված մասշտաբի և մի քանի այլ գործոններից: Փորձարկվող նմուշների լայնական չափերը եղել են  $7 \times 7$ ,  $10 \times 10$ ,  $15 \times 15$  և  $20 \times 20$  սմ<sup>2</sup>:

Հետազոտությունները պարզել են, որ միևնույն հարաբերական լարումների դեպքում բետոնի ղեֆորմացիաների մոդուլները ձգման և սեղմման ժամանակ կարող են միմյանցից հապես տարբեր լինել: Մինչև 0.5 մակարդակով լարումները, անկախ մասշտաբի գործոնից, բետոնի հասակից և նմուշի խոնավությունից, ծանր բետոնի տարամոդուլության գործակիցը ( $k = E_1/E_2$ ) միշտ մեծ է մեկից և փոփոխվում է բազականաչափ մեծ սահմաններում (1.07-ից մինչև 1.82):

Թեթև բետոնի տարամոդուլության գործակիցը կարող է լինել 1-ից մեծ, հավասար և վերջուպես փոքր:

Մասշտաբի գործոնը հապես ազդում է ծանր և թեթև բետոնների տարամոդուլության վրա: Ոչ մեկուսացված նմուշների համար, անկախ լարումների մեծություններից և բետոնի հասակից, նմուշների լայնական չափերի մեծացման հետ ծանր և թեթև բետոնների տարամոդուլության գործակիցները փոքրանում են: Սակայն բետոնի մեկուսացված նմուշների համար այդ օրինաչափությունը պահպանվում է մինչև 0.25 մակարդակի լարումները, որից

հետո՝ լարումների մակարդակի մեծացման հետ նկատվում է հակառակ երևույթը:

Կատարված փորձերը ցույց են տվել, որ ծանր և թեթև բետոնների տարամոդուլության վրա կապես ազդում են բետոնի հասակը և լարումների մեծությունները:

Թեթև բետոնի համար տարամոդուլությունը մեծ չափով կախված է բետոնի անիզոտրոպիայից: Անկախ նմուշների չափերից և բետոնի հասակից, լարումների մակարդակի մեծացման հետ տարամոդուլության անիզոտրոպիայի գործակիցը փոքրանում է:

## INVESTIGATION OF HETEROMODULUS CONCRETE DEPENDING ON THE SCALE FACTOR

K. S. KARAPETIAN, R. A. KOTIKIAN

### S u m m a r y

Results of investigation of heteromodulus heavy and light concrete depending on the scale factor are presented.

The investigation show that of the same levels of stresses the strain moduli of concrete on tension and compression may differ essentially. Up to the stress level 0.5, independent of the scale factor and concrete age by the moment of test, the heteromodulus coefficient of heavy concrete,  $k_2 = E_{\text{тен}}/E_{\text{сж}}$ , is greater than unity and it varies over a rather wide range (from 1.07 to 1.82). The heteromodulus coefficient of light concrete on litoid pumice may be greater, equal or less than unity.

The scale factor exerts an essential effect on the heteromodulus coefficient of concrete. For non-insulated specimen, independent of stress and age of concrete, the larger the specimen's cross-section, the less the heteromodulus coefficients of heavy and light concrete. For insulated specimen of heavy concrete the above-mentioned regularity holds only for the initial heteromodulus coefficient ( $\sigma = 0$ ) while with stress  $> 0.25$  the opposite occurs.

The heteromodulus of concrete depends significantly on the concrete age by the moment of test as well, on the stress values and the direction of tension and compression loads with respect to the layers of concreting.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Влияние масштабного фактора на ползучесть бетона. Тр. Второго Всесоюзного совещания по проблемам ползучести и усадки бетона, подготовленные к печати Центральным управлением НТО стройиндустрии, М., 1974.
2. Карапетян К. С. Влияние анизотропии на ползучесть бетона при сжатии и растяжении в зависимости от масштабного фактора. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, 1964, т. 17, № 4.

3. Карапетян К. С. Влияние фактора времени на прочность и деформативность бетона на литондной пемзе и некоторые другие его свойства. «Гидротехнический бетон из литондной пемзе». Ереван, изд. АН АрмССР, 1958.
4. Карапетян К. С., Котикян Р. А. Исследование прочности и деформаций цилиндрических бетонных оболочек при кручении с последующим сжатием. Теория оболочек и пластины. Тр. IX Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластины. Ленинград, 1975.
5. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М., Физматгиз, 1961.

А. Н. ОРЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ  
ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ ДЛЯ ГИБКИХ СТЕРЖНЕЙ  
С ОПОРНЫМИ ЗАКРЕПЛЕНИЯМИ, ОБЛАДАЮЩИМИ  
ПОЛЗУЧЕСТЬЮ

При изучении устойчивости формы упругих стержней и стержневых систем различают потерю устойчивости первого рода, связанную с возможностью существования двух равновесных форм, и потерю устойчивости второго рода, связанную с возможностью неограниченного развития перемещений стержня или системы.

Поскольку ползучесть увеличивает деформации, а следовательно, и перемещения, то естественно при изучении устойчивости стержней и стержневых систем, выполненных из материалов, обладающих ползучестью, рассматривать потерю устойчивости второго рода.

У стержня такая потеря устойчивости может иметь место при наличии начальных несовершенств формы (начальная погибь) или состояния (внецентренное приложение сжимающей силы, отклонение от прямолинейной формы вследствие наличия внешнего воздействия).

Поведение однородных и неоднородных сжатых гибких стержней при длительном действии нагрузки в условиях линейной ползучести описано достаточно полно, в частности, в работах [1], [2], [3]. Однако, следует отметить, что все полученные решения относятся к стержням с опорными закреплениями, не обладающими ползучестью и не меняющими своих свойств во времени. До настоящего времени вопрос о поведении гибких сжатых стержней с опорными закреплениями, обладающими ползучестью и сжатых длительно действующими силами, изучен недостаточно.

Настоящая статья посвящена вопросу определения критических сил с учетом ползучести для гибких стержней с опорными закреплениями, обладающими ползучестью.

Рассматривается гибкий однородный и изотропный стержень, выполненный из материала, обладающего линейной ползучестью, с поперечным сечением, симметричным относительно одной из главных центральных осей.

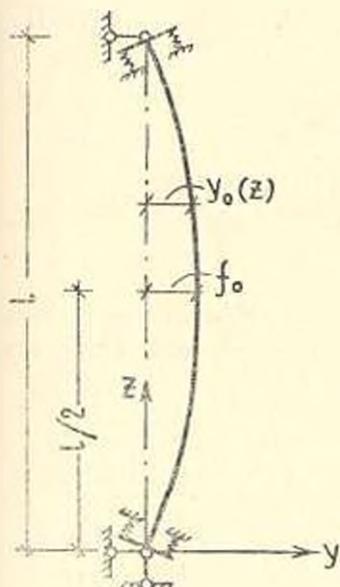
На опорах имеются абсолютно жесткие связи, исключаящие возможность горизонтальных смещений, а также связи, обладающие упругими свойствами и ползучестью, препятствующие поворотам. Деформативные свойства характеризуются модулем упругости  $E(t)$  и полной относительной деформацией  $\delta(t, \tau)$ , а опорных связей —  $E_1(t)$ ,  $\delta_1(t, \tau)$  и  $E_2(t)$ ,  $\delta_2(t, \tau)$ .

Стержень имеет несовершенство в виде начальной погибь  $y_0(z)$  и сжат постоянными во времени силами  $P$ . Изгиб стержня, а следовательно, и потеря устойчивости, может происходить в плоскости  $zoу$  (фиг. 1). Потеря устойчивости из этой плоскости исключена.

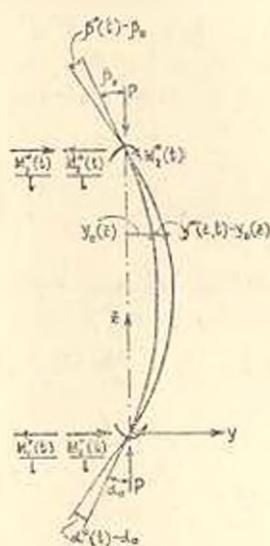
Связь между деформациями и напряжениями в материале стержня устанавливается формулой, основанной на линейной зависимости теории ползучести.

$$\sigma^*(t) = \frac{\sigma^*(t)}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \sigma^*(\tau) \frac{\partial \epsilon_0^*(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (1.1)$$

При деформации стержня на опорах, вследствие наличия связей, обладающих как упругими свойствами, так и ползучестью, возникают моменты  $M_1^*(t)$  и  $M_2^*(t)$ , переменные во времени (фиг. 2).



Фиг. 1. Схема стержня с упругими связями, обладающими ползучестью.



Фиг. 2. Схема деформированного состояния стержня, нагрузка и реактивные усилия.

Изгибающий момент, действующий в произвольном сечении, определяется по формуле

$$M^*(t) = -Py^*(z, t) + \frac{l-z}{l} M_1^*(t) + \frac{z}{l} M_2^*(t) \quad (1.2)$$

При записи уравнения устойчивости, в данном случае уравнения медленного движения, принимается во внимание, что линейная ползучесть не влияет ни на геометрию деформации, ни на зависимости между напряжениями и внешними нагрузками [4], [5]. В силу этого в условиях ползучести справедливы зависимости

$$\frac{1}{\sigma^*(z, t)} = \frac{\epsilon_1^*(t, z) - \epsilon_2^*(z, t)}{h} \approx \frac{\partial^2}{\partial z^2} [y^*(z, t) - y_0(z)] \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_1^*(z, t) = \frac{P}{F} + \frac{M^*(z, t)}{2I} h, \quad \varepsilon_2^*(z, t) = \frac{P}{F} - \frac{M^*(z, t)}{2I} h \quad (1.4)$$

где  $\frac{1}{\rho^*(z, t)}$  — дополнительная кривизна стержня в рассматриваемом сечении, вызванная изгибом;  $\varepsilon_1^*(z, t)$ ,  $\varepsilon_2^*(z, t)$  — деформации крайних полок сечения;  $\varepsilon_1^*(z, t)$ ,  $\varepsilon_2^*(z, t)$  — напряжения в крайних полках сечения;  $h$  — высота поперечного сечения,  $F$  — площадь поперечного сечения;  $I$  — момент инерции поперечного сечения.

Исключая деформации из (1.3) с помощью (1.1), можно получить

$$\frac{1}{\rho^*(z, t)} = \frac{1}{h} \left\{ \frac{\varepsilon_1^*(z, t) - \varepsilon_2^*(z, t)}{E(t)} - \int_0^t [\varepsilon_1^*(z, \tau) - \varepsilon_2^*(z, \tau)] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} \quad (1.5)$$

а с учетом (1.4) выражение (1.5) преобразуется в

$$\frac{1}{\rho^*(z, t)} = \frac{1}{I} \left[ \frac{M^*(z, t)}{E(t)} - \int_0^t M^*(z, \tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (1.6)$$

Под действием сил  $P$  концевые сечения стержня поворачиваются на углы  $\alpha^*(t) - \alpha_0$  и  $\beta^*(t) - \beta_0$ , пропорциональные возникающим в связях моментам  $M_1^*(t)$  и  $M_2^*(t)$ :

$$\alpha^*(t) - \alpha_0 = \frac{1}{k_1(t)} \left[ M_1^*(t) - E_1(t) \int_0^t M_1^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (1.7)$$

$$\beta^*(t) - \beta_0 = \frac{1}{k_2(t)} \left[ M_2^*(t) - E_2(t) \int_0^t M_2^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] \quad (1.8)$$

$$k_1(t) = \bar{k}_1 E_1(t), \quad k_2(t) = \bar{k}_2 E_2(t) \quad (1.9)$$

$\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$  — коэффициенты, определяемые свойствами связей.

В общем случае, когда упругие характеристики и характеристики ползучести стержня и опорных связей различны, то есть  $E(t) \neq E_1(t) \neq E_2(t)$  и  $\delta(t, \tau) \neq \delta_1(t, \tau) \neq \delta_2(t, \tau)$ , задача по отысканию перемещений  $y^*(z, t)$  и критических сил  $P_{22}$  при длительном действии нагрузки сводится к решению системы из трех интегро-дифференциальных уравнений, полученных из (1.6), (1.7), (1.8) с учетом (1.2), (1.3) и равенств

$$\begin{aligned} \alpha^*(t) - \alpha_0 &= \frac{\partial}{\partial z} [y^*(0, t) - y_0(0)] \\ \beta^*(t) - \beta_0 &= \frac{\partial}{\partial z} [y^*(l, t) - y_0(l)] \end{aligned} \quad (1.10)$$

Система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} [y^*(z, t) - y_0(z)] + \frac{P}{IE(t)} \left[ y^*(z, t) - E(t) \int_0^l y^*(z, \tau) \frac{\partial \delta_0(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] - \\ - \frac{l-z}{IE(t)} \left[ M_1^*(t) - E(t) \int_0^l M_1^*(\tau) \frac{\partial \delta_1(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] - \\ - \frac{z}{IE(t)} \left[ M_2^*(t) - E(t) \int_0^l M_2^*(\tau) \frac{\partial \delta_2(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [y^*(0, t) - y_0(0)] = \frac{1}{k_1(t)} \left[ M_1^*(t) - E_1(t) \int_0^l M_1^*(\tau) \frac{\partial \delta_{11}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} [y^*(l, t) - y_0(l)] = \frac{1}{k_2(t)} \left[ M_2^*(t) - E_2(t) \int_0^l M_2^*(\tau) \frac{\partial \delta_{22}(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

При  $t = \tau$ , система (1.11) сводится к дифференциальному уравнению второго порядка, соответствующему упруго-мгновенной задаче,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + i^2 y(z) = \frac{d^2 y_0(z)}{dz^2} + \frac{\lambda^2 k_1 l - z}{P} \frac{d}{dz} [y(0) - y_0(0)] - \\ - \frac{\lambda^2 k_2}{P} \frac{z}{l} \frac{d}{dz} [y(l) - y_0(l)], \quad i^2 = \frac{P}{EI} \end{aligned} \quad (1.12)$$

с граничными условиями

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (1.13)$$

Если начальная погибь  $y_0(z)$  задана в виде функции

$$y_0(z) = f_0 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (1.14)$$

то решение уравнения (1.12) можно представить следующим образом:

$$y(z) = f \sin \frac{\pi z}{l} + (f - f_0) \frac{Q}{\left(\gamma_2 - \frac{IP}{k_1}\right) \left(\gamma_1 - \frac{IP}{k_2}\right) - \gamma_2^2} \quad (1.15)$$

где

$$\begin{aligned} Q = \left( \gamma_1 + \gamma_2 - \frac{IP}{k_1} \right) \left( \frac{\sin \lambda z}{\sin \lambda l} - \frac{z}{l} \right) - \\ - \left( \gamma_1 + \gamma_2 - \frac{IP}{k_2} \right) \left( \frac{\sin \lambda z}{\operatorname{tg} \lambda l} - \cos \lambda z + \frac{l-z}{l} \right) \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma_1 = \frac{\lambda l}{\operatorname{tg} \lambda l} - 1, \quad \gamma_2 = \frac{\lambda l}{\sin \lambda l} - 1, \quad f = \frac{f_0}{1 - P/P_0}, \quad P_0 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (1.16)$$

Перемещение  $y(z)$  неограниченно возрастает, когда знаменатель второго слагаемого стремится к нулю. Следовательно, критические силы упруго-мгновенной задачи могут определяться как корни уравнения устойчивости

$$\left(\gamma_1 - \frac{IP}{k_1}\right) \left(\gamma_2 - \frac{IP}{k_2}\right) - \gamma_2^2 = 0 \quad (1.17)$$

или

$$\left(\frac{\lambda l}{\operatorname{tg} \lambda l} - 1 - \frac{IP}{k_1}\right) \left(\frac{\lambda l}{\operatorname{tg} \lambda l} - 1 - \frac{IP}{k_2}\right) - \left(\frac{\lambda l}{\sin \lambda l} - 1\right)^2 = 0 \quad (1.18)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (1.18) совпадает с уравнением устойчивости первого рода [6].

В случае одинаковых свойств опорных закреплений ( $k_1 = k_2 = k$ ) уравнения (1.15) и (1.18) упрощаются

$$y(z) = f \sin \frac{\pi z}{l} - (f - f_0) \frac{\operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} \sin \lambda z + \cos \lambda z - 1}{\frac{IP}{k} + \lambda l \operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2}} \quad (1.19)$$

$$\left(\frac{\lambda l}{\operatorname{tg} \lambda l} - \frac{\lambda l}{\sin \lambda l} - \frac{IP}{k}\right) \left(\frac{\lambda l}{\operatorname{tg} \lambda l} + \frac{\lambda l}{\sin \lambda l} - \frac{IP}{k} - 2\right) = 0 \quad (1.20)$$

В этом частном случае перемещения определяются по формуле (1.19), а критическая сила  $P_{кр}$  при кратковременном действии нагрузки разыскивается как корень уравнения

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} = -\frac{P}{ik} \quad (1.21)$$

Если стержень и опорные связи выполнены из материалов, подчиняющихся законам наследственной теории старения, то [5]

$$\begin{aligned} \delta(t, \tau) &= \frac{1}{E(\tau)} + \theta(\tau) [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}], & \theta(\tau) &= C + Ae^{-\gamma_1 \tau} \\ \delta_1(t, \tau) &= \frac{1}{E_1(\tau)} + \theta_1(\tau) [1 - e^{-\gamma_1(t-\tau)}], & \theta_1(\tau) &= C_1 + A_1 e^{-\gamma_1 \tau} \\ \delta_2(t, \tau) &= \frac{1}{E_2(\tau)} + \theta_2(\tau) [1 - e^{-\gamma_2(t-\tau)}], & \theta_2(\tau) &= C_2 + A_2 e^{-\gamma_2 \tau} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Предполагается, что материалы являются достаточно старыми, а значит  $E(t) = E(\tau) = E = \text{const}$ ,  $E_1(t) = E_1(\tau) = E_1 = \text{const}$ ,  $E_2(t) = E_2(\tau) = E_2 = \text{const}$ .

Система интегро-дифференциальных уравнений (1.11) может быть сведена к системе дифференциальных уравнений с частными производными. Для этого над каждым из уравнений системы необходимо выполнить следующие операции: вычислить первую производную по  $l$ , вычислить вторую производную по  $l$ , сложить вторую производную с первой, умноженной на соответствующее  $\gamma$ . Полученная таким образом система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4}{\partial z^2 \partial t^2} [y^*(z, t) - y_0(z)] + \lambda^2 \frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^3}{\partial z^2 \partial t} [y^*(z, t) + y_0(z)] + \\ + \gamma \lambda^2 [1 + E\theta(t)] \frac{\partial y^*(z, t)}{\partial t} - \frac{\lambda^2 l - z}{P} \frac{\partial^2 M_1^*(t)}{\partial t^2} - \\ - \gamma \frac{\lambda^2 l - z}{P} [1 + E\theta(t)] \frac{\partial M_1^*(t)}{\partial t} - \frac{\lambda^2 z}{P} \frac{\partial^2 M_2^*(t)}{\partial t^2} - \\ - \gamma \frac{\lambda^2 z}{P} [1 + E\theta(t)] \frac{\partial M_2^*(t)}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} k_1 \frac{\partial^3}{\partial z \partial t^2} [y^*(0, t) - y_0(0)] + \gamma_1 k_1 \frac{\partial^3}{\partial z \partial t} [y^*(0, t) - y_0(0)] = \\ = \frac{\partial^3 M_2^*(t)}{\partial t^3} + \gamma_1 [1 + E_1 \theta_1(t)] \frac{\partial M_1^*(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 \frac{\partial^3}{\partial z \partial t^2} [y^*(l, t) - y_0(l)] + \gamma_2 k_2 \frac{\partial^3}{\partial z \partial t} [y^*(l, t) - y_0(l)] = \\ = \frac{\partial^3 M_2^*(t)}{\partial t^3} + \gamma_2 [1 + E_2 \theta_2(t)] \frac{\partial M_2^*(t)}{\partial t} \end{aligned}$$

Для определения перемещений  $y^*(z, t)$  следует решить систему (1.23) с известными граничными и начальными условиями. Однако, для нахождения критической силы  $P_{кр}$  нет необходимости решать (1.23) в заданном виде.

Известно, что для сжатых стержней с начальной погибью либо внецентренно приложенной нагрузкой критерий для определения критической силы при длительном действии нагрузки математически сформулирован так:

$$y^*(z, t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \text{const}, \quad \frac{\partial y^*(z, t)}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 \quad (1.24)$$

и под критической следует понимать минимальную силу, вызывающую неограниченное развитие перемещений с постоянной скоростью [3].

Так как при  $t \rightarrow \infty$  деформирование происходит с постоянной скоростью, то

$$\frac{\partial y^*(z, t)}{\partial t} \rightarrow \text{const}, \quad \frac{\partial^2 y^*(z, t)}{\partial t^2} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial M_1^*(t)}{\partial t} \rightarrow \text{const}, \quad \frac{\partial^2 M_1^*(t)}{\partial t^2} \rightarrow 0$$

$$\frac{\partial M_2^*(t)}{\partial t} \rightarrow \text{const}, \quad \frac{\partial^2 M_2^*(t)}{\partial t^2} \rightarrow 0, \quad \theta(t) \rightarrow C, \quad \theta_1(t) \rightarrow C_1, \quad \theta_2(t) \rightarrow C_2 \quad (1.25)$$

$$CE = c, \quad C_1 E_1 = c_1, \quad C_2 E_2 = c_2$$

и система (1.23) вырождается в дифференциальное уравнение упругой линии стержня

$$\frac{d^2 y^*(z)}{dz^2} + i_{\text{ст}}^2 y^*(z) = \frac{d^2 y_0(z)}{dz^2} + \frac{i_{\text{ст}}^2 k_1}{P(1+c_1)} \frac{l-z}{l} \frac{d}{dz} [y^*(0) - u_0(0)] -$$

$$- \frac{i_{\text{ст}}^2 k_2}{P(1+c_2)} \frac{z}{l} \frac{d}{dz} [y^*(l) - y_0(l)], \quad i_{\text{ст}}^2 = i^2(1+c) \quad (1.26)$$

Используя полученные выше результаты при решении упруго-мгновенной задачи и аналогию в выражениях (1.12) и (1.26), можно записать уравнение устойчивости при  $l = \infty$

$$\left| \frac{\lambda_{\text{ст}} l}{\text{tg } \lambda_{\text{ст}} l} - 1 - \frac{lP}{k_1} (1+c_1) \right| \left| \frac{\lambda_{\text{ст}} l}{\text{tg } \lambda_{\text{ст}} l} - 1 - \frac{lP}{k_2} (1+c_2) \right| -$$

$$- \left( \frac{\lambda_{\text{ст}} l}{\sin \lambda_{\text{ст}} l} - 1 \right)^2 = 0 \quad (1.27)$$

или

$$\left( \frac{\lambda_{\text{ст}} l}{\text{tg } \lambda_{\text{ст}} l} - 1 - \frac{lP}{k_{1\text{ст}}} \right) \left( \frac{\lambda_{\text{ст}} l}{\text{tg } \lambda_{\text{ст}} l} - 1 - \frac{lP}{k_{2\text{ст}}} \right) - \left( \frac{\lambda_{\text{ст}} l}{\sin \lambda_{\text{ст}} l} - 1 \right)^2 = 0 \quad (1.28)$$

где

$$k_{1\text{ст}} = \frac{k_1}{1+c_1}, \quad k_{2\text{ст}} = \frac{k_2}{1+c_2} \quad (1.29)$$

Итак, для определения критической силы при длительном действии нагрузки достаточно в уравнении устойчивости упруго-мгновенной задачи заменить значения упруго-мгновенных модулей длительными модулями

$$E_{\text{ст}} = \frac{E}{1+c}, \quad E_{1\text{ст}} = \frac{E_1}{1+c_1}, \quad E_{2\text{ст}} = \frac{E_2}{1+c_2} \quad (1.30)$$

и определять  $P_{\text{ст}}$  как корень уравнения (1.28).

Уравнение (1.28), по-первых, позволяет разыскивать критические силы для стержней, выполненных из материалов как стареющих, так и не стареющих. Во-вторых, можно определять  $l$  для стержней с различными комбинациями деформативных свойств самих стержней и опорных связей, например: стержень и связи обладают упругими свойствами и ползучестью; стержень обладает упругими свойствами и ползучестью, связи упругие;

стержень упругий, связи обладают упругими свойствами и ползучестью и т. д.

В частном случае равенства характеристик деформативности стержня и податливых связей уравнение для определения  $P_{дл}$  имеет вид

$$\operatorname{tg} \frac{i_{дл} l}{2} = - \frac{P}{i_{дл} k_{дл}} \quad (1.31)$$

отличающийся от соответствующего уравнения упругой задачи только наличием множителя  $\frac{1}{1+c}$  при  $E$ .

### Выводы

1. Величина критической силы при длительном действии нагрузки  $P_{дл}$ , как и в случае стержня с опорными связями, не меняющими своих свойств во времени, зависит только от полностью обратимых деформаций ползучести. Это вполне естественно, так как определяется из условия  $y^*(z, t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , когда процесс старения закончился.

2. Критическая сила  $P_{дл}$  разыскивается как корень уравнения устойчивости, получаемого из уравнения устойчивости упруго-мгновенной задачи путем замены в нем упруго-мгновенных модулей длительными.

3. Уравнения (1.28) и (1.31) позволяют находить  $P_{дл}$  для стержней, выполненных из материалов как стареющих, так и не стареющих.

4. Полученные результаты могут быть использованы при определении  $P_{дл}$  для неоднородных стержней, в частности, железобетонных, а также при расчетах на устойчивость рамных конструкций.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступила 15 III 1976

Ա. Ն. ՕՈՒՈՎ

ԿՐԻՏԻՑԻԿԱՆ ՈՒՒԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՍՈՂՔՈՎ ՌԺՏՎԱԾ ՀԵՆԱՐԱՆԱՅԻՆ ԱՄՐԱՑՈՒՄՆԵՐՈՎ ՃԿՈՒՆ ԶՈՂՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԲՆՈՒ ԵՐԿԱՐԱՏԵՎ ԱԶԳԻՄԱՆ ԿԵՊԳՈՒՄ

Ս. մ փ ո փ ո ռ մ

Դիտարկվում է սողքի ազդեցությունը հենարանային ամրացումներով առաձգական և սողքային հատկություններով ճկուն համասեռ ձողերի կայունության վրա: Բերվում է բնութագրություն ազդման դեպքում կրիտիկական ուժերի հաշվման համար բանաձև:

## DETERMINATION OF CRITICAL FORCES ON PROLONGED EFFECT OF LOADING FOR ELASTIC PIVOTS WITH BASE ATTACHMENTS AND CREEP

A. N. ORLOV

### S u m m a r y

The effect of creep on stability of elastic homogeneous pivots with base attachments having elastic characteristics and creep is examined.

The relations for calculation of critical forces on prolonged effect of loading are derived.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести и старения на устойчивость стержня, сжатого длительно действующей силой. «Строительная механика и расчет сооружений», 1967, № 1.
2. Орлов А. Н. Влияние ползучести на устойчивость сжатых железобетонных стержней. Сборник «Строительные конструкции. Киев. «Будівельник», вып. 10, 1968
3. Орлов А. Н., Прокопович И. Е. О влиянии ползучести и старения на величины критических сил для гибких однородных и неоднородных стоек. «Изв. АН АрмССР, Механика», 1969, т. XXII, № 3.
4. Арцтяни И. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М., Гостехиздат, 1952.
5. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. М., Госстройиздат, 1963.
6. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М., «Наука», 1971.