

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
 АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ
 ДОКЛАДЫ

LXIX, № 3

1979

Խմբագրական կոլեգիա

Գ. Ա. ԱՐՁՈՒՄԱՆՅԱՆ, տեխ. գիտ. բեկնա-
 ծու (պատ. ֆաբտուղար), Է. Գ. ԱՅՐԻԿՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ, Ա. Բ. ԲԱԲԱ-
 ՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Հ. Խ. ԲՈՒՆ-
 ԿՍԹՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Ա.
 ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Վ. Մ. ԹՍՌԱՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-ան-
 դամ, Վ. Հ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս,
 Վ. Հ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս
 (պատ. խմբագրի տեղակալ), Հ. Գ. ՄԱՂԱՐ-
 ՏՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս, Ա. Դ. ՆԱԶԱՐՈՎ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ ակադեմիկոս (պատ. խմբագիր),
 Գ. Ս. ՍԱՀԱԿՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ,
 Օ. Մ. ՍԱՊՈՆԺՅԱՆ, ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-
 անդամ, Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ, ՀՍՍՀ
 ԳԱ թղթակից-անդամ, Վ. Բ. ՇԱՆԱՐՁՅԱՆ,
 ՀՍՍՀ ԳԱ թղթակից-անդամ:

Редакционная коллегия

В. А. АМБАРЦУМЯН, академик, Г. А.
 АРЗУМАНЯН, канд. техн. наук (отв.
 секретарь), Э. Г. АФРИКЯН, чл.-корр.
 АН АрмССР, А. Т. БАБАЯН, академик
 АН АрмССР, Г. Х. БУНЯТЯН, акаде-
 мик АН АрмССР, В. О. КАЗАРЯН, ака-
 демик АН АрмССР (зам. отв. редактора),
 И. Г. МАГАКЬЯН, академик АН Арм.
 ССР, А. Г. НАЗАРОВ, академик АН
 АрмССР (отв. редактор), Г. С. СААКЯН,
 чл.-корр. АН АрмССР, О. М. САПОН-
 ДЖЯН, чл.-корр. АН АрмССР, А. А. ТА-
 ЛАЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР, В. М.
 ТАРАЯН, чл.-корр. АН АрмССР, М. Л.
 ТЕР-МИКАЕЛЯН, чл.-корр. АН АрмССР,
 В. В. ФАНАРДЖЯН, чл.-корр. АН
 АрмССР.

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

էջ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

Ա. Ա. Գուլյերևի, Մ. Ն. Շերեմետա—Ամբողջ ֆունկցիայի և էքսպոնենցիալ բազմանդամի սուպերպոզիցիայի թամբության մասին.	123
Ա. Շ. Առախելյան—Լուծումներ ընդունելու խնդիրների ներկայացում.	135
Ղ. Ս. Ղազարյան—Սահմանափակ բիօթոզոնալ սիստեմի լեքեզի ֆունկցիաների դոմարների միջին թվաբանականների լոգարիթմական աճը.	140
Լ. Ա. Շաճինյան—Նոանկյունաչափական շարքերի և Ուոլշի շարքերի T-միջինների անորոշության սահմանների մասին.	146

ՄԱՆԱՆԻԿԱ

Լ. Ա. Ազալովյան—Առաձգականության տեսության հոաչափ խնդրի բիրումը երկրաչափի օրթոտրոպ թաղանթների համար և կիրառական որոշ տեսությունների սխալի մասին.	151
---	-----

ՖԻԶԻԿԱ

Գ. Մ. Ավալյանց, Ս. Ա. Խառովյան—Երկար դիֆուզիայի վոլտ-ամպերային բնութագծերի տեսության վերաբերյալ.	157
Ի. Ա. Բաղդյան, Մ. Լ. Տեր-Միքայելյան—Անցումային հառադայթումը պտտման պարալոդի ձև ունեցող սահմանի վրա.	163

ԲԻՈՔԻՄԻԱ

Պ. Ս. Գեոքյան, Ի. Ռ. Ֆառալյովա, Ա. Ա. Իսախանյան—Հիպոթալամիկ կարգիտրոպ հեքսամեթիլի (Տիր-Գլի-Լեյ-Արգ-Գրո-Գլի-NH ₂) ազդեցությունը երկամանների ֆունկցիոնալ գործունեության որոշ կողմերի վրա.	169
---	-----

ԲՈՒՅԱՆՈՒ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Վ. Շ. Ղազարյան, Ի. Ս. Շահագիրյան—Մառերի օնտոգենեզում արմատների ճյուղավորման և ֆիզիոլոգիական ակտիվության ակրոպետալ ուղղության հերթափոխումը բազիպետալով.	172
--	-----

ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

Ի. Կ. Խաչվանեյան, Ի. Ա. Բաբսեղյան, Բ. Ա. Հաբուսյունյան-Կոզակ—Ընդհանուր ֆունային լուսավորության ազդեցությունը Կլեր-Քիշոպի շրջանի նեյրոնների պատասխանների վրա, առաջացված շարժվող տեսողական գրգռիչներով.	173
Ա. Ա. Հևիթյան, Ի. Ե. Գրիգորյան, Բ. Ա. Հաբուսյունյան-Կոզակ—Ընդհանուր լուսի ազդեցությունը պուլվինարի նեյրոնների պատասխանների վրա առաջացված շարժվող տեսողական գրգռիչներով.	183
Է. Ա. Հովհաննիսյան, Շ. Տ. Ավետիկյան—Կատվի հիպոկամպի նեյրոնային ակտիվության վրա ուղեղիկի ազդեցության բնույթի մասին.	187

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

Стр.

- А. А. Гольдберг, М. Н. Шеремета — О хребтовости суперпозиции целой функции и экспоненциального многочлена 129
- А. А. Аракелян — О представлении задач принятия решений 135
- К. С. Казарян — Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем 140
- Л. А. Шагинян — О пределах неопределенности Т-средних тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша 146

МЕХАНИКА

- Л. А. Агалонян — О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий 151

ФИЗИКА

- Г. М. Авакьянц, С. А. Тарумян — К теории вольт-амперной характеристики длинных диодов 157
- Р. А. Багиян, М. Л. Тер-Микаелян — Переходное излучение на границе раздела двух сред в форме параболоида вращения 163

БИОХИМИЯ

- Ж. С. Геворкян, И. Р. Фаталова, А. А. Галоян — Данные о влиянии гипоталамического кардиотропного гексапептида (Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH₂) на некоторые стороны функциональной деятельности почек 169

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

- В. О. Казарян, Р. С. Шахазизян — К вопросу о смещении акропетального направления ветвления и физиологической активности базипетального у корней в онтогенезе древесных 172

ФИЗИОЛОГИЯ

- Д. К. Хачванкян, Р. А. Барсегян, Б. А. Арутюнян Козак — Влияние фонового освещения на ответы нейронов области Клер — Бишопа, вызванные движущимися зрительными стимулами 178
- А. А. Экимян, Г. Е. Григорян, Б. А. Арутюнян Козак — Влияние фонового освещения на ответы нейронов пульвинара, вызванные движущимися зрительными стимулами 183
- Э. А. Огачесян, Ш. Т. Аветикян — К природе влияния мозжечка на нейронную активность гиппокампа кошки 187

CONTENTS

MATHEMATICS

- A. A. Goldberg, M. N. Sheremeta*—On the ridgeness of the composition of an entire function with an exponential polynomial 129
- A. H. Arakellian*—On the representation of the models for decision making 135
- K. S. Kazarian*—The logarithmic growth of the arithmetical means of the sums of the Lebesgue functions of the bounded biorthogonal systems 140
- L. A. Shalnian*—On the limits of uncertainty T-means of trigonometric and Walsh series 146

MECHANICS

- L. A. Agalovian*—On reducing of elasticity theory three-dimensional problem to a two-dimensional one for orthotropic sheets and on errors of applied theories 151

PHYSICS

- G. M. Avakiants, S. A. Tarumian*—On the theory of the long diode current-volt characteristics 157
- R. A. Bagian, M. L. Mikuellian*—Transition radiation on the interface of two media in the form of paraboloid rotation 163

BIOCHEMISTRY

- J. S. Gevorkian, I. R. Fatalova and A. A. Galoyan*—Data on the action of cardiotrop hexapeptide on som functions of kidney activity 169

PLANT PHYSIOLOGY

- V. O. Kazarian, R. S. Shahazizian*—About the question of changing of the physiological activity of roots from the acropetal direction to the basipetal in the ontogeny of woody plants 172

PHYSIOLOGY

- D. K. Khachvankian, R. A. Barsegian, B. A. Hurutiunian—Kozak*—The effect of background illumination on the responses of neurons of Clare-Bishop area to the moving visual stimuli 178
- A. A. Hekimian, G. E. Grigorian, B. A. Hurutiunian—Kozak*—The influence of background illumination on the responses of Pulvinar neurons to moving visual stimuli 183
- E. A. Ohanessian, Sh. T. Avetkian*—About the nature of the cerebellar influence on the hippocampal neuronal activity in the cat 187

Технический редактор Л. А. АЗИЗБЕКЯН

ВФ 04309 Подписано к печати 30/X 1979 г. Тираж 510. Изд. 5127. Заказ 712.
 Формат бумаги 70X108¹/₁₆. Печ. л. 4,0. Бум. л. 2,0.
 Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. листов 4,32.

Типография Издательства АН Армянской ССР, Ереван, Барскамутия, 24.
 Типография Издательства АН Армянской ССР, г. Эчмиадзин.

УДК 517.534+519.21

МАТЕМАТИКА

А. А. Гольдберг, М. Н. Шеремета

О хребтовости суперпозиции целой функции и экспоненциального многочлена

(Представлено академиком АН Армянской ССР М. М. Джрбашяном 7/V 1979)

Целая функция φ называется хребтовой (⁽¹⁾, стр. 43), если

$$(\forall (x, y) \in R^2) \{ |\varphi(x + iy)| \leq |\varphi(iy)| \}. \quad (1)$$

В 1962 г. И. В. Островский (⁽²⁾ (см. также (⁽¹⁾, стр. 63) показал, что если $g \neq \text{const}$ и f — целые функции, а $\varphi = g(f)$ — хребтовая функция, то либо f — многочлен с $\deg f \leq 2$, либо f — трансцендентная функция, рост которой не ниже нормального типа порядка 1. Эта теорема И. В. Островского дополнена результатами В. В. Зимогляда (⁽¹⁾ (см. также (⁽¹⁾, стр. 460). В настоящей статье мы продолжим изучение свойств функции f в случае хребтовости $g(f)$, а именно рассмотрим случай, когда f — экспоненциальный многочлен вида

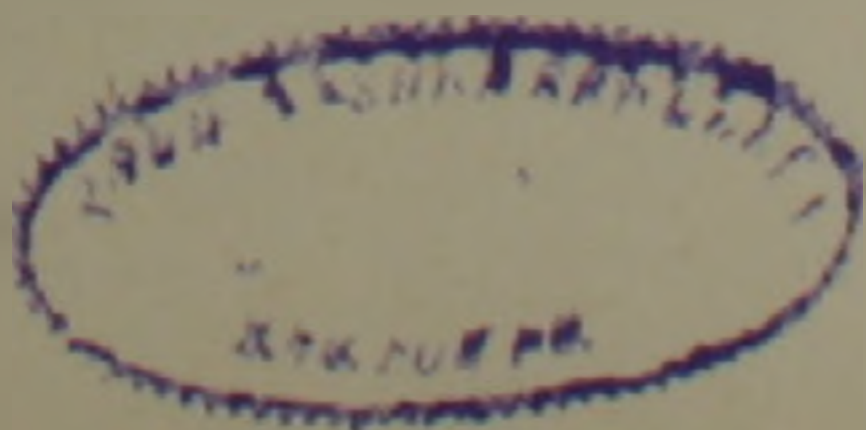
$$f(z) = \sum_{k=1}^n a_k e^{z \cdot i_k}, \quad z = x + iy, \quad (2)$$

где $a_k = |a_k| \exp(i\alpha_k)$ и все i_k разные. Обозначим $\gamma_k = \text{Re } i_k$, $\beta_k = \text{Im } i_k$ и докажем следующую теорему.

Теорема 1. Если $g \neq \text{const}$ — целая функция, а f — экспоненциальный многочлен вида (2) и $\varphi = g(f)$ — хребтовая функция, то $\gamma_k = 0$ при $1 \leq k \leq n$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из (1) следует, что функция $\varphi = g(f)$ ограничена в каждой полосе $\{z: a \leq \text{Re } z \leq b\}$. Другие свойства хребтовых функций использоваться не будут.

Допустим теперь, что не все γ_k равны нулю. Тогда мы можем считать, что среди чисел γ_k имеется положительное. В противном случае можно сделать замену z на $-z$, что на хребтовости φ не отразится.



Итак, пусть $\gamma = \max\{\gamma_k : 1 \leq k \leq n\}$ и $\gamma = \gamma_1 = \dots = \gamma_p > \gamma_{p+1} > \dots \geq \gamma_n$. Тогда

$$f(z) = e^{i\gamma} e^{i\gamma y} \sum_{k=1}^p a_k e^{-\beta_k y} e^{i\beta_k x} + \sum_{k=p+1}^n a_k e^{i\gamma_k x - \beta_k y} e^{i(\beta_k x + \gamma_k y)}, \quad (3)$$

Допустим сначала, что среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_p$ имеются отрицательные. Положим $\beta = \min\{\beta_k : 1 \leq k \leq p\} < 0$. Очевидно, что среди $\beta_1, \dots, \beta_p$ существует единственное число, скажем β_1 , равное β . Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p a_k e^{-\beta_k y} e^{i\beta_k x} &= a_1 e^{i\beta_1 y} e^{-i|\beta|x} + \sum_{k=2}^p a_k e^{-\beta_k y} e^{i\beta_k x} = \\ &= a_1 e^{i\beta_1 y} e^{-i|\beta|x} (1 + \psi_1(x, y)), \end{aligned} \quad (4)$$

где $\psi_1(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ равномерно относительно $x \in R$, т. е. для всякого достаточно малого $\delta > 0$ при $y \geq a = a(\delta)$ и для всех $x \in R$ выполняется $|\psi_1(x, y)| \leq \delta/2$. Из (3) и (4) имеем

$$\begin{aligned} f(z) &= a_1 e^{i\gamma x + i\beta_1 y} e^{i(\gamma y - |\beta|x)} (1 + \psi_1(x, y)) + \sum_{k=p+1}^n a_k e^{i\gamma_k x - \beta_k y} e^{i(\beta_k x + \gamma_k y)} = \\ &= a_1 e^{i\gamma x + i\beta_1 y} e^{i(\gamma y - |\beta|x)} (1 + \psi(x, y)), \end{aligned}$$

где $|\psi(x, y)| < \delta$ при $x \geq x_0(\delta)$ и $a \leq y \leq a + 6\pi/\gamma$, $a = a(\delta)$. Так как $g(f)$ ограничена в полосе $\{z : a \leq \operatorname{Im} z \leq a + 6\pi/\gamma\}$, откуда следует, что при $x \geq x_0(\delta)$ и $a \leq y \leq a + 6\pi/\gamma$ выполняется

$$|g(a_1 e^{i\gamma x + i\beta_1 y} e^{i(\gamma y - |\beta|x)} (1 + \psi(x, y)))| \leq B(\delta), \quad (5)$$

где $B(\delta)$ — некоторая положительная постоянная. Положив в (5) $x = 2\pi n/|\beta|$, $n \in N$, получаем, что при $n \geq n_0$ и $a \leq y \leq a + 6\pi/\gamma$ выполняется

$$\left| g\left(|a_1| e^{2\pi n\gamma/|\beta|} e^{i\beta_1 y} e^{i(\gamma y + \pi)} \left(1 + \psi\left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, y\right)\right)\right)\right| \leq B(\delta),$$

т. е. функция g ограничена на кривой

$$C_n = \left\{ z : z = |a_1| e^{2\pi n\gamma/|\beta|} e^{i\beta_1 t} e^{i(\gamma t + \pi)} \left(1 + \psi\left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, t\right)\right), a \leq t \leq a + 6\pi/\gamma \right\},$$

имеющей форму спирали, причем $\left|\psi\left(\frac{2\pi n}{|\beta|}, t\right)\right| < \delta$ при $n \geq n_0$ и $a \leq t \leq a + 6\pi/\gamma$. Расстояние $\operatorname{dist}(0, C_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, а приращение $\operatorname{Arg} z$ на C_n , благодаря произвольности числа δ , близко к 6π , т. е. спираль C_n обходит начало координат приблизительно 3 раза.

С другой стороны, если в (5) взять $y = a = a(\delta)$, получаем

$$|g(|a_1| e^{i\gamma x} e^{i\beta_1 a} e^{-i(|\beta|x - \gamma t - \pi)}) (1 + \psi(x, a))| \leq B(\delta),$$

т. е. функция g ограничена на кривой

$$\Gamma = \{z : z = |a_1|e^{i\tau}e^{i\beta/a}e^{-i(|\beta|/\alpha\tau - \alpha_1)}(1 + \psi(t, a)), \quad x_0(\delta) \leq t < \infty\},$$

также имеющей вид спирали, но обходящей начало координат в противоположном к обходу C_n направлении и уходящей в ∞ . При достаточно больших n спираль Γ пересекает спираль C_n хотя бы в двух точках таких, что приращение $\text{Arg } z$ на дуге C_n между этими точками больше π . Поэтому можно найти односвязную область G_n такую, что $0 \in G_n$, $\partial G_n \subset \Gamma \cup C_n$ и $\text{dist}(0, \partial G_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Так как на ∂G_n функция g ограничена числом $B(\delta)$, то она ограничена этим числом $B(\delta)$ в области G_n . Отсюда следует, что $g \equiv \text{const}$, что невозможно.

Если среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_p$ нет отрицательного, но есть положительное, то рассуждения в этом случае остаются такими же, но теперь нужно устремлять $y \rightarrow -\infty$, т. е. рассматривать промежуток $[-a - 6\pi/\gamma, -a]$, $a = a(\delta) > 0$. При этом обходы начала координат кривыми C_n и Γ меняются на противоположные, и в этом случае также получаем, что $g \equiv \text{const}$, что невозможно.

Предположим наконец, что среди чисел $\beta_1, \dots, \beta_p$ нет ни отрицательных, ни положительных. Тогда $p = 1$ и $\beta_1 = 0$. Поэтому в данном случае из (3) имеем

$$f(z) = |a_1|e^{i\tau}e^{i(\gamma y + \alpha_1)}(1 + \psi(x, y)),$$

где $\psi(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно по y из каждого конечного промежутка. Из последнего равенства, как и выше, находим, что

$$|g(|a_1|e^{i\tau}e^{i(\gamma y + \alpha_1)}(1 + \psi(x, y)))| \leq B \quad (6)$$

для всех $(x, y) \in R^2$, где $\psi(x, y) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ равномерно относительно $y \in [0, 6\pi/\gamma]$, а B — некоторая положительная постоянная. Положив в (6) $x = n$, $n \in N$, получаем, что функция g ограничена на кривой

$$C_n = \{z : z = |a_1|e^{i\tau}e^{i(\gamma t + \alpha_1)}(1 + \psi(n, t)), \quad 0 \leq t \leq 6\pi/\gamma\},$$

имеющей форму спирали, причем $\text{dist}(0, C_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и приращение $\text{Arg } z$ на C_n при достаточно больших n близко к 6π . Если же в (6) взять $y = 0$, то получим, что функция g ограничена на кривой

$$\Gamma = \{z : z = |a_1|e^{i\tau}e^{i\alpha_1}(1 + \psi(t, 0)), \quad t \geq 0\},$$

которая, начиная с некоторого места, лежит в некотором углу достаточно малого раствора. Поэтому существует односвязная область G_n такая, что $0 \in G_n$, $\partial G_n \subset \Gamma \cup C_n$, $\text{dist}(0, \partial G_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и на ∂G_n функция g ограничена, а значит, $g \equiv \text{const}$, что невозможно.

Отметим, что теорема 1 допускает различные обобщения. Укажем на одно из них.

Теорема 2. Пусть $g = \text{const}$ — целая функция, f — целая функция, представленная абсолютно сходящимся в S рядом Дирихле

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \exp\{\lambda_k z\}, \quad (7)$$

и $g(f)$ — хребтовая функция. Тогда, если множество $\Lambda = \{\lambda_k\}$ ограничено и множество его предельных точек $\Lambda' \in \text{conv } \Lambda$, то $\text{Re } \lambda_k = 0$ для всех k и множество Λ конечное.

Заметим, что если множество Λ неограничено, то теорема 2, вообще говоря, не верна. Действительно, по теореме А. Ф. Леонтьева ((4), стр. 481) хребтовую функцию e^{i^2} можно представить рядом (7) с показателями $\lambda_k \rightarrow \infty$, лежащими на трех различных лучах.

Дополнительную информацию о коэффициентах a_k в (2) можно получить при некоторых достаточно сильных ограничениях на показатели $\lambda_k = i\beta_k$ и на функцию g .

Теорема 3. Пусть

$$f(z) = \sum_{j=1}^n a_j e^{i\beta_j z}, \quad 0 \neq \beta_j \in R, \quad -\infty < l < n < +\infty, \quad (8)$$

$a_n \neq 0$, $a_1 \neq 0$, g — многочлен степени m , а $\varphi = g(f)$ — хребтовая функция. Тогда существуют числа $\alpha \in R$ и $\alpha^* \in R$ такие, что $\text{Im}(a_j e^{i\alpha}) = 0$ при $0 < j \leq n$ и $\text{Im}(a_j e^{i\alpha^*}) = 0$ при $0 > j \geq l$. Если $l < 0 < n$, то $\arg(a_n/a_1) = 2\pi q/m$ при некотором целом q .

Доказательство. Не уменьшая общности, можем считать, что $a_n > 0$ и φ — нормированная хребтовая функция. Тогда $\varphi(iy) > 0$ при $y \in R$. Другие свойства хребтовых функций при доказательстве использоваться не будут. Можно считать также, что $m \geq 2$, ибо при $m = 1$ теорема 3 тривиальна. Мы будем рассматривать только случай $l < 0 < n$, в других случаях доказательство лишь упрощается. Обозначим $e^{-\beta y}$ через v . Тогда

$$f(iy) = p(v) = \sum_{j=1}^n a_j v^j.$$

Пусть $g(z) = b_m z^m + \dots + b_0$, $b_m \neq 0$. Поскольку $\varphi(iy) = \varphi_1(v) = A_{mn} v^{mn} + \dots + A_{ml} v^{ml}$ принимает положительные значения при $0 < v < \infty$, то $\text{Im} A_k = 0$, $ml \leq k \leq mn$ и $A_{mn} > 0$, $A_{ml} > 0$. Отсюда следует, что $A_{mn} = b_m a_n^m > 0$, $b_m > 0$, $A_{ml} = b_m a_l^m > 0$ и $\arg(a_n/a_l) = 2\pi q/m$ при некотором целом q . Если $g_1(z) = b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0$, то наибольшая степень v в $g_1(p(v))$ не превышает $n(m-1)$. Значит,

$$b_m [p(v)]^m = \sum_{k=n(m-1)+1}^{nm} A_k v^k + \sum_{k=ml}^{n(m-1)} B_k v^k.$$

Используя известную полиномиальную формулу ((5), стр. 80), при $nm \geq k \geq n(m-1)+1$ можно записать

$$A_k = b_m \sum_{(n,l)}^{(k,m)} \frac{m!}{s_n! \dots s_l!} a_n^{s_n} \dots a_l^{s_l}, \quad (9)$$

где знак $\sum_{(n,l)}^{(k,m)}$ означает суммирование по всем $(s_n, \dots, s_l)$, удовлетворяющим условиям: 1) $s_j \in Z_+$, $s_j \leq m$, $1 \leq j \leq n$; 2) $s_n + \dots + s_l = m$ и 3) $ns_n + \dots + ls_l = k$.

По предположению $a_n > 0$. Допустим, что уже доказано, что $a_j \in R$ при $\mu + 1 \leq j \leq n$, $1 \leq \mu \leq n-1$. Докажем, что $a_\mu \in R$. Положим в 3) $k = n(m-1) + \mu$. Тогда все $s_j = 0$ при $1 \leq j \leq \mu-1$. Действительно, допустив, что $s_j \geq 1$, получаем $ns_n + \dots + ls_l \leq js_l + n(m-s_l) = mn - s_l(n-j) \leq mn - (n-\mu+1) < k$, т. е. приходим к противоречию. Если $s_\mu \neq 0$, то $s_\mu = 1$, ибо, допустив, что $s_\mu \geq 2$, получаем $ns_n + \dots + ls_l \leq \mu s_\mu + n(\mu - s_\mu) = mn - s_\mu(n-\mu) \leq mn - 2(n-\mu) < k$. Теперь (9) можно переписать в виде

$$A_k = b_m \left\{ a_\mu \sum_{(n,\mu+1)}^{(n(m-1), m-1)} \frac{m!}{s_n! \dots s_\mu!} a_n^{s_n} \dots a_{\mu+1}^{s_{\mu+1}} + \right. \\ \left. + \sum_{(n,\mu+1)}^{(k,m)} \frac{m!}{s_n! \dots s_{\mu+1}!} a_n^{s_n} \dots a_{\mu+1}^{s_{\mu+1}} \right\}. \quad (10)$$

Обе суммы в (10), в силу предположения индукции, действительные. Если $\mu = n-1$, то очевидно, что первая сумма в (10) состоит лишь из одного слагаемого ma_n^{m-1} . Покажем, что это верно и при $\mu \leq n-2$.

Действительно, из равенств $s_n + \dots + s_{\mu+1} = m+1$ и $ns_n + \dots + (\mu+1)s_{\mu+1} = n(m+1)$ имеем $s_{n-1} + 2s_{n-2} + \dots + (n-\mu-1)s_{\mu+1} = 0$, откуда $s_{n-1} = \dots = s_{\mu+1} = 0$, и снова первая сумма в (10) равна $ma_n^{m-1} > 0$. Так как $A_k \in R$, $b_m > 0$, то $a_\mu \in R$.

Таким образом, доказано, что $\operatorname{Im} a_j = 0$ при $0 < j \leq n$, если $a_n > 0$. В общем случае $\operatorname{Im}(a_j e^{iz}) = 0$, $0 < j \leq n$, где $z = -\arg a_n$. Утверждение о a_j , $1 \leq j \leq 0$, получаем, приведя его к предыдущему, обозначая теперь через v величину e^{3v} .

Приведем примеры, указывающие на невозможность усиления теоремы 3 в различных направлениях.

I. Число q , выступающее в теореме 3, может быть любым наперед заданным целым числом. Действительно, легко показать, что $(u^m + u^{-m})/2 = P_m(u + u^{-1})$, где P_m — некоторый многочлен степени m . Положив $u = e^{iq\pi/m} e^{iz}$, получаем $\cos mz = (-1)^q P_m(e^{iq\pi/m} e^{iz} + e^{-iq\pi/m} e^{-iz}) = g(f(z))$, где $g(z) = (-1)^q P_m(z)$ и $f(z) = e^{iq\pi/m} e^{iz} + e^{-iq\pi/m} e^{-iz}$. Здесь $\varphi(z) = \cos mz$ — целая характеристическая функция.

II. Даже при $l=0$, $n \geq 1$, $a_n > 0$, нельзя утверждать, что $a_0 \in R$. Действительно, пусть $f(z) = e^{iz} + i$, $g(z) = z^2 - 2iz - 1$. Тогда $\varphi(z) = g(f(z)) = e^{2iz}$ — целая характеристическая функция.

III. Если $l=1$, $a_n > 0$, но g — целая трансцендентная функция, то не обязательно все $a_j \in R$. Действительно, пусть $f(z) = e^{2iz} - 2ie^{iz}$, $g(z) = -\frac{1}{\operatorname{ch} \pi} \cos \pi \sqrt{1-z}$. Тогда $\varphi(z) = g(f(z)) = \frac{1}{\operatorname{ch} \pi} \operatorname{ch}(\pi e^{iz})$ — целая характеристическая функция.

IV. Даже если $l=0$, $a_n > 0$, $a_j \in R$ при $0 \leq j \leq n$, а g — многочлен степени ≥ 2 , нельзя утверждать, что все $a_j \geq 0$, на что указывает пример ((¹), стр. 47) $f(z) = 1 + 2e^{iz} - e^{2iz} + 3e^{3iz} + 3e^{4iz}$, $g(z) = z^2/4$ и $\varphi(z) = g(f(z)) = 1/64(1 + 4e^{iz} + 2e^{2iz} + 2e^{3iz} + 19e^{4iz} + 6e^{5iz} + 3e^{6iz} + 18e^{7iz} + 9e^{8iz})$ — целая характеристическая функция.

Авторы выражают глубокую благодарность Н. В. Островскому за ценные замечания.

Львовский государственный университет

Ա. Ա. ԴՈՒԴԵՐԳ, Մ. Ն. ՇՆՐԵՄՆՏԱ

Ամբողջ ֆունկցիայի և էքսպոնենցիալ բազմանդամի սուպերպոզիցիայի բաժանումը

Ապացուցվում է, որ եթե $q(z) \equiv \text{const}$ — ամբողջ ֆունկցիա է, f — էքսպոնենցիալ բազմանդամ է i_k ցուցիչներով, իսկ $g(f)$ — թամբալին ֆունկցիա է, ապա $\text{Re } i_k = 0$ ($1 \leq k \leq n$):

Այն դեպքում, երբ g — բազմանդամ է, իսկ

$$i_k = k\beta i \quad (\beta > 0, -\infty < l \leq k \leq n + \infty)$$

ստացված է նաև որոշ ինֆորմացիա f էքսպոնենցիալ բազմանդամի զործակիցների վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԴՐԱՇԱՆՈՒՅՈՒՆ

¹ Ю. В. Линник, Н. В. Островский, Разложение случайных величин и векторов, «Наука», М., 1972. ² Н. В. Островский, ДАН СССР, т. 143, № 3 (1962). ³ В. В. Зимогляд, Труды ФТИИТ АН УССР, Мат. физика, функ. анализ, вып. 1, 1969. ⁴ А. Ф. Леонтьев, Ряды экспонент, «Наука», М., 1976. ⁵ И. И. Ежов, А. В. Скороход, М. И. Ядренко, Элементы комбинаторики, «Наука», М., 1977.

УДК 518.9.

МАТЕМАТИКА

А. А. Аракелян

О представлении задач принятия решений

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР Р. А. Александрином 21/V 1979)

В статье приводится решение поставленной в ⁽¹⁾ задачи существования универсального релятива. В качестве следствия доказывается существование универсального релятива для некоторых задач принятия решения.

Пусть A — топологическое пространство. Под топологическим полирелятивом будем понимать полирелятив $(A, (p_k)_{k \in K})$, удовлетворяющий следующим условиям:

1. $(A, (p_k)_{k \in K})$ наделен структурой полирелятива;
2. Для любой пары $(a, b) \in p_k$ существуют такие окрестности U_a и U_b соответственно точек a и b , что $U_a \times U_b \subset p_k$. Множество A называется полем полирелятива.

Всюду далее будем предполагать полирелятивы нереклексивными. Примером топологического нереклексивного полирелятива является определяемая следующим образом модель экономической системы с конечным числом участников.

Пусть E^l l -мерное евклидово пространство, $X_i \subset E^l$, $i = 1, 2, \dots, l$, $Y_k \subset E^l$, $k = 1, 2, \dots, m$, $Z_i = \sum_{k=1}^m a_{ik} Y_k$, $\sum_{i=1}^l x_{ik} = 1$, $i = 1, 2, \dots, l$, $k = 1, 2, \dots, m$, $Z_S = \sum_{i \in S} Z_i$, $S \subseteq L = \{1, 2, \dots, l\}$, $X = \prod_{i \in L} X_i$, $Y = \prod_{k \in M} Y_k$, $M = \{1, 2, \dots, m\}$, $\{(X_i, \rho_i) \mid i = 1, \dots, l\}$, где $\rho_i \subset X_i \times X_i$ топологические релятивы $i = 1, 2, \dots, l$.

Определим полирелятив $(A, (\rho_S)_{S \subseteq L})$ следующим образом: $(x, \hat{x}) \in \rho_S$ тогда и только тогда, когда $(x_i, \hat{x}_i) \in \rho_i$, $i \in S$, $\sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} e_i + z_S$ для некоторого $z^S \in Z_S$.

Очевидно, что определенный таким образом полирелятив $(A, (\rho_S)_{S \subseteq L})$ является топологическим. Если определить отношения ρ_i следующим образом: $(x_i, \hat{x}_i) \in \rho_i \Leftrightarrow x_i \geq \hat{x}_i$, $i \in L$, то ядро U_ω отношения ω ⁽²⁾ равно ядру U_ω отношения $\omega = \bigcup_{S \subseteq L} \rho_S$.

Отображение φ поля релятива (A, ρ) в поле релятива (B, σ) называется гомоморфизмом, если $\varphi \sqcap \varphi(\rho) = \sigma \sqcap (\varphi(A) \times \varphi(A))$, где $\varphi(A)$ образ поля A при отображении φ . Если φ взаимнооднозначное отображение, то оно называется изоморфизмом.

Представлением топологического релятива (A, ρ) в топологический релятив (B, σ) будем называть непрерывное гомоморфное отображение из (A, ρ) в (B, σ) . Если φ изоморфизм, то оно называется сильным представлением.

Будем говорить, что класс топологических релятивов A_1 допускает представление релятивов класса топологических релятивов A_2 , если любой $(A, \rho) \in A_1$ допускает такое представление f в $(A', \rho') \in A_2$, что $f(a) \neq f(b)$ для любых $a \neq b$, $a, b \in A$. Если класс A_2 состоит из единственного релятива (A', τ) , то $(^1)$ будем говорить, что (A', τ) универсальный топологический релятив.

Пусть (A, τ) бикомпактный топологический релятив. Через $C(A)$ обозначим множество всех непрерывных на A функций. Введем норму $\|f\| = \max_{x \in A} |f(x)|$. Тогда $C(A)$ станет B -пространством относительно нормы $\|f\|$. Пусть a — некоторый элемент из A . Поставим ему в соответствие функцию f_a , определенную следующим образом: $f_a(x) = f(a) \cdot f(x)$. Пусть далее $C_f = \{f_a | a \in A\}$, а функция f такая, что $f(a) \neq f(b)$ для любых $a \neq b$. Положим $C_f^a = \{f_a \cdot f_{a'} | a' \in A\}$. Через $L(C_f)$, $L(C_f^a)$ обозначим соответственно линейные оболочки множеств C_f , C_f^a . Поставим в соответствие элементу $a \in A$ отображение t_a из $L(C_f)$ в $L(C_f^a)$, определенное следующим образом: $t_a(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a_i}) = f_a \cdot \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{a'_i}$.

Обозначим замыкание $L(C_f)$ через $\overline{L(C_f)}$. Так как $L(C_f^a)$ полное для любого $a \in A$, оператор f_a линейный, то $(^2)$ он допускает единственное распространение на все $\overline{L(C_f)}$ с сохранением нормы. Распространение оператора t_a на все $\overline{L(C_f)}$ также обозначим через t_a .

Положим $T_f = \{t_a | a \in A\}$. Определим топологию в T_f следующим образом: под ε -окрестностью $N(t_a, \varphi, \varepsilon)$ оператора t_a будем понимать множество $N(t_a, \varphi, \varepsilon) = \{t_{a'} | \|f_a - t_{a'}\varphi\| < \varepsilon\}$, где φ — произвольный элемент из $L(C_f)$, а $\varepsilon > 0$ произвольно.

Тогда релятив (T_f, λ) , где $\lambda = \{(t_a, t_{a'}) | (a, a') \in \tau\}$, будет топологическим в смысле этой топологии.

Если определить отображение g_f поля A на поле T_f следующим образом: $g_f(a) = t_a$, $a \in A$, то это отображение будет представлением релятива (A, ρ) на релятив (T_f, λ) .

Можно показать, используя лемму 5.1 $(^4)$, что если поле A релятива (A, τ) является бикомпактным, связным топологическим пространством, отношение τ на A является отношением слабого упоря-

дочения, т. е. асимметричным и отрицательно транзитивным, то существует вещественнозначная, положительная на всем A функция $f(x)$, которая непрерывна в топологии множества A и для которой выполнено условие: $(a, b) \in \prec$ тогда и только тогда, когда $f(a) > f(b)$, $a, b \in A$.

Следовательно, если в качестве отношения $\prec$ релятива $(T, \prec)$ рассмотреть отношение $(t_a, t_b) \in \prec \Leftrightarrow t_a f(x) > t_b f(x)$, $x \in A$, то имеет место следующая

Теорема 1. Если поле A релятива (A, ρ) бикомпактное, связное топологическое пространство, отношение ρ — отношение слабого упорядочения, то он допускает представление в классе релятивов с полями из линейных преобразований сепарабельных B -пространств.

Теорема 2. Если поле A релятива (A, ρ) бикомпактное, связное топологическое пространство, ρ — отношение слабого упорядочения, то он допускает представление в классе релятивов с полями из линейных преобразований подпространств пространства $C([0, 1])$.

Пусть (A_α, ρ_α) , $\alpha \in I$ система топологических релятивов. Под их композицией будем понимать релятив (A, ρ) с полем $A = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$, $\rho = \bigotimes_{\alpha \in I} \rho_\alpha$ определенным следующим образом: $(a, b) \in \rho$ тогда и только тогда, когда существует такое $\alpha \in I$, что $(a_\alpha, b_\alpha) \in \rho_\alpha$ и $a_{\alpha'} = b_{\alpha'}$ для любого $\alpha' \neq \alpha$.

Теорема 3. Если $A = \{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ такая система релятивов, что поля A_α релятивов (A_α, ρ_α) , $\alpha \in I$ являются связными, бикомпактными топологическими пространствами, ρ_α , $\alpha \in I$ являются отношениями слабого упорядочения, то существует универсальный бикомпактный топологический релятив для системы A .

Из теорем 3 и 2 следует

Теорема 4. Если $A = \{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ такая система релятивов, что поля A_α релятивов (A_α, ρ_α) , $\alpha \in I$ являются связными, бикомпактными топологическими пространствами, ρ_α , $\alpha \in I$ являются отношениями слабого упорядочения, то существует универсальный для A топологический релятив с полем из линейных преобразований декартова произведения подпространств пространства $C([0, 1])$.

На множестве X^m ($m=2, 3, \dots$), где X^m есть m -кратное декартово произведение одинаковых сомножителей $X \subseteq \prod_{i=1}^m X_i$, определим отношение E^m (см. (4)) следующим образом: $((x^1, x^2, \dots, x^m), (y^1, y^2, \dots, y^m)) \in E^m$ тогда и только тогда, когда $m \leq l$, $x^j, y^j \in X$ для $j=1, 2, \dots, m$, набор $x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^m$ является перестановкой набора $y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^m$ для любого $i=1, 2, \dots, n$.

Из (4) (теорема 5. 5) и теоремы 4 следует

Теорема 5. Пусть $\{(A_i, \rho_i)\}_{i \in L}$, $i \in L$, $\alpha \in I$, где $L = \{1, 2, \dots, n\}$ система топологических релятивов. Если

- 1) (A_α, ρ_α) композиция релятивов $\{(A_i^\alpha, \rho_i^\alpha)\}_{i \in I}$ для любого $\alpha \in I$;
- 2) $\{((a, b), (c, d)) \in E_2^\alpha; (c, a) \in \rho_\alpha \text{ или } (c, a) \in \varepsilon_\alpha\}$, где ε_α — отношение эквивалентности на A_α , влекут $(d, b) \in \rho_\alpha$ для любого $\alpha \in I$;
- 3) A_i^α для любых $\alpha \in I, i \in I$ бикомпактные, связные топологические пространства;
- 4) отношение ρ_α является отношением слабого упорядочения для любого $\alpha \in I$.

то существует универсальный для класса $\{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ топологический релятив с полем из линейных преобразований декартова произведения подпространств пространства $C([0, 1])$.

Под задачей принятия решений ⁽³⁾ будем понимать пару $(A, \preceq)$, где A — множество альтернатив и $\preceq$ отношение предпочтения, заданное на A .

Если в теореме 4 (теореме 5) под пространством A_α (под пространством $\{A_i^\alpha\}, i \in I, \alpha \in I$) понимать множество альтернатив, под отношениями ρ_α (под отношениями $\{\rho_i^\alpha\}, \{\rho_\alpha\}, i \in I, \alpha \in I$) понимать отношения предпочтения, $\alpha \in I$, то из теоремы 4 (теоремы 5) будет следовать существование универсального топологического релятива для соответствующего класса задач принятия решений.

Ереванский институт
народного хозяйства

Ա. Հ. ԱՌԱՐԵԼՅԱՆ

Լուծումներ ընդունելու խնդիրների ներկայացում

Հողվածում դիտարկվում է ունիվերսալ ունիվերսալ գոյություն խնդիրը Ապացուցվում է, որ եթե ունիվերսալ թույլ կարգավորված է և նրա դաշտը բիկոմպակտ է և կապված, ապա այն կարելի է ներկայացնել ունիվերսալների որոշակի դասի օգնությամբ: Այս թեորեմի հիման վրա ունիվերսալների որոշ դասերի համար կառուցվում է ունիվերսալ ունիվերսալ, և որպես հետևություն ապացուցվում է ունիվերսալ ունիվերսալի գոյությունը մի քանի դասերի՝ լուծումներ ընդունելու խնդիրների համար:

Այսպես օրինակ ապացուցվում է:

Թեորեմ: Եթե $A = \{(A_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ունիվերսալների այնպիսի բազմություն է, որ $(A_\alpha, \rho_\alpha), \alpha \in I$ ունիվերսալների A_α դաշտերը կապված, բիկոմպակտ տոպոլոգիական սուբադություններ են, $\rho_\alpha, \alpha \in I$ թույլ կարգավորվածություններ են, ապա A բազմության համար գոյություն ունի ունիվերսալ տոպոլոգիական ունիվերսալ:

ЛИТЕРАТУРА — ЦИЦЦУПРЪЗПЪ

¹ В. Г. Визинг, УМН, 23, 6 (144) (1968) ² Х. Никайдо, Выпуклые структуры и математическая экономика, «Мир», М., 1972 ³ Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ, «Наука», М., 1977. ⁴ П. Фишберн, Теория полезности для принятия решений, «Наука», М., 1978 ⁵ Э. П. Вилкас, В сб. «Мат. методы в социальных науках», вып. 1, 1971.

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

К. С. Казарян

Логарифмический рост средних арифметических от сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем

(Представлено чл. корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 23/V 1979)

Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная на отрезке $[a, b]$ система функций. Функциями Лебега системы $\{\varphi_n\}$ называются следующие функции:

$$L_n(x) = \int_a^b \left| \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) \varphi_k(t) \right| dt \quad (n=1, 2, \dots). \quad (1)$$

В 1961 г. П. Л. Ульяновым (см. ⁽¹⁾, стр. 140) был поставлен вопрос: не обязательно ли выполняться равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{L_n(x)} = \infty$ на множестве положительной меры для ограниченных в совокупности ортонормированных систем.

Первый результат в этом направлении принадлежит А. М. Олевскому ⁽²⁾, который в 1966 г. доказал, что для любой ограниченной ортонормированной системы функций существует некоторое множество положительной меры, где верхний предел последовательности функций Лебега этой системы равен бесконечности. Отсюда, в частности, следует, что ограниченные ортонормированные системы не являются базисами в пространствах C и L .

Затем А. М. Олевский ⁽³⁾ усилил свой результат, доказав следующую теорему.

Теорема А. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система, и

$$\|\varphi_n\|_{L^{\infty}} \leq M < +\infty \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2)$$

Тогда существуют положительные числа C и a такие, что для любого натурального числа n найдется некоторое множество E_n , $|E_n| > a$ и

$$\max_{1 \leq k \leq n} L_k(x) \geq C \log n \quad \text{при } x \in E_n. \quad (3)$$

В 1975 г. С. В. Бочкарев ⁽⁴⁾ доказал более общую теорему.

Теорема Б. Пусть ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2).

Тогда существуют положительные числа C и α такие, что для любого натурального числа n найдется некоторое множество E_n , $|E_n| > \alpha$ и

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n L_k(x) \geq C \log n \quad \text{при } x \in E_n. \quad (4)$$

Оказывается, что (4) не является специфическим свойством ограниченных ортонормированных систем, а характерно для сумм функций Лебега ограниченных биортогональных систем. Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\{f_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — биортогональная система функций, определенных на отрезке $[a, b]$, т. е. $\int_a^b f_i(t) \psi_j(t) dt = \delta_{ij}$ и $\|f_n\|_{L^{\infty}} \leq M$; $\|\psi_n\|_{L^{\infty}} \leq M$ ($n = 1, 2, \dots$).

Обозначим

$$K_n(t, x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) \psi_i(t). \quad (6)$$

Тогда существуют положительные числа C и α такие, что для любого натурального числа n найдется некоторое множество E_n , $|E_n| > \alpha$ и

$$\frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n \int_a^b |K_j(t, x)| dt + \sum_{j=1}^n \int_a^b |K_j(x, t)| dt \right] \geq C \log n \quad \text{при } x \in E_n. \quad (7)$$

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью одного неравенства, установленного С. В. Бочкаревым (см. ⁽³⁾, стр. 438): для любых действительных чисел $\{a_k\}_{k=1}^j$ справедливо следующее неравенство:

$$\max_{1 \leq k \leq j} \{ |a_k| \} \left(\sum_{p=1}^j \left| \sum_{k=1}^p a_k \right| + j \left| \sum_{k=1}^j a_k \right| \right) \geq B \sum_{k=0}^{2^{N_j}-1} \left[\sum_{p=1}^j a_p \varphi_p \left(\frac{2p-1}{2^{N_j+2}} \right) \right]^2, \quad (8)$$

где $2^{N_j-1} \leq j < 2^{N_j}$; B — некоторая абсолютная константа и $\{\varphi_k(x)\}$ — система Шаудера.

Из неравенства (8) для любых вещественных чисел $\{a_k\}_{k=1}^j$ и $\{b_k\}_{k=1}^j$ сразу следует следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq j} \{ |a_k| \} \left(\sum_{p=1}^j \left| \sum_{k=1}^p a_k \right| + j \left| \sum_{k=1}^j a_k \right| \right) + \max_{1 \leq k \leq j} \{ |b_k| \} \left(\sum_{p=1}^j \left| \sum_{k=1}^p b_k \right| + j \left| \sum_{k=1}^j b_k \right| \right) \geq \\ \geq 2B \sum_{k=0}^{2^{N_j}-1} \left| \sum_{p=1}^j a_p \varphi_p \left(\frac{2p-1}{2^{N_j+2}} \right) \right| \left[\sum_{p=1}^j b_p \varphi_p \left(\frac{2p-1}{2^{N_j+2}} \right) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где $2^{N_j-1} \leq j < 2^{N_j}$.

В неравенстве (9), полагая $a_k = c_k \psi_k(t)$, $b_k = d_k f_k(t)$ и интегрируя по t , получаем:

$$\begin{aligned} & M \max_{1 \leq k \leq j} \{ |c_k| \} \left(\sum_{p=1}^j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p c_h \psi_h(t) \right| dt + j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^j c_h \psi_h(t) \right| dt \right) + \\ & + M \max_{1 \leq k \leq j} \{ |d_k| \} \left(\sum_{p=1}^j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p d_h f_h(t) \right| dt + j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^j d_h f_h(t) \right| dt \right) \geq \\ & \geq 2B \sum_{h=0}^{2^{N_j}+1} \left| \sum_{p=1}^j c_p d_p \varphi_h^2 \left(\frac{2p-1}{2^{N_j}+2} \right) \right|. \end{aligned} \quad (10)$$

Напишем полученное неравенство (10) для $\{ c_h^{(s)} \psi_h^{(s)}(t) \}_{h=1}^{j+s}$ и $\{ d_h^{(s)} f_h^{(s)}(t) \}_{h=1}^{j+s}$, где $c_k^{(s)} \psi_k^{(s)}(t) \equiv 0$, $d_k^{(s)} f_k^{(s)}(t) \equiv 0$ при $1 \leq k \leq s$ и

$$\begin{cases} c_k^{(s)} \psi_k^{(s)}(t) = c_{k-s} \psi_{k-s}(t) \\ d_k^{(s)} f_k^{(s)}(t) = d_{k-s} f_{k-s}(t) \end{cases} \quad (s < k \leq j+s; \quad s = 1, 2, \dots, j) \quad (11)$$

Для $s = 1, 2, \dots, j$ неравенство (10) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq j} \{ |c_k| \} \left(\sum_{p=s+1}^{j+s} \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p c_h^{(s)} \psi_h^{(s)}(t) \right| dt + (j+s) \int_a^b \left| \sum_{h=1}^{j+s} c_h^{(s)} \psi_h^{(s)}(t) \right| dt \right) + \\ & + \max_{1 \leq k \leq j} \{ |d_k| \} \left(\sum_{p=s+1}^{j+s} \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p d_h^{(s)} f_h^{(s)}(t) \right| dt + (j+s) \int_a^b \left| \sum_{h=1}^{j+s} d_h^{(s)} f_h^{(s)}(t) \right| dt \right) \geq \\ & \geq \frac{2B}{M} \sum_{h=0}^{2^{N_j^{(s)}}+1} \left| \sum_{p=1}^{j+s} c_p^{(s)} d_p^{(s)} \varphi_h^2 \left(\frac{2p-1}{2^{N_j^{(s)}}+2} \right) \right|, \end{aligned} \quad (12)$$

где $2^{N_j^{(s)}}-1 \leq j+s < 2^{N_j^{(s)}}$. Складывая неравенство (12) по s и учитывая, что

$$\begin{cases} \int_a^b \left| \sum_{h=1}^{p+s} c_h^{(s)} \psi_h^{(s)}(t) \right| dt \equiv \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p c_h \psi_h(t) \right| dt \\ \int_a^b \left| \sum_{h=1}^{p+s} d_h^{(s)} f_h^{(s)}(t) \right| dt \equiv \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p d_h f_h(t) \right| dt, \end{cases} \quad (1 \leq p \leq n)$$

получаем:

$$\max_{1 \leq k \leq j} \{ |c_k| \} \left(\sum_{p=1}^j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p c_h \psi_h(t) \right| dt + j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^j c_h \psi_h(t) \right| dt \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{1 \leq h \leq l} \|d_h\| \left(\sum_{p=1}^l \int_a^b \left| \sum_{h=1}^p d_h f_h(t) \right| dt + j \int_a^b \left| \sum_{h=1}^l d_h f_h(t) \right| dt \right) \geq \\
& \geq \frac{1}{j} \frac{B}{M} \sum_{m=0}^{N_j} \left| \sum_{p=1}^l a_{p,m}^{(j)} c_p d_p \right|,
\end{aligned} \quad (13)$$

где

$$a_{p,m}^{(j)} = \sum_{s=1}^j \sum_{h=2^{m+1}}^{2^{m+1}+1} \varphi_h^2 \left(\frac{2(p+s)-1}{2N_j^{(s)}+2} \right). \quad (14)$$

Легко проверить, что

$$j \geq a_{p,m}^{(j)} \geq B_1 j > 0 \quad (j=1, 2, \dots; 1 \leq p \leq l; 0 \leq m \leq N_j), \quad (15)$$

где B_1 — некоторое постоянное число. В неравенстве (13) положим $c_p = f_p(x)$ и $d_p = \psi_p(x)$. Учитывая условие (5), а также обозначение (6), получаем, что для почти всех x имеет место неравенство

$$\begin{aligned}
& \sum_{p=1}^j \int_a^b |K_p(t, x)| dt + j \int_a^b |K_l(t, x)| dt + \sum_{p=1}^j \int_a^b |K_p(x, t)| dt + \\
& + j \int_a^b |K_l(x, t)| dt \geq \frac{B_2}{j} \sum_{m=0}^{N_j} \left| \sum_{p=1}^j a_{p,m}^{(j)} \psi_p(x) f_p(x) \right|.
\end{aligned} \quad (16)$$

Складывая неравенство (16) по j от 1 до n , получаем:

$$\sum_{p=1}^n \left| \int_a^b |K_p(t, x)| dt + \int_a^b |K_p(x, t)| dt \right| \geq \frac{B_2}{n+1} \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{N_j} \left| \sum_{p=1}^j a_{p,m}^{(j)} \frac{1}{j} \psi_p(x) f_p(x) \right|. \quad (17)$$

Из условий (5) и (15) имеем:

$$\left\| \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{N_j} \left| \sum_{p=1}^j a_{p,m}^{(j)} \frac{1}{j} \psi_p(x) f_p(x) \right| \right\|_{L^\infty} \leq B_3 n^2 \log n \quad (18)$$

и

$$\int_a^b \sum_{j=1}^n \sum_{m=0}^{N_j} \left| \sum_{p=1}^j a_{p,m}^{(j)} \frac{1}{j} \psi_p(x) f_p(x) \right| dx \geq B_4 n^2 \log n, \quad (19)$$

где B_3 и B_4 — некоторые постоянные числа.

Из условий (17) — (18) с помощью стандартных рассуждений следует (7).

Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1 верна также для любых пространств (X, S, μ) с положительными конечными мерами μ ; доказательство в этом случае совпадает с приведенным доказательством. Учитывая это

замечание, из теоремы 1 сразу как следствие получаем ответ на одну гипотезу В. И. Гуарния (см. (6), стр. 36).

Теорема 2*. Пусть (X, S, μ) — пространство с конечной положительной мерой. Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ является базисом в пространстве интегрируемых на X по мере μ функций, то

$$\|f_n\|_{L^\infty(\mu)} = O(\|f_n\|_{L^1(\mu)}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Хорошо известно, что если функции Лебега некоторой полной ортонормированной системы, состоящей из ограниченных функций, равномерно ограничены, то эта система является базисом во всех пространствах L^p ($1 \leq p < \infty$). Вместе с тем классические ортонормированные системы Хаара и Фрэнклина (см. (5), стр. 84), обладающие подобным свойством, являются безусловными базисами в пространствах L^p ($1 < p < \infty$). В связи с этим П. Л. Ульяновым была поставлена следующая задача: является ли ортонормированный базис $C[0, 1]$ безусловным базисом в $L^p[0, 1]$, $1 < p < \infty$. Оказывается, что ответ на поставленный вопрос отрицательный. Имеет место следующая

Теорема 3. Существует ортонормированный базис пространства $C[0, 1]$, который не является безусловным базисом ни в одном из пространств $L^p[0, 1]$, $p \neq 2$.

В частности, можно доказать, что подобным свойством обладает одна ортонормированная система, построенная А. М. Олевским (см. (6), стр. 100).

В заключение выражаю благодарность П. Л. Ульянову за ценные обсуждения результатов настоящей работы.

Институт математики
Академии наук
Армянской ССР

Վ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

Սահմանափակ բիօրթոգոնալ սխեմների հերեզմի ֆունկցիաների գումարների միջին թվաբանականների լոգարիթմական աճը

Մույց է տրվում, որ սահմանափակ բիօրթոգոնալ սխեմների հերեզմի ֆունկցիաների գումարների միջին թվաբանականները դրական չափի բաղմունքյունների վրա ունեն լոգարիթմական աճ:

Ապացուցվում է հետևյալ թեորեմը՝

* Когда изстоящая заметка была подготовлена к печати, Б. С. Кашин передал автору препринт института Mittag-Lefflera: S. J. Szarek, Bases and biorthogonal systems in the spaces C and L^1 , Institut Mittag-Leffler, Report № 1, 1979, в котором индуктивным методом А. М. Олевского доказана теорема 2.

Եթե $\{f_n, \psi_n\}$ -ը $[a, b]$ հատվածում որոշված սահմանափակ ֆունկցիաների բիրթոգոնալ համակարգ է, ապա $\exists C$ և σ այնպիսիք, որ n բնական թվի համար գտնվի հետևյալ պայմաններին բավարարող E_n բազմություն.

$$1. |E_n| > \sigma$$

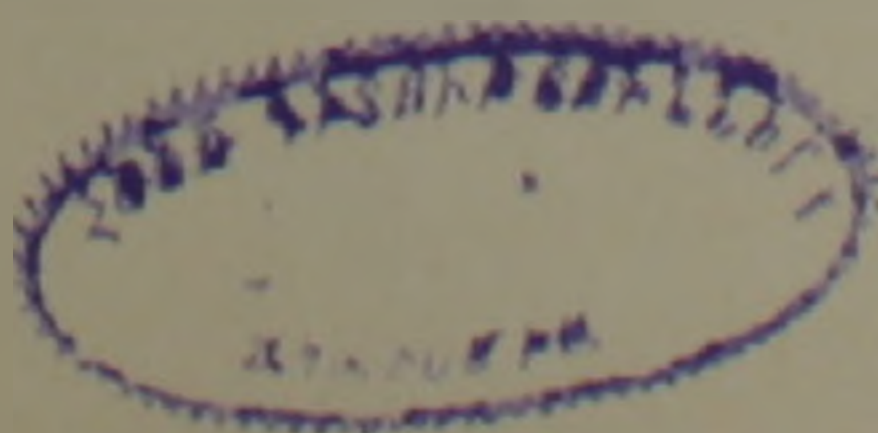
$$2. \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n \int_a^b \left| \sum_{i=1}^j f_i(x) \psi_i(t) \right| dt + \sum_{j=1}^n \int_a^b \left| \sum_{i=1}^j f_i(t) \psi_i(x) \right| dt \right] \geq C \log n,$$

$$x \in E_n$$

Այս արդյունքից անմիջապես հետևում է Վ. Ի. Գուրարիի մի վարկածի պատասխանը:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ П. Л. Ульянов, УМН, 16, № 3 (1961). ² А. М. Олевский, «Известия АН СССР», сер. мат., 30 (1966). ³ А. М. Олевский, Успехи мат. наук, 22, № 3 (1967). ⁴ С. В. Бочкарев, ДАН СССР, 223, № 1 (1975). ⁵ С. В. Бочкарев, Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 146 (1978). ⁶ А. М. Olevskii, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verl (1975).



УДК 517.522.3

МАТЕМАТИКА

Л. А. Шагинян

О пределах неопределенности Т-средних тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР А. А. Талаляном 26/VI 1979)

1. *Введение.* Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $S(a, b)$ — совокупность всех измеримых функций, которые принимают конечные значения п. в. (почти всюду) на отрезке (a, b) ; $\bar{S}(a, b)$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. на (a, b) , которые могут принимать также значения $+\infty$ и $-\infty$ на подмножествах (a, b) положительной меры.

Пусть T — некоторый линейный метод суммирования с матрицей $\|c_{ij}\|$ (c_{ij} — действительные числа, причем i — индекс строк, а j — индекс столбцов) и

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad (1)$$

— некоторый ряд с действительными членами. Положим

$$S_n(\Omega, x) = \sum_{k=0}^n f_k(x), \quad t_n(\Omega, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{nk} S_k(\Omega, x),$$

$$\bar{t}(\Omega, x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} t_n(\Omega, x), \quad \underline{t}(\Omega, x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} t_n(\Omega, x).$$

Если $t_n(\Omega, x)$ существуют в точке x , начиная с некоторого n , тогда числа $\bar{t}(\Omega, x)$ и $\underline{t}(\Omega, x)$ определены и называются, соответственно, верхним и нижним пределами неопределенности Т-средних ряда Ω в точке x , в частности они могут равняться $\pm\infty$.

Далее, обозначим через $\bar{t}^*(\Omega, a, b)$ и $\underline{t}_*(\Omega, a, b)$, соответственно, верхний и нижний пределы неопределенности по мере Т-средних ряда Ω на отрезке (a, b) .

Следуя Д. Е. Меньшову, введем следующее

Определение 1. Скажем, что ряд

$$\Omega' \sim \sum_{k=0}^{\infty} f'_k(x)$$

является подрядом (частичным рядом) ряда Ω , если для любого $k \geq 0$ имеем

$$f_k(x) = \begin{cases} f_k(x), \\ 0 \end{cases}$$

на отрезке (a, b) .

В работе (1) доказана

Теорема 1. Для любого конечнострочного регулярного метода T , определяемого матрицей $\|c_{ij}\|$, существует тригонометрический ряд

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (2)$$

удовлетворяющий следующим условиям:

$$1) \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0;$$

2) для любых $F(x), G(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$; $G(x) \leq F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ можно определить подряд Ω' ряда Ω , для которого

$$F(x) = t^*(\Omega', -\pi, \pi) \quad G(x) = t_*(\Omega', -\pi, \pi). \quad (3)$$

Вопрос о том, для какого класса методов суммирований утверждение (3) можно заменить более сильным утверждением

$$F(x) = \bar{t}(\Omega', x), \quad G(x) = \underline{t}(\Omega', x) \text{ п. в. на } (-\pi, \pi), \quad (4)$$

является достаточно сложной задачей, так как даже для метода $(C, 1)$ неизвестно, могут ли ряды вида (2) суммироваться к $+\infty$ на множествах положительной меры.

Здесь трудность по существу обусловлена тем, что при построении ряда (2), удовлетворяющего требуемому условию, мы не имеем права игнорировать полностью ни одну пару функций из системы $\{\cos kx, \sin kx\}$, если даже она мешает построению.

Таким образом возникает более простая и в некотором смысле более естественная задача: описание класса тех методов суммирований, для которых существуют ряды вида

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos k_i x + b_i \sin k_i x \quad (k_1 < k_2 < \dots), \quad (5)$$

которые обладают следующим свойством: для любых $F(x), G(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$, $G(x) \leq F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$, можно определить такой подряд Ω' ряда Ω , чтобы имели место соотношения (4).

Оказывается, что ряды вида (5), обладающие этим свойством, существуют для довольно широкого класса методов суммирований $\{T\}'$, именно, для всех вполне регулярных линейных методов, матрицы которых удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\limsup_l c_{lj} = 0^*. \quad (*)$$

При этом можно добиться того, чтобы коэффициенты ряда (5) стремились к нулю со скоростью, близкой к допустимой, и вместе с тем система $\{\cos k_l x, \sin k_l x\}$ была "предельно редкой".

2. Основные теоремы. Справедлива следующая

Теорема 1. Для произвольной последовательности $T^{(l)} \in [T]'$ и произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$ существует ряд Ω вида (5), удовлетворяющий следующим условиям:

1) Ω суммируется к $f(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ методами $T^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots$;

$$2) \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|^{2+\varepsilon} + |b_l|^{2+\varepsilon} < +\infty, \text{ для любого } \varepsilon > 0;$$

$$3) \sum_{l=1}^{\infty} 1/k_l < +\infty, \{k_l\} \text{ — имеет плотность нуль};$$

для любых функций $F(x), G(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$, $G(x) < F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$, существует подряд Ω' ряда Ω такой, что

$$I^{(l)}(\Omega', x) = G(x), I^{(l)}(\Omega, x) = F(x) \text{ п. в. на } (-\pi, \pi)$$

для каждого $l = 1, 2, \dots$.

Как следствие получается

Теорема 2. Для произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(-\pi, \pi)$ существует тригонометрический ряд

$$\Omega \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos k_l x + b_l \sin k_l x \quad (k_1 < k_2 < \dots),$$

обладающий следующими свойствами:

1) ряд Ω суммируется к $f(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом A (Абе́ля—Пуассона);

$$2) \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|^{2+\varepsilon} + |b_l|^{2+\varepsilon} < +\infty \text{ для любого } \varepsilon > 0;$$

$$3) \sum_{l=1}^{\infty} 1/k_l < +\infty, \{k_l\} \text{ — имеет плотность нуль};$$

4) для произвольной функции $F \in \bar{S}(-\pi, \pi)$ существует подряд Ω' ряда Ω , который суммируется к $F(x)$ п. в. на $(-\pi, \pi)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом A .

Отметим, что точные аналоги теорем 1 и 2 имеют место и для системы Уолша — $\{W_k(x)\}_0^\infty$.

В частности получается

Теорема 3. Существуют ряды вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_l \cos k_l x + b_l \sin k_l x, \sum_{l=1}^{\infty} a_l W_{k_l}(x) \quad (k_1 < k_2 < \dots),$$

* Эти методы, впервые рассмотренные Д. Е. Меньшовым, в частности содержат все методы Чезаро положительного порядка — $(C, \alpha > 0)$.

удовлетворяющие условиям 2) и 3) теоремы 2, которые суммируются к $+\infty$ п. в., соответственно, на $(-\pi, \pi)$ и $(0, 1)$ всеми методами $(C, \alpha > 0)$ и методом A.

Ряд, удовлетворяющий утверждениям теоремы 3, построен в работе (2). Относительно теоремы 3 отметим, что не выяснено, могут ли ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k W_k(x)$$

суммироваться к $+\infty$ на множестве положительной меры методами $(C, 1)$ и A.

Заметим также, что редкость систем $\{\cos k_i x, \sin k_i x\}$ и $\{W_{k_i}(x)\}$ в приведенных утверждениях в определенном смысле близка к предельной, так как для лакунарных рядов эти утверждения не верны (3,4). Наконец отметим, что приведенные теоремы остаются в силе, если в формулировках под подрядами ряда Ω вида (1) понимать ряды Ω' вида

$$\Omega' \sim \sum_{i=1}^{\infty} f_{k_i}(x).$$

Армянский педагогический институт
им. X. Абовяна

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ

Եռանկյունաչափական շարքերի և Ուոլշի շարքերի T -միջինների աճողությունը
սահմանների մասին

Նշանակենք $\overline{S}(-\pi, \pi)$ — ով բոլոր չափելի ֆունկցիաների բազմությունը, որոնք որոշված են $(-\pi, \pi)$ հատվածի համարյա բոլոր կետերում և կարող են ընդունել նաև $+\infty$ և $-\infty$ արժեքներ դրական չափ ունեցող բազմությունների վրա:

Հոգվածի հիմնական արդյունքը հետևյալ թեորեմն է:
Թեորեմ: Կամայական $f(x) \in \overline{S}(-\pi, \pi)$ ֆունկցիայի համար դոյություն ունի

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos k_i x + b_i \sin k_i x \quad (k_1 < k_2 < \dots)$$

տեսքի շարք, որը ունի հետևյալ հատկությունները.

1. Ω — ն հանրազումարվում է $f(x)$ — ին $(-\pi, \pi)$ հատվածի համարյա բոլոր կետերում, բոլոր $(C, \alpha > 0)$ մեթոդներով.

2. Կամայական $F(x), G(x) \in \overline{S}(-\pi, \pi)$ ֆունկցիաների համար, որոնք բավարարում են $G(x) \leq F(x)$ հ. ա. $(-\pi, \pi)$ — ի վրա աճողությանը.

դրություն ունի Ω -ի ենթաշարք, որի $(C, \alpha > 0)$ միջինների վերին և ստորին սահմանները համապատասխանաբար համընկնում են $F(x)$ և $G(x)$ ֆունկցիաների հետ $(-\pi, \pi)$ հատվածի համարյա բոլոր կետերում:

3. $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{2+\varepsilon} + |b_i|^{2+\varepsilon} < +\infty$ կամայական $\varepsilon > 0$ համար;

4. $\sum_{i=1}^{\infty} 1/k_i < \infty$ և $\{k_i\}$ ունի 0 խտություն:

Թեորեմի հանգույցն անհղի ունի նաև Ուոլշի սխեմի համար:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

¹ Д. Е. Меньшов, Труды Мат. ин-та АН СССР, вып. 32, т. 2, (1978). ² Л. А. Ша-
линян, Мат. сб., 108 (150), № 3 (1979). ³ А. Зигмунд, On the convergence of lacunary
trigonometric series, Fund. math., 16 (1930). ⁴ В. Ф. Гапошкін, УМН, 21, №6 (1966).

УДК 539.3

МЕХАНИКА

Л. А. Агаляни

О приведении пространственной задачи теории упругости к двумерной для ортотропных оболочек и погрешностях некоторых прикладных теорий

(Представлено академиком АН Армянской ССР С. А. Амбарцумяном 16/VI 1979)

Изучается пограничный слой и вопрос приведения трехмерной краевой задачи теории упругости к двумерной задаче для ортотропных оболочек. Асимптотическим методом выведены краевые условия для приведенной двумерной задачи, которые учитывают упругие свойства оболочки в перпендикулярных ее срединной поверхности сечениях и являются обобщением известных условий классической теории. Обсуждаются погрешности некоторых прикладных теорий оболочек.

1. Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны α, β , ось γ направим по нормали к этой поверхности. Пусть главные направления анизотропии совпадают с направлениями координатных линий. На лицевых поверхностях $S^\pm$ оболочки заданы значения напряжений, а на боковой поверхности Γ ($\alpha = \alpha_0$) одно из часто встречающихся в приложениях условий:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = \sigma_{\gamma\gamma} = 0 \text{ (задача 1); } \tau_{\alpha\alpha} = \tau_{\beta\beta} = w = 0 \text{ (задача 2);} \\ \tau_{\alpha\alpha} = v = w = 0 \text{ (задача 3); } u = v = w = 0 \text{ (задача 4);} \\ u = \tau_{\alpha\beta} = w = 0 \text{ (задача 5).} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Решение уравнений теории упругости ортотропного тела $(^1)$ в области $\Omega = S \times [-h, +h]$, где S — срединная поверхность, $2h$ — толщина оболочки, удовлетворяющее указанным условиям, складывается из проникающего (внутреннего) и типа погранслоя решений. Проникающее решение построено в $(^2)$, пограничный слой можно построить по процедуре, изложенной в $(^3-5)$. В ортотропных оболочках он складывается из антиплоского $\bar{Q}$ и плоского $\bar{Q}$ погранслоев. Принимая в качестве неизвестных величины погранслоя несимметричные компо-

менты напряжений ⁽²⁾ и безразмерные перемещения u_r/h , u_θ/h , u_z/h , любая из них представляется в виде

$$Q = \lambda^{-q+p} \sum_{s=0}^S \lambda^{-s} Q^{(s)}, \quad (\Omega, Q), \quad (1.2)$$

где $\lambda = (h/R)^{-1/q}$, R — характерный размер оболочки; p, q — целые числа, характеризующие показатель изменчивости $t = p/q$ напряженного состояния. После подстановки (1.2) в преобразованные по формулам

$$\alpha - \alpha_0 = R\lambda^{-q}\xi_1; \quad \beta = R\lambda^{-p}\eta; \quad \gamma = R\lambda^{-q}\zeta = h^*, \quad (1.3)$$

однородные уравнения пространственной задачи теории упругости ⁽¹⁾ получается итерационный процесс для определения величин $\bar{Q}^{(s)}$, $\bar{\Omega}^{(s)}$. Уравнения плоского погранслоя имеют структуру соответствующих уравнений для ортотропных пластинок ⁽³⁾, разница в свободных членах, которые в нашем случае приобретают вид

$$\begin{aligned} R_0^{(s-q+p)} &= -\xi_1^n d_{1n} \sigma_{11}^{(s-q)} - \xi_1^m d_{2m} \sigma_{21}^{(s+p-q-qm)} - \zeta R R_{1m} \frac{\partial \sigma_{13}^{(s-mq-q)}}{\partial \zeta} - \\ &- k_{1m} R^{m+1} \xi_1^m (\sigma_{11} - \sigma_{22})^{(s-mq-q)} - k_{2m} R^{m+1} \xi_1^m (\sigma_{13} + \sigma_{21})^{(s-qm-q)} - 2R R_{1m} \sigma_{13}^{(s-qm-q)} \\ R_1^{(s-q+p)} &= -\xi_1^n d_{1n} \sigma_{13}^{(s-q)} - \xi_1^m d_{2m} \sigma_{23}^{(s+p-q-qm)} + R(R_{1m} \sigma_{11} + R_{2m} \sigma_{22})^{(s-qm-q)} - \\ &- R^{m+1} \xi_1^m (k_{1m} \sigma_{13} + k_{2m} \sigma_{23})^{(s-q-qm)} \\ d_{1n} &= \left(\frac{1}{A} \right)_n R^n \frac{\partial}{\partial \xi_1}, \quad d_{2n} = \left(\frac{1}{B} \right)_n R^n \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad R_{1n} = \left(\frac{1}{R_1} \right)_n R^n \xi_1^n, \quad (1.2), \quad (1.4) \end{aligned}$$

где k_{1m}, k_{2m} — коэффициенты разложения геодезических кривизн $k_a = \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}$, (a, β) в ряд Тейлора по степеням $\alpha - \alpha_0$. Считаем, что в (1.4) и в дальнейшем по тем же индексам n, m производятся суммирование в пределах $n \in [1, s], m \in [0, s]$. $R^{(s)} \equiv 0$ при $s < 0$, верхний индекс указывает номер приближения, начиная с которого появляется отличный от нуля член. Не приведены выражения для $R_{u_1}, R_{u_2}, R_{\theta}, R_\beta, R_{\alpha_2}$ в силу их громоздкости. Величины антиплоского погранслоя определяются из уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_0} \frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \sigma_{23}^{(s)}}{\partial \zeta} &= R_1^{(s+p-q)} \\ \sigma_{12}^{(s)} + \zeta R R_{1m} \sigma_{12}^{(s-qm-q)} &= \sigma_{21}^{(s)} + \zeta R R_{2m} \sigma_{21}^{(s-qm-q)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} = a_{44} \sigma_{23}^{(s)} + R_2^{(s-q+p)}, \quad \frac{1}{A_0} \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \xi_1} = a_{66} \sigma_{12}^{(s)} + R_3^{(s-q+p)},$$

где, в частности,

$$R_1^{(s+p-q)} = -\xi_1^m d_{2m} \sigma_2^{(s-qm-q+p)} - \xi_1^n d_{1n} \sigma_{12}^{(s-qn)} - RR_{2m} \frac{\partial \sigma_{23}^{(s-qm-q)}}{\partial z} - \\ - R^{m+1} \xi_1^m [k_{sm}(\sigma_2 - \sigma_1) + k_{pm}(\sigma_{12} + \sigma_{21})]^{(s-qm-q)} - 2RR_{2m} \sigma_{23}^{(s-qm-q)}. \quad (1.6)$$

При $s < q - p$ указанные системы становятся однородными и затухающее решение можно определить методом Фурье. При $s \geq q - p$ эти системы неоднородны и их следует решать, приписав всем величинам в одном случае индекс „а“, в другом — „П“. Таким образом, в ортотропных оболочках возникают два типа качественно различных, затухающих экспоненциально, напряженно-деформированных состояний. В первом главную роль играют величины антиплоского погранислоя $\bar{Q}\{\overset{a}{\sigma}_{23}, \overset{a}{\nu}, \overset{a}{\sigma}_{23}\}$, которым сопутствуют величины плоского напряженно-деформированного состояния $\bar{Q}\{\overset{a}{\sigma}_1, \overset{a}{\sigma}_2, \overset{a}{\sigma}_3, \overset{a}{\sigma}_{12}, \overset{a}{u}, \overset{a}{w}\}$, при этом $\bar{Q}^{(s)} \neq 0$, $\bar{Q}^{(s)} \equiv 0$ при $s < q - p$. Во втором, наоборот, и $\bar{Q}^{(s)} \neq 0$, $\bar{Q}^{(s)} \equiv 0$ при $s < q - p$. Антиплоский и сопутствующий ему плоский погранислои затухают как $\exp(-\sqrt{\bar{G}_{23}/G_{12}} \pi A(z_0) \xi_1)$ в симметричном напряженном состоянии и как $\exp(-\sqrt{\bar{G}_{23}/G_{12}} \frac{\pi}{2} A(z_0) \xi_1)$ в кососимметричном. Они могут стать проникающими при относительно малых жесткостях на сдвиг в поперечных сечениях оболочки, т. е. когда $\sqrt{\bar{G}_{23}/G_{12}} \pi/2 = 0(h/R)$.

Плоский и сопутствующий ему антиплоский погранислои затухают как $\exp(-\operatorname{Re} z_1)$, где z_1 — наименьший корень с $\operatorname{Re} z > 0$ соответствующего характерного трансцендентного уравнения, вид которого зависит от знака $\Delta = (b_{33} + a_{33}/2)^2 - b_{11}b_{33}$, где b_{ik} , a_{33} — упругие коэффициенты ⁽³⁾. Выведенные в ⁽⁴⁾, эти уравнения могут быть представлены также в виде:

$$1) \quad \Delta = 0 \quad (\text{изотропное тело})$$

$$\sin 2\beta z \pm 2\beta z = 0 \quad \beta = \sqrt{b_{33}/b_{11}} \quad (1.7)$$

$$2) \quad \Delta > 0 \quad (\text{ортотропное тело})$$

$$\omega \sin x \pm \sin \omega x = 0, \quad (1.8)$$

где

$$x = (\beta_1 + \beta_2)z, \quad \omega = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + \beta_2}, \quad 0 < \omega < 1$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{b_{12} + (a_{33}/2) - \sqrt{\Delta}}{b_{11}}}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{b_{12} + (a_{33}/2) + \sqrt{\Delta}}{b_{11}}}. \quad (1.9)$$

$$3) \quad \Delta < 0 \quad (\text{ортотропное тело})$$

$$\omega \sin x \pm \operatorname{sh} x = 0, \quad (1.10)$$

где

$$x = 2\beta z, \quad \omega = \alpha/\beta, \quad 0 < \omega < 1$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{33}} - (b_{13} + a_{33}/2)}{2b_{11}}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{b_{11}b_{33}} + (b_{13} + a_{33}/2)}{2b_{11}}}. \quad (1.11)$$

2. В силу однородности и линейности исходных уравнений для погранслоев их решения будут определены с точностью постоянного множителя, поэтому интеграл пространственной задачи будет иметь структуру

$$J = Q^{\mu\mu} + \lambda^x \overset{a}{Q} + \lambda^\mu \overset{n}{Q}, \quad (2.1)$$

где x, μ — целые числа и характеризуют интенсивность соответственно антиплоского и плоского погранслоев. Их значения, соответствующие конкретно поставленной краевой задаче, определяются единственным образом при сращивании внутреннего и типа погранслоя решений, т. е. при удовлетворении условиям (1.1) на боковой поверхности. Используя структуру решения внутренней задачи (²), а также погранслоя (1.2) и подставив (2.1) в (1.1), можно вывести условия, соответствующие внутренней задаче, и условия для определения произволов в решениях антиплоского и плоского погранслоев. Граничные условия для приведенной двумерной внутренней задачи будем записывать в терминах классической теории оболочек (¹).

В задаче 1 $x = q + p - c + d$, $\mu = q + d$, где $c = 0$ при $t = p/q \leq 1/2$, $c = 2p - q$ при $1/2 \leq t < 1$; $d = -c$, если $\sigma_1 \neq 0$ при $\gamma = \pm h$; $d = -p$, если $\sigma_1 = 0$, но $\sigma_{\pm 1} \neq 0$ при $\gamma = \pm h$. Используя процедуру сращивания внутреннего и типа погранслоя решений (^{3,5,6}) для определения внутреннего напряженно-деформированного состояния, получим такие условия

$$T_1 = 0, \quad S_{12} = 0 \quad (2.2)$$

$$M_1 - A_1 h \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}} \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0, \quad N_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0,$$

где $A_1 \approx 1,26$ — постоянная изотропного материала (⁷), подчеркнутый член есть поправка к классическому условию. Условия (2.2) обеспечивают определение внутреннего напряженного состояния с точностью $\epsilon_1 = O(h^{2-2t})$, $h_s = h/R$. Вблизи свободного края антиплоский погранслой имеет большую интенсивность, чем плоский: $\overset{n}{Q} = O(\lambda^{-p+c}) \overset{a}{Q}$.

В задаче 2 $x = q + p - c + d$, $\mu = 2q - p + d$, а приведенные условия для внутренней задачи имеют вид

$$\begin{aligned} T_1 + h \frac{E_1}{E_3} \frac{\nu_{23}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} D_2 k_\beta T_2 &= 0; \\ S_{12} - h \frac{E_1}{E_3} \frac{\nu_{23}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} D_2 \frac{1}{B} \frac{\partial T_2}{\partial \beta} &= 0 \end{aligned} \quad \text{при } \alpha = \alpha_0; \quad (2.3)$$

$$M_1 - A_1 h \sqrt{\frac{G_{12}}{G_{23}}} \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0;$$

$$w = 0.$$

Вблизи боковой поверхности как плоский, так и антиплоский погран-
слои отличны от нуля и имеют интенсивности $O(\lambda^{q+d})$, $O(\lambda^{2p-r+d})$ со-
ответственно.

В задаче 3 (шарнирное закрепление) $x=q+d$, $\mu=2q-p+d$ и
приведенными условиями являются

$$T_1 + h \frac{E_1}{E_2} \frac{\nu_{22}\nu_{32}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} D_2 k_3 T_2 = 0, \quad v=0, \quad \text{при } x=x_0, \quad (2.4)$$

$$M_1=0, \quad w=0$$

Вблизи края отличным от нуля является плоский симметричный пог-
ранслой (соответствующие величины порядка $\bar{\Omega}=O(\lambda^{q+d})$), антиплос-
ким же погранслоем можно пренебречь. Поэтому в смысле малона-
пряженности края это закрепление имеет преимущество перед (2.3).

В задаче 4 (жесткое защемление) $x=q+d$, $\mu=2q-p+d$, приве-
денными условиями являются

$$2hu - m_1 h (a_{13} T_1 + a_{23} T_2) = 0, \quad v=0,$$

$$w=0, \quad \gamma_1=0 \quad \text{при } x=x_0. \quad (2.5)$$

Вкладом антиплоского и изгибного плоского погранслоев в краевое
напряженно-деформированное состояние можно пренебречь. Симмет-
ричный плоский погранслой же отличен от нуля и имеет интенсив-
ность $\bar{\Omega}=O(\lambda^{q+d})$.

В задаче 5 $x=q+p+d-c$, $\mu=2q-p+d$, соответствующие усло-
вия для двумерной задачи выглядят так:

$$2hu - m_1 h (a_{13} T_1 + a_{23} T_2) = 0$$

$$S_{12} + m_2 h \nu_{32} \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} (a_{13} T_1 + a_{23} T_2) = 0, \quad \text{при } x=x_0. \quad (2.6)$$

$$w=0, \quad \gamma_1=0$$

Приводимые выше постоянные D_1 , m_1 , m_2 совпадают с соответ-
ствующими коэффициентами для пластинок (*) и являются константами
материала.

В этой задаче вблизи боковой поверхности можно пренебречь
изгибным плоским погранслоем. Отличными от нуля являются анти-
плоский и симметричный плоский погранслои. Напряжения плоского
погранслоя порядка $O(\lambda^{q+d})$, а антиплоского — $O(\lambda^{2p-r+d})$ и соизмери-
мы с напряжениями внутренней задачи.

Теория Кирхгофа—Лява пренебрегает пограничными слоями.
Поэтому по этой теории нельзя получить приемлемые результаты
относительно распределения напряжений вблизи боковой поверхности.
Из (2. 2) — (2. 6) следует также, что погрешность классической теории

увеличивается с увеличением отношений G_{12}/G_{23} , E_1/E_2 . Если же $G_{23} \gg G_{12}$, $E_2 \gg E_1$, то классическая теория асимптотически точна.

Уточненная теория типа Рейсснера учитывает антиплоский погранслой, но не учитывает влияние плоского погранслоя. В силу (2.2)–(2.6) по этой теории можно получить приемлемые результаты, когда жесткость на сдвиг в поперечных сечениях достаточно мала по сравнению с соответствующей жесткостью в срединной поверхности, а жесткости на растяжение–сжатие в указанных направлениях примерно одинаковы или в поперечном направлении больше. Вблизи же боковой поверхности по этой теории можно получить приемлемые результаты лишь при первой краевой задаче.

Институт механики

Академии наук Армянской ССР

Լ. Ա. ԱԶԱԼՈՎՅԱՆ

Առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի բերումը երկչափի օրթոտրոպ թաղանթների համար և կիրառական որոշ տեսությունների սխալի մասին

Ուսումնասիրվում է սահմանային շերտը և առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի բերումը երկչափի օրթոտրոպ թաղանթների համար: Ասիմպտոտիկ մեթոդով արտածվում են եզրային պայմաններ երկչափի բերված խնդրի համար: Այդ պայմանները, լինելով ընդհանրացում դասական տեսության համապատասխան պայմանների, հաշվի են առնում թաղանթի նյութի առաձգական հատկությունները միջին մակերևույթին ուղղահայաց հատույթներում: Ստացված են եզրի շրջակայքում լարումների վարքը բնութագրող մեծությունների ինտենսիվությունները: Քննարկվում է դասական և Ռայսների տիպի կիրառական տեսությունների ճշտության հարցը:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱՎԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ С. А. Амбарцумян, Общая теория анизотропных оболочек, «Наука», М., 1974.
² Л. А. Агаляян, «Известия АН СССР», МТТ, № 1 (1972).
³ А. Л. Гольденвейзер, ПММ, т. 33, вып. 6 (1969).
⁴ Л. А. Агаляян, Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 26, № 2 (1973).
⁵ Л. А. Агаляян, Ученые записки ЕГУ, № 2 (1978).
⁶ Л. А. Агаляян, Ученые записки ЕГУ, № 3 (1978).
⁷ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, «Наука», М., 1976.

УДК 621.382.2

ФИЗИКА

Член корреспондент АН Армянской ССР Г. М. Авакьянц,
С. А. Тарумян

К теории вольт-амперной характеристики длинных диодов

(Представлено 28/VII 1978)

Известно, что с увеличением времени жизни неосновных носителей в длинном полупроводниковом диоде на вольт-амперной характеристике (ВАХ) диода появляется участок отрицательного дифференциального сопротивления. Этот механизм появления *S*-ВАХ получил название τ -механизма ⁽¹⁾.

С другой стороны, в ^(2,3) было показано, что *S*-ВАХ может возникнуть и при постоянном времени жизни неосновных носителей, за счет достаточно быстрой раскомпенсации, обусловленной первоначально незаполненными глубокими уровнями. Этот механизм получил название *N_n*-механизма. Обобщением такого механизма, где не происходит увеличения времени жизни, был предложенный в ⁽⁴⁾ μ -механизм. В дальнейшем обобщенному *N_n*-механизму была придана также форма *F*-механизма ⁽⁵⁾.

Если ограничиться сверхдлинными диодами, где движение неосновных носителей, в основном, является дрейфовым, то уравнение для напряженности электрического поля в пределах базы можно записать так:

$$F(n_0) \frac{dE}{dx} = - \frac{p(n_0)}{\tau(n_0)}, \quad (1)$$

где

$$F(n_0) = u_p \left(p + E \frac{dp}{dE} \right); \quad (2)$$

$$n_0 = \frac{J}{u_n E}; \quad (3)$$

J — плотность потока; *u_p*, *u_n* — подвижность дырок и электронов; τ — время жизни дырок; *p* — их концентрация.

В зависимости от системы рекомбинационных уровней и степени

компенсации материала базы величины $F(n_0)$ и $\tau(n_0)$ могут быть самыми различными функциями n_0 . Предположим, что в интересующем нас интервале полей и токов мы можем (1) представить в виде

$$An_0^\nu \frac{dE}{dx} = 1, \quad (1)$$

ν — постоянная, $A > 0$.

Это значит, что принято

$$-\frac{F(n_0)\tau(n_0)}{p(n_0)} = An_0^\nu. \quad (5)$$

Учитывая (3), а также пренебрегая зависимостью u_n от E , можем (4) переписать так:

$$\frac{AJ^\nu}{u_n^\nu} E^{-\nu} \frac{dE}{dx} = 1. \quad (6)$$

Решая это уравнение с граничным условием $x=0, E=0$, получаем

$$\frac{AJ^\nu}{u_n^\nu} \frac{E^{-\nu+1}}{-\nu+1} = x \quad (7)$$

или

$$E = J^{-\frac{\nu}{-\nu+1}} \left[\frac{(-\nu+1)x}{A} \right]^{\frac{1}{-\nu+1}} \cdot u_n^{\frac{\nu}{-\nu+1}}. \quad (8)$$

Из (8) видно, что, если $\nu < 0$, то поле E растет медленнее, чем ток, при этом оно растет с ростом x . ВАХ в этом случае суперлинейна. Пусть теперь

$$0 < \nu < 1. \quad (9)$$

Здесь мы имеем дело с участком S-ВАХ ($1-3$). Чтобы выполнялось (9), как видно из (5), произведение $F\tau$ должно быстрее расти с n_0 , чем $p(n_0)$. Очевидно, с точки зрения математики все равно, за счет роста какой из величин — F или τ мы приходим к (9).

Более того, чтобы получить S-ВАХ, одна из величин F или τ может уменьшаться с ростом n_0 , но, если произведение $F\tau$ будет расти достаточно быстро, S-ВАХ будет иметь место.

В связи со сказанным целесообразно, пожалуй, говорить не отдельно о τ -механизме или F -механизме, а об обобщенном $F\tau$ -механизме. И дело здесь не только в математике, но и в физике, так как S-ВАХ появляется сразу в результате действия двух важнейших процессов: изменения времени жизни и тянущей силы, приходящейся на одну инжектированную дырку (F пропорционально такой силе) с изменением концентрации n_0 . Их разделение всегда в какой-то степени будет искусственным.

Пусть теперь $\nu \geq 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $\nu > 1$. Вновь обращаемся к уравнению (6). На этот раз используем гранич-

ные условия $E = E_d$, $x = d$. Тогда вместо (8) получим

$$E^{\nu-1} = \frac{E_d^{\nu-1}}{1 + \frac{E_d^{\nu-1} u_n^{\nu} (\nu-1)(d-x)}{AJ^{\nu}}}, \quad (10)$$

откуда видно, что в случае

$$\frac{E_d^{\nu-1} u_n^{\nu} (\nu-1)(d-x)}{AJ^{\nu}} > 1 \quad (11)$$

мы получаем, в конечном счете, сублинейную характеристику. Так, при омическом контакте, когда $E_d = \frac{J}{u_n n_{рав}}$ (где $n_{рав}$ — равновесная концентрация электронов в базе диода), имеем согласно (10) и (11) (малые токи)

$$E^{\nu-1} \simeq \frac{AJ^{\nu}}{u_n^{\nu} (\nu-1)(d-x)}, \quad (12)$$

а в случае неравенства, обратного (11) (большие токи),

$$E \simeq E_d = \frac{J}{u_n n_{рав}}. \quad (13)$$

Таким образом, поле E либо растет быстрее, чем ток, либо прямо пропорционально ему.

Если из (10) найти E , а затем высчитать интеграл $V = \int_0^d E dx$,

где V — приложенное к диоду напряжение, то получим

$$V = \frac{E_d (\nu-1)}{a (\nu-2)} \left[\left(1 + ad \right)^{\frac{\nu-2}{\nu-1}} - 1 \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$a = \frac{E_d^{\nu-1} u_n^{\nu} (\nu-1)}{AJ^{\nu}}. \quad (15)$$

Тогда согласно (14) при $1 < \nu < 2$ и $ad > 1$ найдем (учитывая (15))

$$V \simeq \frac{AJ^{\nu} E_d^{2-\nu}}{(2-\nu) u_n^{\nu}}. \quad (16)$$

Таким образом, если E_d слабо зависит от тока, то $J \sim V^{1/\nu}$, т. е. имеет место сублинейность. Например, при $\nu = 3/2$ $J \sim V^{2/3}$. Если же мы имеем дело с омическим контактом и $E_d \sim J$, то независимо от

значения $\nu \sim J^2$ и, стало быть, ВАХ снова сублинейная. Согласно (14), если $\nu > 2$ и $ad \gg 1$, то

$$V = \frac{(AJ^\nu)^{\frac{1}{\nu-1}} d^{\frac{\nu-2}{\nu-1}}}{[U_n(\nu-1)]^{\frac{1}{\nu-1}}}, \quad (17)$$

В этом случае, следовательно, сублинейность всегда имеет место и показатель степени m в $V \sim J^m$ уже не зависит от того, как E_d связано с током J . Из (17) следует при $\nu=3$ $V \sim J^{3/2} d^{1/2}$ и при $\nu=5/2$ $V \sim J^{5/3} d^{1/3}$ и т. д.

В случае сублинейной характеристики, как, впрочем, и в других рассмотренных случаях, поле концентрируется вблизи тылового контакта. Это следует как из (4), так и из наших экспериментальных исследований.

Сублинейные ВАХ наблюдались в S-диодах с примесью никеля и цинка (6,7).

Если принять, что цинк создает в кремнии два акцепторных уровня с данными параметров этих центров, указанными в (4), то, как показывает анализ, мы не можем получить сублинейной ВАХ, даже если считать, что сечение захвата электронов на однократно отрицательно заряженный ион цинка и их подвижность растут с ростом поля, а время жизни падает, причем не будем допускать существование в решетке кремния, кроме цинка, в достаточном количестве термоакцепторов.

Поэтому остается принять, что, видимо, в упомянутых S-диодах из кремния с цинком термоакцепторы оказывают существенное влияние на формирование вольт-амперной характеристики. Мы считаем, что одна из моделей в этом случае может быть такой: термоакцепторов не много, как это принимается другими авторами (9), порядка 10^{13} см^{-3} . Таким образом, можно считать, что на условии нейтральности присутствие термоакцепторов сильно не влияет. Это условие определяется, в основном, наличием мелких доноров и атомов цинка. Но в отношении рекомбинационных свойств термоакцепторы могут превзойти по тем же свойствам атомы цинка. Другими словами, время жизни носителей в основном формируется за счет рекомбинационного канала через термоакцепторы, а основной связанный заряд находится на уровнях цинка. Если предположить, в частности, что термоакцепторный рекомбинационный центр представляет собой многоуровневую систему, то подобный подход позволяет в принципе объяснить сублинейность в упомянутых S-диодах. Быстрый рост F с концентрацией приводит к снижению рекомбинационного тока, который является основным в длинных диодах, и, как следствие, к более слабой зависимости полного тока от приложенного напряжения. О привлечении многоуровневого рекомбинационного центра для объяснения свойств ВАХ обратносмещенного диода из германия, подвергнутого анизотропному давлению, в частности, выдвинуто предположение в (10).

Из-за отсутствия точных сведений о свойствах атомов никеля в кремнии мы не имели возможности произвести теоретический анализ, аналогичный проведенному для S -диодов с цинком. Заметим, кстати, что в литературе нет указаний на то, что сечения захвата для атомов никеля зависят от напряженности поля, тем более, следует и в этом случае искать объяснение сублинейной ВАХ у таких диодов на основе теории, изложенной выше.

Приведем теперь без вывода формулу для ВАХ в двух случаях, которые нельзя было охватить предыдущим исследованием. А именно, это относится к примерам, когда $\nu=1$ или $\nu=2$.

Имеем из (4), когда $\nu=1$,

$$V = \frac{E_d A J}{U_n} \left(1 - e^{-\frac{U_n d}{A J}} \right) \quad (18)$$

и, когда $\nu=2$,

$$V = \frac{J^2}{U_n^2} A \ln \frac{d + \left(\frac{J}{U_n} \right)^2 \frac{A}{E_d}}{\left(\frac{J}{U_n} \right)^2 \frac{A}{E_d}}. \quad (19)$$

Из (18) видно, что, если $E_d \sim J$ (омический контакт), а $d U_n / A J > 1$, то мы получаем сублинейную ВАХ. Из (19) сублинейная ВАХ вытекает всегда, независимо от вида функции $E_d = E_d(J)$, если $d > (J/U_n)^2 A/E_d$.

Очевидно, что для появления сублинейности вовсе не обязательно, чтобы левая часть выражения (5) аппроксимировалась точно степенной зависимостью от n_0 . Разумеется, что те же выводы получатся и при отклонениях от этой зависимости в той мере, которая допустима при конкретных значениях ν и A .

Мы намеренно отказались от дальнейших обобщений полученных соотношений на тот случай, когда сечение захвата рекомбинационных центров зависит от поля в базе. Они могут либо облегчить возникновение сублинейности, либо затруднить в зависимости от того, какие именно сечения меняются с полем.

Вполне возможно, что совместное действие обоих факторов значительно увеличит возможность появления Λ -ВАХ при низких температурах.

На наличие сублинейной ВАХ у длинных диодов за счет зависимости времени жизни носителей от концентрации было указано в свое время Н. А. Зюгановым и др. (11).

Երկար դիողների վոլտ-ամպերային բնութագրերի տեսության վերաբերյալ

Դիտարկվում են պայմաններ, որոնց դեպքում երկար բազայով դիողների վոլտ-ամպերային բնութագրեր (ՎԱԲ) ունի ենթազծային տիրույթ (հոսանքը լարումից ավելի դանդաղ է աճում)։ Ցույց է տրված, որ այդպիսի տիրույթներ առաջանում են այն դեպքում, երբ էլեկտրոնա-խոռոչային պլազմայի վրա ադդոդ ուժի փոփոխության (մի ինժեկտված խոռոչի դեպքում) և խոռոչների կյանքի տևողության արտադրյալը հոսանքի մեծացմանը զուգընթաց աճում է քավականին արագ։ Այդ դեպքում հոսանքակիրների խտությունը դիողի բազայում նվազում է, իսկ ՎԱԲ-ի վրա երևան է գալիս ենթազծային տիրույթ։ Տեսությունը համեմատվում է փորձի և այլ տեսությունների հետ։

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ В. И. Стафеев, ФТП, 1, 6 (1959). ² Г. М. Авакьянц, Радиотехника и электроника, 10, вып. 10 (1965). ³ Г. М. Авакьянц, Изв. АН Арм. ССР, «Физика», 1, вып. 4, (1966). ⁴ В. В. Осипов, В. И. Стафеев, ФТП, 1, вып. 12 (1967). ⁵ Г. М. Авакьянц, В. М. Арутюнян, Р. С. Барсегян, ДАН Арм. ССР, т. 53, № 4 (1971). ⁶ С. В. Минасян, Канд. дис., Ереван, 1975. ⁷ Г. М. Авакьянц, Э. Н. Адамян, В. М. Арутюнян, Р. С. Барсегян, А. В. Емельянов, С. В. Оганесян, Микроэлектроника, 3, вып. 1 (1974). ⁸ Б. В. Кириллов, Сб. «Физика электронно-дырочных переходов в полупроводниках», «Наука», М., 1969. ⁹ А. А. Атакулов, И. З. Каримова, П. И. Книгин, А. Ю. Лейдерман, ФТП, т. 10, № 3 (1976). ¹⁰ Г. М. Авакьянц, Э. Г. Меликян, ФТП, т. 6, вып. 11 (1972). ¹¹ Н. А. Зюганов, Н. И. Сылко, Полупроводниковая техника и микроэлектроника, вып. 21, «Наукова думка», Киев, 1975.

УДК 535 + 539.12.04

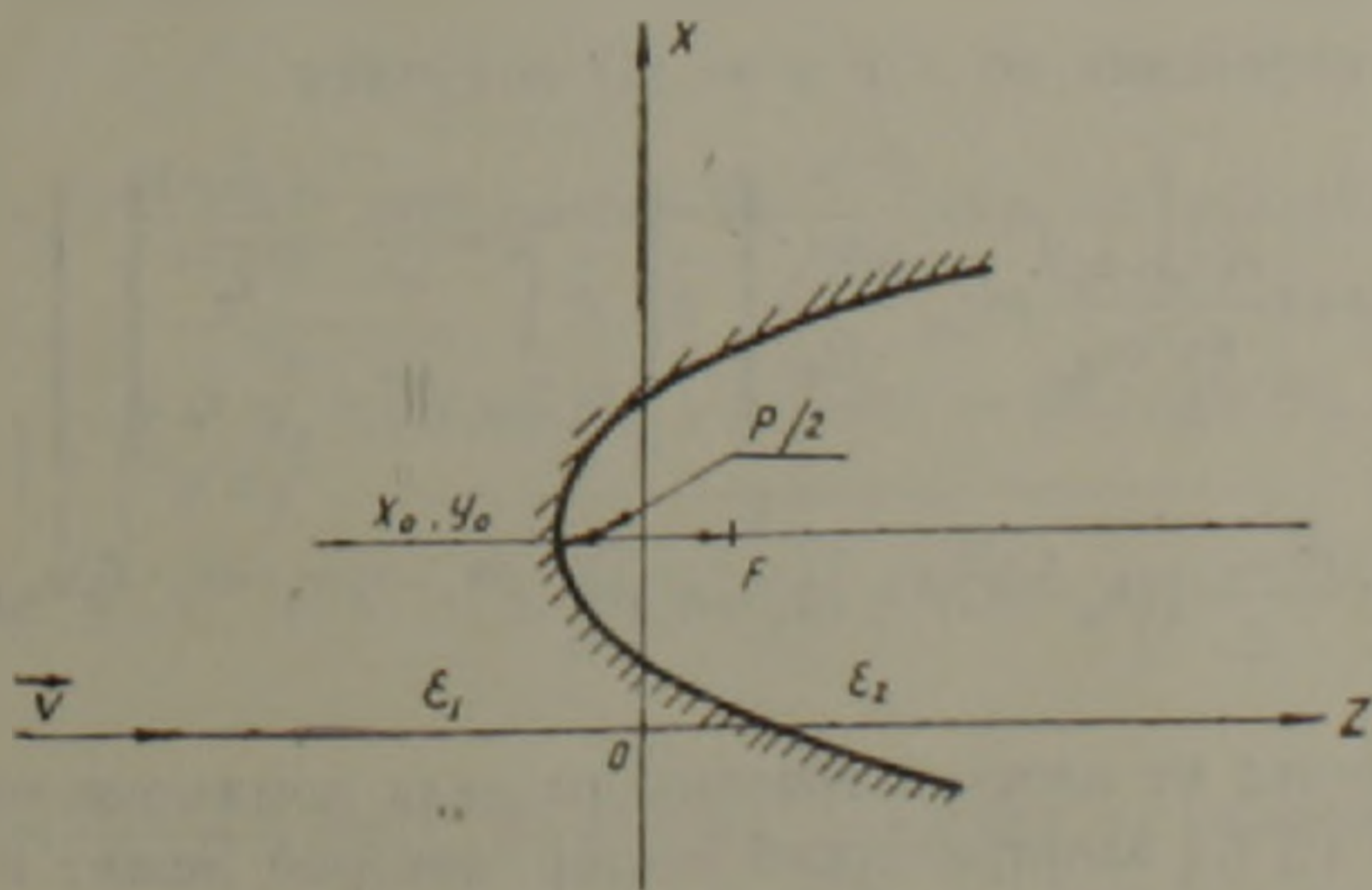
ФИЗИКА

Р. А. Багян,
 член-корреспондент АН Армянской ССР М. Л. Тер-Микаелян

Переходное излучение на границе раздела двух сред в форме параболоида вращения

(Представлено 15/VII 1979)

В приближении теории возмущений ⁽¹⁾ рассмотрено излучение, возникающее при движении заряженной частицы из среды с диэлектрической постоянной ϵ_1 в среду с диэлектрической постоянной ϵ_2 . Поверхность раздела двух сред берется в форме параболоида вращения $z = \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\rho}$, где (x_0, y_0) — расстояние от траектории частицы до вершины параболоида, ρ — параметр параболоида, причем $\rho > 0$ (рисунок). Поскольку теория возмущений применима при малых перепадах плотностей, рассмотренный нами случай противоположен случаю, рассмотренному в работе ⁽²⁾.



$P=2F$; F — фокус параболоида вращения

Используя результаты ⁽¹⁾ в предположении, что скорость частицы совпадает с осью z прямоугольной системы координат, для поля излучения на больших расстояниях R_0 имеем:

$$\vec{E}_\omega(R_0) = \frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{8\pi^3 v \varepsilon_0} l_{\text{кор}} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left[\vec{k} \left[\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\omega v}{c^2} - \frac{\vec{k}'}{c^2}}{k'^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0} \right] \right] \times \quad (1)$$

$$\times e^{i \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2\rho}} e^{i(k'_x - k_x)x + i(k'_y - k_y)y} dk'_x dk'_y,$$

где e и v соответственно заряд и скорость электрона, $\vec{k}(k_x, k_y, k_z)$ — волновой вектор излученного кванта $\left(k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_0}; \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}\right)$, ω —

частота излученного кванта, c — скорость света; $l_{\text{кор}} = \frac{v/\omega}{1 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}$ —

когерентная длина, θ — угол излучения фотона, отсчитывается от оси z и изменяется от 0 до π ; $\beta = v/c$. Интегрирование в (1) по x и y проводим с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax + ibx'} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2b}} (1 \pm i) e^{-i \frac{a^2}{4b}}, \quad (2)$$

где верхний знак соответствует случаю $b > 0$, а нижний — случаю $b < 0$. При $b = 0$ левая часть формулы (2) обращается в δ -функцию. Поскольку правая часть (2) при $b \rightarrow 0$ обладает существенной особенностью, необходимо определить закон стремления b к нулю. Для этого, считая $b = b' + il \rightarrow 0$, подставляя в (2), имеем

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi l}} e^{-\frac{a^2}{4l}} = \delta(a). \quad (2')$$

После интегрирования по x и y из (1) получаем

$$\vec{E}_\omega(R_0) = i \frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{8\pi^2 v \varepsilon_0} \rho l_{\text{кор}}^2 \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \left[\vec{k} \left[\vec{k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\omega v}{c^2} - \frac{\vec{k}'}{c^2}}{k'^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0} \right] \right] \times \quad (3)$$

$$\times \exp \left\{ -i \frac{\rho l_{\text{кор}}}{2} [(k'_x - k_x)^2 + (k'_y - k_y)^2] \right\} e^{i(k'_x - k_x)x_0 + i(k'_y - k_y)y_0} dk'_x dk'_y.$$

Здесь в отличие от плоской границы раздела помимо поляризованной компоненты ($\parallel$), электрический вектор которой лежит в плоскости, содержащей волновой вектор излученного кванта и нормаль к плоскости $z = 0$, появляется неполяризованная компонента ($\perp$), электрический вектор которой перпендикулярен плоскости поляризованной компоненты. В (3), выделяя поляризации излучения и делая замену переменных

$$\begin{aligned}k'_x &= q' \cos \varphi'; \\k'_y &= q' \sin \varphi',\end{aligned}\quad (4)$$

получаем

$$\begin{aligned}(E_\omega(R_0))^{\parallel} &= i \frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{8\pi^2 v \varepsilon_0^2} k p l_{\text{кор}}^2 \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty q' dq' \frac{k_z q' \cos(\varphi' - \varphi) - \frac{\omega}{v} q (1 - \beta^2 \varepsilon_0)}{q'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_0)} \\&\times \exp \left\{ -i \left[\frac{p l_{\text{кор}}}{2} (q'^2 + q^2) + q(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) \right] \right\} e^{iq' P \cos(\varphi' - \Phi)} \\(E_\omega(R_0))^{\perp} &= i \frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{8\pi^2 v \varepsilon_0^2} k^2 p l_{\text{кор}}^2 \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\infty q' dq' \frac{q' \sin(\varphi' - \varphi)}{q'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_0)} \times \\&\times \exp \left\{ -i \left[\frac{p l_{\text{кор}}}{2} (q'^2 + q^2) + q(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) \right] \right\} e^{iq' P \cos(\varphi' - \Phi)},\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$P = x_0^2 + y_0^2 + q^2 p^2 l_{\text{кор}}^2 + 2q p l_{\text{кор}} (x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi)$$

$$\cos \Phi = (x_0 + q p l_{\text{кор}} \cos \varphi) / P, \quad \sin \Phi = (y_0 + q p l_{\text{кор}} \sin \varphi) / P$$

$q^2 = k_x^2 + k_y^2$, φ — азимутальный угол излученного фотона.

После интегрирования по φ' выражений (5) с помощью формулы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\gamma \cos x} \cos m x dx = i^m J_m(\gamma), \quad (6)$$

где $J_m(\gamma)$ — функция Бесселя действительного аргумента порядка m , получаем

$$\begin{aligned}(E_\omega(R_0))^{\parallel} &= - \frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{4\pi v \varepsilon_0^2} k p l_{\text{кор}}^2 \cos(\varphi - \Phi) \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \exp \left\{ -i \left[q(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) + \right. \right. \\&\left. \left. + \frac{p l_{\text{кор}}}{2} q^2 \right] \right\} \int_0^\infty q' dq' \frac{k_z q' J_1(q' P) + i \frac{\omega}{v} q (1 - \beta^2 \varepsilon_0) J_0(q' P)}{q'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_0)} e^{-i \frac{p l_{\text{кор}}}{2} q'^2} \\&\quad (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(E_\omega(R_0))^{\perp} &= \frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{4\pi v \varepsilon_0^2} k^2 p l_{\text{кор}}^2 \sin(\varphi - \Phi) \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \exp \left\{ -i \left[q(x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi) + \right. \right. \\&\left. \left. + \frac{p l_{\text{кор}}}{2} q^2 \right] \right\} \int_0^\infty q' dq' \frac{q' J_1(q' P)}{q'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_0)} e^{-i \frac{p l_{\text{кор}}}{2} q'^2}.\end{aligned}$$

Выражения (7) значительно упрощаются при движении частицы по оси параболоида вращения ($x_0=0$, $y_0=0$)

$$(E_{\omega}(R_0))^{\parallel} = -\frac{e(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{4\pi v \varepsilon_0^2} k p l_{\text{кор}}^2 \frac{e^{i k R_0}}{R_0} e^{-i \frac{p l_{\text{кор}}}{2} q^2} \times \\ \times \int_0^{\infty} q' dq' \frac{k_z q' J_1(q' q p l_{\text{кор}}) + i \frac{\omega}{v} q (1 - \beta^2 \varepsilon_0) J_0(q' q p l_{\text{кор}})}{q'^2 + \frac{\omega^2}{v^2} (1 - \beta^2 \varepsilon_0)} e^{-\frac{l p l_{\text{кор}}}{2} q'^2} \\ (E_{\omega}(R_0))^{\perp} = 0. \quad (8)$$

Интенсивность излучения на больших расстояниях R_0 в интервале частот $d\omega$ и интервале телесного угла $d\Omega$ определяется следующим выражением:

$$dI(\omega, \vec{k}) = c \sqrt{\varepsilon_0} |E_{\omega}(R_0)|^2 R_0^2 d\Omega d\omega. \quad (9)$$

В эксперименте мы всегда имеем дело с пучком частиц, поэтому приведем выражения для спектральных плотностей интенсивности излучения $\bar{I} = dI(\omega, \vec{k})/d\Omega d\omega$, усредненных по пучку. Подставляя (3) в (9) и интегрируя по x_0 и y_0 от $-\infty$ до $+\infty$, получаем

$$\bar{I} = \frac{e^2 |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2}{16\pi^2 v^2 \varepsilon_0^{3/2}} p^2 l_{\text{кор}}^4 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\left| \vec{k} \left| \vec{k}, \frac{\omega v}{c^2} - \frac{\vec{k}'}{\varepsilon_0} \right| \right|^2}{k'^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0} \right) dk'_x dk'_y. \quad (10)$$

В действительности пучок всегда имеет ограниченные размеры порядка ρ в направлениях x и y . При этом формула (10) остается в силе, если выполняется неравенство $\rho^2 > p l_{\text{кор}}$. В случае выполнения противоположного неравенства $p > \rho^2/l_{\text{кор}}$ получаем интенсивность переходного излучения на плоскости, умноженной на поперечные размеры пучка $\pi \rho^2$, поскольку необходимо при интегрировании использовать формулу (2').

В формуле (10), делая замену переменных (4), после интегрирования для поляризованной и неполяризованной компоненты излучения имеем:

$$\bar{I}^{\parallel} = I_{\text{н.л.}}^{\parallel} \frac{\pi p^2}{8 \sin^2 \theta} \left| \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}{1 - \beta^2 \varepsilon_0 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta} \right|^2 [2 \sin^2 \theta (1 - \beta^2 \varepsilon_0) + \cos^2 \theta (\ln |\rho_{\text{ф.ф.}}^2 q_{\text{max}}'^2| - 1)] \\ (11)$$

$$\bar{I}^{\perp} = I_{\text{н.л.}}^{\perp} \frac{\pi p^2}{8 \sin^2 \theta} \left| \frac{1 + \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}{1 - \beta^2 \varepsilon_0 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta} \right|^2 [\ln |\rho_{\text{ф.ф.}}^2 q_{\text{max}}'^2| - 1],$$

$$I_{\text{н.л.}}^{\parallel} = \frac{e^2 |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2}{4\pi^2 c \varepsilon_0^{3/2}} \beta^2 \sin^2 \theta \left| \frac{1 - \beta^2 \varepsilon_0 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta}{(1 - \beta^2 \varepsilon_0 \cos^2 \theta)(1 - \beta \sqrt{\varepsilon_0} \cos \theta)} \right|^2,$$

где $I_{\text{н.л.}}^{\parallel}$ — спектральная плотность интенсивности переходного излучения от плоской границы раздела в приближении теории возмущений

(¹), $\rho_{\text{эфф}} = \frac{\lambda \beta \sqrt{\epsilon_0}}{(1 - \beta^2 \epsilon_0)^{1/2}}$ — поперечные размеры поля частицы (см. например (²)), $\lambda = \lambda/2\pi$ — длина волны излученного кванта. При интегрировании по q' мы ограничились верхним пределом q'_{max} .

Интегрируя суммарную спектральную плотность интенсивности излучения пучка частиц ($\bar{I}^0 + \bar{I}^\perp$) по углам излучения, для полного числа квантов $d\bar{N}_\omega$ с энергией $\hbar\omega$, испущенных в частотном интервале $d\omega$, получаем

$$d\bar{N}_\omega = \frac{e^2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2}{16\epsilon_0^{3/2} c \hbar} \beta^2 p^2 \frac{d\omega}{\omega} \frac{1}{(1 \pm \beta \sqrt{\epsilon_0})^2} \left\{ 2(1 - \beta^2 \epsilon_0) \left(1 - \frac{1 \mp \beta \sqrt{\epsilon_0}}{3} \right) + \left[1 + \frac{1 + \beta^2 \epsilon_0}{3(1 \pm \beta \sqrt{\epsilon_0})} \right] \left| \ln |\rho_{\text{эфф}}^2 q_{\text{max}}'^2| - 1 \right| \right\}, \quad (12)$$

где верхние знаки соответствуют излучению назад (в левое полупространство), а нижние знаки — излучению вперед (в правое полупространство).

В случае нерелятивистских частиц ($\beta \sqrt{\epsilon_0} \ll 1$, $l_{\text{кор}} \sim \rho_{\text{эфф}} \sim \lambda \beta \sqrt{\epsilon_0}$) из (12) имеем

$$d\bar{N}_\omega \approx \frac{e^2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2}{12\epsilon_0^{3/2} c \hbar} \beta^2 p^2 \frac{d\omega}{\omega} \left| \ln |\rho_{\text{эфф}}^2 q_{\text{max}}'^2| - 1 \right|. \quad (13)$$

В этом случае для отношения α полного числа квантов от параболической поверхности $d\bar{N}_\omega$ к полному числу квантов от плоской границы раздела $d\bar{N}_\omega^{\text{пл}}$ получаем

$$\alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{p}{\rho} \right)^2 \left| \ln |\rho_{\text{эфф}}^2 q_{\text{max}}'^2| - 1 \right|. \quad (14)$$

Для излучения назад в крайне релятивистском случае ($\beta \sim 1$, $l_{\text{кор}} \sim \frac{\lambda}{2}$, $\rho_{\text{эфф}} \sim \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \beta^2}}$) при $\epsilon_0 = 1$ из (12) имеем

$$d\bar{N}_\omega \approx \frac{e^2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2}{48\epsilon_0^{3/2} c \hbar} p^2 \frac{d\omega}{\omega} \left| \ln |\rho_{\text{эфф}}^2 q_{\text{max}}'^2| - 1 \right|. \quad (15)$$

При сравнении (15) с полным числом квантов с энергией $\hbar\omega$, испущенных от плоской поверхности раздела в интервале частот $d\omega$, для α получаем следующее выражение:

$$\alpha = \frac{1}{3} \left(\frac{p}{\rho} \right)^2 \frac{\left| \ln \left| \frac{i^2 q_{\text{max}}'^2}{2(1 - \beta)} \right| - 1 \right|}{\left| \ln \left| \frac{2}{1 - \beta} \right| - 1 \right|}. \quad (16)$$

Во всех формулах q'_{max} ограничено условием применимости макроскопических уравнений:

$$q'_{\max} \lesssim \frac{1}{\rho_{\text{эфф}}};$$

$$q'_{\max} \lesssim \frac{1}{R_{\text{ат}}},$$
(17)

где $R_{\text{ат}}$ — расстояние между атомами.

Институт физических исследований
Академии наук Армянской ССР

Р. А. БАГІЯՅԱՆ, Հայկական ՍՍՀ ԳԱ փրակից-անդամ Մ. Լ. ՏԵՐ-ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ

Անցումային ճառագայթումը պտտման պարարությունից ձև ունեցող սահմանի վրա

Աշխատանքում առաջարկված է անցումային ճառագայթման բանաձևերի ստացումը միջավայրը բաժանող պտտման պարարությունից ձև ունեցող սահմանի ղեկավարում, ենթադրվում է, որ դիէլեկտրիկական հատկությունների փոփոխումը մի միջավայրից ¹, դիէլեկտրիկական հաստատունով ղեկի մյուսը ϵ_2 դիէլեկտրիկական հաստատունով փոքր է:

Հոդվածում դիտարկված արդյունքները կարևոր նշանակություն ունեն միջավայրը բաժանող պարբերական և վիճակագրական անհարդություններով մակերեսների համար անցումային ճառագայթումը ուսումնասիրելու համար:

ЛИТЕРАТУРА—ԴՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ М. Л. Тер-Микаелян, Р. А. Багиян, ДАН Арм. ССР, т. 55, № 1 (1972). ² М. И. Рязанов, И. С. Тилинин, Журн. эксперим. и теор. физики, т. 71, вып. 6 (12), (1976). ³ М. Л. Тер-Микаелян, Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях, Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1969, М. Л. Ter-Mikaelian, High energy electromagnetic processes in condensed media, John Wiley and Sons Inc. 1972.

УДК 577.1

БИОХИМИЯ

Ж. С. Геворкян, И. Р. Фаталова,
 член-корреспондент АН Армянской ССР А. А. Галоян

**Данные о влиянии гипоталамического кардиотропного
 гексапептида (Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH₂) на некоторые
 стороны функциональной деятельности почек**

(Представлено 25/V 1979)

В составе низкомолекулярных соединений гипоталамуса были обнаружены коронарорасширяющие нейrogормоны, аминокислоты и их дериваты, а также ряд пептидов, по аминокислотному составу весьма сходных с отдельными фрагментами лютеинизирующего рилизинг гормона (ЛРГ).

Радиоиммуннохимическим способом удалось идентифицировать и количественно определить содержание кардиотропного гексапептида в гипоталамусе (Тир-Гли-Лей-Арг-Про-Гли-NH₂) (¹). Этот кардиотропный полипептид с молекулярным весом 659 легко проникает через гемато-энцефалический барьер и в небольшом количестве накапливается в сердечной мышце (²). Как показали эксперименты, гексапептид обладает также панкреотропным свойством (¹).

Наши данные показали, что гексапептид оказывает некоторое влияние также и на диурез. Эти данные, а также то, что гексапептид оказывает действие на гладкую мускулатуру сосудов, давали основание исследовать его влияние на некоторые стороны функциональной деятельности почек.

Опыты были поставлены на белых крысах. Изучалось влияние внутрибрюшинного введения гексапептида на диурез и на выделение с мочой аммиака, калия, натрия и фосфатов, а также на образование аммиака срезами почек из глутамина. Срезы коркового слоя почек, сердечной, печеночной и мышечной тканей (по 200 мг) инкубировали в Кребс-Рингер-бикарбонатном буфере, рН—7,4, в атмосфере кислорода (95%) и СО₂ (5%). На каждую пробу добавляли: глутамин—1,2 мг/мл, гексапептид—1 мкг/мл. Аммиак определяли микродиффузионным методом по Конве, фосфор—по методу Фiske—Суббарроу, ионы калия и натрия—при помощи пламенного фотометра.

Результаты исследований показали (табл. 1), что под влиянием гексапептида повышается диурез, значительно усиливается экскреция

аммиака и фосфатов с мочой. Наблюдается также некоторое усиление экскреции ионов калия, между тем как выделение ионов натрия не изменяется.

Представляло интерес выяснить источник усиленного выделения аммиака с мочой. С этой целью изучалось влияние гексапептида на образование аммиака из глутамина в срезах почек. Исследования показали (табл. 2), что гексапептид в значительной мере усиливает аммиакообразование в почках из глутамина (почти на 42%), между тем как в остальных тканях (мозговой, печеночной, сердечной) не наблюдалось особых изменений.

Таблица 1

Влияние гексапептида на диурез, на выделение с мочой аммиака и некоторых электролитов у белых крыс
(средние данные из 6 опытов)

Основные компоненты мочи	Контроль	Гексапептид (1γ/1мл)	Изменения, %
Диурез, мл	4.6 ± 0.3	5.8 ± 0.2 P < 0.05	+ 26.1
Аммиак, мкмоль/24ч	200.7 ± 15.0	253.7 ± 16.5 P < 0.001	+ 26.4
Фосфаты (PO ₄), мг/24ч	0.9 ± 0.05	1.2 ± 0.1 P < 0.005	+ 33.3
Натрий, мг/24ч	2.6 ± 0.4	2.5 ± 0.6 P < 0.5	— 3.9
Калий, мг/24ч	5.7 ± 0.3	6.9 ± 0.2 P < 0.025	+ 21.0

Таблица 2

Влияние гексапептида на образование аммиака из глутамина в различных тканях (срезы) (средние данные 6 опытов)

Органы	Контроль	Гексапептид	Глутамин	Глутамин + гексапептид	Изменения, %
Почки (корковый слой)	7.0 ± 0.3	7.2 ± 0.2 P > 0.5	26.2 ± 0.9	37.2 ± 0.8 P < 0.001	+ 42
Мозг	6.3 ± 0.4	6.3 ± 0.3 P > 0.5	13.3 ± 0.3	14.2 ± 0.7 P > 0.2	+ 6.7
Печень	5.2 ± 0.1	5.4 ± 0.3 P > 0.5	10.5 ± 0.8	11.4 ± 0.6 P > 0.4	+ 8.5
Сердце	5.6 ± 0.5	5.6 ± 0.6 P > 0.5	8.9 ± 0.4	9.0 ± 0.4 P > 0.5	+ 1.1

Таким образом, наши исследования показали, что синтетический гексапептид *in vivo* вызывает стимулирование почечной деятельности, что выражается повышением диуреза, усилением экскреции аммиака (что связано с усилением образования его в почечной ткани из глутамина), неорганических фосфатов и ионов калия с мочой. Экскреция ионов натрия не изменяется.

Вышеприведенные данные показывают, что упомянутый гексапептид представляет определенный интерес как с точки зрения положительного кардиотропного влияния, так и с точки зрения его действия

на почечную деятельность. Задача состоит в том, чтобы выяснить механизм его действия.

Не исключена возможность, что этот гексапептид поступает из мозга в общий кровоток и оказывает регулирующее влияние на функции почек.

Институт биохимии

Академии наук Армянской ССР

Ժ. Ս. ԳԵՂՈՐԴՅԱՆ, Ի. Ռ. ՅԱՏԱԼՈՎԱ, Հայկական ՍՍՀ ԴԱ քղրակից-տեղում, Ա. Ա. ԴԱԼՈՅԱՆ

Հիպոթիզամիկ կարգիոտրոպ հեքսապեպտիդի ($\text{Տիր-Գլի-Լեյ-Արգ-Պրո-Գլի-NH}_2$) ազդեցությունը երիկամների ֆունկցիոնալ գործունեության մոռ կողմերի վրա

Փորձերը դրվել են սպիտակ առնետների վրա: Ուսումնասիրվել է հեքսապեպտիդի ազդեցությունը դիուրեզի և մեզի միջոցով մոռնիակի, կալիումի, նատրիումի և անօրգանական ֆոսֆատների արտադատման վրա, ինչպես նաև գլուտամինից մոռնիակի առաջացման ընթացքի վրա երիկամների կեղևային շերտի, սրտամկանի, լյարդի և մկանային հյուսվածքի կտրվածքների վրա: Ցույց է տրվել, որ հեքսապեպտիդի ազդեցության տակ բարձրանում է դիուրեզը, ինչպես նաև մեզի միջոցով արտադատվող մոռնիակի, ֆոսֆատների քանակները: Որոշակիորեն խթանվում է կալիումի իոնների արտադատումը, իսկ նատրիումինը չի փոխվում:

Ուսումնասիրությունները պարզել են, որ հեքսապեպտիդը զգալիորեն ուժեղացնում է գլուտամինից մոռնիակագոյացումը երիկամներում 42% իսկ մյուս հյուսվածքներում առանձին փոփոխություններ չեն նկատվում:

Ստացված տվյալները խոսում են այն մասին, որ հիշյալ հեքսապեպտիդը բացի կարգիոտրոպ ազդեցությունից, որոշակի հետաքրքրություն է ներկայացնում նաև երիկամների գործունեության վրա իր ունեցած ազդեցությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Գ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ Ո Ւ Ն

¹ А. А. Гаюян, ДАН Арм. ССР, т. 64, № 2 (1977). ² А. А. Гаюян, Вопр. биохимии мозга, вып. 13, 1978

УДК 2.23.10.3

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

Академик АН Армянской ССР В. О. Казарян, Р. С. Шахазизян

К вопросу о смещении акропетального направления ветвления
и физиологической активности базипетального
у корней в онтогенезе древесных

(Представлено 28/VI 1979)

Наиболее ярким морфологическим проявлением старческого состояния древесных, произрастающих в нормальных условиях существования, является наступление суховершинности, за которой следует опускание зоны ветвления до образования прикорневой поросли ^(1,2). Следует полагать, что образованию суховершинности предшествует отмирание части корней, исходя из того, что обнаружена непосредственная зависимость между энергией роста надземных органов от мощности корневой системы ⁽³⁾. Очевидно, затухание роста верхушечных органов, а затем их отмирание должны явиться следствием ухудшения корневой деятельности. При этом следует учесть также, что с образованием придаточных корней при воздушном отвоковании стволов деревьев вновь усиливается верхушечный рост ⁽³⁾. Эти наблюдения, однако, не дают ответа на вопрос, после отмирания каких именно корней следует образование суховершинности. Вероятнее всего предположить, что суховершинность следует за отмиранием терминальных корней, которые находятся на наибольшем расстоянии от фотосинтезирующего аппарата и, следовательно, хуже снабжаются фотосинтетическими продуктами. Отсюда можно допустить, что, подобно верхушечным метамерам, с отмиранием терминальных корней новообразованные располагаются ближе к корневой шейке, т. е. листья приближаются к активным корням после определенного возрастного оптимума деревьев. Параллельно с этим происходит смещение физиологической активности корней от терминальной зоны к шейке корня.

В настоящем сообщении делается попытка экспериментально подтвердить эти предположения, т. е. установить синхронность процессов смещения надземных и подземных боков метамеров и их физиологическую активность в базипетальном направлении с наступлением старческого состояния деревьев.

В качестве объектов для исследования были взяты возрастно молодые и старые суховершинные деревья: дуб крупнопыльниковый (*Quercus macranthera* Fischg. et Mey.) и бук восточный (*Fagus orientalis* Lipsk.), произрастающие на территории Июмберянского лесхоза Армянской ССР.

Один или два скелетных корня опытных растений начиная от основания дерева были тщательно раскопаны вместе с боковыми разветвлениями до терминальной зоны, а затем от базального, среднего и терминального ярусов скелетных корней взяты активные разветвления (толщиной до 2 мм). Образцы корней быстро фиксировали горячим паром, а затем высушивали в термостате до постоянного веса. Затем в них определяли количество углеводов методом Хогедорн-Иенсена по схеме Кизеля (⁴), содержание форм азота микрометодом Кьельдаля (⁴), фосфора по Лоури и Лопесу (⁵), а также количество аминокислот методом бумажной хроматографии. Все определения проводили в 4—8-кратных повторностях, полученные данные были обработаны статистически. Учитывая, что последние были полностью идентичны у обеих пород, в статье приводятся данные лишь по буку.

При раскопке корней было констатировано, что у молодых деревьев интенсивность разветвления скелетных корней постепенно усиливается от основания к терминальной части. Наиболее густоветвистая зона размещается дальше от основания ствола, менее разветвленная — ближе. У суховершинных деревьев наблюдалась диаметрально противоположная картина: терминальные зоны скелетных корней оказались оголенными и по мере приближения к основанию ствола усиливалось ветвление (рис. 1).



Рис. 1. Характер размещения активных корней на скелетных у молодых (1) и суховершинных (2) деревьев бука восточного

Эти наблюдения одновременно показали, что смещение наиболее разветвленной зоны скелетных корней к основанию ствола у суховершинных деревьев осуществлялось, с одной стороны, отмиранием ранее сформировавшихся терминальных корней, с другой — новообразованием их ближе к основанию корней. Показателем этого служило наличие

остатков множества отмерших корней терминальной зоны скелетных образований.

В ходе такого своеобразного чередования процессов обновления и отмирания корневых разветвлений происходит одновременно смена физиологической их активности от терминальной зоны к базальной (рис. 2). В действительности, приведенные кривые наглядно показывают, что у молодых интенсивно растущих деревьев наибольшее количество общего и белкового азота определено в активных корнях, взятых от терминальной зоны. У деревьев с высохшей кроной эти показатели

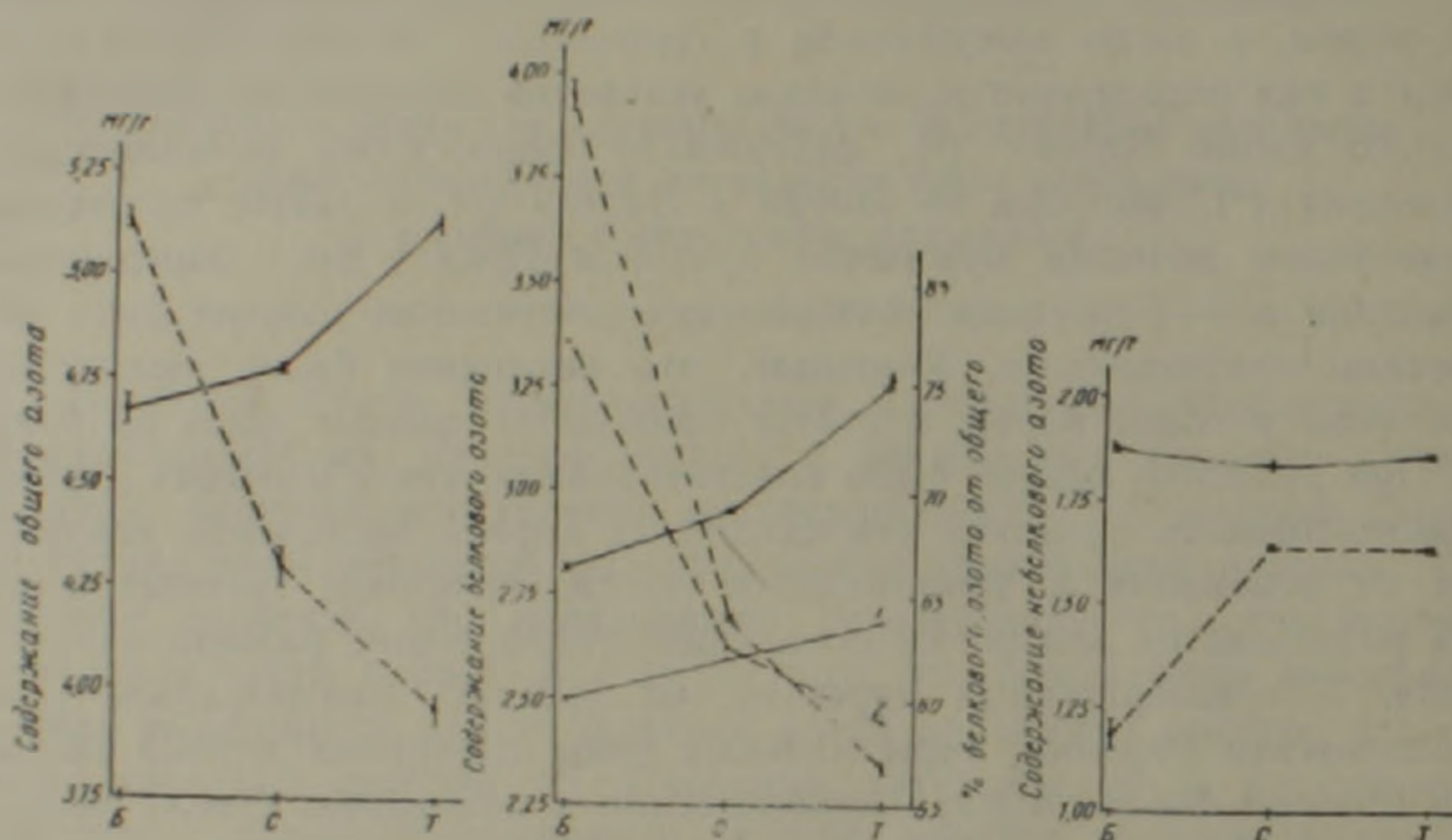


Рис. 2. Содержание форм азота в активных корнях, отходящих от базальной (Б), средней (С) и терминальной (Т) зон скелетных корней молодого и старого бука восточного

оказались выше у корней базальной зоны. Учитывая, что одним из показателей высокой жизнедеятельности корней является содержание в них белкового азота, мы вправе заключить, что по мере возрастных изменений растений и наступления суховершинности активная зона корневых разветвлений перемещается от терминального яруса скелетных образований к базальным, подобно надземным метамерам.

Это положение подтверждается и результатами по определению различных форм фосфора (рис. 3). У молодых нормально растущих деревьев нарастание общего содержания органической формы фосфора, являющейся необходимым элементом жизненно важных структур живой клетки, осуществляется от базальных корней к терминальным. У старых деревьев, наоборот, этот показатель нарастает в обратном направлении—от терминальных корней к базальным.

Существенным выражением физиологического состояния корней является и их синтетическая активность, в результате чего поглощен-

ные ими элементы минерального питания энергично включаются в состав аминокислот (⁶⁻⁸), белков (⁹ и др.), фосфоров (¹⁰ и др.) и иных метаболитов. С этой точки зрения для выявления функциональной активности корней тех или иных ярусов обычно определяется содержание в них аминокислот.

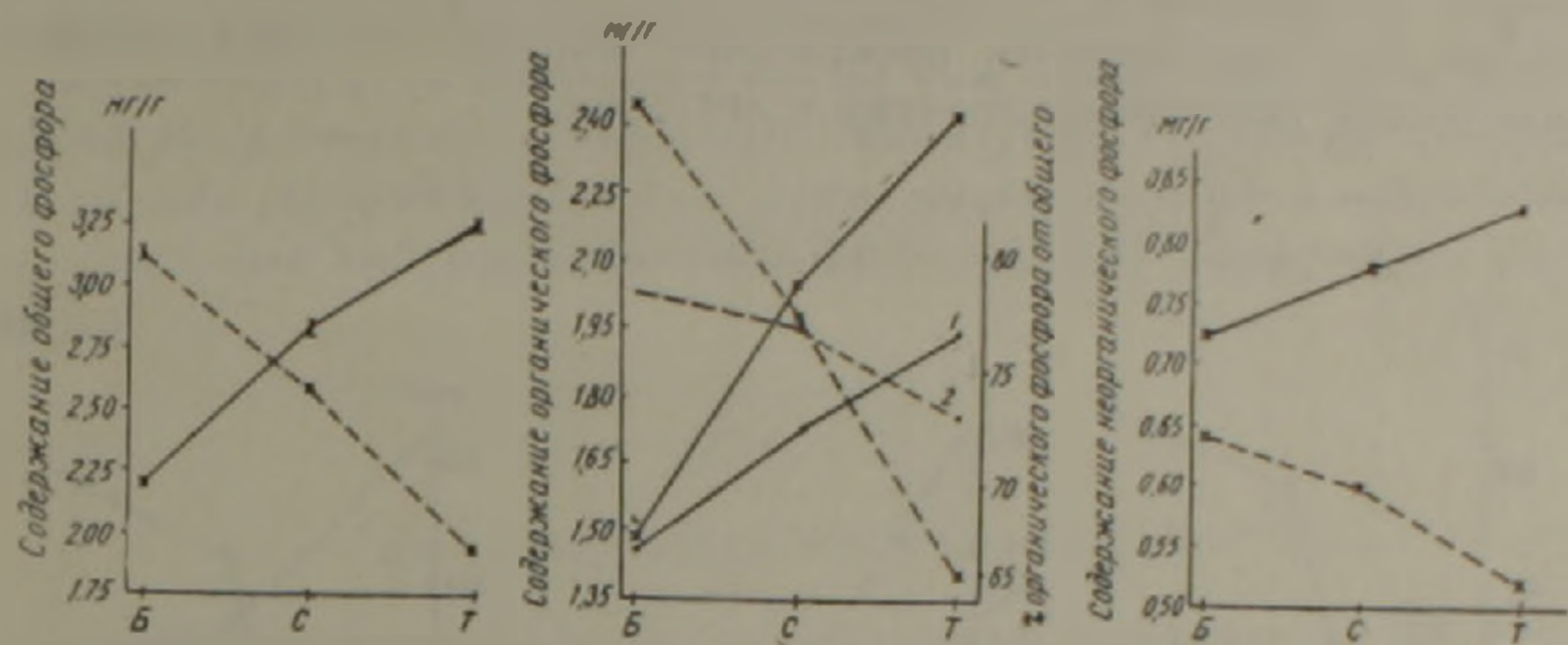


Рис. 3 Содержание форм фосфора в активных корнях, отходящих от базальной (Б), средней (С) и терминальной (Т) зон скелетных корней молодого и старого бука восточного

Цифровые данные, приведенные в таблице, наглядно показывают, что у молодых деревьев наибольшую синтетическую деятельность в отношении образования аминокислот проявляют терминальные корневые разветвления, тогда как у суховершинных индивидов такой же активностью отличаются базальные корни. При этом подобная тенденция наглядно обнаруживается у обоих видов растений.

Содержание аминокислот (мг/г сухого вещества) в активных (всасывающих) корнях дуба и бука в различные возрастные периоды

Вид	Возрастные периоды растений	Ярусное расположение активных корней	Сумма аминокислот
Д у б	Интенсивно растущие деревья	Базальное	0.590±0.002
		Среднее	0.789±0.001
		Терминальное	1.085±0.002
	Деревья с высохшей кроной и прикорневой порослью	Базальное	2.097±0.004
		Среднее	1.175±0.002
		Терминальное	0.991±0.001
Б у к	Интенсивно растущие деревья	Базальное	0.626±0.001
		Среднее	0.754±0.002
		Терминальное	0.832±0.003
	Деревья с высохшей кроной и прикорневой порослью	Базальное	0.762±0.002
		Среднее	0.593±0.003
		Терминальное	0.440±0.002

Повышенная активность терминальных (у молодых деревьев) и базальных (у старых деревьев) корней, несомненно, должна определяться и общим содержанием в них сахаров. В действительности же полученные данные (рис. 4) наглядно показывают, что как общая сумма углеводов, так и растворенные сахара (в корнях молодых деревьев) увеличиваются от базальных ярусов к терминальным. Это обстоятельство уже является проявлением наличия активной обменной связи между указанными корнями и листьями.

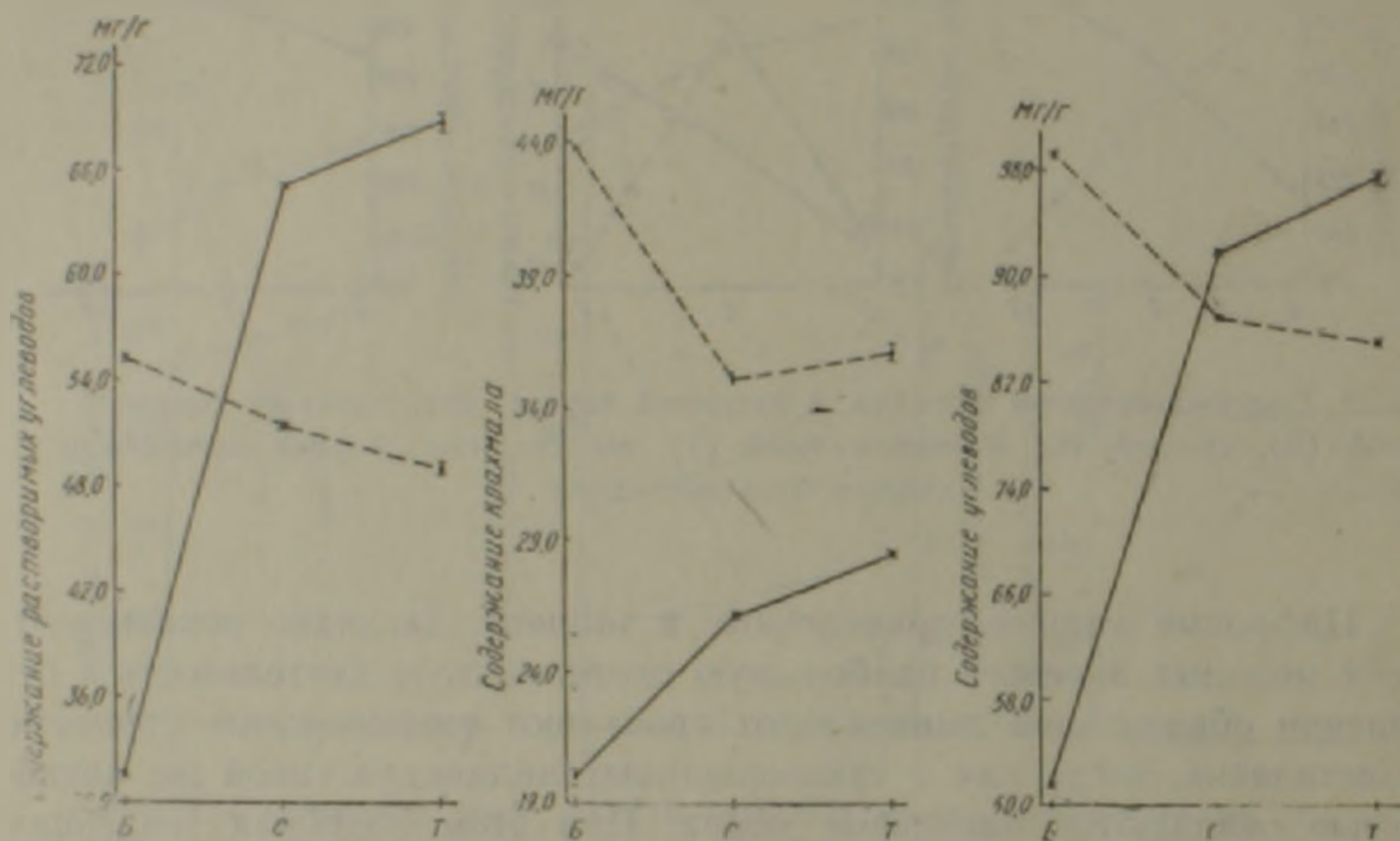


Рис. 4. Содержание углеводов в активных корнях, отходящих от базальной (Б), средней (С) и терминальной (Т) зон скелетных корней молодого и старого бука восточного

Изложенные выше данные свидетельствуют о том, что аналогично вершечным метамерам в ходе старения древесных происходит смещение наиболее деятельной в поглотительном и метаболическом отношении зоны густо разветвленных активных корней к основанию ствола. Такое смещение осуществляется, с одной стороны, постепенным отмиранием терминальных корешков, с другой — формированием новых, ближе к корневой шейке. Указанные морфологические изменения сочетаются со смещением физиологической активности разных зон корней: у молодых деревьев функционально наиболее активными оказываются терминальные корни, у старых — базальные.

Институт ботаники
Академия наук Армянской ССР

Մառերի օնտոգենեզում արմատների ճյուղավորման և ֆիզիոլոգիական ակտիվության ակտույետալ ուղղության հերքափոխումը բազիլետալով

Ուսումնասիրվել է երիտասարդ և զազաթր շորացած արևելյան կաղնու առանցքային արմատների ճյուղավորման բնույթը և տարբեր յարուաներից վերցրված ակտիվ արմատների ֆիզիոլոգիական ակտիվությունը:

Հաստատվել է, որ երիտասարդ ծառերի մոտ ակտիվ արմատները տեղավորված են հիմնականում առանցքային մետամերների զազաթային ղոնայում, իսկ զազաթր շորացած ծառերի մոտ արմատավղիկի մոտ նման տենդենցիա է հայտնաբերված նաև այդ արմատների ֆիզիոլոգիական ակտիվության վերաբերյալ:

ЛИТЕРАТУРА — ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ П. Г. Шитт, Введение в агротехнику плодоводства, Сельхозгиз, М., 1936.
- ² Е. И. Гусева, Труды Ин-та физиологии им. К. А. Тимирязева, т. 7, вып. 2 (1951).
- ³ В. О. Казарян, П. А. Хуршудян, К. А. Карапетян, Биологический журн. Армении, 21, 11 (1968).
- ⁴ А. Н. Белозерский, И. И. Проскуряков, Практическое руководство по биохимии растений, „Сов. наука“, М., 1951.
- ⁵ О. Н. Lowry, J. H. Lopez, Sourn. Biol. Chem., 162, 3 (1946).
- ⁶ Л. С. Литвинов, Изв. Биологического и-на ин-та Пермского гос. ун-та, 5, 1927.
- ⁷ J. G. Wood, Ann. Rev. Biochem., 14 (1945).
- ⁸ И. И. Колосов, С. Ф. Ухина, Физиология растений, 1, 1 (1954).
- ⁹ В. Л. Кретович, З. Г. Евстигнеева, К. Б. Асеева, И. Г. Совкина, Физиология растений, 6, 1 (1959).
- ¹⁰ Н. Г. Потанов, О. И. Соловьева, И. И. Иванченко, Труды комиссии по ирригации АН СССР, вып. 8, 1936.

УДК 612.84

ФИЗИОЛОГИЯ

Д. К. Хачванкян, Р. А. Барсегян, Б. А. Арутюнян-Козак

Влияние фонового освещения на ответы нейронов области
Клер—Бишопа, вызванные движущимися зрительными стимулами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. Г. Баклаваджяном 23/IV 1979)

В последнее время ученые уделяют все больше внимания функциональному значению корковой ассоциативной области Клер—Бишопа в центральном анализе зрительной информации (¹⁻³). Наши предыдущие данные (^{4,5}) показали, что большинство нейронов области Клер—Бишопа проявляет чувствительность к движущимся зрительным стимулам. Известно, что процессы адаптации существенно модулируют ответы зрительно-чувствительных клеток центральной нервной системы (^{6,7}). Характер адаптационных эффектов позволяет судить о возможных механизмах организации ответов зрительно-чувствительных нейронов. С этой точки зрения становится интересным изучение влияния процессов адаптации на ответы нейронов области Клер—Бишопа, тем более что в литературе подобные исследования отсутствуют.

Опыты проведены на 22 кошках. Трахеотомию, трепанацию черепа и претригеминальное сечение ствола мозга производили под эфирным наркозом. Костное окно на черепе (над задней супрасильвиевой извилиной) заливали 3%-ным раствором агара на основе 5%-ного раствора хлористого натрия. Затем животное переводили на искусственное дыхание и обездвиживали дитилином (7 мг/кг веса). Зрачки расширяли 0,1%-ным раствором атропина, роговицы покрывали контактными линзами (диоптрическая сила = 0) для защиты от высыхания. Температуру тела животного поддерживали в пределах 37—38°C при помощи электрической грелки.

Для отведения электрической активности отдельных нейронов пользовались вольфрамовыми микроэлектродами с диаметром кончика 2—5 мкм. Биопотенциалы подавали на вход высокоомного катодного повторителя и через усилительную систему — к анализатору для анализа распределения межимпульсных интервалов. Ответы усреднялись путем 15-кратного повторения стимула. Усредненные ответы регистрировали с экрана осциллографа, где каждый потенциал действия появлялся в

виде светящейся точки. Расположение точек по оси абсцисс показывает время раздражения, по оси ординат — межимпульсный интервал. Для движущихся зрительных стимулов использовали обычный проекционный аппарат и зеркало, вмонтированное в гальванометр. Последний модулировался генератором ЭСУ-2. Интенсивность освещения фона и зрительных стимулов измеряли люксметром Ю-16. Значения освещенности фона и стимулов указаны на рисунках.

Исследовано 58 нейронов области Клер—Бишопа. Как правило, нейроны этой области проявляют выраженную чувствительность к движущимся зрительным стимулам. Определенный процент нейронов (19%) отвечал избирательно на направление движения стимула в горизонтальной плоскости. 81% клеток имел не чувствительные к направлению движения (недирекционные) ответы, а 40% клеток из этого числа отвечало чередованными во времени залпами импульсов на движение стимула в рецептивном поле.

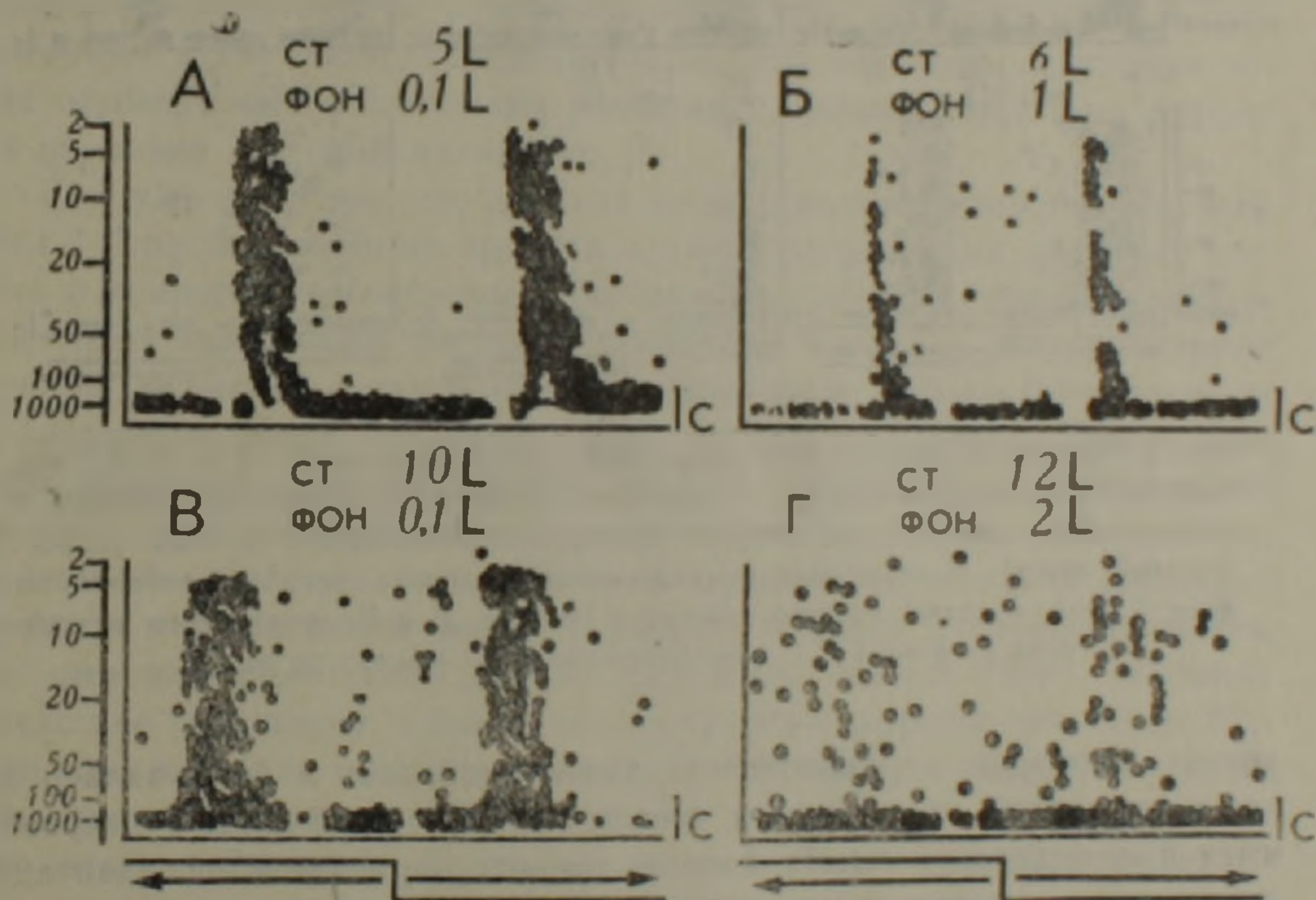


Рис. 1. Влияние фонового освещения на ответы двух нейронов (А, Б и В, Г) в области Клер — Бишопа, вызванные движущимися зрительными стимулами. А, В—ответы каждого из нейронов в темноте; Б, Г—ответы этих же нейронов при фоновом освещении. На оси абсцисс—время раздражения (1 сек), на оси ординат—межимпульсный интервал в мсек. СТ—освещенность стимула в люксах, ФОН—освещенность фона. Стрелки показывают направление движения

Было исследовано влияние изменения фонового освещения на ответы всех трех видов нейронов. Оказалось, что у 25 нейронов из 58 фоновое освещение уменьшает количество разрядов в ответе нейрона и сужает отрезок времени, в течение которого возникает ответ. Пример

такого изменения ответов показан на рис. 1, А, Б. Нейрон, представленный на рис. 1, В, Г, проявлял хорошо выраженный ответ на движение светлого стимула в темноте (недирекционный ответ), а при повышении уровня фонового освещения вообще переставал реагировать на движение (рис. 1, Г). У некоторых нейронов, наоборот, ответы усиливались в условиях световой адаптации. У нейронов, чувствительных к направлению движения стимула (дирекционных), также наблюдались изменения двоякого характера: у некоторых нейронов ответ ослабевал при включении фонового освещения, иногда вплоть до исчезновения; у

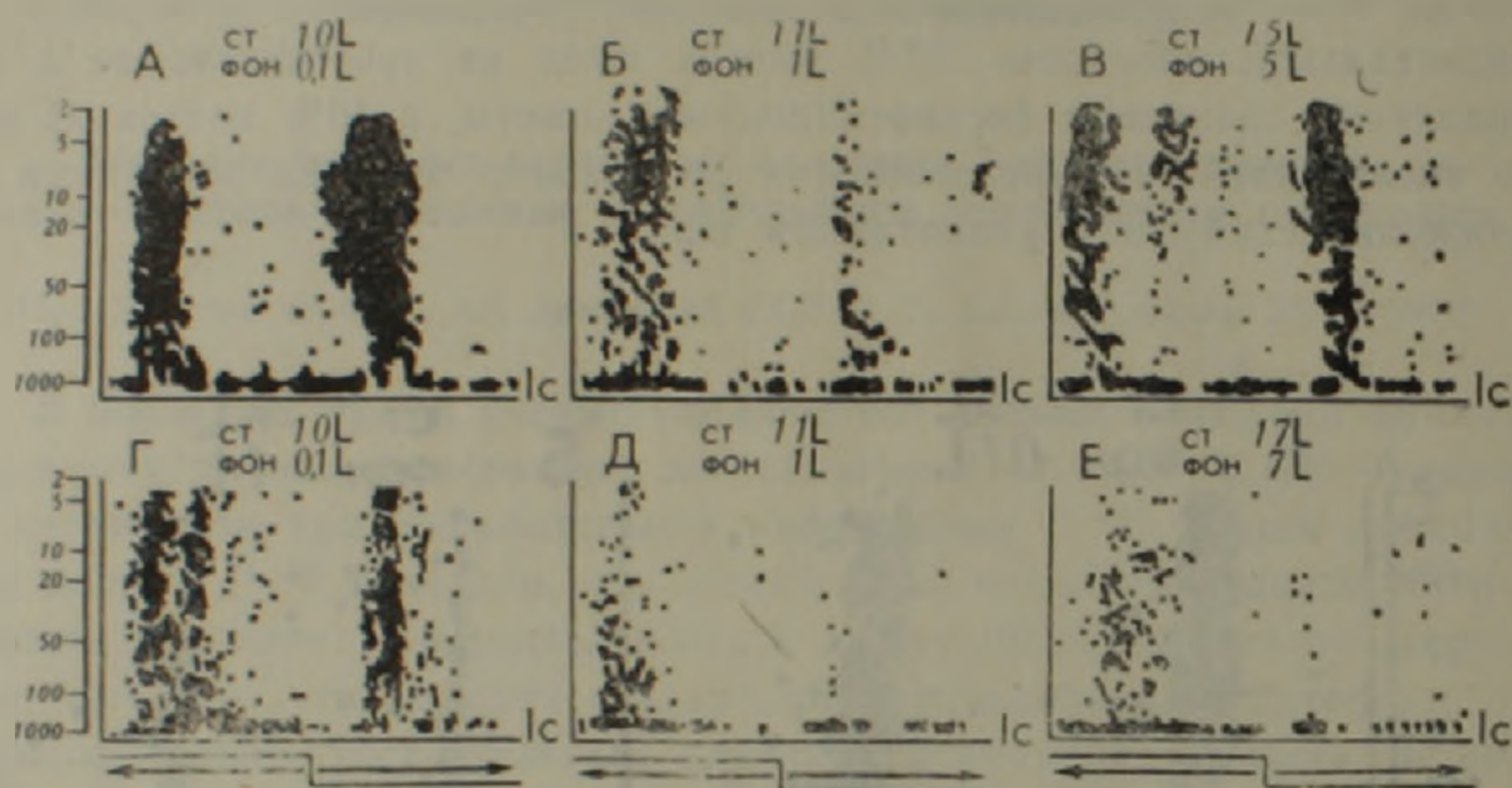


Рис. 2. Изменение ответов двух недирекционных нейронов (А—В и Г—Е) под влиянием фонового освещения. А—недирекционный ответ одного из нейронов в темноте, Б—ответ того же нейрона при фоновом освещении 1 люкс (дирекционный ответ); В—исчезновение дирекционного ответа того же нейрона на фоне 5 люкс; Г—ответ второго нейрона в темноте, Д и Е—ответы того же нейрона на фоне 1 и 7 люкс. Обозначения те же, что на рис. 1

других, наоборот, дирекционность акцентировалась и оказывалась более выраженной при фоновом освещении, чем в темноте. 7 нейронов, имеющие недирекционный ответ в темноте, при световой адаптации становились дирекционными (рис. 2, А, Б и Г, Д), причем нейрон, представленный на рис. 2, Г—Е, сохраняет дирекционность при любом уровне фонового освещения, тогда как нейрон на рис. 2, А—В, теряет дирекционность при повышении уровня фонового освещения (рис. 2, В). Три нейрона, имеющие дирекционный ответ в темноте, становились недирекционными при фоновом освещении.

Определенный интерес для нас представили нейроны, отвечающие чередованными во времени залпами импульсов на движение стимула через их рецептивное поле. Оказалось, что при фоновом освещении, как правило, исчезает регулярная чередованность разрядов и ответ превращается в обычный мономодальный. В тех редких случаях (6 из 23),

когда в условиях световой адаптации чередованность разрядов в ответе сохранялась, она, как правило, бывала выражена слабее по сравнению с темнотой или оставалась только в ответах на одно направление движения.

Опыты показали, что изменение фонового освещения вызывает существенные вариации в ответах нейронов ассоциативной области Клер-Бишопа на движущиеся зрительные раздражители. В целом обнаруженные эффекты подобны тем, которые представили в своих исследованиях Нунокава (6) и Шевелев с соавт. (7) для нейронов проекционной зрительной коры. Характерным влиянием фонового освещения является факт сужения области, раздражение которой вызывает ответ нейрона при фоновом освещении по сравнению с ответом при темновой адаптации. Мы склонны объяснять этот факт исключением или чрезвычайным уменьшением рассеянного света при фоновом освещении. Однако не все изменения, вызванные фоновым освещением, можно объяснить исключением воздействия рассеянного света (например, превращение недирекционного ответа в дирекционный при переходе от темновой адаптации к световой). Предполагается, что подобная модуляция ответа осуществляется благодаря усилению корковых тормозных процессов во время световой адаптации (7).

Как уже упоминалось, для нас особый интерес представляли нейроны с чередованными во времени залпами разрядов на движение стимула в темноте. Эти нейроны в большинстве случаев теряли характерный образ ответа при световой адаптации и давали мономодальный ответ на движение стимула в рецептивном поле. Только 6 нейронов из 23 сохранили такой тип ответа при световой адаптации. Ранее нами было выдвинуто предположение, согласно которому функциональное значение чередованных разрядов в ответе на движение зрительно-чувствительного нейрона заключается в восприятии скорости движения предмета в рецептивном поле (4). Исходя из этого надо предполагать, что световая адаптация должна улучшить ответы таких нейронов вследствие улучшения условий для восприятия скорости движения. Однако, как показали опыты с применением фонового освещения, в условиях световой адаптации нейрон теряет возможность организации такого ответа. Очевидно, функциональное значение чередованных разрядов в ответе нейрона иное, и для выяснения этого вопроса требуется дальнейшее исследование.

Институт физиологии
Академии наук Армянской ССР

Г. Ч. БАДЖАЛЯН, Н. А. РАГСЕКЯН, Р. А. ЗАРНОБЗОНЬЯН-КОДЖА

Ընդհանուր ֆոնային լուսավորության ազդեցությունը Կլեր—Բիշոպի շրջանի նեյրոնների պատասխանների վրա, առաջացված շարժվող տեսողական գրգռիչներով

Սուր փորձի պայմաններում ուսումնասիրվել է Կլեր—Բիշոպի տեսողական կեղևային շրջանի նեյրոնների պատասխանները շարժվող տեսողական գրգռիչ-

ներին ընդհանուր լույսի փոփոխման պայմաններում: Փորձերը ցույց են տվել, որ ընդհանուր լույսի ինտենսիվության քարձրացմունը (լուսային ադապտացիա) զուգընթաց մեծ մաս նեյրոնների մոտ պատասխան ուժը թուլանում է: Ֆունային լուսավորությունը փոխում է նաև նեյրոնների ղգայունությունը գեպի շարժման ուղղությունը: Այսպիսով փորձերը ապացուցում են, որ կենտրոնական սխտեմի նեյրոնների հատկանիշները շարժունակ են և փոփոխվում են շրջապատի ընդհանուր պայմանների փոփոխությանը զուգընթաց:

Л И Т Е Р А Т У Р А — Դ Ր Ա Կ Ա Ն Ո Ւ Թ Յ ՈՒ Ն

- ¹ K. Turtelski, Acta Neurobiol. Exp., 35, № 3 (1975). ² A. P. Кезели, Нейрофизиология, 11, № 1 (1979). ³ G. Rizzolatti, R. Camarda, Exp. Brain Res., 29, № 5 (1977). ⁴ Б. А. Арутюнян-Козак, Д. К. Хачванкян, А. С. Оганян, А. Г. Тутунджян, Нейрофизиология, 10, № 1 (1978). ⁵ Д. К. Хачванкян, Б. А. Арутюнян-Козак, ДАН Арм. ССР, т. 66, № 3 (1978). ⁶ S. Nishikawa, Jap. J. Physiol., 1, № 1 (1973). ⁷ И. А. Шевелев, И. Н. Вирдерева, В. Г. Марченко, ДАН СССР, т. 217, вып. 2 (1974).

УДК 612.84

ФИЗИОЛОГИЯ

А. А. Экимян, Г. Е. Григорян, Б. А. Арутюнян-Козак

Влияние фонового освещения на ответы нейронов пульвинара,
вызванные движущимися зрительными стимулами

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР О. Г. Баклаваджяном 10/V 1979)

Впервые Гранит (¹) показал, что порог возбудимости ганглиозных клеток сетчатки снижается в условиях темновой адаптации. Вскоре появился ряд работ (²⁻⁴), в которых было показано, что темновая и световая адаптации приводят к определенным изменениям функциональных свойств ганглиозных клеток сетчатки.

Исследования, проведенные в этом аспекте на подкорковых зрительных центрах (^{4,5}), затем зрительной коре (⁶⁻⁸), доказали, что в условиях световой адаптации происходят существенные изменения характеристик ответов центральных нейронов и определенные перестройки их рецептивных полей.

Таким образом, метод изменения фоновой освещенности позволяет путем исследования закономерностей изменения функциональных характеристик в ответах центрального зрительного нейрона ближе подойти к вопросу о механизмах организации его ответов.

Цель настоящей работы—изучение ответов отдельных нейронов пульвинара, вызванных движущимися зрительными стимулами, и закономерностей изменения этих ответов при разных интенсивностях фонового освещения.

Опыты проведены на 29 кошках. Техника операции и методика регистрации внеклеточных потенциалов действия одиночных нейронов описаны ранее (⁹). Движущимся стимулом являлось светлое пятно (5°), освещенностью 2,5—20 люкс и со скоростью движения 180°/сек. Фоновое освещение менялось в границах от 0,05 до 15 люкс. После каждого изменения фонового освещения учитывалось время адаптации: для световой—15 мин, для темновой—40 мин. Ответы усреднялись анализатором межимпульсных интервалов на 15 повторений стимула. Электрод вводили в пульвинар согласно атласу Снайдера и Нимера (¹⁰). После каждого опыта производилась перфузия головного мозга 10%-ным раствором формалина, локализацию кончика электрода определяли на срезах толщиной 30 мкм.

Всего было исследовано 130 нейронов пульвинара. Ответы нейронов на движущийся стимул регистрировались в темноте (0,05 люкс) и при разных уровнях фонового освещения. 87 нейронов проанализированы полностью. В 73 случаях из 87 изменения уровня фонового освещения приводили к изменению ответов нейронов на движение зрительного стимула в его рецептивном поле. Ответы 14 нейронов не претерпели каких-либо изменений.

Оказалось, что влияние фонового освещения на ответы нейронов пульвинара, вызванные движущимися стимулами, довольно многообразно. У 18 нейронов, не чувствительных к направлению движения (недирекционных нейронов), ответ полностью исчезал при минимальном повышении уровня фонового освещения. Наряду с этим у части недирекционных нейронов (8 из 59) нечеткие стертые ответы в темноте становились четкими в условиях световой адаптации. У 9 нейронов из 59 наблюдалось превращение недирекционного ответа в дирекционный (чувствительный к направлению движения) под влиянием фонового освещения. Примеры таких изменений в ответах показаны на рис. 1. Первый нейрон, представленный на рис. 1, А, Б, имеет четкий недирекционный ответ на движение в темноте (рис. 1, А), однако при повышении фонового освещения до 1 люкс ответ превращается в дирекционный; наблюдается резкое уменьшение количества разрядов (рис. 1, Б). Второй нейрон (рис. 1, В, Г) имеет недирекционный ответ в темноте

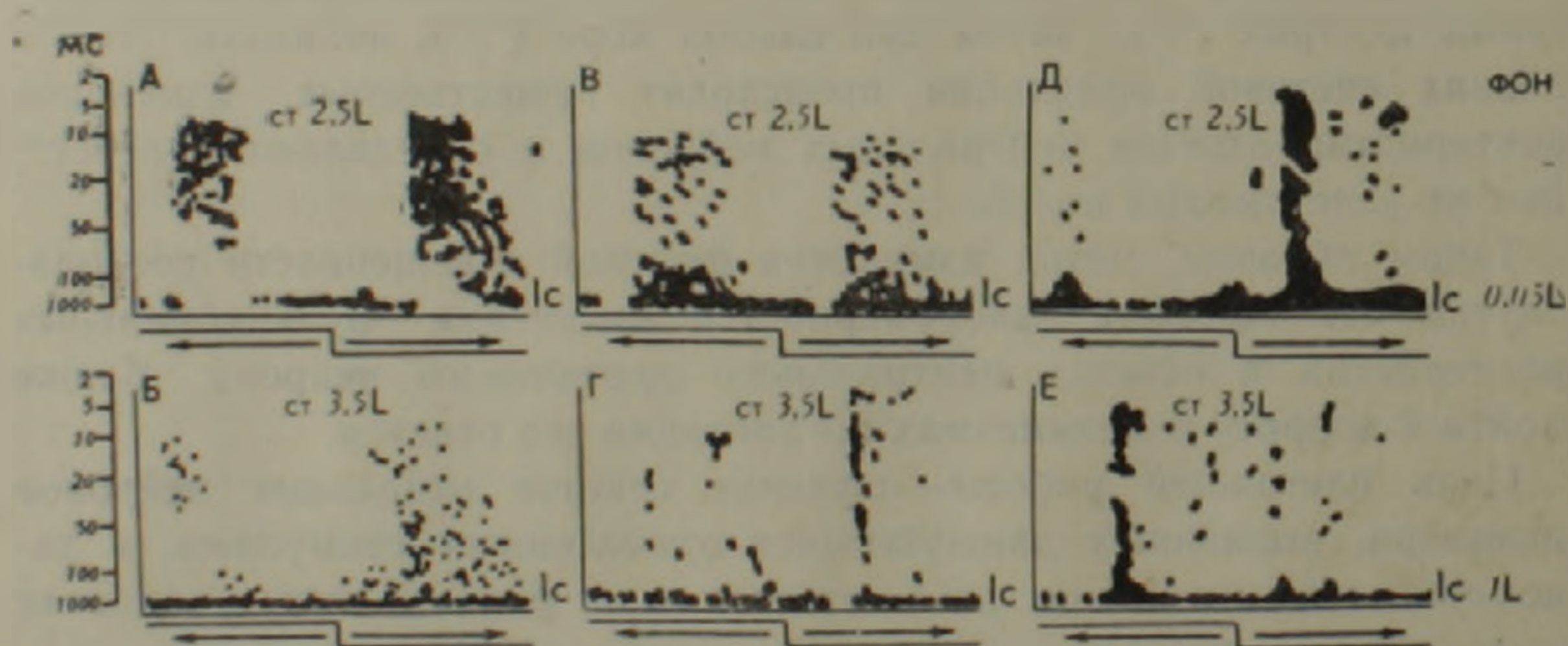


Рис. 1. Превращение недирекционных ответов двух нейронов (А и В) в дирекционные (Б и Г) при повышении уровня фонового освещения. Д, Е—изменение предпочитаемого направления движения (Д) дирекционного нейрона на противоположное направление движения (Е) при фоновом освещении 1 люкс. На оси абсцисс—время раздражения (1 сек), на оси ординат—межимпульсный интервал в мсек. Освещенность стимула (СТ) указана на каждом кадре, освещенность фона—справа на рисунке

(рис. 1, В), однако при повышении уровня фонового освещения (рис. 1, Г) ответ становится четким дирекционным с предпочитаемым направлением движения слева—направо. Всего у 6 нейронов было обнаружено изменение предпочитаемого направления движения под влиянием

световой адаптации. На рис. 1, Д, Е показано, что нейрон имеет дирекционный ответ с предпочитаемым направлением слева—направо в темноте (рис. 1, Д), который превращается в дирекционный с предпочитаемым направлением справа—налево в условиях световой адаптации (рис. 1, Е).

Особый интерес представило для нас изучение ответов нейронов, обладавших сложной структурой рецептивных полей с несколькими возбудимыми центрами, расположенными по нашим предположениям в приграничной зоне (¹¹). На рис. 2 изображены виды изменений ответов таких нейронов при повышении уровня фонового освещения.

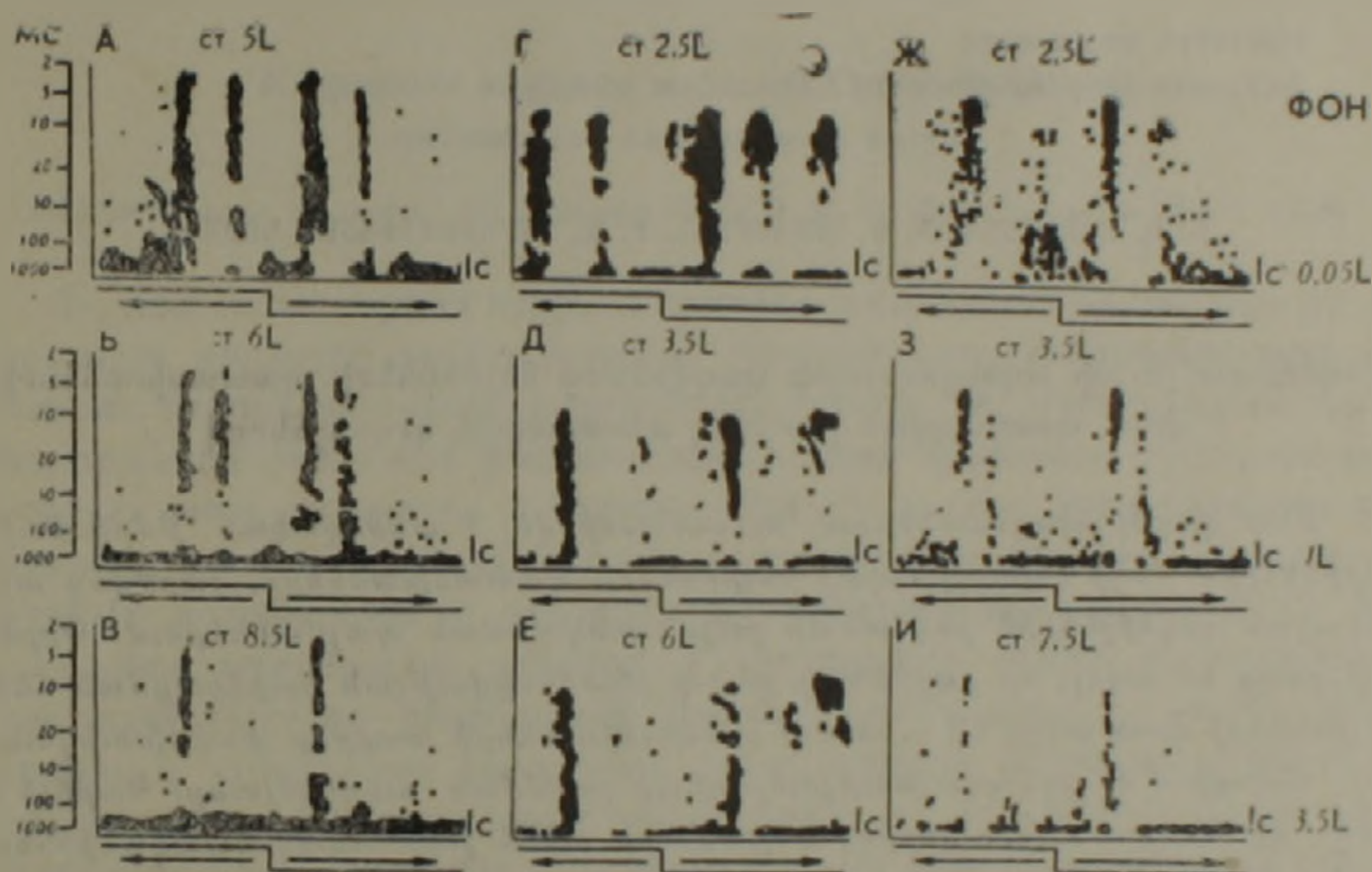


Рис. 2 Изменение ответов трех нейронов (А, Б, В, Г, Д, Е; Ж, З, И) в условиях световой адаптации. Обозначения те же, что на рис. 1

Ответы на движение у таких нейронов характеризуются чередованными во времени залпами импульсов на оба направления движения. У нейрона, представленного на рис. 2, А—В, характер ответа не меняется при фоновом освещении 1 люкс, однако при увеличении интенсивности фонового освещения (3,5 люкс) исчезают чередованные залпы импульсов и ответ превращается в обычный недирекционный тип ответа. У второго нейрона (рис. 2, Г—Е) характер ответа меняется сразу же, при первом повышении уровня освещенности фона (рис. 2, Д) и сохраняется таким же при дальнейшем повышении уровня фонового освещения (рис. 2, Е). Наблюдались случаи, когда чередованные разряды, нечеткие в темноте (рис. 2, Ж), становились четкими после достижения определенного уровня освещенности фона (рис. 2, З), а при еще большем освещении фона ответ ослабевал и чередованность разрядов исчезала (рис. 2, И), превращаясь в обычный недирекционный ответ.

Полученные результаты показывают, что общее освещение сетчатки в значительной мере изменяет ответы нейронов пульвинара на движущиеся стимулы по сравнению с ответами в темноте. Влияние световой адаптации выражается в угнетении активности нейрона и уменьшении количества разрядов в ответе. О существенных перестройках в рецептивном поле нейронов пульвинара говорит факт изменения предпочтительного направления ответа дирекционного нейрона. Подобные изменения описаны Нунокава (6) у нейронов 18 поля зрительной коры кошки. Нейроны с чередованными залпами разрядов большей частью теряют характерный образ ответа при световой адаптации, что указывает на перестройку возбудимых элементов в рецептивном поле.

Институт физиологии
Академии наук Армянской ССР

Ա. Ա. ՀԵՐԻՄՅԱՆ, Գ. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Բ. Ա. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ-ԿՈՉԱԿ

Ընդհանուր լույսի ազդեցությունը պուլվինարի նեյրոնների պատասխանների վրա, առաջացված շարժվող տեսողական գրգռիչներով

Սուր փորձի պայմաններում ուսումնասիրվել է տեսողական թմրի ետին կորիզներից մեկի (պուլվինարի) նեյրոնների պատասխանները, շարժվող տեսողական գրգռիչներին ընդհանուր լույսի փոփոխման պայմաններում: Փորձերը ցույց են տվել, որ ընդհանուր լույսի ինտենսիվության բարձրացման հետ նեյրոնների մոտ տեղի են ունենում պատասխանների տարրեր փոփոխություններ, փոխվում է նաև ղգայնությունը դեպի շարժման ուղղությունը: Կարելի է ասել, որ հետադրությամբ կորիզի նեյրոնները ունեն շարժունակ հատկանիշներ, որոնք փոփոխվում են ընդհանուր պայմանների փոփոխությանը զուգընթաց:

ЛИТЕРАТУРА—ԿՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

- ¹ R. Granit, Acta Physiol. Scand., 7, №1 (1944). ² H. Barlow, R. Fitzhugh, S. Kuffler, J. Physiol., 137, № 2 (1957). ³ S. Kuffler, J. Neurophysiol., 16, № 1 (1953). ⁴ B. Harutiunian-Kozak, K. Dec, A. Wrobel, Acta Neurobiol. Exp., 34, № 5 (1974). ⁵ B. Harutiunian-Kozak, A. Wrobel, K. Dec, Acta Neurobiol. Exp., 35, № 2 (1975). ⁶ S. Nunokawa, Jap. J. Physiol., 23, № 1 (1973). ⁷ H. Sasaki, Y. Saito, D. M. Bear, F. R. Evlin, Jap. J. Physiol., 13, № 3 (1971). ⁸ И. А. Иллевел, И. Н. Вердеревская, В. Г. Марченко, ДАН СССР, т. 217, № 2 (1974). ⁹ А. А. Экимян, Б. А. Арутюнян-Козак, Г. Ե. Григорян, Нейрофизиология, 10, № 4 (1978). ¹⁰ R. S. Snider, W. T. Niemer, The University of Chicago Press, 1969. ¹¹ Б. А. Арутюнян-Козак, Д. К. Хачванкян, А. С. Оганян, А. Г. Туманов, Нейрофизиология, 10, № 1 (1978).

УДК 619.825.2

ФИЗИОЛОГИЯ

Э. А. Оганесян, Ш. Т. Аветикян

К природе влияния мозжечка на нейронную активность гиппокампа кошки

(Представлено чл.-корр. АН Армянской ССР В. В. Фанарджяном 28/VI 1979)

В настоящее время вопрос о природе связи между мозжечком и гиппокампом является дискуссионным. Прекращение, укорочение или удлинение гиппокампальной судорожной активности, наступающей после раздражения червя или фастигиального ядра мозжечка, допускало возможную связь мозжечка с гиппокампом (¹⁻³). Это подтвердилось работами с регистрацией вызванных раздражением мозжечка гиппокампальных потенциалов с различными скрытыми периодами (⁴⁻⁷). На основании дегенерации аксонов в гиппокампе после двустороннего электролитического разрушения фастигиального ядра, а также регистрации в гиппокампе вызванных раздражением фастигиального ядра потенциалов с коротким скрытым периодом (1 мс) Хинт и Харпер (⁸) выдвинули предположение о наличии прямых моносинаптических путей, идущих от мозжечка к гиппокампу.

В противоположность этим данным Фанарджян и Донхоффер не обнаружили вызванных потенциалов в гиппокампе кошки после раздражения мозжечка (⁹). Отсутствие влияния мозжечка на активность нейронов гиппокампа было показано также Сегалом и Блумом (¹⁰) на крысах. В подтверждение этой серии работ морфологически не было обнаружено дегенерированных волокон в гиппокампе кошки после разрушения верхних пожек мозжечка и восходящего компонента крючковидного пучка (¹¹).

Противоречивость литературных данных и тот факт, что результаты вышеотмеченных исследований в основном были получены на наркотизированных животных, продиктовали необходимость проведения настоящего исследования на бодрствующих кошках в условиях хронического эксперимента. Целью настоящего исследования было изучение природы связи мозжечка с гиппокампом путем анализа особенностей влияния ядер мозжечка на нейронную активность дорсального гиппокампа.

Опыты были поставлены на 5 кошках. В ядра мозжечка (фастигиальное и промежуточное) стереотаксически вживляли биполярные медногаллиевые электроды с межэлектродным расстоянием в 1 мм. Раздражение производили стимулами длительностью 0,1—0,5 мс, с силой тока 2—5 мА и с частотой 1/сек, а также пачкой (3—5 импульсов в пачке) высокочастотных импульсов (частота 100—300/сек). За редкими исключениями эффективным оказывалось раздражение пачкой высокочастотных стимулов с интенсивностью, близкой к пороговой (порог определяли по движению мышц кошки).

Была использована методика жесткой фиксации головы ненаркотизированной кошки в стереотаксическом аппарате, разработанная в нашей лаборатории (¹²). Отведение экстраклеточной активности нейронов зоны СА₃ дорсального гиппокампа осуществляли с помощью вольфрамовых электродов, вводимых шаговым микроманипулятором по стереотаксическим координатам (¹³).

При анализе активности нейронов был привлечен метод построения постстимуляционных гистограмм (ПСГ) и накопительного частотного распределения на анализаторе NTA 1024 (ВНР). Опыты завершали гистологическим контролем.

Испытывали влияние раздражения ядер мозжечка на активность 196 нейронов дорсального гиппокампа ипси- и контралатеральной сторон относительно точки раздражения. Из 86 нейронов контралатерального гиппокампа в 51,2% случаев на раздражение ядер мозжечка выявлялась определенная реакция, в 48,8% случаев влияния ядер мозжечка на гиппокампальные нейроны не обнаруживалось. На 110 нейронах ипсилатерального гиппокампа раздражение оказалось неэффективным в 79,1% случаев.

В таблице показано процентное соотношение различно реагирующих нейронов гиппокампа на раздражение фастигиального и промежуточного ядер. Соотношения реагирующих нейронов гиппокампа на раздражение обоих ядер оказались приблизительно одинаковыми. Более эффективным оказалось раздражение контралатеральных ядер мозжечка. К смешанным эффектам отнесены случаи, когда раздражение вызывало двуфазную реакцию: торможение с последующим облегчением.

Соотношение различных типов влияний ядер мозжечка на фоновую активность нейронов контралатерального и ипсилатерального дорсального гиппокампа (в %)

Эффекты раздражения	Фастигиальное ядро		Промежуточное ядро	
	контралатеральная сторона	ипсилатеральная сторона	контралатеральная сторона	ипсилатеральная сторона
Облегчение	50,9	17,9	36,4	16,3
Торможение	1,9	1,5	—	—
Смешанный эффект	5,7	3	3	2,3
Отсутствие эффекта	41,5	77,6	60,6	81,4

Преобладающим эффектом раздражения ядер мозжечка на активность гиппокампальных нейронов является облегчение. Раздражение ядер мозжечка вызывало облегчение в 88,6 и 82,6% случаев из общего числа реагирующих нейронов контралатеральной и ипсилатеральной сторон соответственно. Облегчение выражалось в увеличении частоты фоновой активности нейронов в ответ на раздражение как фастигиального, так и промежуточного ядер (рис. 1, А, Г). Реакция облегчения нейронов гиппокампа в ответ на раздражение мозжечка выявлялась со скрытым периодом от 20 до 100 мс (преобладали скрытые периоды в 20—60 мс).

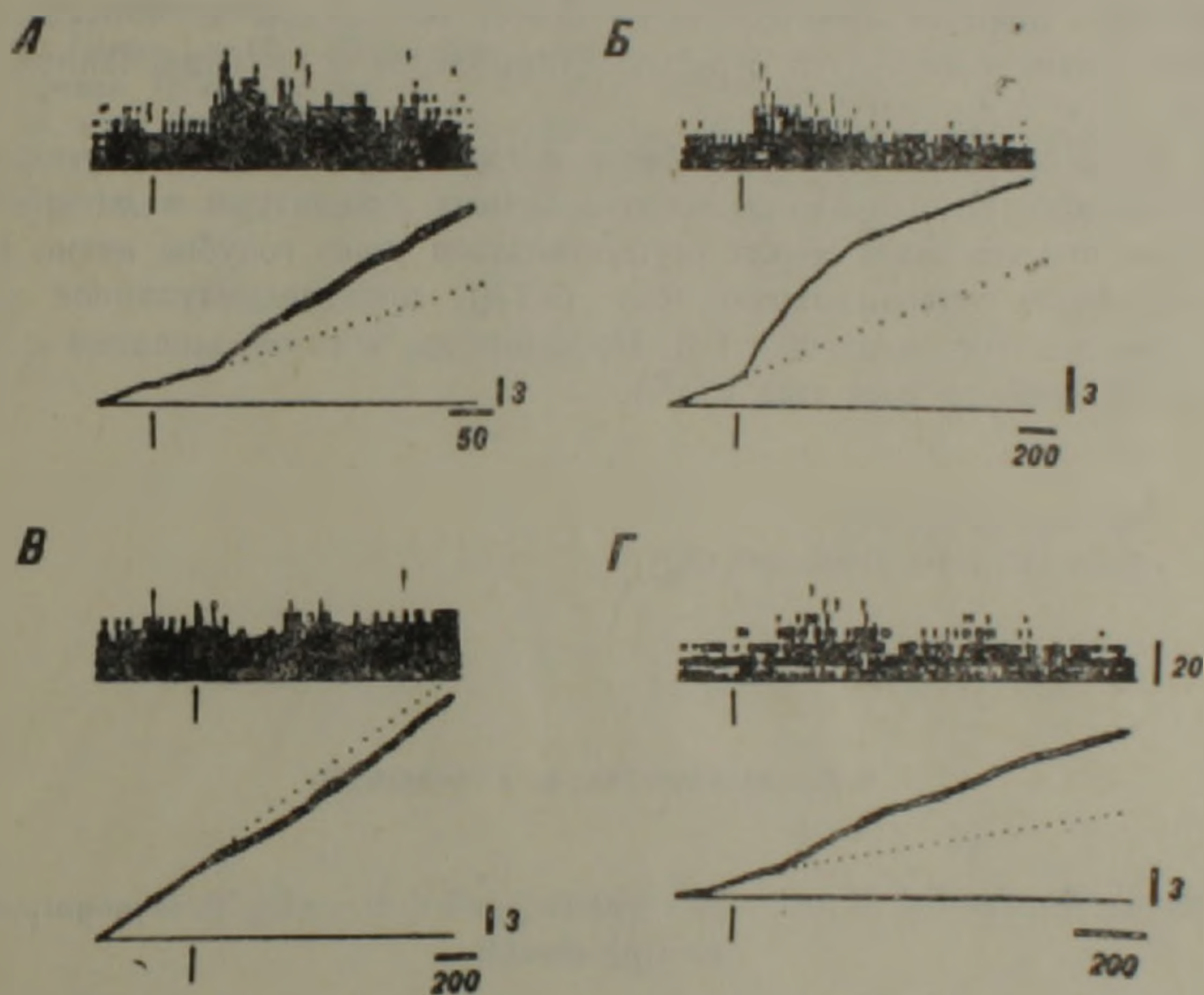


Рис. 1. Эффекты раздражения ядер мозжечка на активность нейронов дорсального гиппокампа. Облегчающие эффекты при раздражении контралатерального фастигиального (А, Б) и ипсилатерального промежуточного (Г) ядер. В—эффект подавления при раздражении контралатерального фастигиального ядра. А—1/сек, Б, В, Г—300/сек (раздражение пачкой, 3 импульса в пачке).

Верхние ряды—постстимуляционные гистограммы активности нейронов гиппокампа. Нижние ряды—накопительное частотное распределение, полученное при интегрировании постстимуляционных гистограмм. Прерывистые линии экстраполированы от уровня фоновых разрядов. Калибровка 20 наложений для ПСГ. Отметка времени дана в миллисекундах.

Скрытые периоды этих облегчающих ответов совпадали со скрытыми периодами макропотенциалов гиппокампа, вызванных раздражением ядер мозжечка, описанных нами в опытах с кроликами (14). Они

аналогичны также длиннолатентным вызванным потенциалам, зарегистрированным Снайдером с соавторами в опытах, поставленных на кошках ⁽⁶⁾.

Увеличение частоты стимуляции приводило к усилению эффекта или укорочению скрытых периодов (рис. 1, А, Б) облегчающего эффекта. Эффекты подавления активности гиппокампа при раздражении мозжечка наблюдались редко и регистрировались в виде слабо выраженного урежения фоновой активности нейронов (рис. 1, В).

Таким образом не были зарегистрированы коротколатентные ответы нейронов гиппокампа в ответ на раздражение ядер мозжечка и, в противоположность некоторым данным литературы ^(7, 8), не было обнаружено наличия прямых связей между мозжечком и гиппокампом. Такой вывод согласуется с результатами недавно опубликованной работы Кроу и др. ⁽¹⁵⁾.

Следовательно, связь мозжечка с гиппокампом является полисинаптической. На основании анализа данных литературы надо предполагать, что эта связь может осуществляться через голубое пятно ⁽¹⁶⁾, вентральную тегментальную зону (VTA), интерпедункулярное ядро ⁽⁷⁾ или же через ядра шва ⁽¹⁷⁾. Проекции же этих образований к гиппокампу хорошо известны ^(18, 19).

Институт физиологии

Академии наук Армянской ССР

Է. Ա. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Շ. Տ. ԱՎԵՏԻԿՅԱՆ

Կատվի հիպոկամպի նեյրոնային ակտիվության վրա ուղեղիկի ազդեցության բնույթի մասին

Կատունների մոտ խրոնիկ լիորձի պայմաններում ուսումնասիրվել է ուղեղիկի կենտրոնական կորիզների (ֆաստիգիալ և միջանկյալ) գրգռման ազդեցությունը դորսալ հիպոկամպի արտաբջջային ակտիվության վրա: Հետազոտվել են հիպոկամպի, գրգռման կետի նկատմամբ հակառակ և նույն կողմերի 196 բջիջների ակտիվությունը, HTA—1024 տիպի անալիզատորի վրա կուտակվող հետգրգռիչ հիստոգրամների կառուցման միջոցով: Ուղեղիկի երկու կորիզների գրգռման ժամանակ գերակշռող էֆեկտը հանդիսացել է նեյրոնների ֆոնային ակտիվության հաճախականացումը 20—60 մվ-ի գաղտնի շրջանով: Հազվագույտ նկատվել են ճնշման էֆեկտները: Ուղեղիկի երկու կորիզների գրգռմանը պատասխանող նեյրոնների հարաբերակցությունը մոտավորապես նույնն է: Ստացված տվյալները ցույց են տալիս ուղղակի, միաինապոիկ կապերի բացակայությունը ուղեղիկի կորիզների և հիպոկամպի միջև:

ЛИТЕРАТУРА—ՄԱՐԿԱԿԱՆՈՒՄ

¹ K. Iwata, R. S. Snider, EEG and Clinical Neurophysiol., 11 439 (1959). ² T. L. Babb, A. G. Mitchell, P. H. Crandall, In the cerebellum, epilepsy and behaviour, New-York, London, Plenum press, 37 (1974). ³ R. Mutani, I. Bergamini, T. Doriguzzi, Epilepsia, 10, 351 (1969). ⁴ B. K. Anand, C. Malhotra, B. Singh, S. Dua, J. Neurophysiol., 22, 451 (1959). ⁵ J. A. Whiteside, R. S. Snider, J. Neurophysiol., 16, 397 (1953). ⁶ A. Maitl, R. S. Snider, Epilepsia, 16, 521 (1975). ⁷ R. S. Snider, A. Maitl, J. Neurosci. Res., 2, 133 (1976). ⁸ R. G. Heath, Y. W. Harper, Exp. Neurol., 45, 268 (1974). ⁹ V. V. Fanardjan, H. Donhoffer, Acta Physiol. Hung., 24, 321 (1964). ¹⁰ M. Segal, F. E. Bloom, Brain Res., 72, 99 (1974). ¹¹ Y. F. Lago, Exp. Brain Res., 23, 117 (1975). ¹² В. В. Фанарджян, С. А. Саакян, С. А. Арутюнян, Ю. С. Геворкян, И. А. Мамасян, Физиолог. журн. СССР, 56, 1060 (1970). ¹³ F. Reinoso-Suarez, Topographischer Hirnoatlas der Kalze. Darmstadt, 1961. ¹⁴ Г. Рейм, Э. А. Оганесян, Д. Шмидт, В. Гашке, в сб. „Нейронные механизмы интегративной деятельности мозжечка“, Ереван, 1979, в печати. ¹⁵ T. Y. Cross, D. M. Finch, T. L. Babb, Epil. Neurology, 57, 486 (1977). ¹⁶ R. S. Snider, Brain Res., 88, 59 (1975). ¹⁷ A. Brodal, F. Walberg, E. Taber, J. Comp Neurol., 114, 261 (1950). ¹⁸ M. Segal, L. Story, Brain Res., 78, 1 (1974). ¹⁹ R. Y. Moore, A. E. Hilaris, J. Comp. Neurol., 161, 71 (1975).

