

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱԿ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

ISSN 0321-1339

ՉԵՎՈՒՅՑՆԵՐ
ДОКЛАДЫ
REPORTS

Նիւնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ

Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год

Founded in 1944. Published quarterly

Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԲԱՐՅԱՆ

Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Ա. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Է. Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ. Ա. ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ս. Ա. ՀԱՄԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ. Գ. ՂԱՐԱԳՅՈՋՅԱՆ, ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԲՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Ֆ. Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ. Մ. ՍԵՂՈՎՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ (պապ. քարտուղար)

Главный редактор академик В. С. ЗАХАРЯН

Редакционная коллегия: академик А. А. АВETИСЯН (зам. главного редактора), академик С. А. АМБАРЦУМЯН, академик Э. Г. АФРИКЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Г. А. БРУТЯН, академик Э. С. ГАБРИЕЛЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, академик К. Г. КАРАГЕЗЯН, академик Р. М. МАРТИРОСЯН, академик Ф. Т. САРКИСЯН, академик Д. М. СЕДРАКЯН, академик А. А. ТАЛАЛЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

Editor-in-chief academician V. S. ZAKARYAN

Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician A. A. AVETISSYAN (vice-editor-in-chief), academician G. E. AFRIKIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician G. A. BRUTIAN, academician E. S. GABRIELIAN, academician K. G. KARAGEUZYAN, academician E. M. KAZARYAN, academician R. M. MARTIROSYAN, academician F. T. SARGSSIAN, academician D. M. SEDRAKIAN, academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician A. A. TALALIAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

Խմբագրությունի հասցեն՝ 0019 Եր–ան 19, Մարշալ Բաղրամյանի պող. 24գ

Адрес редакции: 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

Phone: (37410) 56-80-67

URL: <http://elib.sci.am>

© НАН РА. Президиум. 2009

© Издательство "Гитутюн"
НАН РА. 2009

ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

- Վ. Հ. Մարտիրոսյան, Ս. Ե. Մկրտչյան – Ոչ-կարաթեոդորյան տիրույթների վրա բացթողումներ ունեցող բազմանդամներով միջինում մոտավորությունների մասին 109
- Վ. Ա. Միդոդյան, Գ. Ս. Մաճկալյան – Միապատիկ գլխավոր կորության վեկտորներով նորմալ յարթ միևիմալ կիսաէնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ 119
- Գ. Ա. Մարգարյան – Երրորդ եզրային խնդրից ծնված դիֆերենցիալ օպերատորային փնջերի սեփական ֆունկցիաների մասին 126

ՄԵԽԱՆԻԿԱ

- Լ. Ա. Մովսիսյան – Սեյսմապաշտպանության համակցված մի եղանակի մասին 137
- Ա Վ. Վարդանյան – Լայնական մագնիսական դաշտում բարակ անվերջ մագնիսաառածգույկան սալերի տատանումների հաճախությունների որոշումը անալիտիկ և թվային մեթոդներով 145
- Ս. Հ. Մայրգոսյան – Միկրոալոյար առածգական բարակ թաղանթների դինամիկական տեսություններ 154
- Ա Ս. Ավետիսյան, Վ. Ս. Խաչատրյան – Երկրաչափական ոչ գծայնության հաշիւառման առանձնահատկությունները պիեզոէլեկտրական միջավայրում վերջավոր լայնությամբ էլեկտրոսառածգական ալիքի տարածման դեպքում 167

ՖԻԶԻԿԱ

- Է Պ. Կոկոսյան – Լիթիումի նիոբատի լեզիրեցված բյուրեղներում պարբերաբար բևեռացված դոմենային կառուցվածքների ստացման առանձնահատկությունները 176

ԿԵՆՍԱԲԻՄԻԱ

- Թ Վ. Կիպրիյան, Վ. Օ. Թոփուզյան, Ի. Ռ. Կարապետյան, Տ. Ս. Խաչատրյան – Յոդմեթիլատ 2- (դիմեթիլամինա) էթիլ N-(ո-մետոքսիբենզոյլ)-DL-ֆենիլալանինի էթերի ազդեցությունը ողնուղեղի առանձին մոտոնեյրոնների ֆոնային և հարուցված ակտիվության վրա նրա կիսահատումից առաջ և հետո 183

ԲՈՒՅՍՆԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

- Վ Վ. Ղազարյան, Վ. Ա. Դավթյան, Վ. Ս. Մարտիրոսյան – Խոշորառեջ կաղնու ջրային ռեժիմի շարժրնթացը կախված մացառային ծանրաբեռնվածությունից 189

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян – О приближении в среднем полиномами с пропусками на не-Каратеодориевых областях 109

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян – Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны 119

Г. А. Саргсян – О собственных функциях дифференциальных операторных пучков, порожденных третьей краевой задачей 126

МЕХАНИКА

Л. А. Мовсисян – Об одном комбинированном способе сейсмозащиты 137

А. В. Вардьян – Аналитическое и численное определение частот колебаний тонких бесконечных магнитоупругих пластин в поперечном магнитном поле 145

С. О. Саркисян – Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек 154

А. С. Аветисян, В. М. Хачатрян – Особенности учета геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде 167

ФИЗИКА

Э. П. Кокляян – Особенности получения периодически поляризованных доменных структур в легированных кристаллах ниобата лития 176

БИОХИМИЯ

Т. К. Киприян, В. О. Топузян, И. Р. Карапетян, Т. С. Хачатрян – Влияние йодметилата 2-(диметиламино)этилового эфира N-(п-метоксибензоил)-DL-фенилаланина на фоновую и вызванную активность одиночных мотонейронов спинного мозга до и после его гемисекции 183

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян, В. А. Давтян, В. С. Мартиросян – Динамика водного режима дуба крупнопольничкового в зависимости от порослевой нагрузки 189

CONTENTS

MATHEMATICS

- V. A. Martirosian, E. S. Mkrtchyan* – On the Mean Approximation by Polynomials with Gaps on non-Caratheodory domains..... 109
- V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan* – Normally Flat Minimal Semi-Einstein Submanifolds with Principal Curvature Vectors of Multiplicity 119
- G. A. Sargsyan* – On Eigenfunctions of Differential Operator Bundles Generated by the Third Boundary Problem..... 126

MECHANICS

- L. A. Movsisyan* – On One Combined Method of Seismoprotection 137
- A. V. Vardanyan* – Analytical and Numerical Solutions of Thin Infinite Magnetoelastic Plate Vibrations' Frequencies in Transversal Magnetic Field 145
- S. H. Sargsyan* – Dynamic Theories of Micropolar Thin Elastic Shells 154
- A. S. Avetisyan, V. M. Khachatryan* – Features of Finite Amplitude Electroelastic Waves Propagation in the Piezoelectric Medium Taking into Account Geometrical Nonlinearity 167

PHYSICS

- E. P. Kokanyan* – Peculiarities of Periodically Poled Domain Structures Creation in Doped Lithium Niobate Crystals 176

BIOCHEMISTRY

- T. K. Kipriyan, V. O. Topuzyan, I. R. Karapetyan, T. S. Khachatryan* – Iodmethylate 2-(Dimethylamino) Ethyl N-(n-Methoxybenzoyl)-DL- Phenilalanyn Ester Influence on Background and Evoked Activity of Spinal Cord Single Motoneurons before and after its Hemisection 183

PLANTS PHYSIOLOGY

- V. V. Kazaryan, V. A. Davtyan, V. S. Martirosyan* – The Dynamics of *Quercus Macranthera* Water Regime Depending on Shoots Load 189

УДК 517.53

Член-корреспондент НАН РА В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян

**О приближении в среднем полиномами с пропусками
на не-Каратеодориевых областях**

(Посвящается 80-летию академика А. А. Талаляна)

(Представлено 23/1 2009)

Ключевые слова: *приближение в среднем по площади, полином с пропусками, не-Каратеодориева*

Введение. Настоящая работа продолжает начатое в [1] исследование вопросов аппроксимации в среднем полиномами с пропусками. Полученные в указанной статье результаты относились к случаю аппроксимации на классе Каратеодориевых множеств (областей). В данной работе аналогичные вопросы изучаются для известных подклассов не-Каратеодориевых областей (области с граничными разрезами, традиционные луночки, обобщенные луночки). Найденные результаты подтверждают подмеченное в [1] наблюдение, что при аппроксимации в среднем (по сравнению с равномерной аппроксимацией) возникают интересные специфические особенности.

Чтобы сформулировать основные результаты статьи, введем некоторые обозначения. Пусть, как обычно, \mathbb{N} , \mathbb{R} , \mathbb{R}_+ будут, соответственно, множества из всех натуральных, вещественных, положительных вещественных чисел, \mathbb{C} и $\bar{\mathbb{C}}$ – комплексная и расширенная комплексная плоскости. Для подпоследовательности $\{p_n\}_1^\infty$ из \mathbb{N} обозначим через $\{q_n\}_1^\infty$ последовательность, дополнительную к $\{p_n\}_1^\infty$ относительно \mathbb{N} . Положим

$$D_r(a) = \{z : |z - a| < r\} \text{ для } a \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R}_+,$$

$$\Delta_{\alpha, \beta}^s = \{z : |z| \leq s, |\arg z - \alpha \log |z|| \leq \beta\} \text{ для } \alpha \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}_+, \beta \in [0, \pi).$$

Функцию $V : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую условию $t \frac{V'(t)}{V(t)} \uparrow +\infty$ при $t \downarrow 0$, будем называть регулярной. Пусть Ω – ограниченная область

плоскости \mathbb{C} . Через $\partial\Omega$, $\bar{\Omega}$, Ω_+ будем обозначать, соответственно, границу, замыкание и неограниченную компоненту связности дополнения $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ к ее замыканию. Пусть $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, – банахово пространство, элементами которого являются все определенные на Ω измеримые комплексные функции комплексного переменного $z = x + iy$, имеющие конечную норму

$$\|f\|_p = \left\{ \iint_{\Omega} |f|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Подпространство этого пространства, состоящее из голоморфных на Ω функций, обозначим $H_p(\Omega)$. Определим также банахово пространство $h_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, состоящее из всех определенных на Ω действительных функций u , которые гармоничны на Ω и имеют конечную норму $\|u\|_p$. Плоскую меру Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{C}$ будем обозначать $meas E$.

1. Метрический критерий аппроксимации Мергеляна – Бреннана. Класс Каратеодориевых множеств (областей) определяется своими *топологическими* свойствами и, как известно, на множествах этого класса всегда возможна полиномиальная аппроксимация в среднем. Что касается возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на не-Каратеодориевых множествах (областях), то она оказывается зависящей уже от *метрических* свойств множества аппроксимации в окрестности ее границы. Этот феномен впервые был открыт академиком М.В. Келдышем в 1939 г. [2] и исследовался в дальнейшем рядом авторов. Приведем сперва общий критерий полиномиальной аппроксимации в среднем, справедливый для широкого класса не-Каратеодориевых областей.

Теорема А. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, для которой существует последовательность точек $\{\zeta_n\}_1^\infty$, имеющая следующие свойства:

- 1) замыкание множества точек $\{\zeta_n\}_1^\infty$ содержит $\partial\Omega$;
- 2) каждую точку ζ_n можно соединить с $\partial\Omega_+$ спрямляемой дугой Γ такою, что:
 - a) $meas \Omega_t(\Gamma) \leq V(t)$,
 - где $\Omega_t(\Gamma) = \{z \in \Omega : dist(z, \Gamma) \leq t\}$, $t > 0$, а V – какая-либо регулярная мажоранта;
 - b) $\int_0^1 \log \log \frac{1}{V(t)} dt = +\infty$.

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Отметим, что теорема А и ее точность доказаны Дж. Бреннаном [3]. Они обобщают и усиливают соответствующие результаты С.Н. Мергеляна (см. [4,5]).

Соответствующие теореме А результаты об аппроксимации в среднем лакунарными полиномами приводятся ниже в теоремах 1 – 4.

Теорема 1. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А, $0 \in \Omega_{\infty}$, и $\{p_n\}_1^{\infty}$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p_n} = 1. \quad (1)$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^{\infty}$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 2. Пусть $\{p_n\}_1^{\infty}$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{p_n} = 1, \quad (2)$$

Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А, $0 \in \partial\Omega_{\infty}$, и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_{\infty}$ такая, что $z_m \rightarrow 0$ и

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{|z_m|}{\text{dist}(z_m, \partial\Omega_{\infty})} < \infty. \quad (3)$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^{\infty}$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 3. Пусть $\{p_n\}_1^{\infty}$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А, $0 \in \partial\Omega_{\infty}$, и является достижимой граничной точкой для Ω_{∞} . Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^{\infty}$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, при выполнении одного из следующих условий:

$$1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty, \quad \frac{n}{q_n} \downarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty;$$

$$2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log q_n)^{1+\varepsilon}}{q_n} < \infty \quad \text{для } \varepsilon > 0;$$

3) 0 является достижимой граничной точкой прямолинейным отрезком для

$$\Omega_\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q_n} < \infty.$$

Теорема 4. Пусть Ω – ограниченная односвязная область, удовлетворяющая предположениям теоремы А, $0 \in \bar{\Omega}_-$ и $\Omega \subset \Delta_{\beta}^a$, $\{p_n\}_1^{\infty}$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} - \frac{\beta}{\pi} \log r \right] = +\infty \quad (4)$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^{\infty}$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Замечание 1. Интересно отметить, что теорема 3 (в отличие от теорем 1,2,4) не имеет естественного аналога в случае равномерной аппроксимации лакунарными полиномами (см. [6]).

2. Области с граничными разрезами. Перейдем к рассмотрению более узких (по сравнению с теоремой А) классов не-Каратеодориевых областей. Выделим сперва области с граничными разрезами. Их типичные примеры доставляют Жордановы области с удаленными разрезами, которые являются Жордановыми дугами, соединяющими внутренние точки области с ее граничными точками. Ради простоты мы ограничимся здесь случаем круга с радиальными разрезами. Приведем сначала соответствующий этому случаю результат о полиномиальной аппроксимации в среднем.

Пусть E – совершенное нигде не плотное точечное множество на окружности $\partial D_r(a)$. Для каждого $w \in E$ обозначим

$$S_w = \{z : \arg(z-a) = \arg(w-a), r-\rho \leq |z-a| \leq r\}, \quad 0 < \rho < r,$$

и положим $S_E = \bigcup_{w \in E} S_w$. Фиксируя ρ , рассмотрим множество

$$\Omega_E = D_r(a) \setminus S_E.$$

Итак, Ω_E – ограниченная односвязная область, граница которой $\partial\Omega_E$ состоит почти целиком из радиальных разрезов. Для $w \in \partial D_r(a)$ и $t \in \mathbb{R}_+$ положим

$$\Delta_t(w) = D_t(w) \cap \partial D_r(a)$$

и обозначим через Λ линейную меру Лебега.

Теорема В (см. [3]). Пусть существует счетное множество E' , всюду плотное в E , такое, что для каждого $w \in E'$:

1) $\Lambda(\Delta_r(w) \cap (\partial D_r(a) \setminus E)) \leq V(t)$ при $t \leq t(w)$, для некоторой регулярной мажоранты V ;

$$2) \int_0^{\infty} \log \log \frac{1}{V(t)} dt = +\infty.$$

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1 \leq p < \infty$.

Следующий результат является лакунарным аналогом теоремы В.

Теорема 5. Пусть область Ω_E удовлетворяет предположениям теоремы В, причем $r \leq |a|$, и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из \mathbb{N} удовлетворяет условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} - \frac{\beta}{\pi} \log r \right] = +\infty, \quad \beta = \arcsin \frac{r}{|a|}.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega_E)$, $1 \leq p < \infty$.

3. Лунообразные области. Другой важный класс не-Каратеодориевых областей образуют лунообразные области (луночки). Такие области были хронологически первыми не-Каратеодориевыми областями, изученными в связи с возможностью полиномиальной аппроксимации в среднем. Традиционно луночка понимается как односвязная область, топологически эквивалентная области, ограниченной двумя внутренне касающимися окружностями. Для традиционных луночек имеют место следующие результаты.

Теорема С. Пусть Ω – луночка с кратной граничной точкой в начале координат, которая расположена между двумя окружностями $\partial D_{|a|}(a)$ и $\partial D_{|a|/2}(a/2)$. Обозначим через $l(r)$ линейную меру множества $\Omega \cap \partial D_r$, и предположим, что $r \frac{l'(r)}{l(r)} \uparrow +\infty$ при $r \downarrow 0$. Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} \log l(r) dr = -\infty.$$

Теорема D. Пусть Ω – луночка с кратной граничной точкой x_0 , для которой существует прямолинейный отрезок L от точки x_0 вовнутрь ограниченной компоненты для $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ такой, что $\text{dist}(z, L) \geq C \text{dist}(z, x_0)^k$ для любого $z \in \Omega$ и некоторых постоянных $k > 0, C > 0$. Обозначим через $l(r)$ линейную меру множества $\Omega \cap \partial D_r(x_0)$ и предположим, что:

$$1) r \frac{l'(r)}{l(r)} \uparrow +\infty \text{ при } r \downarrow 0;$$

$$2) \int_0^1 r^{k-1} \log \log \frac{1}{l(r)} dr = +\infty.$$

Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Замечание 2. Теорема С доказана академиками А.Л. Шагиняном и М.М. Джрбашяном (необходимость и достаточность интегрального условия, соответственно). Теорема D принадлежит Дж. Бреннану. Существенное различие между ними состоит в том, что в теореме С луночка Ω не имеет выступа в кратной граничной точке, а в теореме D – может иметь (см. [3]).

Обратимся к лакунарным версиям теорем С, D.

Теорема 6. Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы С, $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left[\sum_{p_n \leq r} \frac{1}{p_n} - \frac{1}{2} \log r \right] = +\infty.$$

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 7. Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D, $0 \in \Omega_-$, и $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию (1).

Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 8. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию (2), и Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D, $x_0 = 0$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_-$ такая, что $z_m \rightarrow 0$ и выполняется условие (3). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Теорема 9. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D и $x_0 = 0$. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, при выполнении одного из условий 1) – 3) теоремы 3.

Теорема 10. Пусть Ω – луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы D, $0 \in \overline{\Omega_-}$ и $\Omega \subset \Delta_{\beta}^{\alpha}$, $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , удовлетворяющая условию (4). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

4. Обобщенные лунообразные области. По сравнению с традиционными луночками, рассмотренными в 3, более обширный класс не-Каратеодориевых облас-

тей образуют обобщенные лунообразные области. Изучение возможности полиномиальной аппроксимации в среднем на таких областях было начато в работах Дж. Бреннана, В. Хавина, В. Мазьи (см [7-9]). Напомним, что под обобщенной лунообразной областью понимается область Ω , замыкание которой $\bar{\Omega}$ есть компактное связное множество с дополнением $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$, состоящим из двух компонент связности: неограниченной компоненты Ω_- и ограниченной компоненты G , причем $\partial G \cap \partial \Omega_- \neq \emptyset$. В частном случае, когда множество $\partial G \cap \partial \Omega_-$ состоит из одного элемента, получается традиционная луночка. Типичным примером обобщенной лунообразной области является внутренняя змейка – односвязная область, намазгивающаяся изнутри круга к его границе.

Для обобщенных луночек имеют место следующие теоремы о полиномиальной аппроксимации в среднем (см [10]).

Теорема Е. Пусть Ω – обобщенная луночка, $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega} = \Omega_- \cup G$. Предположим, что граница ограниченной компоненты ∂G является Жордановой кривой класса C^1 и ее внешняя единичная нормаль n удовлетворяет условию Липшица

$$|n(z_1) - n(z_2)| \leq C|z_1 - z_2| \text{ при всех } z_1, z_2 \in \partial G,$$

где $C > 0$ – постоянная. Тогда множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, тогда и только тогда, когда

$$\int_{\partial G} \log \delta(z) |dz| = -\infty, \quad \delta(z) = \text{dist}(z, \partial \Omega_-).$$

Теорема F. Пусть Ω – обобщенная луночка и ω – гармоническая мера на ∂G относительно какой-либо фиксированной точки $x_0 \in G$. Тогда существует универсальная постоянная $\tau > 0$ такая, что если

$$\int_{\partial G} \log \delta(z) d\omega(z) = -\infty,$$

то множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$ при $1 \leq p < 3 + \tau$.

Как и в случае традиционных луночек, для обобщенных луночек справедливы следующие лакунарные версии теорем Е, F.

Теорема 11. Пусть обобщенная луночка Ω и число p удовлетворяют предположениям теоремы Е (или F), $0 \in \Omega_-$ и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из \mathbb{N} удовлетворяет условию (1). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$.

Теорема 12. Пусть подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из \mathbb{N} удовлетворяет условию (2), а обобщенная луночка Ω и число p удовлетворяют предположениям теоремы E (или F), $0 \in \partial\Omega_-$ и существует последовательность $\{z_m\} \subset \Omega_-$ такая, что $z_m \rightarrow 0$ и выполняется условие (3). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$.

Теорема 13. Пусть $\{p_n\}_1^\infty$ – подпоследовательность из \mathbb{N} , Ω – обобщенная луночка, удовлетворяющая предположениям теоремы E (или F) и $0 \in \bar{\partial}\Omega_-$. Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < 2$, при выполнении одного из условий 1) – 3) теоремы 3.

Теорема 14. Пусть обобщенная луночка Ω и число p удовлетворяют предположениям теоремы E (или F), $0 \in \bar{\Omega}_\infty$ и $\Omega \subset \Delta_p^\alpha$, подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из \mathbb{N} удовлетворяет условию (4). Тогда система функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ полна в пространстве $H_p(\Omega)$.

5. Аппроксимация гармоническими полиномами. Вопросы полиномиальной аппроксимации в среднем, как хорошо известно, тесно связаны с вопросами аппроксимации в среднем вещественными гармоническими полиномами. Указанная связь подтверждается, в частности, следующим результатом (см. [3]).

Теорема G. Пусть обобщенная луночка Ω такова, что множество полиномов плотно в пространстве $H_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда множество вещественных гармонических полиномов плотно в пространстве $h_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.

Комбинируя теорему G с одной из теорем 6 – 14, получим следующее следствие.

Теорема 15. Пусть обобщенная луночка Ω , число p и подпоследовательность $\{p_n\}_1^\infty$ из \mathbb{N} удовлетворяют предположениям одной из теорем 6 – 14. Тогда множество вещественных частей полиномов по системе функций $\{z^{p_n}\}_1^\infty$ плотно в пространстве $h_p(\Omega)$.

Институт математики НАН РА

Ереванский государственный университет

Член-корреспондент НАН РА В. А. Мартиросян, С. Е. Мкртчян

**О приближении в среднем полиномами с пропусками
на не-Каратеодориевых областях**

Представлены некоторые новые результаты о возможности аппроксимации полиномами с пропусками. Аппроксимация осуществляется в норме пространства L_p , $1 \leq p < \infty$ на не-Каратеодориевых областях комплексной плоскости. Найдены лакунарные версии некоторых результатов А.Шагиняна, М.Джрбашяна, С.Мергеляна, Дж. Бреннана.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Վ. Հ. Մարտիրոսյան, Ս. Ե. Մկրտչյան

Ոչ-Կարաթեոդորյան տիրույթների վրա բացթողումներ ունեցող
բազմանդամներով միջինում մոտավորությունների մասին

Ներկայացվում են որոշ նոր արդյունքներ բացթողումներ ունեցող բազմանդամներով մոտավորության վերաբերյալ: Մոտավորությունները կատարվում են L_p , $1 \leq p < \infty$, տարածության նորմով կոմպլեքս հարթության ոչ-Կարաթեոդորյան տիրույթների վրա: Գտնված են Ա. Շահինյանի, Մ. Ջրբաշյանի, Ս. Մերգելյանի, Ջ. Բրեննանի որոշ արդյունքների լակունար տարբերակներ:

Corresponding member of NAS RA V. A. Martirosian, S. E. Mkrtchyan

**On the Mean Approximation by Polynomials with Gaps
on Non-Caratheodory Domains**

Some new results on the possibility of approximation by polynomials with gaps are presented. The approximations are done in the norm of the space L_p , $1 \leq p < \infty$, on the non-Caratheodory domains in the complex plain. The lacunary versions of some results by A. Shahinian, M. Jerbashian, S. Mergelian, J. Brennan are obtained.

Литература

1. *Мартиросян В.А., Мкртчян С.Е.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2008. Т. 43. №6. С. 43-50.
2. *Keldysh M.V.* – Matem. Sbornik. 1939. V. 5(47). P. 391-401.
3. *Brennan J.E.* – Ark. Matem. 1977. V. 15. P. 117-168.
4. *Мергелян С.М.* – ДАН СССР. 1955. Т. 105. №5. С. 901-904.
5. *Мергелян С.М., Тамадян А.Р.* – Изв. АН АрмССР. Математика. 1954. Т. 7. С.1-17.
6. *Мартиросян В.А.* – Матем. сборник. 1983. Т. 120. С. 451-472.
7. *Brennan J.E.* – Ark. Matem. 1973. V. 11. P. 167-189.
8. *Хавин В.П., Мазья В.Г.* – Вестник ЛГУ. 1968. Т. 13. С. 64-74.
9. *Хавин В.П., Мазья В.Г.* – Успехи мат. наук. 1972. Т. 27. С. 67-138.
10. *Brennan J.E.* – Izv. Nation. Akad. Nauk. Armenii. Matem. 2004. V. 39. P. 5-48.

МАТЕМАТИКА

УДК 5 4.752.44

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы
подмногообразия с однократными главными векторами кривизны

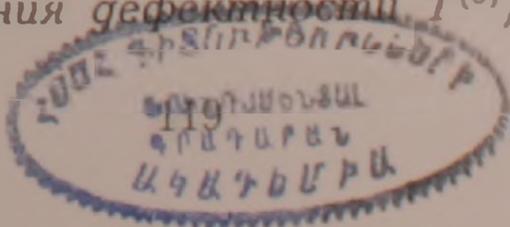
(Посвящается 80-летию академика АН Эстонии Ю. Г. Лумисте)

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/III 2009)

Ключевые слова: *Ric-полусимметрические многообразия, эйнштейновы и полуэйнштейновы многообразия*

Римановы *Ric*-полусимметрические многообразия являются обобщениями симметрических, полусимметрических и эйнштейновых многообразий. В настоящее время наиболее глубоко исследованы полусимметрические подмногообразия, теории которых посвящена монография Ю.Г. Лумисте [1]. В [2] доказано, что *Ric*-полусимметрические многообразия разлагаются в прямое произведение двумерных, эйнштейновых и полуэйнштейновых многообразий. Примеры полуэйнштейновых подмногообразий были построены в [3-6]. В [5] в евклидовом пространстве E_n описано нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие с кратными главными векторами кривизны. В настоящей работе в E_n дается геометрическое описание нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с однократными главными векторами кривизны. Справедлива следующая

Теорема. Пусть в евклидовом пространстве E_n m -мерное нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие M индекса дефектности $\mu \geq 1$ имеет в каждой точке q ($q \geq 2$) ненулевых однократных главных векторов кривизны n_1, \dots, n_q , образующих между собой постоянные углы всюду на M . Если соответствующие этим векторам собственные распределения $T^{(1,1)}, \dots, T^{(1,q)}$ параллельны на M друг относительно друга (но не относительно распределения дефектности $T^{(0)}$), то векторы n_1, \dots, n_q



имеют равные модули, образуют попарно равные углы, а M локально имеет вид прямого произведения $E_{m-q-1} \times \bar{M}$, где E_{m-q-1} — плоскость размерности $m - q - 1$, а \bar{M} представляет собой конус над q -мерным подмногообразием N , которое, как подмногообразие в E_n , обладает следующими свойствами: является эйнштейновым и нормально плоским, принадлежит гиперсфере евклидова пространства $E_{n-m+q+1}$, минимально в этой гиперсфере и представляет собой прямое произведение q окружностей одного и того же радиуса.

Приведем сначала необходимые определения и формулы. Пусть $O(E_n)$ — главное расслоение ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_n\}$ в E_n . Отождествляя точку x с ее радиус-вектором, имеем

$$dx = \omega^A e_A, de_A = \omega_B^A e_B, \omega_B^A + \omega_A^B = 0, A, B, C = 1, \dots, n, d\omega^A = \omega^B \wedge \omega_B^A, d\omega_A^B = \omega_A^C \wedge \omega_C^B.$$

Пусть M является m -мерным подмногообразием в E_n . Тогда расслоение $O(E_n)$ может быть приведено к главному расслоению $O(M, E_n)$ адаптированных ортонормированных реперов $\{x, e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$, характеризуемых тем, что $e_i \in T_x(M)$, $i, j, \dots = 1, \dots, m$, $e_\alpha \in T_x^\perp(M)$, $\alpha, \beta, \dots = m+1, \dots, n$. В силу этого по известной схеме (см. [1], [5]) получим

$$\omega^\alpha = 0, \omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j, h_{ij}^\alpha = h_{ji}^\alpha, \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = h_{ijk}^\alpha \omega^k, h_{ijk}^\alpha = h_{ikj}^\alpha (= \bar{\nabla}_k h_{ij}^\alpha),$$

$$\bar{\nabla} h_{ijk}^\alpha \wedge \omega^k = h_{ij\beta}^\alpha \Omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \Omega_i^k - h_{ik}^\alpha \Omega_j^k, \bar{\nabla} h_{ij}^\alpha = dh_{ij}^\alpha + h_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha - h_{kj}^\alpha \omega_i^k - h_{ik}^\alpha \omega_j^k.$$

Здесь $\bar{\nabla}$ — связность Ван дер Вардена — Бортолотти, ∇ — риманова связность на M , определяемая формами ω_i^j , а ∇^\perp — нормальная связность, определяемая формами ω_β^α . Функции h_{ij}^α являются компонентами второй α_2 фундаментальной формы. Формулы

$$\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha \omega^k \wedge \omega^l, \Omega_\alpha^\beta = d\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta \omega^k \wedge \omega^l$$

$$R_{ikl}^j = - \sum_\alpha h_{i[k}^\alpha h_{l]j}^\alpha, R_{\alpha kl}^\beta = - \sum_i h_{i[k}^\alpha h_{l]i}^\beta$$

определяют формы кривизны и компоненты тензоров кривизны R и R^\perp связностей $\bar{\nabla}$ и ∇^\perp соответственно. Компоненты R_{ik} тензора Риччи R_1 определяются по формуле $R_{ik} = R_{ikl}^l = \sum_\alpha (h_{il}^\alpha h_k^{\alpha l} - H^\alpha h_{ik}^\alpha)$, где $h_k^{\alpha l} = h_{kl}^\alpha$, а $H^\alpha = h_{ij}^\alpha \delta^{ij}$ — компоненты вектора средней кривизны $H = H^\alpha e_\alpha$. Если $H = 0$, то подмногообразие называется минимальным.

Пусть подмногообразие M является нормально плоским, т.е. $R_{\alpha ij}^\beta = 0$. Тогда все матрицы $\|h_{ij}^\alpha\|$ коммутируют между собой. В силу этого в некотором ортонормированном репере они могут быть приведены к диагональному виду $\|h_i^\alpha \delta_{ij}\|$. Тогда

$$R_{ik} = \rho_i \delta_{ik}, \quad \rho_i = \sum_\alpha [(\lambda_i^\alpha)^2 - H^\alpha \lambda_i^\alpha].$$

Нормальные векторы $n_i = \lambda_i^\alpha e_\alpha$ называются главными векторами кривизны нормально плоского подмногообразия в E_n . Легко видеть, что $H = n_1 + \dots + n_m$.

Пусть $T_x^{(0)}$, $T_x^{(1)}$, T_x обозначают пространства дефектности, кодефектности и относительной дефектности подмногообразия M в точке x . Если на $T_x^{(1)}$ тензор Риччи имеет только одно ненулевое собственное значение, то подмногообразиие M называется полуэйнштейновым. Справедливо включение $T_x' \subset T_x^{(0)}$. В [5] доказано, что а) пространство дефектности нормально плоского минимального подмногообразия M в E_n в каждой точке совпадает с пространством относительной дефектности, б) если коразмерность нормально плоского минимального полуэйнштейнова подмногообразия M в E_n равна $n - m$, то в схемах главных векторов кривизны, в которых углы между векторами попарно равны, максимальное число векторов может быть равно $n - m + 1$. Угол φ между векторами определяется равенством $\cos \varphi = -(q - 1)^{-1}$. За всеми остальными сведениями отсылаем к монографиям [1,7,8].

Доказательство теоремы. Пусть m -мерное нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразиие M в E_n имеет только q различных однократных ненулевых главных векторов кривизны n_1, \dots, n_q и нулевой главный вектор кривизны кратности $\mu \geq 1$. Тогда $\dim T_x^{(1)} = q$. Поскольку M является минимальным, то $\rho_i = |n_i|^2$ и условие полуэйнштейновости равносильно $|n_i|^2 = \rho$. Таким образом $n_1 + \dots + n_q = 0$, $|n_1| = \dots = |n_q| = \sqrt{\rho}$. В дальнейшем будем предполагать, что всюду на M векторы n_i образуют между собой постоянные углы, которые не меняются от точки к точке. Поскольку модули векторов n_i равны, то существует ортогональное преобразование, которое переводит вектор n_1 в вектор n_i для каждого $i > 1$.

Следовательно, $\lambda_i^\alpha = a_{i\beta}^\alpha \lambda_1^\beta$, $i > 1$, где элементы матрицы $A_i = (a_{i\beta}^\alpha)$ являются постоянными. Поскольку нормальная связность подмногообразия M плоская, то нормальные к M векторные поля e_α можно выбрать так, чтобы они были параллельными в нормальном расслоении, что равносильно $\omega_\beta^\alpha = 0$ (см.[7]).

Уравнения подмногообразия в настоящем случае принимают следующий вид:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^\alpha = \lambda_i^\alpha = \delta_{ij} \omega^j, \quad (d\lambda^\alpha) \delta_{ij} + (\lambda_j^\alpha - \lambda_i^\alpha) \omega_j^i = h_{ijk}^\alpha \omega^k,$$

где в левой части нет суммирования по i . Пусть адаптированный к M ортонормрепер выбран так, что

$$e_\varphi \in T_x^{(1)}, \quad e_\gamma \in T_x^{(0)}, \quad e_\alpha \in T_x^\perp(M), \quad \varphi, \phi, \chi = 1, \dots, q, \quad \tau, s, t = q+1, \dots, m, \quad \alpha, \beta = m+1, \dots, n.$$

Пусть $e_\varphi \in T_x^{(1,\varphi)}$, где $T_x^{(1,\varphi)}$ обозначает подпространство касательного пространства $T_x(M)$, на котором каждая матрица $\|h_{ij}^\alpha\|$ имеет собственное

значение $\lambda_{\varphi i}^{\alpha}$; $T_x^{(1,\varphi)}$ называется собственным подпространством, соответствующим вектору n_{φ} . Поскольку векторы n_{φ} являются однократными, то $\dim T_x^{(1,\varphi)} = 1$. Рассуждая так же, как и в [5] и [6], будем иметь

$$(\lambda_{\phi}^{\alpha} - \lambda_{\varphi}^{\alpha})\omega_{\phi}^{\alpha} = h_{\varphi\phi k}^{\alpha}, \quad d\lambda_{\varphi}^{\alpha} = h_{\varphi\phi k}^{\alpha}\omega^k, \quad h_{\varphi\phi k}^{\alpha} = 0, \quad \varphi \neq \phi.$$

На основании $\lambda_i^{\alpha} = a_{i\beta}^{\alpha}\lambda_1^{\beta}$ получим $h_{\varphi\phi k}^{\alpha} = a_{\varphi\beta}^{\alpha}h_{11k}^{\beta}$, $\varphi > 1$. Следовательно, $h_{\varphi\phi\phi}^{\alpha} = 0$ при $\varphi > 1$. Если $k = 1$, то из $a_{\varphi\beta}^{\alpha}h_{111}^{\beta} = 0$ следует, что $h_{111}^{\beta} = 0$. Таким образом, $h_{\varphi\phi\phi}^{\alpha} = 0$ для любого φ . Так же, как и в [5] и [6], получаем следующую систему:

$$d \ln |\lambda_{\varphi}^{\alpha}| = F_r \omega^r, \quad \omega_{\varphi}^r = F_r \omega^{\varphi}, \quad \omega_{\varphi}^{\phi} = 0, \quad \varphi \neq \phi, \quad (1)$$

где $F_r = \rho^{-1} \sum_{\alpha} \lambda_{\varphi}^{\alpha} h_{r\varphi\varphi}^{\alpha}$ не зависит от φ . Легко проверить, что распределение $T^{(1,\varphi)}$ интегрируемо. Его интегральное многообразие представляет собой некоторую кривую, которую обозначим через $M^{(\varphi)}$. Распределение $T^{(1)} = T^{(1,1)} + \dots + T^{(1,q)}$, которое задается системой $\omega^{\alpha} = 0$, $\omega^r = 0$, также является интегрируемым. Его интегральное многообразие максимальной размерности будем обозначать через N . Очевидно, что $\dim N = q$. Так же, как и в [5] и [6], доказывается, что N локально является прямым произведением кривых $M^{(\varphi)}$, т.е. $N = M^{(1)} \times \dots \times M^{(q)}$, имеет плоскую нормальную связность и $\omega_r^s = \Gamma_{rt}^s \omega^t$. Внешнее дифференцирование уравнений (1) и применение леммы Картана приводит к следующей системе:

$$dF_r = (F_s \Gamma_{rt}^s + F_r F_t) \omega^t, \quad \sum_r (F_r)^2 + \sum_{\alpha} \lambda_{\varphi}^{\alpha} \lambda_{\phi}^{\alpha} = 0, \quad \varphi \neq \phi. \quad (2)$$

Если рассматривать N как подмногообразие в M , то из второго уравнения следует, что на M секционные кривизны в направлениях $e_{\varphi} \wedge e_{\phi}$ отрицательны и равны между собой. Это значит, что скалярные произведения векторов n_1, \dots, n_q отрицательны и равны между собой. Так как модули этих векторов равны то равны и отрицательны косинусы углов между этими векторами. Поэтому все углы равны φ , $90^{\circ} < \varphi \leq 180^{\circ}$. Тогда $\cos \varphi = -\frac{1}{q-1}$ и, следовательно,

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\varphi}^{\alpha} \lambda_{\phi}^{\alpha} = \langle n_{\varphi}, n_{\phi} \rangle = \rho \cdot \cos \varphi = -\frac{\rho}{q-1}, \quad \sum_r (F_r)^2 = \frac{\rho}{q-1}.$$

Отсюда и из (1) следует, что λ_1^{m+1} и F_r постоянны на N . Так как на N $\omega_r^{\alpha} = 0$, $\omega_r^{\phi} = 0$, то нормальное к N векторное поле $\xi = \sum_r F_r e_r$ параллельно в нормальном расслоении. Выбирая параллельное нормальное к N векторное поле e_n так, что $\xi = \eta e_n$, $\eta > 0$, получим $F_r = 0$, $r = 4, \dots, m-1$, $F_m = \eta$. Теперь легко проверить, что N является эйнштейновым подмногообразием.

Если $\eta = 0$, то нетрудно показать, что M является m -мерной плоскостью, т.е. не является полуэйнштейновым подмногообразием. Пусть $\eta \neq 0$.

Поскольку $\omega_r^\varphi = F_r \omega^\varphi$, то $\omega_m^\varphi = -F_m \omega^\varphi = -\eta \omega^\varphi$. Следовательно, отождествляя точку $x \in N$ с радиус-вектором, будем иметь $d(x + \eta^{-1} e_m) = \omega^\varphi e_\varphi + \eta^{-1} \omega_m^\varphi e_\varphi = 0$. Тогда $x + \eta^{-1} e_m = \text{const}$ и подмногообразие N принадлежит некоторой гиперсфере $S^{n-1}(\bar{R})$ пространства E_n , для которой вектор e_m является нормальным. Так как M является минимальным и $F_r = 0$ при $r \neq m$, то нормальный к N вектор ηe_m является вектором средней кривизны для N . Однако поскольку вектор e_m ортогонален к гиперсфере $S^{n-1}(\bar{R})$, то N является минимальным в этой гиперсфере, но не минимальным в E_n .

Поскольку $F_r = 0$ при $r \neq m$ и $F_m = \eta > 0$, то из (2) следует, что $\Gamma_{rt}^m = 0$. Следовательно, $\omega_r^m = 0$ и так как $\omega_r^\varphi = 0$ при $r \neq m$ (что следует из (1)), то распределение K , сопоставляющее каждой точке подмногообразия M линейную оболочку векторов e_r , $r \neq m$, является параллельным на M и вполне интегрируемым. Его интегральное многообразие представляет собой $(m-q-1)$ -мерную плоскость, которую обозначим через E_{m-q-1} . Ортогональное дополнение к K_x в касательном пространстве $T_x(M)$ имеет вид $T_x^{(1,1)} + \dots + T_x^{(1,q)} + L_x$, где L_x — прямая с направляющим вектором e_m . Соответствующее распределение $T^{(1,1)} + \dots + T^{(1,q)} + L$ также параллельно на M и вполне интегрируемо. Его интегральное многообразие будем обозначать через \bar{M} . Следовательно, $M = E_{m-q-1} \times \bar{M}$. Здесь \bar{M} представляет собой $(q+1)$ -мерное полуэйнштейново подмногообразие в $E_{n-m+q+1}$ и имеет коразмерность $n-m$.

Поскольку $de_m = -\eta \omega^\varphi e_\varphi$, то $e_m = \text{const}$ при $\omega^\varphi = 0$, и так как $\eta \neq 0$, то \bar{M} является конусом над N . Так как E_{m-q-1} является евклидовым пространством, то в качестве локальных координат на E_{m-q-1} можно взять прямоугольные декартовы координаты. Тогда $\omega_r^\alpha = 0$ при любых значениях индексов. Отсюда и на основании равенств (1) и (2) получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} d \ln |\lambda_\varphi^{m+1}| &= \eta \omega^m, \quad \omega_r^\varphi = 0, \quad r \neq m, \quad \omega_\varphi^m = \eta \omega^\varphi, \\ \omega_\varphi^\phi &= 0, \quad \phi \neq \varphi, \quad d\eta = \eta^2 \omega^m, \quad \sum_\alpha \lambda_\varphi^\alpha \lambda_\phi^\alpha = -\eta^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Выясним, что представляет собой кривая $M^{(\varphi)}$ при фиксированном значении φ . Поскольку $M^{(\varphi)}$ задается системой $\omega^\alpha = 0$, $\omega^\phi = 0$, $\phi \neq \varphi$, $\omega^r = 0$, то легко проверить, что $d\omega^\varphi = 0$, и можем считать, что $\omega^\varphi = ds_\varphi$, где s_φ — натуральный параметр вдоль $M^{(\varphi)}$. Имея в виду, что λ_φ^α и η являются постоянными при $\omega^r = 0$, легко подсчитать, что

$$\frac{de_\varphi}{ds_\varphi} = n_\varphi + \eta e_m, \quad \frac{d^2 e_\varphi}{ds_\varphi^2} = -(|n_\varphi|^2 + \eta^2) e_\varphi.$$

Отсюда следует, что $M^{(\varphi)}$ содержится в плоскости векторов e_φ и $n_\varphi + \eta e_m$, т.е. является плоской кривой. Поскольку величина $|n_\varphi|^2 + \eta^2$ является постоянной, то $M^{(\varphi)}$ представляет собой окружность радиуса $(|n_\varphi|^2 + \eta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Так как $|n_\varphi| =$

... = $|n_q|$, то все кривые M^ϕ являются окружностями одного и того же радиуса. Таким образом, N является прямым произведением q одинаковых окружностей. На \bar{M} интегральное многообразие распределения L есть прямая с единичным вектором e_m . Обозначим через x^m координату на этой прямой. Поскольку $d\omega^m = \omega^r \wedge \omega_r^m + \omega^\varphi \wedge \omega_\varphi^m + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^m = 0$, то можем считать, что $\omega^m = dx^m$. Подставляя в (3) и интегрируя, находим

$$\eta = (C - x^m)^{-1}, \quad \lambda_\varphi^\alpha = C_\varphi^\alpha (C - x^m)^{-1},$$

где C и C_φ^{m+1} — постоянные интегрирования. Постоянные C_φ^α должны удовлетворять также следующим условиям:

$$\sum_\varphi C_\varphi^\alpha = 0, \quad \sum_\alpha C_\varphi^\alpha C_\phi^\alpha = -1, \quad \varphi \neq \phi, \quad \sum_\alpha (C_\varphi^\alpha)^2 = q - 1. \quad (4)$$

Существование постоянных C_φ^α , удовлетворяющих этим условиям, доказано в [5]. Пусть η и λ_φ^α определяются полученными формулами и пусть выполняются условия (4). Рассмотрим в E_n следующую дифференциальную систему:

$$\begin{aligned} \omega^\alpha &= 0, \quad \omega_\beta^\alpha = 0, \quad \omega_r^\alpha = 0, \quad \omega_s^r = 0, \quad \omega_\varphi^\phi = 0, \\ \omega_\varphi^\alpha &= \lambda_\varphi^\alpha \omega^\varphi, \quad d \ln |\lambda_\varphi^\alpha| = \eta \omega^m, \quad d\eta = \eta^2 \omega^m, \quad \omega_\varphi^m = \eta \omega^\varphi, \quad \omega_\varphi^r = 0, \quad r \neq m. \end{aligned}$$

Путем прямого вычисления легко доказать, что эта система вполне интегрируема. Она и задает описанное выше нормально плоское минимальное полуэйнштейново подмногообразие $M = E_{m-q-1} \times \bar{M}$, что и доказывает существование рассматриваемого класса подмногообразий. Теорема доказана.

Государственный инженерный университет Армении

В. А. Мирзоян, Г. С. Мачкалян

Нормально плоские минимальные полуэйнштейновы подмногообразия с однократными главными векторами кривизны

В евклидовых пространствах дается геометрическое описание нормально плоских минимальных полуэйнштейновых подмногообразий с однократными ненулевыми главными векторами кривизны в предположении, что соответствующие этим векторам собственные распределения параллельны друг относительно друга.

Վ. Ա. Միրզոյան, Գ. Ս. Մաճկալյան

Միապարիկ գլխավոր կորության վեկտորներով նորմալ հարթ մինիմալ
կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևություններ

Էվկլիդեսյան փարածություններում քրվում է միապարիկ ոչ գրոյական գլխավոր կորության վեկտորներով նորմալ հարթ մինիմալ կիսաէյնշտեյնյան ենթաբազմաձևությունների երկրաչափական նկարագրությունը ենթադրությամբ, որ այդ վեկտորներին համապատասխանող սեփական բաշխումները զուգահեռ են իրար նկատմամբ:

V. A. Mirzoyan, G. S. Machkalyan

Normally Flat Minimal Semi-Einstein Submanifolds with Principial Curvature
Vectors of multiplicity

In Euclidean spaces a geometric description of normally flat minimal semi-Einstein submanifolds with non-zero principal curvature vectors of multiplicity is given provided that the eigen distributions, corresponding to these vectors, are parallel with respect to each other.

Литература

1. Lumiste U. Semiparallel Submanifolds in Space Forms. New York: Springer, 2009.
2. Мирзоян В.А. - Изв. вузов. Математика. 1992. N6. С. 80-89.
3. Мирзоян В.А. - Изв. РАН. Сер. математическая, 2003. Т. 67. N5. С. 107-124.
4. Мирзоян В.А. - Математический сборник. 2000. Т. 191. N9. С. 65-80.
5. Мирзоян В.А. - Математический сборник. 2006. Т. 197. N7. С. 47-76.
6. Мирзоян В.А. - Математический сборник. 2008. Т. 199. N3. С. 69-94.
7. Chen B. - Y. Geometry of submanifolds. New York. Marcel Dekker. 1973.
8. Cherr: S.S., Chen W.H., Lam K.S. Lectures on differential geometry, Singapore. World Scientific. 2000.

УДК 517.98

Г. А. Саргсян

**О собственных функциях дифференциальных операторных пучков,
порожденных третьей краевой задачей**

(Представлено академиком В. С. Захаряном 16/III 2009)

Ключевые слова: полнота, квадратичный пучок, собственная функция, спектральный параметр

Исследование некоторых задач математической физики сводится к изучению спектральных свойств квадратичного операторного пучка

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C, \quad (0.1)$$

где B и C – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H .

Пучки вида (0.1) возникают, например, в задаче о движении вязкой жидкости, в задаче о колебаниях электромагнитных и акустических волноводов.

Для этого пучка ставится вопрос о двукратной полноте системы собственных и присоединенных элементов, впервые введенной и изученной М. В. Келдышем [1].

В пространстве H рассмотрим матричный оператор

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -C & -B \end{pmatrix}, \quad (0.2)$$

который порождается квадратичным операторным пучком (0.1) при его линеаризации. М. Г. Крейном и Г. К. Лангером [2] установлена тесная спектральная связь квадратичного операторного пучка (0.1) и ассоциированного с ним оператора (случай, когда оператор B – самосопряженный, C – положительно определенный компактный оператор). В частности показано,

что собственные значения пучка (0.1) и оператора (0.2) совпадают с их собственными и алгебраическими кратностями и что, если у оператора Π в гильбертовом пространстве H имеется полная система корневых векторов, то у операторного пучка (0.1) имеется двукратно полная система собственных и присоединенных элементов (С.П.Э.), и наоборот. Так что полноту системы корневых векторов оператора можно брать как новое определение двукратной полноты С.П.Э. квадратичного операторного пучка (0.1), которое эквивалентно первоначальному определению М. В. Келдыша [1].

Е. [3-11] изучены спектральные свойства как линейных, так и полиномиальных операторных пучков, порожденных смешанными задачами, не разрешенными относительно старшей производной по времени.

Е. настоящей работе рассматривается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных третьей краевой задачей и краевой задачей Дирихле, для квадратичных дифференциальных операторных пучков.

Пусть Ω — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\delta\Omega$. Рассмотрим следующую однородную краевую задачу на собственные значения:

$$K_\lambda(u) = Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \quad (1)$$

$$Gu = \gamma u + \omega x \frac{\partial u}{\partial x} + \omega y \frac{\partial u}{\partial y} |_{\partial\Omega} = 0, \quad (2)$$

где M , N и L — однородные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами второго порядка

$$Mu = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3)$$

$$Nu = b_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4)$$

$$Lu = a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Относительно оператора L предполагается, что он является эллиптическим. В связи с исследованием вышеставленных задач мы будем одновременно рассматривать и задачи Дирихле на собственные значения для тех же дифференциальных пучков:

$$Mu + \lambda Nu + \lambda^2 Lu = 0, \quad (6)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (7)$$

Определение. Отличная от тождественного нуля функция $u_\lambda(x, y) \in W_2^2(\Omega)$ называется обобщенной собственной функцией задачи (1) - (6), (7), соответствующей собственному значению λ , если она удовлетворяет уравнению (1) в обобщенном смысле и $Gu_\lambda \in W_2^1(\Omega)$, $W_2^i(\Omega)$ ($i = 1, 2$) — пространства С. Л. Соболева. $W_2^1(\Omega)$ — множество функций из $W_2^1(\Omega)$, исчезающих на границе $\partial\Omega$ -области в смысле теорем вложения С. Л. Соболева.

Для исследования некоторых общих свойств граничного оператора $Gu = \gamma(x, y)u + \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}$, с помощью предельного перехода получим формулу Грина.

Пусть Ω — ограниченная область двумерного пространства x, y с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Относительно $\gamma(x, y), \alpha(x, y), \beta(x, y)$ предполагается, что они достаточно гладкие функции в замкнутой области $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Легко проверить, что имеют место тождества

$$\alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}v = v\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u) - \frac{\partial \alpha}{\partial x}uv = \frac{\partial}{\partial x}(\alpha v u) - u\frac{\partial}{\partial x}(\alpha v), \quad (8)$$

$$\beta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}v = v\frac{\partial}{\partial y}(\beta u) - \frac{\partial \beta}{\partial y}uv = \frac{\partial}{\partial y}(\beta v u) - u\frac{\partial}{\partial y}(\beta v), \quad (9)$$

Суммируя тождества (8), (9) и интегрируя по области, перейдя от двойного интеграла к интегралу по границе, согласно известной формуле Грина получим

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \left\{ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dx dy &= \int_{\partial\Omega} uv \{ \alpha dy - \beta dx \} - \\ &- \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right\} uv dx dy - \iint_{\Omega} u \left\{ \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, для произвольных функций u и v из $C^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \left\{ \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial u}{\partial y} \right\} v dx dy &= \int_{\partial\Omega} uv \{ \alpha \cos(s, \vec{y}) - \beta \cos(s, \vec{x}) \} ds - \\ &- \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) uv dx dy - \iint_{\Omega} u \left\{ \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dx dy. \end{aligned} \quad (11)$$

С помощью предельного перехода окончательно получаем формулу Грина для граничного оператора G

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} Guv dx dy &= \int_{\partial\Omega} uv (\alpha \cos(s, \vec{y}) - \beta \cos(s, \vec{x})) ds - \iint_{\Omega} uGv dx dy + \\ &+ \iint_{\Omega} \left(2\gamma - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) uv dx dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) справедлива для произвольных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из соболевского пространства $W_2^1(\Omega)$. Для функций $u, v \in W_2^1(\Omega)$ она принимает вид

$$\iint_{\Omega} Guv dx dy = \iint_{\Omega} \left(2\gamma - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) uv dx dy - \iint_{\Omega} uGv dx dy. \quad (12')$$

В частном случае, когда $\alpha(x, y) = \omega x$, $\beta(x, y) = \varpi y$, делая замену переменных $x = r(\alpha) \cos \alpha$, $y = r(\alpha) \sin(\alpha)$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) в (10), формулу Грина (13) приведем к виду

$$\iint_{\Omega} Guv dx dy = \varpi \int_0^{2\pi} uv r^2(\alpha) d\alpha + 2 \iint_{\Omega} (\gamma - \omega) uv dx dy - \iint_{\Omega} uGv dx dy. \quad (13)$$

Производные, входящие в формулы (11), понимаются как обобщенные производные в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

Из формулы Грина (11) легко усмотреть некоторые общие свойства для граничного оператора G , отображающего соболевское пространство $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Лемма 1. При выполнении условий

$$\sigma = \min_{\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}}} \left[2\gamma(x, y) - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0, \quad (14)$$

$$\alpha(x, y) \cos(s, \hat{y}) - \beta \cos(s, \hat{x}) \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega$$

оператор G является положительно определенным (отрицательно определенным) оператором, отображающим W_2^1 в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2. При

$$2\gamma(x, y) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}, \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega} \quad (15)$$

оператор G является антисимметричным оператором, отображающим $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$.

Справедливость этих утверждений вытекает из следующих соотношений:

$$(Gu, u)_{L_2(\Omega)} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \forall u \in W_2^1(\Omega), \quad (16)$$

$$(Gu, v)_{L_2(\Omega)} = -(u, Gv)_{L_2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in W_2^1(\Omega), \quad (17)$$

которые являются непосредственными следствиями формул Грина (12), (12') при условиях (14), (15). Области значений оператора G , действующего,

соответственно, на пространствах $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$, обозначим через $R_*(\Omega) = GW_2^1(\Omega)$ и $R_*(\Omega) = GW_2^1(\Omega)$. Очевидно включение $R_*(\Omega) \subset R_*(\Omega) \subseteq L_2(\Omega)$.

При выполнении условий (14) оператор G имеет обратный G^{-1} , отображающий область значений $R_*(\Omega)$ оператора G на функциональное пространство $W_2^1(\Omega)$.

Обозначим через $h_*(\Omega)$ ($h_*(\Omega)$) множество тех функций $u(x, y) \in W_2^1(\Omega)$ ($W_2^1(\Omega)$), для которых $Gu \in W_2^1(\Omega)$.

Лемма 3. При выполнении следующих условий:

$$\alpha(x, y) = \alpha(x), \quad \beta(x, y) = \beta(y), \quad \gamma(x, y) = \gamma = \text{const}, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial x} \geq 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} \geq 0,$$

$$\delta = \min_{(x, y) \in \Omega} \left[2\gamma - \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right] > 0, \quad (18)$$

$$\alpha(x) \cos(s, \hat{y}) - \beta(y) \cos(s, \hat{x}) \geq 0$$

имеет место неравенство

$$(Gu, u)_{W_2^1(\Omega)} \geq \frac{\delta}{2} \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in h_*(\Omega) \cap W_2^2(\Omega). \quad (19)$$

Доказательство. Действительно, для произвольной функции $u(x, y) \in h_*(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ и в силу леммы 2 имеем:

$$\begin{aligned} (Gu, u)_{W_2^1(\Omega)} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} Gu, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial}{\partial y} Gu, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{L_2(\Omega)} = \\ &= \left(G \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(G \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{L_2(\Omega)} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\geq \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{\delta}{2} \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Из доказанной леммы следует, что оператор G^{-1} , обратный к оператору G , отображающий $W_2^1(\Omega) \cap GW_2^1(\Omega)$ в $W_2^1(\Omega)$, является ограниченным в метрике пространства $W_2^1(\Omega)$.

Будем предполагать, что

$$\alpha(x, y) = wx, \quad \beta(x, y) = wy, \quad \gamma(x, y) = \gamma, \quad (20)$$

где w и γ — действительные постоянные такие, что

$$\gamma > w \geq 0 \quad \text{или} \quad \gamma < w \leq 0. \quad (21)$$

Лемма 4. Для произвольной гладкой функции $u(x, y)$ имеет место следующее соотношение:

$$MGu = (G + 2wI)Mu. \quad (22)$$

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ имеет частные производные до третьего порядка. Тогда имеем

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + wx \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + wy \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \quad (23)$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial x \partial y} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2w \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + wx \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + wy \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial^2 Gu}{\partial y^2} = \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2w \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + wx \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + wy \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}. \quad (25)$$

Умножая равенства (23), (24), (25), соответственно, на c_1, c_2, c_3 и суммируя, получим

$$MGu = \gamma Mu + 2wMu + wx \frac{\partial Mu}{\partial x} + wy \frac{\partial Mu}{\partial y} = GMu + 2wMu.$$

Лемма доказана.

Задача Дирихле (6), (7) в операторной форме эквивалентна изучению следующего квадратичного операторного пучка:

$$L(\lambda)u = Cu + \lambda Bu + \lambda^2 Iu, \quad (26)$$

где $B = -L^{-1}N, C = -L^{-1}M$ — самосопряженные ограниченные операторы С. Л. Соболева, действующие в соболевском пространстве $W_2^1(\Omega)$, I — единичный оператор.

Предполагается, что области значений операторов B и C принадлежат $R_*(\Omega)$. Пучок $L(\lambda)$ при линеаризации, в свою очередь, порождает матричный оператор

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C & B \end{pmatrix}, \quad (27)$$

действующий в ортогональной сумме гильбертовых пространств $H(\Omega) = W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$. Полнота системы собственных векторов матричного оператора \hat{A} в H означает двукратную полноту системы собственных элементов для квадратичного пучка $L(\lambda)$ и, следовательно, для краевой задачи (6), (7).

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L_*(\lambda) = C_* + \lambda B_* - \lambda^2 I, \quad (28)$$

где C_* и B_* — линейные операторы, действующие в пространстве $h_*(\Omega)$ согласно формулам

$$C_*u = G^{-1}CGu, \quad B_*u = G^{-1}BGu, \quad u \in h_*(\Omega) \quad (29)$$

I — единичный оператор в $h_*(\Omega)$. Ассоциированный с этим пучком матричный оператор

$$\hat{A}_* = \begin{pmatrix} 0 & I \\ C_* & B_* \end{pmatrix} \quad (30)$$

действует в ортогональной сумме пространств $\hat{H}(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$. Оператор \hat{A}_* можно представить в виде

$$\hat{A}_* = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{G}, \quad (31)$$

где матричный оператор

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} \quad (32)$$

отображает $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega) \oplus L_2(\Omega)$, а его обратный

$$\hat{G}^{-1} = \begin{pmatrix} G^{-1} & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{pmatrix} \quad (33)$$

отображает $R_*(\Omega) \oplus R_*(\Omega)$ на $W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)$.

Теорема 1. *Гладкие собственные функции краевой задачи (1), (2) являются собственными элементами для квадратичного пучка $L_*(\lambda)$ и наоборот.*

Доказательство. Пусть $u_\lambda(x, y)$ — гладкая собственная функция краевой задачи (1), (2) с собственным значением λ . Тогда в силу леммы 4 имеем

$$K(\lambda)Gu_\lambda = (G + 2\omega I)K(\lambda)u_\lambda = 0. \quad (34)$$

Отсюда в силу существования обратных операторов L^{-1} и G^{-1} заключаем

$$L_*u_\lambda = G^{-1}L^{-1}K(\lambda)Gu_\lambda = 0, \quad u_\lambda(x, y) \in h_*(\Omega). \quad (35)$$

Собратно, пусть $u_\lambda(x, y) \in h_*(\Omega)$ — гладкий собственный элемент квадратичного пучка $L_*(\lambda)$, соответствующий собственному значению λ , тогда, применяя последовательно операторы G и L , из равенства

$$L_*(\lambda)u_\lambda = G^{-1}CGu_\lambda + \lambda G^{-1}BGu_\lambda - \lambda^2 u_\lambda = 0 \quad (36)$$

получаем

$$K(\lambda)Gu_\lambda(x, y) = 0. \quad (37)$$

Отсюда в силу леммы 4

$$(G + 2\varpi I)K(\lambda)u_\lambda(x, y) = 0. \quad (38)$$

Но поскольку существует обратный оператор $(G + 2\varpi I)^{-1}$, то окончательно имеем

$$K(\lambda)u_\lambda(x, y) = 0, \quad Gu_\lambda(x, y) \in W_2^1(\Omega).$$

Теорема доказана.

Вышедоказанная теорема показывает, что краевые задачи (1), (2) вполне характеризуются квадратичным операторным пучком $L_*(\lambda)$, который по построению подобен квадратичному пучку $L(\lambda)$, порожденному (6), (7).

Теорема 2. Пусть $\gamma > \omega \geq 0$ ($\gamma \leq \omega \leq 0$), тогда через двукратно полную в $W_2^1(\Omega)$ систему собственных функций из $W_2^1(\Omega) \cap R_*(\Omega)$ квадратичного операторного пучка $L(\lambda)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций для квадратичного пучка $L_*(\lambda)$ в $h_*(\Omega)$ и обратно, через двукратно полную в метрике $W_2^2(\Omega)$ систему собственных функций пучка $L_*(\lambda)$ в $h_*(\Omega)$ можно построить двукратно полную систему собственных функций пучка $L(\lambda)$ в $W_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $u_{\lambda_n}(x, y)$ — собственная функция для пучка $L(\lambda)$, тогда

$$GL_*(\lambda_n)G^{-1}u_{\lambda_n} = L(\lambda_n)u_{\lambda_n} = 0, \quad (39)$$

т.е. $\nu_{\lambda_n}(x, y) = G^{-1}u_{\lambda_n}(x, y) \in h_*(\Omega)$ является собственной функцией для пучка $L_*(\lambda)$. Двукратная полнота системы $\{u_{\lambda_n}(x, y)\}_{n=1}^\infty$ в $W_2^1(\Omega)$ означает полноту системы вектор-функции $\left\{ \tilde{u}_{\lambda_n} = \begin{pmatrix} u_{\lambda_n} \\ \lambda_n u_{\lambda_n} \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^\infty$ матричного оператора \hat{A} в

$$\hat{H}(\Omega) = W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega).$$

Покажем, что вектор-функция

$$\hat{\nu}_{\lambda_n}(x, y) = \begin{pmatrix} \nu_{\lambda_n} \\ \lambda_n \nu_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^{-1}u_{\lambda_n} \\ \lambda_n G^{-1}u_{\lambda_n} \end{pmatrix} = \hat{G}^{-1}\tilde{u}_{\lambda_n} \quad (40)$$

является собственным вектором для оператора \hat{A}_* .

На самом деле, имеем

$$\hat{A}_*\hat{\nu}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1}\hat{A}\hat{G}\hat{\nu}_{\lambda_n} = \hat{G}^{-1}\hat{A}\tilde{u}_{\lambda_n} = \lambda_n\hat{\nu}_{\lambda_n}. \quad (41)$$

Пусть $\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ — произвольный вектор из $\hat{H}_*(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$.

Рассмотрим вектор

$$\hat{G}\hat{\nu} = \hat{w} \in H(\Omega). \quad (42)$$

Существует последовательность линейных комбинаций из собственных вектор-функций оператора \hat{A} , так что

$$\sum_{k=1}^N d_k^{(N)} u_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}(\Omega)} \hat{w} \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (43)$$

Отсюда в силу непрерывности оператора \hat{G}^{-1}

$$\sum_{k=1}^N d_k^{(N)} \hat{G}^{-1} u_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^N d_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{\hat{H}_*(\Omega)} \hat{G}^{-1} \hat{w} = \hat{v}. \quad (44)$$

Таким образом, для матричного оператора \hat{A}_* система $\{v_{\lambda_k} = \hat{G}^{-1} u_{\lambda_k}\}_1^\infty$ собственных вектор-функций полна в ортогональной сумме $\hat{H}(\Omega) = h_*(\Omega) \oplus h_*(\Omega)$. А это означает, что система собственных функций квадратичного пучка $L_*(\Omega)$ двукратно полна в $h_*(\Omega)$. Обратно, пусть система собственных функций $\{v_{\lambda_k}(x, y)\}_{k=1}^\infty$ пучка $L_*(\lambda)$ двукратно полна в $h_*(\Omega)$ в метрике $W_2^2(\Omega)$. А это означает полноту в метрике $W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Omega)$ системы собственных векторов $\left\{ \hat{v}_{\lambda_k} = \begin{pmatrix} v_{\lambda_k} \\ \lambda_k v_{\lambda_k} \end{pmatrix} \right\}_1^\infty$ матричного оператора \hat{A}_* в $\hat{H}_*(\Omega)$.

Пусть $\hat{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ — произвольный элемент из $\hat{H}(\Omega)$, тогда вектор $\hat{v} = \hat{G}^{-1} \hat{u} = \begin{pmatrix} G^{-1} u_1 \\ G^{-1} u_2 \end{pmatrix} \in H_*(\Omega)$ и поэтому может быть аппроксимирован линейной комбинацией собственных векторов оператора \hat{A}_*

$$\sum_{k=1}^N l_k^{(N)} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{W_2^2(\Omega) \oplus W_2^2(\Omega)} \hat{v} \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (45)$$

В силу непрерывности оператора \hat{G} имеем

$$\sum_{k=1}^N l_k^{(N)} \hat{G} \hat{v}_{\lambda_k} \xrightarrow{W_2^1(\Omega) \oplus W_2^1(\Omega)} \hat{G} \hat{v} = \hat{u} \text{ при } N \rightarrow \infty \quad (46)$$

Легко увидеть, что система $\hat{G} \hat{v}_{\lambda_k} \in \hat{H}(\Omega)$ является системой собственных векторов для оператора \hat{A} . Теорема доказана.

Предположим, что дифференциальные операторы M и L удовлетворяют следующим условиям:

$$\iint_{\Omega} M p p d\Omega > 0, \quad \iint_{\Omega} L p p d\Omega < 0 \quad (*)$$

для всех отличных от нуля полиномов от x и y . В работе [5] при выполнении условия (*) для квадратичного пучка $L(\lambda)$ установлено существование двукратно полной системы полиномиальных собственных функций в $W_2^1(\Omega)$ в случае, когда область Ω — единичный круг. Сопоставление этого результата с вышедоказанной теоремой позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Если область Ω – круг, при выполнении условий (*) и $\gamma > \omega \geq 0$ ($\gamma < \omega \leq 0$) у квадратичного операторного пучка $L_*(\lambda)$, порожденного краевой задачей, имеется двукратная полная система полиномиальных собственных функций в $h_*(\Omega)$

Военный авиационный институт им. маршала А. Ханферянца

Г. А. Саргсян

О собственных функциях дифференциальных операторных пучков, порожденных третьей краевой задачей

Рассматривается спектральная взаимосвязь операторов, порожденных краевой задачей и краевой задачей Дирихле, для квадратичных дифференциальных операторных пучков.

Գ. Ա. Սարգսյան

Երրորդ եզրային խնդրից ծնված դիֆերենցիալ օպերատորային փնջերի սեփական ֆունկցիաների մասին

Ուսումնասիրվում է օպերատորների սպեկտրալ փոխկապակցությունը բացակուսային օպերատորային փնջի համար՝ ծնված եզրային եւ Դիրիխլեի խնդիրներից:

G. A. Sargsyan

On Eigenfunctions of Diferencial Operator Bundles Generated by the Third Boundary Problem

The spectral correlation of operator bundles generated by boundary and Dirichled problems is investigated.

Литература

1. Келдыш М. В. - ДАН СССР. 1951. Т. 77. N1. С. 11-14.
2. Крейн М. Г., Лангер Г. К. - Тр. Междунар. симп. по применению т.ф.к.п в механике сплошной среды. Наука. М. 1965.

3. Александрян Р. А. - ТМО. 1960. Т. 9. С. 455-505.
4. Зеленяк Т. И. - ДАН СССР. 1964. Т. 158. N6. С. 1268-1270.
5. Вирибян Г. В. - ДАН АрмССР. 1966. Т. 43. N 1. С.15-20.
6. Вирибян Г. В. - ДАН АрмССР. 1969. Т. 48. С. 65-70.
7. Акопян Г. С. - ДАН АрмССР. 1980. Т. 70. N2. С. 80-84.
8. Акопян Г. С. - ДАН АрмССР. 1988. Т. 86. N4. С. 147-152.
9. Саргсян Г. А. - Уч. зап. ЕГУ. 1994. N1. С. 19-25.
10. Саргсян Г. А. - ДНАН Армении. 2006. Т. 106. N3. С. 211-217.
11. Саргсян Г. А. - ДНАН Армении. 2006. Т. 106. N4. С. 291-296.

УДК 539.3:624.04

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты

(Представлено академиком Л. А. Агаловяном 21/X 2008)

Ключевые слова: многослойная опора, сейсмическая сила, частота и форма колебаний, оптимизация, сейсмический удар

Одним из эффективных способов сейсмозащиты сооружений является применение так называемых "подушек": они возводятся на основании и представляют из себя многослойную среду из двух материалов. Различным вопросам поведения таких сред посвящены работы [1-3] и др. В [4,5] для сейсмозащиты конструкций предлагалось применение внешних сил, действующих в точках сосредоточенных масс. В дальнейшем [6] обсуждался вопрос о некотором оптимальном выборе этих сил.

В настоящей статье изучается поведение конструкций при наличии упругого основания и его влияние на значение оптимальных сил. Рассматриваются два типа задач — уменьшения или устранения сейсмических сил в заданных точках и эти же вопросы относительно форм колебаний.

1 Выражения для оптимальных внешних сил будем определять исходя из предположения, что рассматриваемая система опирается на слоистую упругую среду. Относительно последней предполагается, что она состоит из чередующихся слоев двух материалов. Сначала определим выражения для приведенных упругих коэффициентов в предположении, что система работает на одномерный сдвиг. Тогда в каждом слое перемещение определится как

$$u_i = A_i x + B_i. \quad (1.1)$$

Предполагается, что имеется $k+1$ слоев с толщиной h_1 и коэффициентом упругости G_1 , и k слоев с данными h_2 и G_2 .

Если принимать, что внешняя плоскость первого слоя неподвижна, а на плоскости последнего слоя действует сдвигающее напряжение τ , то удовлетворяя этим и межслоевым условиям

$$u_i = u_{i+1}, \quad G_1 A_i = G_2 A_{i+1}, \quad (1.2)$$

для перемещения верхнего конца будем иметь

$$u/x=h = \alpha_1 \tau, \quad \alpha_1 = \frac{H_1}{G_1} + \frac{H_2}{G_2}, \quad H_1 = (k+1)h_1, \quad H_2 = kh_2, \quad h = H_1 + H_2. \quad (1.3)$$

Если принимать, что для всего пакета верен линейный закон перемещения по всей толщине, то перемещение при $x = h$ будет

$$u/x=h = \alpha_2 \tau, \quad \alpha_2 = \frac{h^2}{G_1 H_1 + G_2 H_2}. \quad (1.4)$$

Стметим, что, во-первых, $\alpha_1 > \alpha_2$ и, во-вторых, в выражениях α_1 и α_2 характер чередования слоев не проявляется, т.е. имеется суммарный эффект.

2. Изучим вопрос, как изменяются частоты стержня (сооружение моделируется как стержень), когда обычные условия жесткого защемления заменяются упругой связью по (1.3). Рассмотрим два случая, когда в стержне осуществляются сдвиговые и изгибные колебания.

В первом случае для уравнения колебания стержня

$$a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad a^2 = \frac{G}{\rho}, \quad (2.1)$$

один край которого свободен ($\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ при $x = l$), на другом конце вместо обычного условия защемления возьмем

$$G \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_1} v \text{ при } x = 0. \quad (2.2)$$

Для определения частот (ω) имеем

$$\alpha p \operatorname{tg} p = 1, \quad p = \frac{\omega l}{a}, \quad \alpha = \frac{G}{l} \alpha_1. \quad (2.3)$$

При этом формы колебаний будут

$$X_n(x) = \left\{ \cos \frac{\omega_n(l-x)}{a} \right\}. \quad (2.4)$$

На рис.1 приведены кривые первых трех безразмерных частот (p_i) в зависимости от α .

В случае изгиба стержня уравнение движения

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.5)$$

с условиями на концах

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad EJ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{F}{\alpha_1} w = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = l \end{aligned} \quad (2.6)$$

дают следующее характеристическое уравнение:

$$\cos pchp + 1 = \alpha p^3 (chp \sin p + shp \cos p). \quad (2.7)$$

Здесь

$$p^4 = \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 l^4, \quad \alpha = \frac{EJ}{Fl^3} \alpha_1. \quad (2.8)$$

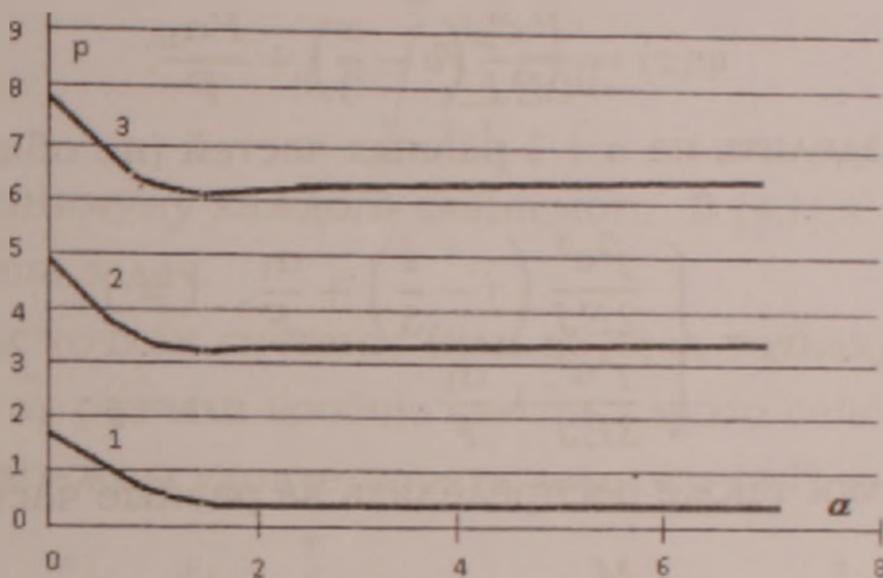


Рис. 1

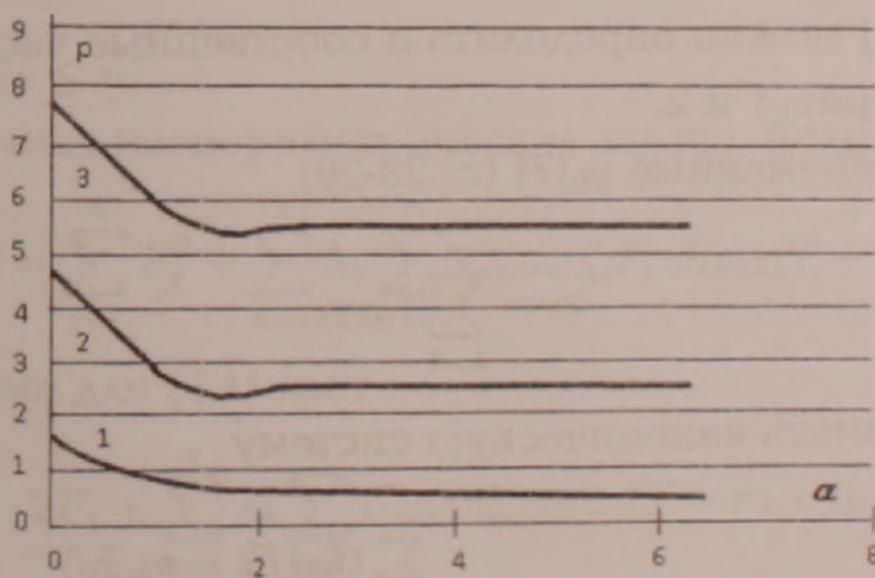


Рис. 2

При этом формы колебаний определяются выражением

$$\begin{aligned} X_n(\xi) = [chp_n(1 - \xi) + \cos p_n(1 - \xi)](chp_n + \cos p_n) - \\ - [shp_n(1 - \xi) + \sin p_n(1 - \xi)](shp_n - \sin p_n), \quad x = \xi l. \end{aligned} \quad (2.9)$$

На рис. 2 приведены кривые первых трех частот (p_1) в зависимости от α . Значение $\alpha = 0$ соответствует случаю жесткого защемления.

Как показывают кривые на рис. 1 и 2, с увеличением α частоты уменьшаются, как и следовало ожидать, при этом очень сильное изменение претерпевает первая частота.

3. Рассматриваемую сплошную систему заменим дискретной системой с n степенью свободы с сосредоточенными массами. Если помимо сейсмических сил в точках сосредоточенных масс m_j приложены также внешние силы F_j , то система уравнений движения такой системы запишется в виде [4,6]

$$X_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} [m_j (\ddot{x}_j - \ddot{x}_0) - F_j]. \quad (3.1)$$

Коэффициенты c_{ij} — перемещение в точке i от единичной силы, приложенной в точке j . Их определим из решения задачи статики изгиба стержня. Прогиб балки от приложенной в точке b силы P с учетом конечных условий (2.6) будет

$$w(x) = \frac{Px^3}{2EJ} \left(b - \frac{x}{3} \right) + \frac{P\alpha_1}{F}. \quad (3.2)$$

Если балку разделить на $n + 1$ равных частей (не обязательно) длиной a , то

$$c_{ij} = \begin{cases} \frac{j^2 a^3}{2EJ} \left(j - \frac{i}{3} \right) + \frac{\alpha_1}{F}, & i \neq j, \\ \frac{j^3 a^3}{3EJ} + \frac{\alpha_1}{F}, & i = j. \end{cases} \quad (3.3)$$

Если массу балки также распределить на равные части, то

$$m_j = m = \frac{M}{n}, \quad M = Fl\rho, \quad (n + 1)a = l. \quad (3.4)$$

По (3.3) из (3.1) можно определить и собственные частоты и сравнить их с аналогичными из рис. 1 и 2.

Вводя новые переменные y_k [7] (с. 28-29)

$$x_i = \sum_{k=1}^n C_{ik} y_k, \quad (3.5)$$

вместо (3.1) будем иметь каноническую систему

$$\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = \Phi_k(t) = \frac{\sum_{j=1}^n C_{ik} (F_j - m_j \ddot{x}_0)}{\sum_{j=1}^n m_j C_{jk}^2}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) определяются обобщенные координаты (собственные формы колебаний) и выражения суммарных воздействий (сейсмических и действующих активных сил) в точках сосредоточенных масс. В частности, при нулевых начальных условиях имеем

$$y_k = \frac{1}{\omega_k} \int_0^t \Phi_k(\tau) \sin \omega_k(t - \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

$$S_k = m_k \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* \int_0^t (m_j \ddot{x}_0 - F_j) \sin \omega_i (t - \tau) d\tau + \sum_{i,j}^n C_{ji} \eta_{ki}^* F_j(t), \quad \eta_{ki}^* = \frac{C_{ki}}{\sum_{q=1}^n C_{qi}^2 m_q}. \quad (3.8)$$

В [6] последний член в (3.8) пропущен, хотя для окончательного ответа это роли не сыграло.

Как видно из (3.8), при наличии упругой связи сейсмические силы уменьшаются, что и естественно, так как уменьшаются собственные частоты.

4. Задачи оптимальности можно ставить по-разному и по-разному определять критерий оптимальности. Как более естественный и наиболее принятый мы потребуем минимум функционала

$$J = \int_0^T \sum_{j=1}^s F_j^2 dt, \quad (4.1)$$

что равносильно минимуму каждого слагаемого. В (4.1) $s \leq n$.

Изучим два типа задач.

1. В некоторых точках системы (или во всех точках) в момент времени $t = T$ уменьшить в α_k раз или вообще свести к нулю сейсмическую силу при условии, что силы должны удовлетворять условию (4.1), т.е.

$$(1 - \alpha_k) \Psi_k(T) = \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* \int_0^T F_j(\tau) \sin \omega_i (T - \tau) d\tau - \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \eta_{ki}^* F_j(T). \quad (4.2)$$

Таких уравнений s ($s \leq n$).

Имеется типичная изопериметрическая задача. Если составить функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^n F_j^2 + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{i,j=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* F_j \sin \omega_i (T - \tau), \quad (4.3)$$

то условие минимума для (4.1) дает

$$2F_j + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{i=1}^n C_{ji} \omega_i \eta_{ki}^* \sin \omega_i (T - \tau) = 0. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2), для определения множителей Лагранжа будем иметь s алгебраических уравнений.

Примеры возьмем самые простые, так как они не претендуют быть непосредственно продиктованными из практики.

Основная частота балки $\omega_0 = 3.516 \left(\frac{EJ}{Ml^3} \right)^{1/2}$ Для получения такой частоты, если заменить ее системой с одной степенью свободы, нужно брать $b = 0.624l$. Единственный коэффициент c_{11} есть

$$c_{11} = \frac{b^3}{3EJ} + \frac{\alpha_1}{F}. \quad (4.5)$$

Суммарная сила в точке сосредоточенной массы

$$S = F(t) - M\omega \int_0^t \ddot{x}_0 \sin \omega(t - \tau) d\tau - \omega \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Например, если сейсмическая сила действует в виде удара и требуется, чтобы в момент $t = \frac{\pi}{2\omega}$ она была устранена, то внешняя сила должна быть

$$F = -\frac{4MI}{\pi} \omega \cos \omega t, \quad I = \int_0^{T_1} \ddot{x}_0 dt, \quad T_1 \ll \frac{2\pi}{\omega}. \quad (4.7)$$

Так как необходимая сила (4.7) пропорциональна частоте, то в зависимости от того, есть в (4.5) второй член или нет, ее максимальное значение сильно изменится. Например, если второй член имеет порядок первого члена, то максимальные значения отличаются друг от друга в 0.707 раза. Возможно, более естественно сравнивать интегралы $\int_0^{\pi} F^2 dt$ при различных ω .

II. Второй тип задач такой – уменьшить или устранить определенные формы колебаний для заданного момента времени при минимальных внешних нагрузках. На основании (3.6) и (3.7) условия, чтобы некоторые координаты уменьшились в α_k раз в момент $t = T$, будут

$$\sum_{j=1}^n C_{jk} \int_0^T F_j(\tau) \sin \omega_k(T - \tau) d\tau = \varphi_k = (1 - \alpha_k) \sum_{j=1}^n \int_0^T C_{jk} \ddot{x}_0 \sin \omega_k(T - \tau) d\tau. \quad (4.8)$$

Таких уравнений будет s .

Критерий качества тот же (4.1). Тогда, составляя функцию

$$\Phi = \sum_{j=1}^s F_j^2 + \sum_{k=1}^s \lambda_k \sum_{j=1}^s C_{jk} F_j \sin \omega_k(T - \tau), \quad (4.9)$$

обеспечим минимум функционала при

$$2F_j + \sum_{k=1}^s \lambda_k C_{jk} \sin \omega_k(T - \tau) = 0. \quad (4.10)$$

Для определения множителей Лагранжа λ_k из (4.3) и (4.10) имеем

$$\sum_{j=1}^s \sum_{q=1}^s \lambda_q C_{jk} C_{jq} a_{kq} = \varphi_k, \quad (4.11)$$

$$4a_{kq} = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_k + \omega_q)T}{\omega_k + \omega_q} - \frac{\sin(\omega_k - \omega_q)T}{\omega_k - \omega_q}, & \omega_k \neq \omega_q, \\ \frac{\sin 2\omega_k T}{2\omega_k} - T, & \omega_k = \omega_q. \end{cases}$$

В качестве примера балку заменим системой с двумя степенями свободы. Если сосредоточенные массы поместить в середине и на конце балки, то коэффициенты c_{ij} будут

$$c_{11} = \frac{l^3}{24EJ} + \frac{\alpha_1}{F}, \quad c_{12} = \frac{5l^3}{48EJ} + \frac{\alpha_1}{F}, \quad c_{22} = \frac{l^3}{3EJ} + \frac{\alpha_1}{F}. \quad (4.12)$$

Без α_1 частоты составят

$$\omega_1^{(0)} = 2.335Q, \quad \omega_2^{(0)} = 15.53Q, \quad Q = \left(\frac{EJ}{Ml^3} \right)^{1/2}. \quad (4.13)$$

Если брать $\frac{\alpha_1}{F} = \frac{l^2}{24EJ}$, то

$$\omega_1 = 2.143Q, \quad \omega_2 = 9.339Q. \quad (4.14)$$

Для первой формы соответственно имеем

$$y_1^{(0)} = \frac{1}{\omega_1^{(0)}} \int_0^t \left(0.1862 \frac{F}{M} - 0.3837 \ddot{x}_0 \right) \sin \omega_1^{(0)}(t - \tau) d\tau, \quad (4.15)$$

$$y_1 = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t \left(1.7072 \frac{F}{M} - 1.2071 \ddot{x}_0 \right) \sin \omega_1(t - \tau) d\tau.$$

Сила приложена в центре длины балки, и целью является устранение первой формы в момент $t = T$. Если, как и в предыдущем примере, предполагать, что сейсмосила действует в виде удара, то для минимальной силы будем иметь выражение

$$F = C \frac{MI \sin \omega(T - t)}{T - \frac{\sin 2\omega T}{2\omega}}. \quad (4.16)$$

Для первого случая $C = 4.121$ и вместо ω должны брать $\omega_1^{(0)}$ из (4.13), а для второго $C = 1.414$ и ω берем из (4.14).

Как и для первого примера, максимальное значение требуемой силы во много раз меньше при упругом основании, чем без него.

Институт механики НАН РА

Л. А. Мовсисян

Об одном комбинированном способе сейсмозащиты

Вопрос о сейсмозащите конструкций при помощи оптимального выбора внешних сил рассматривается в случае, когда они сооружаются на многослойной упругой среде.

Լ. Ա. Մովսիսյան

Մեյսմապաշտպանության համակցված մի եղանակի մասին

Արտաքին ուժերի օպտիմալ ընտրության օգնությամբ կառուցվածքների սեյսմիկ պաշտպանության հարցը քննարկվում է այն դեպքում, երբ վերջիններս դրվում են շերտավոր առաձգական հիմքի վրա:

L. A. Movsisyan

On One Combined Method of Seismoprotection

The problem on seismoprotection of contractions by optimal choosing of external forces in case of their construction on multilaminated elastic fundaments is considered.

Литература

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В. - ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 293-306.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ер. Гитутюн. НАН РА. 2005. 468 с.
3. Aghalovyan LA., Gevorgyan R.S., Sahakyan A.V., Aghalovyan M.L. - Journal of Structural Control. 2001. V. 8. N 2. P. 249-263.
4. Мовсисян Л.А., Хачиян Э.Е. - Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. N3. С. 62-63.
5. Хачиян Э.Е., Мовсисян Л.А. - Сейсмическое строительство. Безопасность сооружений. (ВНИИНТПИ). М. 2004. N1. С. 39-43.
6. Мовсисян Л.А. - ДНАН РА. 2007. N3. С. 223-229.
7. Хачиян Э.Е. Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ер. Айтастан. 1973. 327 с.

УДК 539.1

А. В. Варданян

Аналитическое и численное определение частот колебаний тонких
бесконечных магнитоупругих пластин в поперечном магнитном поле

(Представлено чл.-кор. НАН РА А.Г. Багдоевым 19/XII 2008)

Ключевые слова: *изгибные колебания, магнитоупругая пластина*

С применением приближенного пространственного подхода [1] и по гипотезе Кирхгофа [2-5] рассматривается решение задач колебаний магнитоупругих бесконечных пластин.

1. Решение задачи для идеально проводящей пластины по приближенному пространственному подходу. В плоскости x, z рассматривается магнитоупругая идеально проводящая пластина.

Начальное магнитное поле H_0 направлено по нормали пластины. Верхние грани $z = \pm h$ свободны от напряжений. Уравнения магнитоупругости для компонентов перемещений u_x, u_z и возмущенного поля h_x, h_z имеют вид

$$\zeta = 1 - \frac{b^2}{a^2},$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{a_1^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2},$$

$$h_x = H_0 \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad h_z = -H_0 \frac{\partial u_x}{\partial x},$$

$$a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho},$$

ρ – плотность, a , b – скорости упругих волн.

Граничные условия на свободных поверхностях пластины в первом порядке малости будут

$$z = \pm h, \quad \begin{cases} \sigma_{xz} + \frac{H_0 h_x}{4\pi} = H_0 h_x^{(e)}, \\ \sigma_{zz} = 0, \quad h_z = h_z^{(e)}, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $h_x^{(e)}$, $h_z^{(e)}$ – компоненты возмущений в диэлектрике $|z| > h$. В предположении малости h по сравнению с l для изгибных волн можно видеть, что в пластине $|z| \ll l$, $|u_z| \gg |u_x|$, $|h_x| \gg |h_z|$, а в диэлектрике имеет место $|h_z^{(e)}| \sim |h_x^{(e)}|$, и тогда в (1.2) $|h_x| \gg |h_x^{(e)}|$. Отбросив правую часть в первом уравнении, соотношения на границе

пластины можно записать:

$$z = \pm h, \quad \begin{cases} \sigma_{xz} + \rho a_1^2 \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \\ \sigma_{zz} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где согласно закону Гука

$$\frac{\sigma_{xz}}{\rho} = b^2 \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

$$\frac{\sigma_{zz}}{\rho a^2} = \left(1 - 2 \frac{b^2}{a^2} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.4)$$

Уравнения движения магнитоупругой среды в напряжениях имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - a_1^2 \rho \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right),$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (1.5)$$

Как и в общем случае конечно проводящей пластины [1], в случае идеально

проводящей можно искать решение для бесконечной пластины в виде

$$\begin{aligned}
 u_{x,z} &= \frac{1}{2} e^{-i\omega t + ikx} U_{x,z}(z) + k.c., \\
 U_x &= U, \quad U_z = V, \\
 U(z) &= B_j sh v'_j z, \quad V(z) = A_j ch v'_j z, \quad k = \lambda_m,
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

где по $j=1,2$ суммируется, причем $h_{x,z}$ найдутся по (1.1). Тогда, учитывая решение из уравнений (1.1) и граничных условий (1.2), можно, введя безразмерные переменные $\frac{\omega'}{ak} = \omega$, $\frac{v'_j}{k} = v_j$, получить систему, состоящую из дисперсионного уравнения и дополнительного уравнения для v_j . Отбрасывая штрихи, получим

$$\begin{vmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \end{vmatrix} = 0,
 \tag{1.7}$$

$$\Lambda_{1,2} = v_{1,2} + \frac{\zeta v_{1,2}}{v_{1,2}^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega^2} + \frac{a^2}{b^2} \alpha^2 v_{1,2} + \frac{a^2}{b^2} \alpha^2 th \frac{v_{1,2}}{2} kh,$$

$$\Gamma_{1,2} = \left(1 - 2 \frac{b^2}{a^2} \right) th \frac{v_{1,2}}{2} kh - \frac{\zeta v_{1,2}^2}{v_{1,2}^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega^2} th \frac{v_{1,2}}{2} kh,$$

$$\left(v_{1,2}^2 - \frac{b^2}{a^2} + \omega^2 \right) \left(\frac{b^2}{a^2} v_{1,2}^2 - 1 + \omega^2 + v_{1,2}^2 \alpha^2 - \alpha^2 \right) + \zeta^2 v_{1,2}^2 = 0,
 \tag{1.8}$$

где $\alpha = \frac{a_1}{a}$ и выбираются корни биквадратного уравнения $v_{1,2} > 0$. В табл. 1

приведено численное решение (1.7), (1.8), а в табл. 2 – соответствующие расчеты по гипотезе Кирхгофа. При этом значения ω по указанным таблицам близки до величин

$$\alpha = \frac{1}{10}.$$

Таблица 1

$\alpha \backslash kh$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.00272161	0.00544294	0.00816372	0.0108837	0.0136025
10^{-8}	0.00272161	0.00544294	0.00816372	0.0108837	0.0136025

10^{-6}	0.00272161	0.00544294	0.00816372	0.0108837	0.0136025
10^{-4}	0.00272346	0.00544387	0.00816434	0.0108841	0.0136029
10^{-3}	0.00290036	0.00553493	0.00822563	0.0109304	0.0136401
10^{-2}	0.0103862	0.011427	0.0129644	0.0148442	0.0169524
10^{-1}	0.0988082	0.0991551	0.0995728	0.10006	0.100617

Таблица 2

$\alpha \backslash kh$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
10^{-8}	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
10^{-6}	0.00272166	0.00544331	0.00816497	0.0108866	0.0136083
10^{-4}	0.00272349	0.00544423	0.00816558	0.0108871	0.0136086
10^{-3}	0.00289955	0.0055344	0.00822598	0.0109325	0.013645
10^{-2}	0.0103638	0.0113855	0.0129099	0.0147824	0.0168374
10^{-1}	0.100037	0.100148	0.100333	0.100591	0.100922

Из табл. 1, 2 видно, что для практически применяемых в технике полей значения частот по приближенному пространственному подходу и по гипотезе Кирхгофа отличаются незначительно.

2. Решение задачи о конечно проводящей пластине. Пусть ось x направлена вдоль средней линии пластины, вдоль которой распространяется волна, ось z направлена по нормали к ней, невозмущенное поле H_0 направлено по оси z . Обозначим возмущенное поле

$$h_x = H_0 H'_x, \quad h_z = H_0 H'_z, \quad (2.1)$$

полное поле $H_x = h_x, \quad H_z = H_0 + h_z$.

Уравнения движения магнитоупругой среды в линейной постановке имеют вид [2-5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \bar{h} \times \bar{H}_0)_x, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} - \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \bar{h} \times \bar{H}_0)_z, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ρ – плотность,

$$\begin{aligned}\sigma_x &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_z = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \sigma_{xz} &= \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Уравнение электромагнитной индукции записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \text{rot} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times \bar{H}_0 \right) + v_m \Delta \bar{h}.\tag{2.4}$$

Здесь σ – электропроводность, $v_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ – магнитная вязкость, c – скорость света.

В поперечном магнитном поле уравнения (2.2)-(2.4) дают

$$\begin{aligned}\zeta &= 1 - \frac{b^2}{a^2}, \\ \frac{b^2}{a^2} \frac{d^2 U_x}{dz^2} - k^2 U_x + \frac{\omega^2}{a^2} U_x + ik\zeta \frac{dU_z}{dz} &= -\frac{a_1^2}{a^2} \left(\frac{dH_x}{dz} - ikH_z \right), \\ -i\omega H_x + v_m k^2 H_x - v_m \frac{d^2 H_x}{dz^2} &= -i\omega \frac{dU_x}{dz}, \\ ik\zeta \frac{dU_x}{dz} + \frac{d^2 U_z}{dz^2} - \frac{b^2}{a^2} k^2 U_z + \frac{\omega^2}{a^2} U_z &= 0, \\ -i\omega H_z + v_m k^2 H_z - v_m \frac{d^2 H_z}{dz^2} &= -\omega k U_x,\end{aligned}\tag{2.5}$$

где $a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi\rho}$, $a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $b^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

Согласно пространственному подходу [1] решение уравнений движения магнитоупругой среды и уравнения индукции можно искать в виде

$$\begin{aligned}u_{x,z} &= \frac{1}{2} U_{x,z}(z) e^{i\tau} + k.c., \quad \tau = kx - \omega t, \\ H'_{x,z} &= \frac{1}{2} H_{x,z}(z) e^{i\tau}, \\ U_z &= A_j ch v_j z, \quad U_x = B_j sh v_j z, \\ H_x &= C_j ch v_j z, \quad H_z = D_j sh v_j z,\end{aligned}\tag{2.6}$$

где по j суммируется от 1 до 3, ω – частота, k – волновое число для бесконечной по x пластины, а для конечной по $x(0, l)$, свободно опертой пластины в (2.6) должно вместо

e^{ikz} стоять $\sin kx$, $m = 1, 2, \dots$, $k = \frac{\pi m}{l}$, а ω будет тем же.

Подставляя (2.6) в вышеуказанные уравнения, можно получить уравнение для

$$v_j, \zeta = 1 - \frac{b^2}{a^2}:$$

$$\frac{b^2}{a^2} v_j^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{a^2} + \zeta^2 \frac{v_j^2 k^2}{v_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}} = -\frac{a_1^2}{a^2} \frac{v_j^2 - k^2}{1 + i \frac{k^2 - v_j^2}{\omega} v_m}, \quad (2.7)$$

$v_m = \frac{c^2}{4\pi\rho}$ – магнитная вязкость, σ – электропроводность, c – скорость света. Из

граничных условий при $z = \pm \frac{h}{2}$ получится дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{k}{v_1} \operatorname{th} v_1 \frac{h}{2} & 1 + \frac{k}{v_2} \operatorname{th} v_2 \frac{h}{2} & 1 + \frac{k}{v_3} \operatorname{th} v_3 \frac{h}{2} \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ 1 + \frac{\zeta}{\Delta_1} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_2} k^2 & 1 + \frac{\zeta}{\Delta_3} k^2 \\ \frac{\operatorname{th} v_1 \frac{h}{2}}{v_1} \Gamma_1 & \frac{\operatorname{th} v_2 \frac{h}{2}}{v_2} \Gamma_2 & \frac{\operatorname{th} v_3 \frac{h}{2}}{v_3} \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.8)$$

$$\Delta_j = v_j^2 - \frac{b^2}{a^2} k^2 + \frac{\omega^2}{a^2}, \quad \Gamma_j = \frac{a^2 - 2b^2}{a^2} - \frac{\zeta v_j^2}{\Delta_j},$$

$$\chi_j = 1 + i \frac{k^2 - v_j^2}{\omega} v_m.$$

Результаты численного решения (2.7), (2.8) двумя способами: прямым численным решением в комплексных числах для частоты и другим способом, полагая $\omega = \omega_1 + i\omega_2$ и разделяя действительные части уравнений от мнимых, совпали и приведены в табл. 3,

причем введены безразмерные величины в виде $\omega' = \frac{\omega}{ak}$, $v'_j = \frac{v_j}{k}$, $\frac{a_1}{a} = \alpha$ и положено

$a = 5 \cdot 10^5$ см/с, $v_m = 1000$ см²/с; в таблице приведены значения $\operatorname{Re} \omega'$, т. е.

действительной части. А по гипотезе Кирхгофа

$$\omega^2 = \omega_{00}^2 - \frac{2a_1^2 k^2}{h} \frac{\lambda_1 \frac{h}{2} \operatorname{ch} \lambda_1 \frac{h}{2} - \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{h}{2}}{\operatorname{ch} \lambda_1 \frac{h}{2} + \frac{k}{\lambda_1} \operatorname{sh} \lambda_1 \frac{h}{2}}, \quad \lambda_1 = \sqrt{k^2 - \frac{i\omega}{v_m}}, \quad (2.9)$$

$\omega_{00}^2 = \frac{1}{3} \zeta h^2 k^4 b^2$; расчеты для $\operatorname{Re} \omega'$ даны в табл. 4.

Таблица 3

$\alpha \backslash kh$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.01	0.00272165	0.00544365	0.00816372	0.0108837	0.0136026
0.03	0.00272162	0.00544293	0.00816368	0.0108837	0.0136025
0.06	0.00272157	0.00544285	0.00816363	0.0108835	0.0136024
0.1	0.00272129	0.00544231	0.0081628	0.0108825	0.0136011
0.2	0.00271651	0.00543277	0.00814855	0.0108636	0.0135777
0.3	0.00269567	0.00539115	0.00808626	0.0107808	0.0134746

Таблица 4

$\alpha \backslash kh$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.01	0.00272152	0.00544304	0.00816457	0.0108861	0.0136076
0.03	0.00272044	0.0054409	0.00816137	0.0108819	0.0136024
0.06	0.00271677	0.0054336	0.00815048	0.0108674	0.0135844
0.1	0.00270785	0.00541585	0.00812401	0.0108323	0.0135408
0.2	0.00266177	0.00532421	0.00798736	0.0106512	0.0133158
0.3	0.00256839	0.00513869	0.00771092	0.0102851	0.0128613

Относительное отличие $\operatorname{Re} \omega'$ в табл. 3 и 4 при $\alpha = 0.3$ составляет 5%. До значений $\alpha = 0.1$ (соответствует $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Гаусс = 3 Тесла для алюминия) гипотеза Кирхгофа дает хорошее совпадение с решением по приближенному пространственному подходу.

При пространственном подходе значения мнимой части ω' $\operatorname{Im} \omega' < 0$ и все колебания устойчивы.

Аналитическое и численное определение частот колебаний тонких бесконечных магнитоупругих пластин в поперечном магнитном поле

Рассматривается решение задач колебаний магнитоупругих бесконечных пластин с применением приближенного пространственного подхода и по гипотезе Кирхгофа.

Аналитически и численно получены значения частот. Проводится сравнение таблиц частот изгибных колебаний по пространственному подходу и гипотезе Кирхгофа. Установлено, что до значений $\alpha = 0.1$ (соответствует $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Гаусс = 3 Тесла для алюминия) гипотеза Кирхгофа дает хорошее совпадение с решением по приближенному пространственному подходу.

Ա. Վ. Վարդանյան

Լայնական մագնիսական դաշտում բարակ անվերջ մագնիսաառաձգական սալերի տատանումների հաճախությունների որոշումը անալիտիկ և թվային մեթոդներով

Դիտարկվում է մոտավոր տարածական դրվածքով և Կիրխհոֆի վարկածով անվերջ մագնիսաառաձգական սալի տատանումների հաճախությունների որոշման խնդիրը:

Ստացվել են անալիտիկ և թվային արդյունքներ հաճախությունների համար: Կատարվում է համեմատություն ծոման տատանումների հաճախությունների միջև՝ ստացված տարածական մոտեցմամբ և Կիրխհոֆի վարկածով: Արդյունքում ստացվել է, որ մինչև $\alpha = 0.1$ արժեքը (որը համապատասխանում է $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Gauss = 3 Tesla -ին այլումինե սալի համար) Կիրխհոֆի վարկածով ստացված հաճախությունների արժեքները համընկնում են մոտավոր տարածական դրվածքով ստացված արժեքների հետ:

**Analytical and Numerical Solutions of Thin Infinite Magnetoelastic Plate Vibrations'
Frequencies in Transversal Magnetic Field**

The investigation for thin infinite magnetoelastic plate by approximate space treatment [1] and by Kirchhoff hypothesis [2-5] is given in this paper.

There were obtained the analytical and numerical results for frequencies. The comparison between the results obtained by these approaches was done. The obtained results show that until $\alpha = 0.1$ value (corresponds $H_0 = 3 \cdot 10^4$ Gauss = 3 Tesla for aluminum plate) the bending vibrations frequencies values by Kirchhoff hypothesis are close to frequencies value by space treatment.

Литература

1. Багдоев А.Г., Варданян А.В. - Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N4. С.22-32.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М. Наука. 1977. 272 с.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М. Изд-во физ.-мат. лит. 1996. 286 с.
4. Амбарцумян С. А., Белубекян М. В. Колебания и устойчивость токонесущих упругих пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1992. 124 с.
5. Багдасарян Г. Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван. Тигран Мец. 1992. 436 с.

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек

(Представлено 12/1 2009)

Ключевые слова: *общая двумерная динамическая теория, микрополярные оболочки*

Введение. Одним из актуальных вопросов несимметричной теории упругости является построение прикладных теорий тонких балок, пластин и оболочек [1-6 и др.].

В работах [7-9] на основе асимптотического анализа двумерной и трехмерной граничных задач, в зависимости от значений физических безразмерных параметров материала, построены общие одномерные и двумерные статические и динамические модели упругих тонких микрополярных балок и пластин и общих двумерных статических теорий микрополярных тонких оболочек.

В данной работе построены общие динамические теории упругих микрополярных оболочек.

1. Постановка задачи. Будем рассматривать оболочку постоянной толщины $2h$ как трехмерное упругое тело. Тензорные уравнения динамической задачи несимметричной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений (НТУ НППВ) имеют вид [10]:

уравнения движения

$$\nabla_m \sigma^{mn} = \rho \frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2}, \quad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk} \sigma_{mk} = J \frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2}; \quad (1.1)$$

соотношения упругости

$$\sigma_{mn} = (\mu + \alpha) \gamma_{mn} + (\mu - \alpha) \gamma_{nm} + \lambda \gamma_{kk} \delta_{nm}, \quad \mu_{mn} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{mn} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{nm} + \beta \kappa_{kk} \delta_{nm}; \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn} \omega^k, \quad \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n. \quad (1.3)$$

Здесь σ^{nm} , μ^{nm} — контравариантные компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn} , κ_{mn} — ковариантные компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; u_n — ковариантные компоненты вектора перемещения, ω_n — ковариантные компоненты вектора независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ — физические константы микрополярного материала оболочки, ρ — плотность материала, J — мера инерции при вращении. Индексы m, n, k здесь и в дальнейшем принимают значения 1, 2, 3.

Стнесем оболочку к триортогональной системе координат α_n , принятой в теории оболочек [11], и перейдем к физическим компонентам для указанных тензоров и векторов, но обозначения оставим прежними.

К определяющим уравнениям НТУ НППВ (1.1)-(1.3) присоединим соответствующие граничные и начальные условия.

Для граничных условий на лицевых поверхностях оболочки примем граничные условия первой граничной задачи НТУ НППВ, которые можно записать так

$$\sigma_{3n} = \mp q_n^\pm, \quad \mu_{3n} = \mp m_n^\pm \text{ при } \alpha_3 = \pm h. \quad (1.4)$$

Граничные условия на поверхности края оболочки $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ в общем случае представляют граничные условия смешанной граничной задачи НТУ НППВ

$$\sigma_{mn} n_m = p_n^*, \quad \mu_{mn} n_m = m_n^* \text{ на } \Sigma_1, \quad V_n = V_n^*, \quad \omega_n = \omega_n^* \text{ на } \Sigma_2. \quad (1.5)$$

При помощи начальных условий, при $t = 0$, задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, линейной и вращательной скоростей точек тела:

$$\begin{aligned} V_n|_{t=0} &= f_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \frac{\partial V_n}{\partial t}|_{t=0} = F_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \\ \omega_n|_{t=0} &= \varphi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \frac{\partial \omega_n}{\partial t}|_{t=0} = \Phi_n(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $f_n, F_n, \varphi_n, \Phi_n$ — заданные функции в области трехмерной оболочки.

2. Преобразование уравнений НТУ НППВ. Асимптотический метод. Для удобства введем τ_{mn} — несимметричный тензор силовых напряжений [12] и ν_{mn} — аналогичный тензор для моментных напряжений [10].

Рассмотрим задачу сведения трехмерной динамической задачи несимметричной теории упругости для тонкой оболочки к двумерной на основе асимптотического метода с пограничным слоем, включая вопрос об удовлетворении граничных и начальных условий [11-13]. Отметим, что

указанная проблема тесно связана с построением внутреннего итерационного процесса, который представляет двумерную задачу.

Для этой цели в трехмерных динамических уравнениях несимметричной теории упругости (2.2), (2.3) перейдем к безразмерным величинам и выполним замену независимых переменных (координат α_n и времени t):

$$\alpha_1 = R\lambda^{-p}\xi_1, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad t = \lambda^\omega \frac{h}{c_0}\tau. \quad (2.1)$$

Здесь величина ω характеризует изменчивость напряженно-деформированного состояния (НДС) во времени, величина p/l характеризует изменчивость НДС по координатам; p, l — целые числа, $l > p \geq 0$; λ — большой постоянный безразмерный геометрический параметр, определяемый формулой $h = R\lambda^{-l}$.

При определении НДС оболочки большую роль играют значения физических констант микрополярного материала оболочки. С этой точки зрения введем следующие безразмерные параметры:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2}, \quad \frac{\beta}{R^2 \rho c_0^2}, \quad \frac{\gamma}{R^2 \rho c_0^2}, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 \rho c_0^2}, \quad (2.2)$$

где R — характерный радиус кривизны срединной поверхности оболочки; c_0 — некоторая характерная скорость (например, скорость продольных возмущений в длинном упругом стержне по классической теории упругости).

Цель статьи — следуя асимптотическому методу при построении внутренней задачи, приближенно свести трехмерные (с независимыми переменными ξ_1, ξ_2, ζ и времени τ) уравнения (1.1)-(1.3) к двумерным уравнениям (с независимыми переменными ξ_1 и ξ_2 и времени τ).

Обращаясь к изучению краевых микрополярных упругих явлений, будем снова отправляться от уравнений трехмерной динамической теории НТУ НППВ (1.1)-(1.3). Будем считать, что поверхность края оболочки Σ , вблизи которого необходимо исследовать напряженное состояние, задается уравнением $\alpha_1 = \alpha_{10}$, и введем замену независимых переменных (координат и времени) по формулам:

$$\alpha_1 - \alpha_{10} = R\lambda^{-l}\xi_1, \quad \alpha_2 = R\lambda^{-p}\xi_2, \quad \alpha_3 = R\lambda^{-l}\zeta, \quad t = \lambda^\omega \frac{h}{c_0}\tau, \quad (2.3)$$

где величины R, λ, l, p, ω имеют тот же смысл, что и при изучении внутренней задачи.

Решение пограничной задачи должно удовлетворять однородным граничным условиям на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$:

$$\sigma_{3n} = 0, \quad \mu_{3m} = 0. \quad (2.4)$$

Пограничный слой вводится для того, чтобы на основе сращивания внутренней задачи и погранслоя было возможно удовлетворять граничным условиям трехмерной микрополярной теории (1.5) на поверхности края оболочки Σ .

Для удовлетворения начальным условиям микрополярной трехмерной теории (1.6) следует в четырехмерном пространстве α_n , t считать плоскость $t = 0$ своего рода границей и ввести понятие погранслоя явления около этой границы [13]. На основании такого подхода введем в рассмотрение дополнительное напряженно-деформированное состояние, имеющее ту же изменчивость по координатам, что и внутренняя задача, а по времени — большую изменчивость. Такое НДС вызывает высокочастотные колебания по толщине оболочки, наиболее отчетливо проявляющиеся в переходный момент времени — с начала движения до установившихся динамических явлений, определяемых по теории внутренней задачи (прикладной-двумерной теорией).

3. Прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Будем предполагать, что безразмерные физические параметры (3.1) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2 \rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\gamma}{R^2 \rho c_0^2} \sim 1, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 \rho c_0^2} \sim 1. \quad (3.1)$$

Числа ω и k выбираем таким образом, чтобы в асимптотических приближениях ζ получились непротиворечащие уравнения и чтобы инерционные члены входили в систему уравнений исходного приближения. Таким образом получим:

$$\omega = l - p, \quad k = 2l. \quad (3.2)$$

Для величин внутренней задачи в трехмерной области оболочки с асимптотической точностью $O(\lambda^{p-l})$ получим следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned} V_i &= R\lambda^{l-p}(V_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta V_i^1), \quad V_3 = R\lambda^{l-2p+c}(V_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta V_3^1), \quad \omega_i = \lambda^{l-p-c}(\omega_i^0 + \lambda^{-l+c}\zeta \omega_i^1), \\ \omega_3 &= \lambda^{l-2p}(\omega_3^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta \omega_3^1), \quad \tau_{ii} = \rho c_0^2 \lambda^l (\tau_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta \tau_{ii}^1), \quad \nu_{ii} = R\rho c_0^2 \lambda^{l-c} (\nu_{ii}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta \nu_{ii}^1), \\ \tau_{ij} &= \rho c_0^2 \lambda^l (\tau_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta \tau_{ij}^1), \quad \nu_{ij} = R\rho c_0^2 \lambda^{l-c} (\nu_{ij}^0 + \lambda^{-l+c}\zeta \nu_{ij}^1), \\ \tau_{i3} &= \rho c_0^2 \lambda^{l-p+c} (\tau_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta \tau_{i3}^1) (i \leftrightarrow 3), \quad \nu_{i3} = R\rho c_0^2 \lambda^{l-p} (\nu_{i3}^0 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta \nu_{i3}^1) (i \leftrightarrow 3), \\ \tau_{33} &= \rho c_0^2 \lambda^c (\tau_{33}^0 + \zeta \tau_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2 \tau_{33}^2), \quad \nu_{33} = R\rho c_0^2 \lambda^0 (\nu_{33}^0 + \zeta \nu_{33}^1 + \lambda^{-l+2p-c}\zeta^2 \nu_{33}^2), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $c = 2p - l$ при $l \leq 2p$, $c = l - 2p$ при $2p \leq l \leq 4p$, $c = 2p$ при $l \geq 4p$.

Используем понятия усредненных силовых и моментных напряжений [10], а также перемещений и независимых поворотов точек срединной

поверхности оболочки:

$$u_i = V_i|_{\zeta=0}, \quad w = -V_3|_{\zeta=0}, \quad \Omega_i = \omega_i|_{\zeta=0}, \quad \Omega_3 = -\omega_3|_{\zeta=0}. \quad (3.4)$$

Как главный результат на основе построенной внутренней задачи, на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим систему разрешающих уравнений прикладной-двумерной динамической теории микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_2 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (q_3^+ q_3^-) &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) - (q_i^+ + q_i^-) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (3.5) \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) + \\ + (-1)^j (N_{3j} - N_{j3}) - (m_i^+ + m_i^-) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}, \\ \frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] - (S_{12} - S_{21}) + (m_3^+ + m_3^-) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{ij} + (\mu - \alpha)\Gamma_{ji}], \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ji}], \\ L_{ii} &= 2h \left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \chi_{jj} \right] - h \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} (m_3^+ - m_3^-), \quad (3.6) \\ N_{i3} &= -2h \frac{4\alpha\mu}{\alpha + \mu} \Gamma_{i3} - \frac{\alpha - \mu}{\alpha + \mu} N_{3i}, \\ L_{i3} &= -2h \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \chi_{i3} + \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} L_{3i}, \quad N_{3i} = h(q_i^+ - q_i^-), \quad L_{3i} = h(m_i^+ - m_i^-), \end{aligned}$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \Gamma_{ii} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i + (-1)^j \Omega_i, \quad (3.7) \\ \gamma_i &= -\frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} - \frac{u_i}{R_i}, \\ \Gamma_{i3} &= \gamma_i + (-1)^j \Omega_j, \quad \chi_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \\ \chi_{ij} &= \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \chi_{i3} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}. \end{aligned}$$

Здесь T_{ii} , S_{ij} , N_{i3} — усредненные усилия; L_{ii} , L_{ij} , L_{i3} — усредненные моменты; Γ_{ii} , Γ_{ij} , Γ_{i3} — компоненты тензора деформации, χ_{ii} , χ_{ij} , χ_{i3} — компоненты тензора изгиба-кручения на срединной поверхности оболочки.

Исходя из того, что изменяемость рассматриваемого погранслоя по времени соответствует изменяемости внутренней задачи (т.е. полученной двумерной теории (3.5)-(3.7)), построенный погранслоем будет квазистатическим, в результате, в уравнениях погранслоевой задачи инерционные члены не будут входить в уравнения на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-1})$, а в высоких асимптотических приближениях время τ будет присутствовать как параметр.

Изучая взаимодействие внутренней задачи и погранслоя в рамках асимптотической точности $O(\lambda^{p-1})$, на граничном контуре Γ срединной поверхности оболочки получим те же двумерные граничные условия, что и при статической задаче:

$$T_{11}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad N_{13}|_{\Gamma} = - \int_{-h}^h p_3^* d\alpha_3, \quad (3.8)$$

$$L_{11}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h m_1^* d\alpha_3, \quad L_{12}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h m_2^* d\alpha_3, \quad L_{13}|_{\Gamma} = - \int_{-h}^h m_3^* d\alpha_3.$$

Нам остается выяснить, какие начальные условия необходимо сформулировать для прикладной-двумерной теории (3.5)-(3.7) микрополярных оболочек со свободным вращением. Для этой цели рассмотрим соответствующий временной погранслоем около границы $t = 0$. Для этого дополнительного НДС изменяемость по координатам такая же, как для внутренней задачи, и в то же время имеющая большую изменяемость во времени, т. е. $\omega = 0$. Таким образом для определения компонентов векторов перемещения и независимого поворота на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-1})$ получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 V_m^*}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a_m^2} \frac{\partial^2 V_m^*}{\partial \tau^2} = 0, \quad a_1 = a_2 = \sqrt{\bar{\mu} + \bar{\alpha}}, \quad a_3 = \sqrt{\frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial^2 \omega_m^*}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{b_m^2} \frac{\partial^2 \omega_m^*}{\partial \tau^2} = 0, \quad b_1 = b_2 = \sqrt{\frac{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}{J}}, \quad b_3 = \sqrt{\frac{1}{(\bar{\beta} + 2\bar{\gamma})J}}.$$

Из тех же уравнений для рассматриваемого случая, определяя силовые $(\tau_{3m}^*, \tau_{33}^*)$, и моментные (μ_{3m}^*, μ_{33}^*) , напряжения при отсутствии этих же напряжений при $\zeta = \pm 1$ на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-1})$ получим граничные условия:

$$\frac{\partial V_m^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial \omega_m^*}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0. \quad (3.10)$$

Таким образом, построение указанного дополнительного НДС (временного погранслоя) на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-1})$ сведется к

решению волновых уравнений (3.9) с учетом граничных (3.10) и начальных условий (последние пока будем считать произвольно заданными).

Так как все шесть уравнений и граничные условия (3.9), (3.10) в математическом отношении идентичны, рассмотрим одно из этих уравнений и граничных условий в общих обозначениях

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=\pm 1} = 0, \quad (3.11)$$

к которым присоединим также начальные условия:

$$u \Big|_{\tau=0} = f^*(\zeta), \quad \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = F^*(\zeta), \quad (3.12)$$

где будем считать, что функции $f^*(\zeta)$ и $F^*(\zeta)$ — наперед заданные функции в интервале $[-1; 1]$. Общее решение начально-граничной задачи (3.11)-(3.12) (на основе метода разделения переменных) можно представить в следующем виде [14]:

$$u = u_0 + u_1 \tau + u', \quad \text{где } u_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^*(\zeta) d\zeta, \quad u_1 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F^*(\zeta) d\zeta, \quad (3.13)$$

а u' — чисто осциллирующая часть решения.

Для того чтобы решение $u(\zeta, \tau)$ являлось чисто осциллирующей во времени функцией, необходимо и достаточно, чтобы $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, т. е. чтобы средние значения начальных данных (3.12) обращались в нуль, на основе чего получим [14]:

$$\int_{-1}^1 f^*(\zeta) d\zeta = 0, \quad \int_{-1}^1 F^*(\zeta) d\zeta = 0. \quad (3.14)$$

Условия (3.14) принято называть условиями осцилляции.

Теперь на основе условий осцилляции (3.14) можем сращивать решение внутренней задачи (прикладной-двумерной теории (3.5)-(3.7)) с решением временного погранслоя, для удовлетворения заданным трехмерным начальным условиям (1.6). В результате для прикладной-двумерной теории (3.5)-(3.7) получим следующие начальные условия:

$$u_i \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_i d\alpha_3, \quad w \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h f_3 d\alpha_3, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_i d\alpha_3 \quad (i = 1, 2), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2h} \int_{-h}^h F_3 d\alpha_3, \quad \Omega_n \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \varphi_n d\alpha_3, \quad \frac{\partial \Omega_n}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \Phi_n d\alpha_3 \quad (n = 1, 2, 3).$$

Таким образом система уравнений (3.5)-(3.7), граничные (3.8) и начальные (3.15) условия определяют математическую модель динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек с НППВ.

4. Прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением. Предположим, что безразмерные физические константы материала оболочки (2.2) имеют значения:

$$\frac{\alpha}{\rho_0^2} \sim 1, \quad \frac{\beta}{R^2 \rho c_0^2} = \lambda^{-2l} \beta_*, \quad \frac{\gamma}{R^2 \rho c_0^2} = \lambda^{-2l} \gamma_*, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 \rho c_0^2} = \lambda^{-2l} \varepsilon_*, \quad (4.1)$$

где $\beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1$.

Сформулируем сначала внутреннюю задачу на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$. Для чисел ω и k в рассматриваемом случае получим:

$$\omega = l - c, \quad k = 2p - 2c. \quad (4.2)$$

Качественной стороной построенной асимптотики является то, что повороты точек срединной поверхности оболочки связаны с перемещениями этих же точек (как в классической теории упругих оболочек).

Введя усредненные силовые и моментные характеристики [10] и используя обозначения (3.4), как главный результат, исходя из построенной асимптотики (4.1), (4.2) на уровне асимптотической точности $O(\lambda^{p-l})$, получим систему разрешающих уравнений прикладной-двумерной динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (q_3^+ + q_3^-), \quad (4.3) \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) &= 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + (q_i^+ + q_i^-), \\ \frac{1}{A_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_i} (G_{ii} - (-1)^j L_{ij}) + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} [(G_{ii} - (-1)^j L_{ij}) - (G_{jj} + (-1)^j L_{ji})] - \\ - \frac{1}{A_j} \frac{\partial}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + (-1)^j L_{jj}) - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} [(H_{ji} + (-1)^j L_{jj}) + (H_{ij} - (-1)^j L_{ii})] - N_{i3} &= \\ = -h(q_i^+ - q_i^-) - (-1)^j \left[2\rho h \frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial t^2} + (m_j^+ + m_j^-) \right] &= 0; \end{aligned}$$

соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_{ii} &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{ij} = \frac{2Eh}{1+\nu} [\Gamma_{12} + \Gamma_{21}] + (-1)^j \frac{1}{2} (m_3^+ + m_3^-), \\ G_{ii} &= -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{ij} = \frac{Eh^3}{3(1+\nu)} [K_{12} + K_{21}] + (-1)^j \frac{1}{2} [(m_3^+ - m_3^-) + L_{33}], \\ L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\chi_{ji}], \quad (4.4) \end{aligned}$$

$$L_{ii} = 2h \left[\frac{4\gamma(\gamma + \beta)}{2\gamma + \beta} \chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{2\gamma + \beta} \chi_{jj} \right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma} L_{33},$$

$$L_{33} = \left(\frac{th(hk_1)}{hk_1} - 1 \right) 4h\gamma(\chi_{11} + \chi_{22}) - \frac{th(hk_1)}{k_1} (m_3^+ - m_3^-);$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \quad \beta_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i},$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_i, \quad \Omega_i = -(-1)^j \beta_j,$$

$$\chi_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \Omega_3 = \frac{1}{2} (\Gamma_{21} - \Gamma_{12}).$$

Так как погранслои имеют квазистатический характер, при сращивании внутренней и погранслоевой задач получим те же граничные условия, что и в статике [10]:

$$T_{11}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12}|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad (L_{12} - G_{11})|_{\Gamma} = \int_{-h}^h (\alpha_3 p_1^* + m_2^*) d\alpha_3,$$

$$\left[-N_{13} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_{12} - L_{11}) \right] |_{\Gamma} = \int_{-h}^h \left[p_3^* + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (\alpha_3 p_2^* - m_1^*) \right] d\alpha_3.$$

Чтобы выяснить начальные условия для двумерной системы уравнений, необходимо построить соответствующий временной погранслою, для которого получим:

$$k = 2p - 2c, \quad \omega = 0. \quad (4.7)$$

При сращивании решения внутренней задачи (прикладной-двумерной теории (4.3)-(4.5)) с решением временного погранслоя (здесь опять имеем задачи типа (3.11)-(3.13)) и удовлетворении заданным трехмерным начальным условиям (1.6) получим те же начальные условия (3.16) для прикладной-двумерной теории (4.3)-(4.5).

Таким образом, система уравнений (4.3)-(4.5), граничные условия (4.6) и начальные условия (3.16) определяют математическую модель динамической теории микрополярных упругих тонких оболочек со стесненным вращением.

5. Прикладная-двумерная динамическая теория микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью". Предположим, что физические безразмерные параметры (2.2) представимы в виде:

$$\frac{\alpha}{\rho c_0^2} = \lambda^{-2l+2p} \alpha_*, \quad \frac{\beta}{R^2 \rho c_0^2} = \beta_*, \quad \frac{\gamma}{R^2 \rho c_0^2} = \gamma_*, \quad \frac{\varepsilon}{R^2 \rho c_0^2} = \varepsilon_*, \quad (5.1)$$

где $\alpha_*, \beta_*, \gamma_*, \varepsilon_* \sim 1$.

Для чисел ω и k в рассматриваемом случае получим:

$$\omega = l - c, \quad k = 2l + 2p - 2c. \quad (5.2)$$

Сметим, что на основании (5.1), (5.2) в получаемых двумерных уравнениях внутренней задачи микрополярных оболочек величины "чисто моментного" происхождения отделяются и образуют отдельную систему уравнений.

Сформулируем эти отдельные группы двумерных уравнений.

Уравнения "чисто моментной" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_i} \frac{\partial L_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (L_{ii} - L_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial L_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (L_{ji} + L_{ij}) - \\ - (m_i^+ + m_i^-) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 L_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 L_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (m_3^+ + m_3^-) = 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2};$$

соотношения упругости

$$L_{ii} = 2h \left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma} \chi_{ii} + \frac{2\gamma\beta}{\beta + 2\gamma} \chi_{jj} \right], \quad L_{ij} = 2h[(\gamma + \epsilon)\chi_{ij} + (\gamma - \epsilon)\chi_{ji}] \quad (5.4)$$

$$L_{i3} = -2h \frac{4\gamma\epsilon}{\gamma + \epsilon} \chi_{i3} + \frac{\gamma - \epsilon}{\gamma + \epsilon} L_{3i}, \quad L_{3i} = h(m_i^+ - m_i^-);$$

геометрические соотношения

$$\chi_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} \Omega_j - \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \chi_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \Omega_i, \quad \chi_{i3} = -\frac{1}{A_i} \frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}. \quad (5.5)$$

Уравнения "чисто силовой" части задачи микрополярных оболочек:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i} \frac{\partial T_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (T_{ii} - T_{jj}) + \frac{1}{A_j} \frac{\partial S_{ji}}{\partial \alpha_j} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (S_{ji} + S_{ij}) - (q_i^+ + q_i^-) = 2\rho h \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad (5.6)$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} + \frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial(A_2 N_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{23})}{\partial \alpha_2} \right] + (q_3^+ + q_3^-) = 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2};$$

$$N_{3i} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial G_{ii}}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_j}{\partial \alpha_i} (G_{ii} - G_{jj}) - \frac{1}{A_j} \frac{\partial H_{ji}}{\partial \alpha_j} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} (H_{ji} + H_{ij}) + h(q_i^+ - q_i^-);$$

соотношения упругости

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1 - \nu^2} [\Gamma_{ii} + \nu \Gamma_{jj}], \quad S_{12} = S_{21} = 2h\mu[\Gamma_{12} + \Gamma_{21}], \quad N_{i3} = N_{3i} - 8h\alpha \Gamma_{i3},$$

$$G_{ii} = -\frac{2Eh^3}{3(1 - \nu^2)} [K_{ii} + \nu K_{jj}], \quad H_{12} = H_{21} = \frac{2h^3}{3} \mu [K_{12} + K_{21}]; \quad (5.7)$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_j - \frac{w}{R_i}, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial u_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} u_i, \quad \Gamma_{i3} = -\beta_i + (-1)^j \Omega_j, \quad (5.8)$$

$$\beta_i = \frac{1}{A_i} \frac{\partial w}{\partial \alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \quad K_{ii} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i} + \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_j, \quad K_{ij} = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \beta_j}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{A_i A_j} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_j} \beta_i.$$

Так как погранслои квазистатический, граничные условия для "моментной части задачи" и "силовой части задачи" будут те же, что и при статике [10]:

для моментной части задачи (для системы уравнений (5.3)-(5.5)):

$$L_{1i} \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h m_i^* d\alpha_3, \quad L_{13} \Big|_{\Gamma} = - \int_{-h}^h m_3^* d\alpha_3 - \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^h \alpha_3 m_2^* d\alpha_3; \quad (5.9)$$

для силовой части задачи (для системы уравнений (5.6)-(5.8)):

$$T_{11} \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12} \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_2^* d\alpha_3, \quad G_{11} \Big|_{\Gamma} = - \int_{-h}^h \alpha_3 p_1^* d\alpha_3, \quad (5.10)$$

$$\left(-N_{13} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_2} \right) \Big|_{\Gamma} = \int_{-h}^h p_3^* d\alpha_3 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \int_{-h}^h \alpha_3 p_2^* d\alpha_3.$$

Для констатирования начальных условий для двумерных систем уравнений (5.3)-(5.5), (5.6)-(5.8) построен соответствующий временной погранслои (эта задача также идентична задаче (3.11)-(3.13)); в изучаемом случае будем иметь:

$$k = 2l + 2p - 2c, \quad \omega = 0. \quad (5.11)$$

На основе сращивания внутренней задачи и временного погранслоя получим те же начальные условия (3.15) для основной системы уравнений (5.3)-(5.8).

Таким образом, двумерные уравнения (5.3)-(5.5) и (5.6)-(5.8), граничные (5.9), (5.10) и начальные (3.15) условия определяют математическую модель микрополярных оболочек с "малой сдвиговой жесткостью".

Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна

Член-корреспондент НАН РА С. О. Саркисян

Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек

Рассматривается начально-краевая задача трехмерной, микрополярной, моментной, несимметричной теории упругости со свободным вращением для тонкой области оболочки. В зависимости от значений безразмерных физических констант материала оболочки построены три различные асимптотики. Исходное приближение, соответственно, для первой асимптотики приводит к динамической теории микрополярных оболочек со свободным вращением; второй асимптотики — к динамической теории микрополярных оболочек со стесненным вращением; для третьей асимптотики — к теории микрополярных оболочек "с малой сдвиговой жесткостью".

ՀՀԱԱ թղթակից անդամ Ս. Ն. Սարգսյան

Միկրոպոլյար առաձգական բարակ թաղանթների դինամիկական տեսություններ

Թաղանթի բարակ տիրույթում դիտարկվում է ազատ պտույտներով միկրոպոլյար, մոմենտային, ոչ սիմետրիկ առաձգականության եռաչափ նախնական-եզրային ինդիքը: Կախված թաղանթի նյութի անչափ ֆիզիկական հաստատությունների արժեքներից՝ կառուցված են երեք տարբեր ասիմպտոտիկաներ: Առաջին ասիմպտոտիկայի ելակետային մոտավորությունը հանգեցնում է միկրոպոլյար թաղանթների ազատ պտույտներով դինամիկական տեսությանը, երկրորդ ասիմպտոտիկան՝ միկրոպոլյար թաղանթների կաշկանդված պտույտներով դինամիկական տեսությանը, երրորդ ասիմպտոտիկան՝ միկրոպոլյար թաղանթների «փոքր սահրային կոշտությամբ» դինամիկական տեսությանը:

Corresponding member of NAS RA S. H. Sargsyan

Dynamic Theories of Micropolar Thin Elastic Shells

The aim of the present paper is to investigate the initial-boundary problems of three-dimensional micropolar, momental, asymmetrical theory of elasticity with independent rotation. Depending on the values of sizeless physical constants of the shell's material, three different asymptotics are constructed. Initial approximation for the first asymptotics will correspondingly result in the dynamic theory of micropolar shells with independent rotation; for the second asymptotics - in the dynamic theory of micropolar shells with constraint rotations, and for the third one - in the theory of micropolar shells with "small shift rigidity".

Литература

1. *Green A. E., Naghdi P. M.* - Intern. J. Solid and Struct. 1968. V. 4. N 6. P. 585-592.
2. *Жилн П. А.* - Динамика и прочность машин. Тр. Ленингр. политех. ин-та. 1982. N 386. С. 29-42.
3. *Шкутин А. И.* Механика деформаций гибких тел. Новосибирск. Наука. 1988. 128 с.
4. *Еремеев В. А., Зубов Л. М.* - Изв. вузов. Сев.-Кавказск. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред. 2003. С. 124-169.
5. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван. Изд-во НАН Армении. 1999. 214 с.
6. *Саркисян С. О.* - Физическая мезомеханика. 2008. Т. 11. N5. С. 41-54.
7. *Sargsyan S. H.* - Proc. of XXXIV Summer School "Advanced Problems in Mechanics", 2006 Repino, Saint-Petersburg, Russia, 25 June-1 July, 2006. P. 447-458.
8. *Саркисян С. О.* - Прикладная математика и механика. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
9. *Саркисян С. О.* - ДНАН Армении. 2008. Т.108. N4. С. 309-319.
10. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford, etc, Pergamon Press. 1986. 383 p.
11. *Гольденвейзер А. Л.* - Успехи механики. 1982. Т. 5. Вып. 1/2. С. 137-182.
12. *Саркисян С. О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван. Изд-во АН Армении. 1992. 232 с.
13. *Гусейн Заде М. И.* - Прикладная математика и механика. 1978. Т. 42. Вып. 5. С. 899-907.

УДК 539.3

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, В. М. Хачатрян

Особенности учета геометрической нелинейности при
распространении электроупругой волны конечной амплитуды в
пьезоэлектрической среде

(Представлено 23/III 2009)

Ключевые слова: электроупругая волна, геометрическая нелинейность, конечные удлинения и сдвиги, пьезоэлектрический слой

При нынешнем уровне развития точного приборостроения результаты исследований на уровне линейной теории электромагнитоупругости [1, 2 и др.] часто бывают неудовлетворительными, поскольку не всегда выявляют точную качественную картину или дают неточную количественную оценку физического явления. В таких случаях возникает необходимость учета в задачах связанных электромагнитоупругих полей разных расчетных уточняющих моделей.

Учет физической и геометрической нелинейностей в задачах связанных полей [3-5 и др.] приводит к усложнению расчетных схем, но позволяет выявить некоторые качественные изменения и в связи с этим точные количественные оценки волнового процесса при распространении индуцированного сигнала.

1. Исследуется процесс распространения электроупругого волнового сигнала конечной амплитуды в пьезоэлектрическом слое $|x_1| < \infty$, $0 < x_2 < h$, $|x_3| < \infty$ из пьезоэлектрика класса бтт гексогональной симметрии, при котором генерируются электромагнитоупругие высшие гармоники.

Уравнения движения электроупругой среды и уравнения электромагнетостатики в лагранжевой системе координат (x_1, x_2, x_3) имеют вид:

$$\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j} = \rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

$L_{ij} = \sigma_{ij} + t_{ij}$ – тензор термодинамических напряжений, ρ_0 – естественная плотность среды,

$$\frac{\partial D_m}{\partial x_m} = 0; \quad \frac{\partial B_n}{\partial x_n} = 0, \quad m, n = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

С учетом только геометрической нелинейности термодинамические напряжения L_{ij} и индукции электрического и магнитного полей D_m и B_n , соответственно, представляются в виде [3, 4]:

$$L_{ij} = c_{ijmk} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} + e_{mij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} + \delta_{wj} e_{mik} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial u_w}{\partial x_k} + \left(\delta_{jm} c_{inkl} + \frac{1}{2} \delta_{km} c_{ijnl} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}; \quad (1.3)$$

$$D_m = e_{mij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{mk} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \delta_{ik} e_{mnj} \frac{\partial u_k}{\partial x_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{mk} l_{kni} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}; \quad (1.4)$$

$$B_p = - \left(\mu_{kp} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \mu_{kn} \frac{\partial u_p}{\partial x_n} - \mu_{pl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \mu_{kp} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}, \quad (1.5)$$

где u_k – компоненты упругого перемещения, потенциалы $\Phi(x_j, t)$ и $\Psi(x_k, t)$ электрического и магнитного полей, соответственно, введены через лагранжевы напряженности $E_k(x_j, t)$ электрического и $H_k(x_j, t)$ магнитного полей с учетом градиента деформации $\xi_{ij} = \delta_{ij} + u_{i,j}$

$$E_m(x_k, t) = - \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} - l_{mni} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}, \quad H_m(x_k, t) = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_m} - l_{mni} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} \quad (1.6)$$

В соотношениях (1.4) и (1.6) l_{ijmp} – тензор "геометрической стрикции"

$$l_{mni} = \delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} - \delta_{ij} \delta_{mn}.$$

Во внешней вакуумной области $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ или $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$ решаются уравнения электромагнетостатики для вакуума

$$\frac{\partial D_n^{(0)}}{\partial x_n} = 0; \quad \frac{\partial B_p^{(0)}}{\partial x_p} = 0, \quad n, p = 1, 2, 3, \quad (1.7)$$

где индукции электрического $D_n^{(0)}(x_i, t)$ и магнитного $B_n^{(0)}(x_i, t)$ полей в лагранжевой форме описания выражаются через потенциалы этих внешних полей $\Phi^{(0)}(x_i, t)$ и $\Psi^{(0)}(x_i, t)$, соответственно, а также через деформации точек поверхности раздела сред $u_k^{(0)}(x_i, t) = u_k(x_1, 0, x_3, t)$ или $u_k^{(0)}(x_i, t) = u_k(x_1, h, x_3, t)$ для вакуумных полупространств $|x_1| < \infty$, $x_2 < 0$, $|x_3| < \infty$ и $|x_1| < \infty$, $x_2 > h$, $|x_3| < \infty$, соответственно [3]:

$$D_p^{(0)} = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_p} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_p} \right); \quad (1.8)$$

$$B_p^{(0)} = -\mu_0 \left(\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_p} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_p} + \frac{\partial u_p^{(0)}}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_p} \right).$$

Естественно, что учет конечных деформаций поверхности электроупругой среды наглядно искажает ("деформирует") нематериальную внешнюю область, чем и продиктованы выражения материальных уравнений нематериальной среды (1.8). Учет "деформаций свободных поверхностей" особенно важен для внешней вакуумной области, где индуцируется связанное с электроупругой волной электромагнитное волновое поле.

На границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ удовлетворяется непрерывность тангенциальных компонент векторов напряженностей электрического и магнитного полей

$$\Phi - \Phi^{(0)} = 0, \quad \Psi - \Psi^{(0)} = 0 \quad (1.9)$$

и нормальных компонент векторов индукций этих полей

$$\begin{aligned} & \epsilon_{2ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{2k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} \frac{\delta_{ik} \epsilon_{2nj}}{\frac{1}{2}} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{2klknij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ & = -\epsilon_0 \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} \right) \\ & - \left(\mu_{k2} \frac{\partial u_n}{\partial x_n} - \mu_{kn} \frac{\partial u_2}{\partial x_n} - \mu_{2l} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} - \mu_{k2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} = \\ & = -\mu_0 \left(\frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} - \left(\frac{\partial u_m^{(0)}}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^{(0)}}{\partial x_m} \right) \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_m} + \frac{\partial u_n^{(0)}}{\partial x_n} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (1.10)$$

На первоначально недеформированных границах раздела сред $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ термодинамические напряжения L_{21} , L_{22} и L_{23} должны равняться нулю:

$$\begin{aligned} c_{6mk} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \epsilon_{m6} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} &= -\delta_{w1} \epsilon_{m2k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial u_w}{\partial x_k} - \left(\delta_{1m} c_{2nkl} + \frac{1}{2} \delta_{km} c_{6nl} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_n}{\partial x_n}; \\ c_{2mk} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \epsilon_{m2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} &= -\delta_{w2} \epsilon_{m2k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial u_w}{\partial x_k} - \left(\delta_{2m} c_{2nkl} + \frac{1}{2} \delta_{km} c_{2nl} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_n}{\partial x_n}; \\ c_{4mk} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \epsilon_{m4} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} &= -\delta_{w3} \epsilon_{m2k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_m} \frac{\partial u_w}{\partial x_k} - \left(\delta_{3m} c_{2nkl} + \frac{1}{2} \delta_{km} c_{4nl} \right) \frac{\partial u_k}{\partial x_l} \frac{\partial u_n}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Очевидно, что учет "деформирования" внешней нематериальной области усложняет запись материальных соотношений внешней нематериальной среды (1.8) и граничных условий (1.9) - (1.11).

2. Анализ вышеприведенных основных соотношений показывает, что посредством градиента деформации $\xi_{ij} = \delta_{ij} + u_{ij}$ связываются не только плоскодеформированное и антиплоскодеформированное упругие поля, но и квазистатические электрическое и магнитное поля внутри материального слоя и во внешней нематериальной области.

Естественно, что при изучении характера распространения излученной в пьезоэлектрическую среду волны наряду с граничными условиями на поверхностях пьезослоя $x_2 = 0$ и $x_2 = h$ должны удовлетворяться также

условия затухания по глубине вакуумных полупространств (при $x_2 \rightarrow \pm\infty$, соответственно) всех индуцированных волновых составляющих.

Исследования только влияния геометрической нелинейности (конечные деформации) на волновой процесс в задачах электромагнитоупругости очень важны, тем более что оно не только связывает электроупругое и магнитное поля, но и при излучении волнового сигнала может привести к разным генерациям в зависимости от характера излучаемого сигнала.

Известно, что в рамках линейной теории электроупругости при разных симметриях пьезоэлектрических кристаллов упругие плоское $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0\}$ и антиплоское $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$ поля разделяются [5], тем самым допуская возможность излучения волнового сигнала разного характера.

При этом известно, что в пьезокристалле класса 6mm по срезу изотропной плоскости x_1ox_2 может распространяться чисто упругая волна плоской деформации $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$ или электроупругая волна антиплоской деформации $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$.

Понятно, что в зависимости от того, какого рода волновой сигнал мы возбуждаем (плоскую упругую или антиплоскую электроупругую волну), основную роль при распространении волны, а также при генерации следующих гармоник будут играть конечные удлинения или конечные сдвиги.

Это вызывает интерес к исследованию особенностей распространения разных волновых сигналов с учетом разного рода геометрических нелинейностей:

а) распространение антиплоского электроупругого сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$ при учете конечных сдвигов типа $\partial U_\alpha / \partial x_\beta$ ($\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$);

б) распространение антиплоского электроупругого сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$ при учете конечных удлинений типа $\partial U_\alpha / \partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$);

в) распространение плоского упругого сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$ при учете конечных сдвигов типа $\partial U_\alpha / \partial x_\beta$ ($\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$);

г) распространение плоского упругого сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$ при учете конечных удлинений типа $\partial U_\alpha / \partial x_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$).

При учете только конечных сдвиговых деформаций (случай задач а) и в)) в основных уравнениях и материальных соотношениях сохраняем только нелинейности типа $(\partial U_\alpha / \partial x_\beta) \cdot (\partial U_\gamma / \partial x_\mu)$, ($\alpha \neq \beta$, $\gamma \neq \mu$, $\alpha, \gamma = 1, 2, 3$, $\beta, \mu = 1, 2$), обусловленные конечными сдвигами.

Тогда основные уравнения в пьезоэлектрическом слое $0 \leq x_2 \leq h$ (плоскость x_1ox_2 перпендикулярна к оси анизотропии кристалла ox_3) будут

иметь вид:

$$\begin{aligned}
 & c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} = \\
 & - c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \\
 & - \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} - c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \\
 & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 x_2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \\
 & - c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} - c_{11} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2}, \\
 & c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} = \\
 & = -c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - e_{15} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} - e_{15} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 & e_{15} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + e_{15} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} = \\
 & = \epsilon_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \epsilon_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + 2\epsilon_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\epsilon_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 & \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1 \partial x_2}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Во внешней вакуумной среде $x_2 < 0$ или $x_2 > h$ лагранжевы уравнения электромагнетизма в "деформированной" нематериальной среде примут довольно упрощенный вид по сравнению со случаем полного учета геометрической нелинейности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 U_2^{(0)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\
 \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 U_2^{(0)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1 \partial x_2}.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Граничные условия (1.9)-(1.11), соответственно, преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
 \Phi - \Phi^{(0)} &= 0, \quad \Psi - \Psi^{(0)} = 0, \\
 \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - e_{15} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \epsilon_0 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} &= -\epsilon_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \epsilon_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - \epsilon_0 \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_1}, \\
 -\mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \mu_0 \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} &= -\mu_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} - \mu_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \mu_0 \frac{\partial U_2^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_1}, \\
 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} &= -\frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_2},
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}
c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2} c_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \frac{1}{2} c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \\
&- \frac{1}{2} c_{11} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{1}{2} c_{12} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_1}, \\
c_{44} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial U_2}{\partial x_1} \frac{\partial U_3}{\partial x_1} - \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \frac{\partial U_3}{\partial x_1}
\end{aligned}$$

Счевидно, что здесь можно исследовать как распространение антиплоского электросупругого волнового сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$, так и распространение плоского упругого волнового сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$.

При учете только конечных удлинений (случаи задач б) и г)) в основных уравнениях и материальных соотношениях сохраняем только нелинейности типа $(\partial U_\alpha / \partial x_\alpha) \cdot (\partial U_\beta / \partial x_\beta)$, $(\alpha; \beta = 1, 2)$, обусловленные конечными удлинениями.

В этом случае уравнения электромагнетостатики для электросупругого слоя запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} &= -3c_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - c_{12} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2}, \\
\frac{1}{2} (c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{2} (c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} + c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} &= \\
= -c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} - 3c_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2}, & \quad (2.4) \\
c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + c_{44} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} + e_{15} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2} &= \\
= -e_{15} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - e_{15} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - e_{15} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - e_{15} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}, \\
e_{15} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + e_{15} \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} - \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} &= \epsilon_{11} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \epsilon_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} - \\
- \epsilon_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \epsilon_{11} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \epsilon_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} - \epsilon_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}, \\
\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} + \\
+ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_1^2},
\end{aligned}$$

а уравнения электромагнетостатики для внешней нематериальной среды запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2} &= -\frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial x_2^2}, \\
-\frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_2^2} &= -\frac{\partial^2 U_1^{(0)}}{\partial x_1^2} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \Psi^{(0)}}{\partial x_2^2}. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Соответствующие граничные условия на обеих свободных от механических нагрузок поверхностях слоя преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
 \Phi - \Phi^{(0)} &= 0, \quad \Psi - \Psi^{(0)} = 0, \\
 \epsilon_{15} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \epsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \epsilon_0 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} &= -\epsilon_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} - \epsilon_0 \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial x_2} + \epsilon_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \\
 -\mu_{11} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \mu_0 \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2} &= \mu_{11} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \mu_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} - \mu_0 \frac{\partial U_1^{(0)}}{\partial x_1} \frac{\partial \Psi^{(0)}}{\partial x_2}, \\
 \frac{\partial U_2}{\partial x_1} + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} &= 0, \\
 c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} &= -\frac{1}{2} c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} - c_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} - \frac{3}{2} c_{11} \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \frac{\partial U_2}{\partial x_2}, \\
 c_{44} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Очевидно, что здесь также можно исследовать как распространение антиплоского электроупругого волнового сигнала $\{0, 0, U_\gamma(x_\alpha, x_\beta, 0, t), \Phi(x_\alpha, x_\beta, 0, t)\}$, так и распространение плоского упругого волнового сигнала $\{U_\alpha(x_\alpha, x_\beta, 0, t), U_\beta(x_\alpha, x_\beta, 0, t), 0, 0\}$.

Из соотношений (2.1) - (2.6) видно, что во всех задачах левые нелинейные части связывают плоское и антиплоское поля деформации и при возбуждении либо сигнала плоской упругой деформации, либо сигнала антиплоской электроактивной деформации могут быть генерированы высшие гармоники обоих типов волн в связке друг с другом.

Институт механики НАН РА

Член-корреспондент НАН РА А. С. Аветисян, В. М. Хачатрян

Способности учета геометрической нелинейности при распространении электроупругой волны конечной амплитуды в пьезоэлектрической среде

Исследуется распространение электроупругого волнового сигнала конечной амплитуды в пьезоэлектрическом слое из пьезоэлектрика класса бтт гексогональной симметрии, при котором генерируются электромагнитоупругие высшие гармоники.

Получены основные уравнения электромагнитоупругости, граничные условия и материальные соотношения исследуемой задачи.

Показано, что в зависимости от того, какого рода волновой сигнал мы возбуждаем (плоскую упругую или антиплоскую электроупругую волну), основную

роль при распространении волны, а также при генерации следующих гармоник будут играть конечные удлинения или конечные сдвиги.

Из выведенных основных соотношений видно, что во всех задачах левые нелинейные части связывают плоское и антиплоское поля деформации и при возбуждении либо сигнала плоской упругой деформации, либо сигнала антиплоской электроактивной деформации могут быть генерированы высшие гармоники обоих типов волн в связке друг с другом.

ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Ա. Ս. Ավետիսյան, Վ. Մ. Խաչատրյան

Երկրաչափական ոչ գծայնության հաշվառման առանձնահատկությունները պինդ էլեկտրական միջավայրում վերջավոր լայնությամբ էլեկտրաառաձգական ալիքի փարածման դեպքում

Հետազոտվել է հեքսոգոնալ համաչափության 6mm դասի պինդբյուրեղային շերտում վերջավոր լայնությամբ էլեկտրաառաձգական ազդանշանի փարածումը, որի սլարագայում գեներացվում են դրա բարձր հարմոնիկաները:

Ստացված են հետազոտվող խնդրի էլեկտրամագնիսաառաձգականության հավասարումները, նյութական առնչությունները եւ եզրային պայմանները:

Ցույց են տրված փարբեր տեսակի երկրաչափական ոչ գծայնությունների (վերջավոր երկարացումներ կամ վերջավոր սահբեր) հաշվառման դեպքում ալիքային ազդանշանի փարածման փարբեր առանձնահատկությունների հնարավորությունը, ինչպես նաեւ, որ, կախված գրգռված ալիքային ազդանշանի տեսակից (հարթ առաձգական կամ հակահարթ էլեկտրաառաձգական), ալիքի փարածման, ինչպես նաեւ հաջորդ հարմոնիկաների գրգռման հարցում հիմնական դերակատարում կարող են ունենալ վերջավոր երկարացումները կամ վերջավոր սահբերը:

Corresponding member of NAS RA A. S. Avetisyan, V. M. Khachatryan

Features of Finite Amplitude Electroelastic Waves Propagation in the Piezoelectric Medium Taking into Account Geometrical Nonlinearity

The propagation of finite amplitude electroelastic wave signal in the piezoelectric medium from piezoelectric material of 6mm class of hexagonal symmetry is investigated under which the higher electromagnetoelastic harmonics are generated.

The basic equations of electromagnetoelasticity, boundary conditions and material relations of the investigated problem are obtained.

It is shown that depending on what type of wave we disturb (plane elastic or antiplane electroelastic wave), during the wave propagation, as well as during the generation of next harmonics the main role belongs to the finite elongations or finite shears.

From derived main correlations it is obvious that in all problems left nonlinear parts connected plane and antiplane deformation fields and during the disturbance both plane elastic deformation signal and antiplane electroactive deformation signal can be generated higher harmonics of both waves related with each other.

Литература

1. Белскирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск Наука. 1982.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М. Наука. 1988.
3. Аветисян А.С. - Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43. N4. С. 41-51.
4. Maugin G.A. Nonlinear electromechanical effects and application. World Sci. Publ. Singapore. 1985.
5. Аветисян А.С. - Изв. АН АрмССР. Механика. 1985. Т. 38. N1. С. 12-19.

ФИЗИКА

УДК 548.5

Э. П. Коканян

Особенности получения периодически поляризованных доменных структур в легированных кристаллах ниобата лития

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Ю. Крючкяном 18/IV 2009)

Ключевые слова: ниобат лития, домен, переполаризация, фоторефракция

1. Введение. Конструирование периодически поляризованных (ПП) доменов в сегнетоэлектрических материалах, таких как ниобат лития (LN), существенно расширило область их использования в нелинейно-оптических приложениях, основанных на квазифазовом синхронизме. Такие структуры обеспечивают надежный и многообещающий подход для разработки эффективных фотонных систем, основанных на генерации второй гармоники (ГВГ) в сине-зеленом спектральном диапазоне и в оптических параметрических осцилляторах (ОПО) [1-5]. Последние успехи в освоении различной техники в инженерии прерывисто-периодических и аperiodически поляризованных структур открыли дополнительные возможности для широкополосной и многоволновой ГВГ.

Возможность изменения частоты, поляризации, распространения оптических лучей крайне важна в квантовой электронике и фотонике. Параметрическая генерация гармоник добавляет возможность настройки лазерных источников и позволяет перекрыть когерентным излучением спектральные области и длительности импульсов, иначе запрещенные, позволяя таким образом разработать новые диагностики и аппаратуры.

С развитием методик создания ПП структур и областей их применения резко возрастают требования к исходному материалу, т.е. в данном случае к кристаллу LN. В первую очередь это отсутствие в ней фоторефрактивного эффекта, а также однородность, высокое оптическое качество кристалла и низкие значения проводимости.

В последние годы поиск новых нефоторефрактивных примесных ионов, которые используются для подавления в кристалле LN фоторефрактивного эффекта, увенчался успехом после нахождения ионов четырехвалентного гафния в качестве перспективной нефоторефрактивной примеси [6-10]. Несомненными преимуществами указанного иона, по сравнению с известными нефоторефрактивными примесными ионами и в первую очередь с широко используемым ионом магния, являются низкая пороговая концентрация (2-3 мол% вместо 5-6 мол% для MgO), что дает весомую перспективу получения кристалла высокого оптического качества, а также значение коэффициента распределения в кристалле в районе единицы, что гарантирует однородное распределение примеси в объеме кристалла.

2. Экспериментальные результаты и обсуждение. В данной работе проведено исследование кристаллов LN, легированных ионами Hf^{4+} , в плане возможности их применения в послеростовых процессах переполаризации [11,12], а также прямого выращивания кристаллов ППЛN:Hf. В первом случае проведены эксперименты по послеростовой переполаризации этих кристаллов и исследовано изменение их проводимости. С этой целью из кристаллов LN, легированных 1, 2, 3, 4, 5 и 8 мол% HfO_2 , были изготовлены пластины Z-среза толщиной 0.5 мм с полированными Z-поверхностями. На образцы были нанесены металлические электроды из NiCr и их поверхности были покрыты тонким слоем (порядка 0.5 мкм) изолятора. Источник высокого напряжения, дающий напряжение до 21 кВ/мм, был соединен с электродами. Для измерения проводимости на электроды, нанесенные на образцы, было приложено ступенчато-возрастающее напряжение с параллельным измерением напряжения и электрического тока на образцах.

Рис. 1 представляет вольт-амперные характеристики кристаллов LN, легированных 2 и 5 мол% HfO_2 . Подобно номинально чистым кристаллам LN конгруэнтного состава, с которым был проведен сравнительный анализ, кристалл LN:2 мол% HfO_2 , так же, как и кристаллы LN, легированные 1, 3 и 4 мол% HfO_2 , имел низкую проводимость и утечку заряда (рис. 1,б), тем самым демонстрируя возможность достижения больших площадей переполаризаций для указанных образцов. Исследование вольт-амперных характеристик кристаллов с более высокими концентрациями 5 мол% HfO_2 (рис. 1,в) и 8 мол% HfO_2 показало, что уже при низких значениях напряжения у кристаллов проявляется проводимость. Вследствие этого переполаризуются небольшие площади с низким качеством переполаризации.

С учетом того факта, что пороговое значение концентрации ионов Hf^{4+} находится в районе 3 мол%, приведенные результаты свидетельствуют о возможности получения на указанных кристаллах периодически поля-

ризованных структур высокой однородности. При этом предельная концентрация примесного иона для создания периодически поляризованных структур методами послеростовой переполаризации находится в интервале 4 – 5 мол%, выше которого наблюдается значительное ухудшение условий переполаризации.

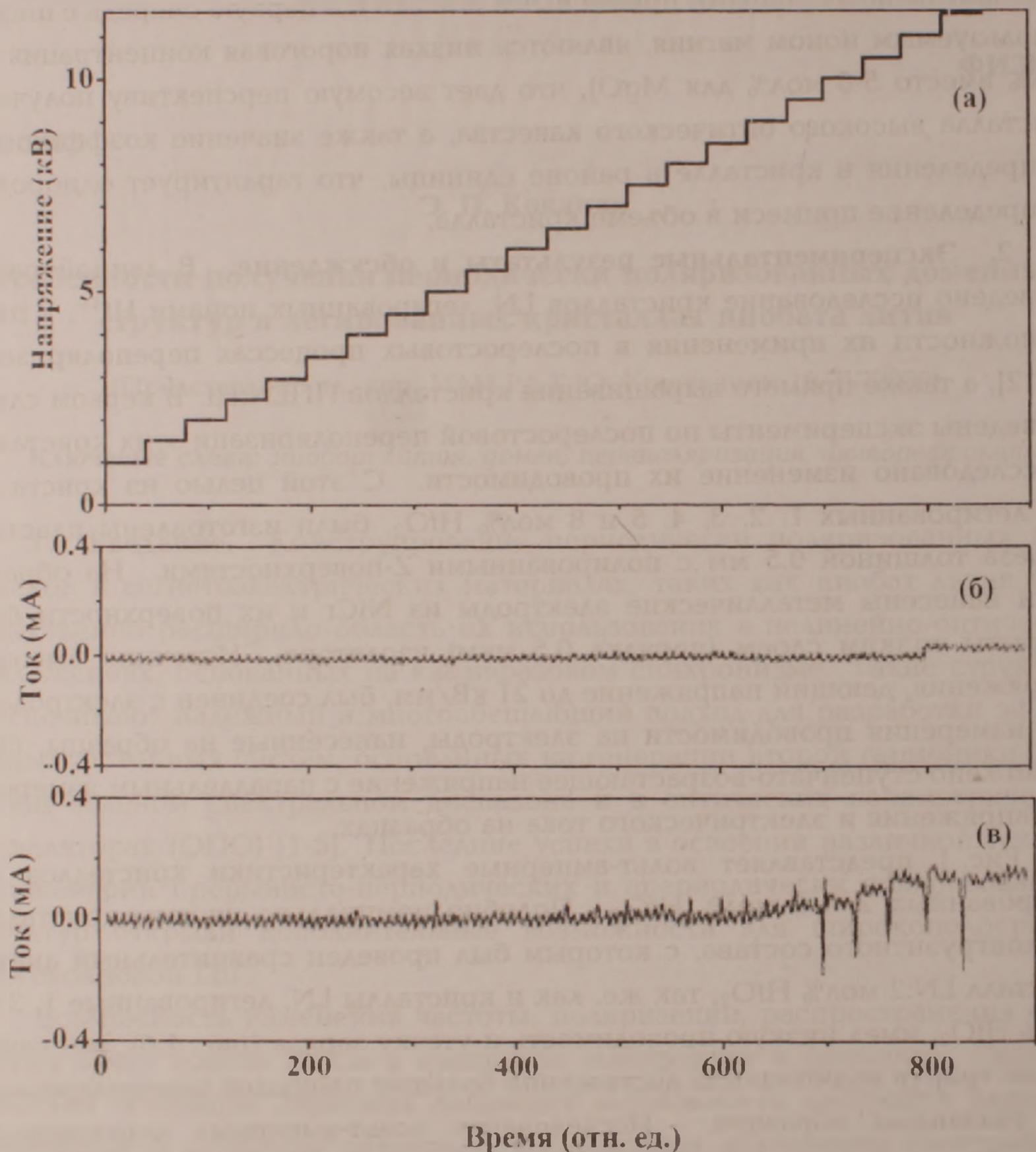


Рис. 1. Вольт-амперные характеристики кристаллов LN, легированных 2 мол% и 5 мол% HfO_2 : а) напряжение, приложенное к электродам, в зависимости от времени; б) электрический ток в зависимости от напряжения и времени для кристалла LN:2 мол% HfO_2 ; в) электрический ток в зависимости от напряжения и времени для кристалла LN:5 мол% HfO_2 .

Получение ПП структур в кристаллах LN, легированных ионами Hf^{4+} , непосредственно в процессе выращивания кристалла проводилось методом

Чохральского с приложением к системе кристалл – расплав импульсов электрического тока прямоугольной формы различной полярности [13], а также усовершенствованным методом, основанным на вращательных неоднородностях при росте со смещенной осью вращения кристалла от оси температурной симметрии ростовой системы [14-16]. С помощью обеих методик были получены однородные, непрерывистые ПП структуры размерами 3-60 мкм по всему объему кристалла. Рис. 2, представляющий микроизображение химически травленной поверхности кристалла LN:2 мол% HfO₂, полученное сканирующим электронным микроскопом, наглядно демонстрирует высокую однородность доменной структуры (рис. 2,а), а также тот факт, что эти структуры покрывают весь объем кристалла до его краев (рис. 2,б).

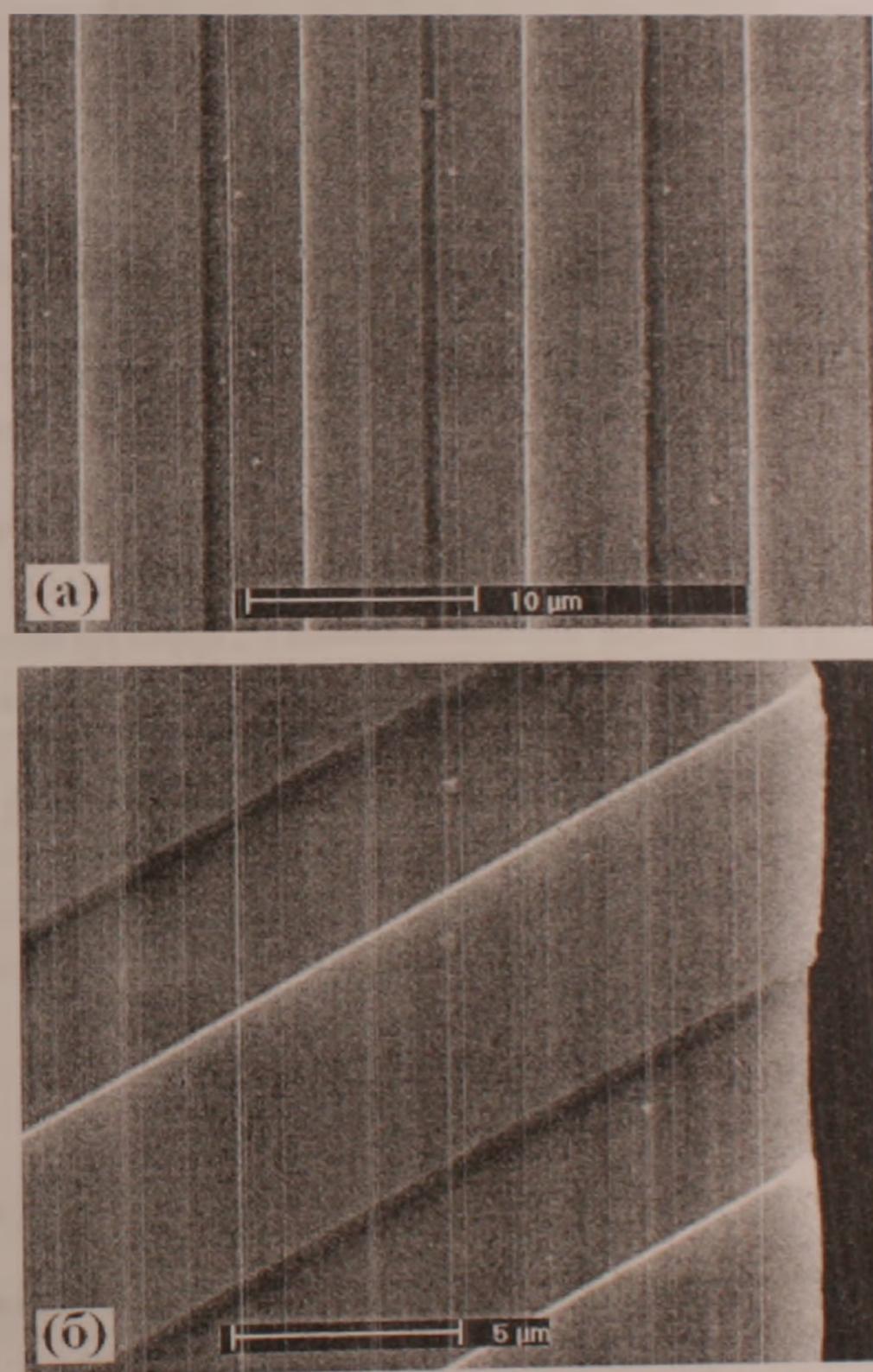


Рис. 2. Микроизображение химически травленной поверхности кристалла LN:2 мол% HfO₂, полученное сканирующим микроскопом: а) средняя часть кристалла; б) край кристалла.

Следует отметить, что, как и в случае с послеростовой переполаризацией, в случае прямого выращивания ППЛN:Hf предельное значение концентрации HfO₂, выше которой наблюдается значительное ухудшение однородности периодических структур, находится в области концентраций 4-5 мол%. Сказанное подтверждает рис. 3, показывающий начало разрушения структур в кристалле LN, легированном 5 мол% HfO₂. Надо отметить, что, как указано и в работе [13], разрушаться начинают стенки доменов, направленные в сторону расплава.

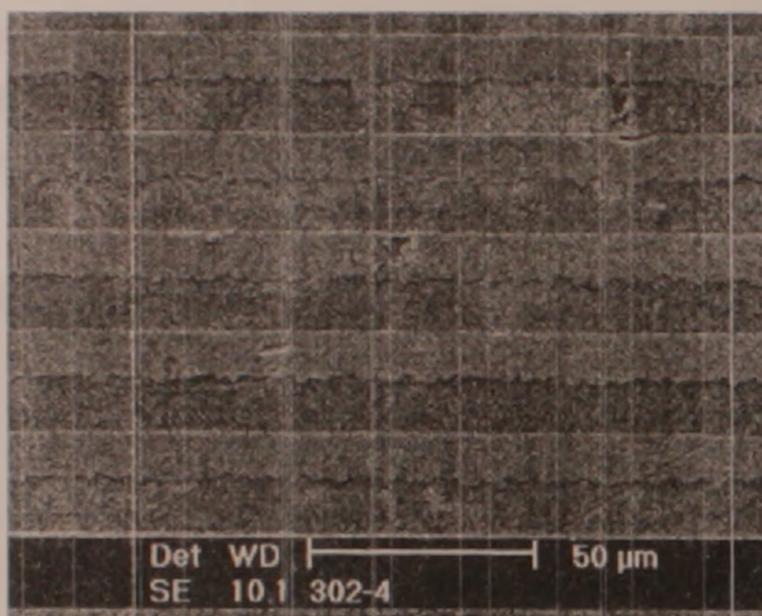


Рис. 3. Микроизображение химически травленной поверхности кристалла LN:5 мол% HfO₂, полученное сканирующим электронным микроскопом.

3. Заключение. Показано, что кристаллы LN, легированные HfO₂ до концентраций 4 – 5 мол%, являются удобным материалом для создания в них однородных периодически поляризованных структур больших площадей как методами послеростовой переполаризации, так и прямым выращиванием методом Чохральского.

Работа выполнена при поддержке проектов МНТЦ-1606, NFSAT-02-07 и ANSEF-1696.

Институт физических исследований НАН РА

Э. П. Коканян

Особенности получения периодически поляризованных доменных структур в легированных кристаллах ниобата лития

Исследованы условия получения периодически поляризованных доменных структур в легированных гафнием кристаллах ниобата лития методами послеростовой переполаризации и прямого выращивания кристаллов. Показано, что

эти кристаллы являются удобным материалом для получения в них периодически поляризованных доменных структур. Найдены предельные концентрации примесного иона гафния, выше которых наблюдается значительное ухудшение однородности периодических структур.

Է. Պ. Կոկանյան

Լիթիումի նիոբատի լեգիրացված բյուրեղներում պարբերաբար բեռնացված դոմենային կառուցվածքների սրացման առանձնահատկությունները

Հետազոտված են հեփաճային վերաբեռնացման եւ բյուրեղների ուղղակի աճեցման մեթոդներով հաֆնիումով լեգիրացված լիթիումի նիոբատի բյուրեղներում պարբերաբար բեռնացված դոմենային կառուցվածքների սրացման պայմանները: Ցույց է տրված, որ նշված բյուրեղները հարմար նյութ են նրանցում պարբերաբար բեռնացված դոմենային կառուցվածքների ստեղծման համար: Որոշված են հաֆնիումի խառնուրդային իոնի սահմանային կոնցենտրացիաները, որից բարձրի դեպքում դիտվում է պարբերական կառուցվածքների համասեռության զգալի վախճարացում:

E. P. Kokanyan

Peculiarities of Periodically Poled Domain Structures Creation in Doped Lithium Niobate Crystals

Conditions for creation of periodically poled domain structures in hafnium-doped lithium niobate crystals by after-growth repolarization and direct growth methods were investigated. It is shown that the mentioned crystals are a suitable material for obtaining the periodically poled domain structures in them. Ultimate concentrations of the hafnium impurity ion are found, above which an essential degradation of periodic structures homogeneity is observed.

Литература

1. Myers L.E., Eckardt R.C., Fejer M.M., Byer R.L., Bosenberg W.R., Pierce J.W. - J. Opt. Soc. of Am. 1995. V. 12. N11. P. 2102-2116.
2. Pruneri V., Butterworth S.D., Hanna D.C. - Optics Letters. 1996. V. 21. N6. P. 390-393.
3. Banfi G.P., Datta P.K., Degiorgio V., Fortusini D. - Applied Physics Letters. 1998. V. 73. N2. P. 136-138.
4. Chou M.H., Brener I., Fejer M.M., Chaban E.E., Christman S.B. - IEEE Photon.

Technol. Letters. 1999. V. 11. N6. P. 653-655.

5. *Cristiani I., Degiorgio V., Socci L., Carbone F., Romagnoli M.* - IEEE Photon. Technol. Letters. 2002. V. 14. N5. P. 669-671.

6. *Kokanyan E.P., Razzari L., Cristiani I., Degiorgio V., Gruber J.B.* - Applied Physics Letters. 2004. V. 84. N11. P. 1880-1882.

7. *Kokanyan E.P.* - Ferroelectrics. 2006. V. 341. P. 119-124.

8. *Minzioni P., Cristiani I., Yu J., Parravicini J., Kokanyan E.P., Degiorgio V.* - Optics Express. 2007. V. 15. N21. P. 14171-14176.

9. *Minzioni P., Cristiani I., Degiorgio V., Kokanyan E.P.* - Journal of Applied Physics. 2007. V. 101. N11. P.116105-1-116105-3.

10. *Kokanyan E., Minzioni P., Cristiani I., Degiorgio V.* - Ferroelectrics. 2008. V. 373. P. 32-36.

11. *Grili S., Ferraro P., Paturzo M., Alfieri D., Natale P.De.* - Optics Express. 2004. V. 12. N9. P. 1832-1842.

12. *Shur V.Ya., Romyantsev E.L., Nikolaeva E.V., Shishkin E.I., Batchko R.G., Miller G.D., Fajer M.M., Byer R.L.* - Ferroelectrics. 2001. V. 236. P. 129-144.

13. *Kokanyan E.P., Babajanyan V.G., Demirkhanyan G.G., Gruber J.B., Erdei S.* - Journal of Applied Physics. 2002. V. 92. N3. P. 1544-1547.

14. *Ming N.-B., Hong J.-F., Feng D.* - J. Mater. Sci. 1982. V. 17. P. 1663-1668.

15. *Zheng J.-J., Lu Y.Q., Luo G.-P., Ma J., Lu Y.-L.* - Applied Physics Letters. 1998. V. 72. N15. P. 1808-1810.

16. *Bernudez V., Serrano M.D., Dieguez E.* - J. Crystal Growth. 1999. V. 200. P. 185-190.

БИОХИМИЯ

УДК 612. 83: 612. 014. 42; 612. 434. 14

Т. К. Киприян, В. О. Топузян, И. Р. Карапетян, Т. С. Хачатрян

Влияние йодметилата 2-(диметиламино) этилового эфира
N-(n-метоксибензоил)-DL- фенилаланина на фоновую и вызванную
активность одиночных мотонейронов спинного мозга до и после его
гемисекции

(Представлено академиком К.Г.Карагезяном 9/II 2009)

Ключевые слова: йодметилат 2-(диметиламино) этиловый эфир N-(n-метоксибензоил)-DL-фенилаланина, спинной мозг, гемисекция, мотонейроны, вызванная активность, фоновая активность

Введение. Состояние восстановительных процессов при повреждениях спинного мозга (СМ) у млекопитающих при воздействии различными препаратами является одной из актуальнейших проблем современной биологии и медицины [1]. Стойкость соматических и вегетативных нейрогенных нарушений является причиной инвалидизации большинства больных с поражением СМ и нарушением проводимости нервных импульсов [2 - 5]. В корригировании последних невторостепенна роль эфиров холина, в частности ацетилхолина (АХ), заслуживающего существенное внимание с точки зрения особенностей его синтеза и биологической активности [6]. Согласно результатам исследований последних лет [7 - 9] с холиновыми эфирами связан ряд важнейших функций в организме человека и животных. Вместе с тем отсутствуют сведения относительно применения эфиров холина при спинномозговых повреждениях различной степени выраженности и результатов их действия на мотонейроны (МН) СМ.

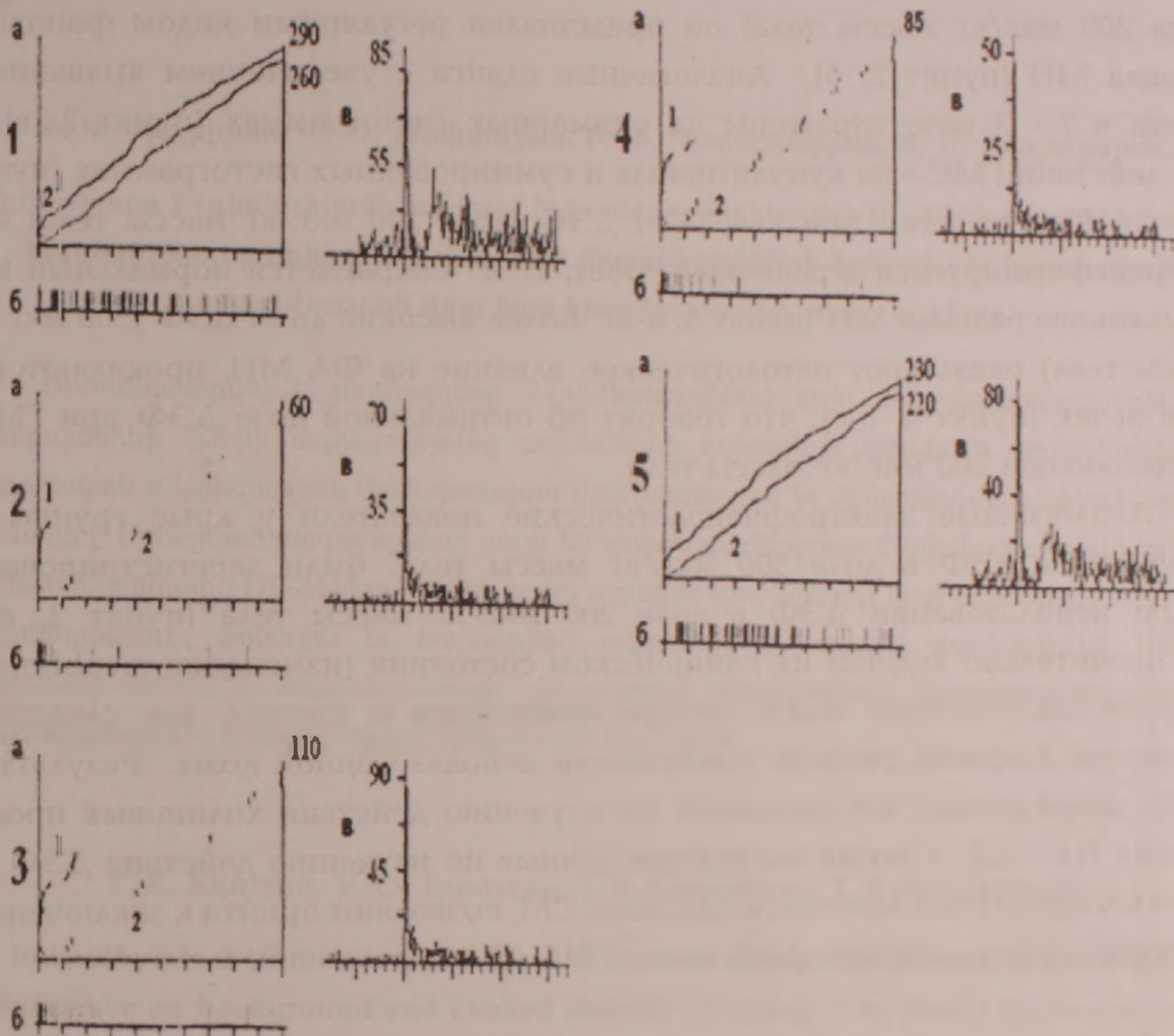
В целях поиска оптимальных средств, стимулирующих и благоприятствующих росту волокон повреждённых путей СМ, с учётом вышеотмеченных особенностей холиновых эфиров нами исследовано действие одного из

холиновых эфиров – йодметилата 2-(диметиламино) этилового эфира N-(n-метоксибензоил)-DL-фенилаланина (ДЭФ), синтезированного в Институте тонкой органической химии им. А. Л. Мнджояна НАН РА под руководством В. О. Топузьяна, на одиночные МН СМ крыс в норме и при его экспериментальных повреждениях типа гемисекций (ГМС).

Материалы и методика. Эксперименты проведены на 60 белых крысах-самцах массой 220-230 г в 5 подопытных группах (по 10 экземпляров в 1 – 4-й и 20 – в пятой): 1) интактные животные; 2) животные, из которых 5 получали в течение 1 месяца внутримышечные инъекции ДЭФ в дозе 200 мкг/кг массы тела индивидуально, а 5 – 500 мкг/кг массы тела индивидуально; 3) животные с левосторонней латеральной ГМС СМ на уровне Т8 - Т9; 4) животные с левосторонней латеральной ГМС СМ на уровне Т8 - Т9, получавшие в место повреждения СМ в течение 1 месяца ДЭФ в дозе 500 мкг/кг массы тела индивидуально; 5) животные с левосторонней латеральной ГМС СМ на уровне Т8 - Т9, получавшие в место повреждения СМ в течение 2 месяцев ДЭФ в дозе 200 мкг/кг массы тела индивидуально. Оптимальная дозировка ДЭФ выбрана исходя из токсичности данного препарата с учётом интенсивности спинномозгового повреждения. Электрофизиологические эксперименты были начаты после проведения клинических наблюдений и дачи препарата подопытным животным. Производили экстраклеточную регистрацию спонтанной фоновой активности (ФА) одиночного МН вентрального рога СМ. В ответ на раздражение седалищного нерва производили экстраклеточную регистрацию вызванной электрической активности (ВА) данного МН. Отведение активности исследуемых МН проводили стеклянными микроэлектродами с диаметром кончика 1 - 2 микрон, заполненными 2М раствором NaCl, в дорзо-вентральном направлении в сером веществе передних рогов поясничного отдела СМ в области МН (IX пластина по Рекседу). Регистрацию ФА и ВА МН проводили с помощью специально разработанной программы, обеспечивающей в режиме on-line селекцию спайков посредством амплитудной дискриминации спайков и последующим построением кумулятивной импульсной гистограммы для выбора необходимого режима записи ФА и ВА одиночного МН. Анализ полученных данных осуществляли по подробно описанному алгоритму [10].

Результаты исследований и их обсуждение. На рисунке приведены примеры кумулятивных (пункты 1 - 5, а, б) и суммированных (пункты 1 - 5, в) престаимпульсных и постстимульных гистограмм ФА и ВА одиночного МН СМ (глубина 1300 микрон) у интактных животных (пункт 1, а-в); у животных, получавших в течение 1 месяца внутримышечные инъекции ДЭФ (глубина 1300 микрон, пункт 2, а-в); у животных с ГМС СМ (глубина 1300 микрон,

пункт 3, а-в); у животных с ГМС СМ, получавших ДЭФ в течение 1 месяца в место повреждения СМ в дозе 500 мкг/кг индивидуально (глубина 1300 микрон, пункт 4, а-в); у животных с ГМС СМ, получавших ДЭФ в течение 2 месяцев в место повреждения СМ в дозе 200 мкг/кг индивидуально (глубина 1300 микрон, пункт 5, а-в).



Примеры кумулятивных (а) и суммированных (в) пре- и постстимульных гистограмм внеклеточной фоновой и вызванной активности: одиночных мотонейронов вентрального рога спинного мозга крыс в норме (1, а-в); у крыс, получавших ДЭФ в течение 1 месяца в дозе 200 мкг/кг (2, а-в); у крыс с левосторонней латеральной гемисекцией спинного мозга (3, а-в); у крыс с левосторонней латеральной гемисекцией спинного мозга, получавших в течение 1 месяца ДЭФ в дозе 500 мкг/кг (4, а-в); у крыс с левосторонней латеральной гемисекцией спинного мозга, получавших в течение 2 месяцев ДЭФ в дозе 200 мкг/кг (5, а-в). Глубина отведения всех 5-мотонейронов 1300 микрон.

На "а": ордината — число импульсов до и после стимуляции нерва, абсцисса — время регистрации импульсного потока; на "б": картина импульсного потока после стимуляции нерва в избранном интервале времени; на "в": ордината — процент импульсов (в бинах) от числа проб, абсцисса — последовательность бинов.

Согласно данным пункта 1, а, кумулятивные кривые (1, 2) до и после раздражения на фоне действия ДЭФ ФА МН (пункт 2, а, 2) трансформируются в пачечную (патологическую) активность с сохранением и увеличением вызванного синаптического ответа, что говорит об усилении действия ДЭФ. Что касается импульсного потока (пункт 1, б), то здесь после введения ДЭФ (доза 200 мкг/кг массы тела) он представлен регулярным видом фонового разряда МН (пункт 2, б). Аналогичные сдвиги с увеличением вызванного ответа в 2 - 3 раза отражены на суммарных гистограммах (пункт 2, в), а при действии ГМС – на кумулятивных и суммированных гистограммах (пункт 3, а-в). Вместе с тем при ГМС СМ ДЭФ (доза 200 мкг/кг массы тела) ФА не трансформируется в пачечный ответ, т. е. сохраняется нормальный вид регулярного разряда МН (пункт 5, а-в). Более высокие дозы ДЭФ (500 мкг/кг массы тела) оказывают патологическое влияние на ФА МН, проявляются в виде пачек (пункт 4, а-в), что говорит об оптимальной дозе ДЭФ при ГМС, составляющей 200 мкг/кг массы тела.

Аналогичные электрофизиологические показатели у крыс группы 2, получавших ДЭФ в дозе 500 мкг/кг массы тела, были зарегистрированы и при использовании ДЭФ в дозе 200 мкг/кг массы тела (пункт 2, а-в) при значительно худшем их клиническом состоянии (изменение шерстяного покрова, пигментация кожи, потеря ориентации и зрения), как следствие вероятной высокой степени токсичности использованной дозы. Результаты ранее проведенных исследований по изучению действия холиновых производных [11 - 15], а также настоящие данные по изучению действия ДЭФ на ФА и БА одиночных МН поврежденного СМ, позволяют прийти к заключению о протекторном действии ДЭФ после ГМС СМ.

Институт тонкой органической химии им. А. Л. Миндзояна НАН РА

Т. К. Киприян, В. О. Топузян, И. Р. Карапетян, Т. С. Хачатрян

Влияние йодметилата 2-(диметиламино) этилового эфира

N-(п-метоксибензоил)-DL-фенилаланина на фоновую и вызванную активность одиночных мотонейронов спинного мозга до и после его гемисекции

Сбсуждается вопрос применения йодметилата 2-(диметиламино) этилового эфира N-(п-метоксибензоил)-DL-фенилаланина в норме и при левосторонней латеральной гемисекции спинного мозга у крысы. Полученные результаты свидетельствуют о протекторном эффекте йодметилата 2-(диметиламино) этилового эфира

N-(n-метоксибензоил)-DL-фенилаланина на фоновую и вызванную электрическую активность одиночных мотонейронов спинного мозга крысы с левосторонней латеральной гемисекцией. Регистрация и анализ вызванной активности одиночных мотонейронов спинного мозга проводились посредством специальных компьютерных программ в режиме on-line.

Թ. Կ. Կիպրիյան, Վ. Օ. Թոփուզյան, Ի. Ռ. Կարապետյան, Տ. Ս. Խաչատրյան

Յոդմեթիլատ 2-(դիմեթիլամինա) էթիլ N-(n-մեթոքսիբենզոիլ)-DL-ֆենիլալանինի եթերի ազդեցությունը ողնուղեղի առանձին մոտոնեյրոնների ֆոնային եւ հարուցված ակտիվության վրա նրա կիսահատումից առաջ եւ հետո

Ուսումնասիրվել է յոդմեթիլատ 2-(դիմեթիլամինա) էթիլ N-(n-մեթոքսիբենզոիլ)-DL-ֆենիլալանինի եթերի ազդեցությունը առնետների ողնուղեղի առանձին մոտոնեյրոնների էլեկտրական ակտիվության փոփոխության վրա նորմայում եւ ձախակողմյան կիսահատման ժամանակ: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս յոդմեթիլատ 2-(դիմեթիլամինա) էթիլ N-(n-մեթոքսիբենզոիլ)-DL-ֆենիլալանինի եթեր ստացող առնետների մոտ ողնուղեղի առանձին մոտոնեյրոնների ֆոնային եւ հարուցված ակտիվության ստույգ բարելավման էֆեկտ: Ողնուղեղի առանձին մոտոնեյրոնների էլեկտրական ակտիվության գրանցումը կատարված է համակարգչային հատուկ ծրագրերով on-line ռեժիմում:

T. K. Kipriyan, V. O. Topuzyan, I. R. Karapetyan, T. S. Khachatryan

**Iodmethylate 2-(Dimethylamino) Ethyl N-(n-Metoxybenzoil)-DL-Fenilalanyn Ester
Influence on Background and Evoked Activity of Spinal Cord Single Motoneurons
before and after its Hemisection**

In these series of investigations the question of the use of one of choline esters: iodmethylate 2-(dimeylamino) etyl N-(n-metoxybenzoil)-DL-fenilalanyn ester on rats in norm and with the left-side lateral hemisection of spinal cord is discussed. The obtained results show the protective effect of iodmethylate 2-(dimeylamino) ethyl N-(n-metoxybenzoil)-DL-fenilalanyn ester on background and evoked activity of single spinal motoneurons of rats with left-side lateral hemisection. The registration and analysis of the evoked activity of single motoneurons of spinal cord of rats is done by means of the special computer programs in on-line mode.

Литература

1. Матинян Л. А., Андреасян А. С., Киприян Т. К., Хачатрян Т. С. - *Вопр. теоретической и клинической медицины*. 2003. Т. 6. N 4 (30). С. 5 - 7.
2. Babu R. S., Namasivayam A. - *Synapse*. 2008. V. 62. N 6: P. 432 - 447.
3. De Almeida H. L., Fiss R. C. - *Dermatol. Online. J.* 2008. V. 14. N 11. P. 18.
4. Fawcett J. V. - *Rehabil. Med.* 2008. V. 9. N 40. P. 780 - 782.
5. Матинян Л. А., Нагапетян Х. О., Андреасян А. С., Киприян Т. К., Хачатрян Т. С. - *Вестник МАНЭБ*. 2007. Т. 12. N 4. Вып. 2. С. 157 - 159.
6. Мнджоян О. Л., Топузьян В. О. - *Успехи химии*. 1981. Т. 50. Вып. 12. С. 2198 - 2211.
7. Grigoryan H. A., Hambardzumyan A. A., Mkrtchyan M. V., Topuzyan V. O., Halebyan G. P., Astryan R. S. - *Chem. Biol. Interact.* 2008. V. 171. N 1. P. 108 - 116.
8. Brown M., Davies I. M., Moffat C. F., Redshaw J., Craft J. A. - *Mar. Environ. Res.* 2004. V. 57. N 3. P. 155 - 169.
9. Holmes - McNary M. Q., Cheng W. L., Mar M. H., Fussel S., Zeisel S. H. - *Am. J. Clin. Nutr.* 1996. V. 64. N 4. P. 572 - 576.
10. Хачатрян Т. С. - *Биолог. журн. Армении*. 2007. Т. 59. N 3 - 4. С. 198 - 202.
11. Masson P., Froment M. T., Gillon E., Nachon F., Lockridge O., Schopfer L. M. - *Biochim. Biophys. Acta.* 2007. V. 1774. N 1. P. 16 - 34.
12. Eibl K. H., Lewis G. P., Betts K., Linberg K. A., Gandorfer A., Kampik A., Fisher S. K. - *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.* 2007. V. 48. N 3. P. 1305 - 1311.
13. Di Venosa G., Hermida L., Battle A., Fukuda H., Defain M. V., Mamone L., Rodriguez L., MacRobert A., Casas A. - *Photochem. Photobiol.* 2008. V. 92. N 1. P. 1 - 9.
14. Zeisel S. H. - *Am. J. Clin. Nutr.* 2000. V. 905. N 19. P. 528 - 531.
15. Rouleau P., Unq R. V., Lapointe N. P., Guertin P. A. - *Neurotrauma*. 2007. V. 24. N 2. P. 367-378.

ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

УДК 581.11

В. В. Казарян, В. А. Давтян, В. С. Мартиросян

Динамика водного режима дуба крупнопольничкового в зависимости от порослевой нагрузки

(Представлено академиком К. С. Погосяном 25/X 2008)

Ключевые слова: дуб крупнопольничковый, поросли, водообмен

Порослевое возобновление древесных пород является одним из основных путей вегетативного восстановления лесов. При этом рост порослей обусловлен возрастом порубленного дерева, мощностью пня, расположением порослей на пне, их числом и т.д.

Число порослей обуславливает интенсивность их роста, поскольку имеет место жесткая конкуренция между ними за воду, питательные элементы и корневые метаболиты. Поэтому для получения полноценного порослевого древостоя необходимо вмешательство в жизнь растения применением фито-техники, направленной на регулирование порослевой нагрузки пня.

Данный подход был применен при экофизиологических исследованиях порослевого возобновления дубовых древостоев Северной Армении.

С этой целью были заложены пробные площадки в порубленных лесных массивах Ванадзорского лесничества Гутаркского лесхоза площадью в 400 м². Исследуемый лесной массив расположен на восточном склоне Памбакского хребта, крутизна склона – 30°, растительный покров – луго-степной. Объектами исследования служили одновозрастные (45-50)-летние, порубленные в 1997-1998гг. деревья дуба крупнопольничкового. Были выбраны пни примерно одинакового возраста, с одинаковыми высотой, диаметром и числом порослей (10-12 шт.). В первой декаде мая была произведена регулировка числа порослей на пнях по следующим вариантам: 1 – контроль (12 порослей), 2 – одна, 3 – две, 4 – три, 5 – четыре поросли. Определялись параметры водного режима (содержание форм

воды, интенсивность транспирации, водный дефицит и водоудерживающая способность) [1] как основного показателя физиологического состояния роста и продуктивности древостоя [2].

Спределения проводились через 7 дней после регулировки порослей и в периоды начала роста, интенсивного роста и его конца. Позторность определений 6-кратная.

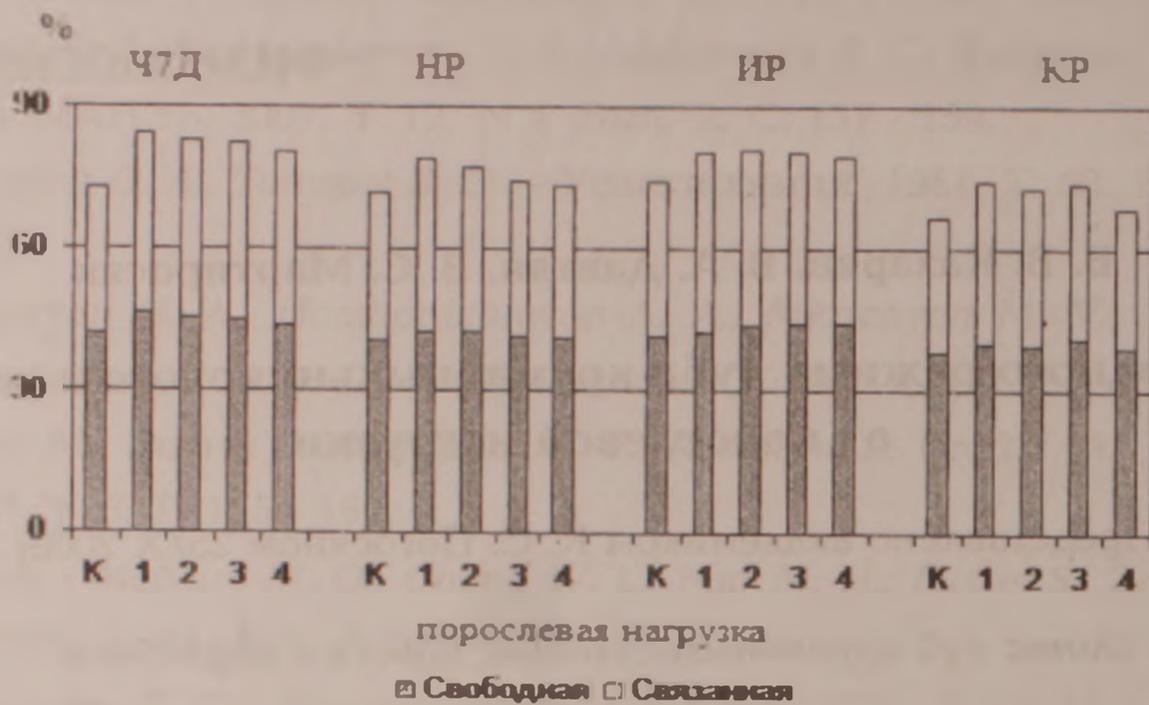


Рис. 1. Динамика изменения свободной и связанной воды после порослевой нагрузки: Ч7Д – через 7 дней; НР – начало роста; ИР – интенсивный рост; КР – конец роста.

Результаты исследований показали (рис.1), что регулировка числа порослей отражается на фракционном составе воды в листьях порослей дуба. Через неделю после регулировки нагрузки происходит резкое повышение содержания общей воды за счет свободной, тогда как в листьях контрольных порослей изменений не происходит.

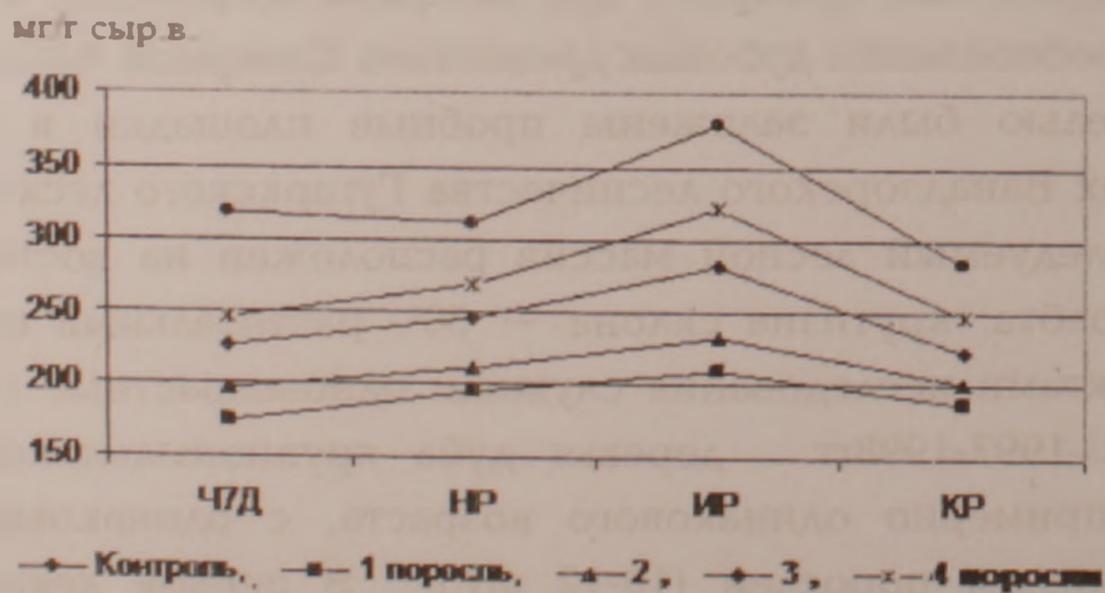


Рис. 2. Изменение интенсивности транспирации (мг/г сыр.в.) после порослевой нагрузки. Обозначения те же, что на рис. 1.

С ходом же ростовых процессов имеет место внутренняя регулировка фракционного состава воды. При этом в фазе видимого роста наблюдается ярко выраженная обратная корреляция между числом порослей и содержанием общей и свободной воды. В фазе интенсивного роста разница между опытными вариантами сглаживается, тем не менее оставаясь выше контроля на 5 - 6%. В конце же роста опять проявляется обратная корреляция между числом порослей и содержанием форм воды.

С изменением форм воды тесно связана интенсивность транспирации (рис. 2). Через 7 дней после порослевой нагрузки параллельно с повышением оводненности отметилась низкая интенсивность транспирации. С увеличением порослевой нагрузки обнаруживается небольшое падение транспирации. Имеет место обратная связь между оводненностью и транспирацией и прямая - между числом порослей и расходом воды. Можно полагать, что при этом проявляется мезофитность, которая рассматривается не как приобретенный признак, а как кратковременная физиологическая реакция на нарушение целостности.

При различной порослевой нагрузке, как известно, имеет место изменение корнеобеспеченности порослей [3, 4]. Чем меньше число порослей на пне, тем больше активных корней приходится на единицу поверхности листьев, чем и обусловлено повышение их оводненности и снижение интенсивности транспирации. В процессе динамики роста порослей сохраняется закономерность между порослевой нагрузкой и интенсивностью транспирации.

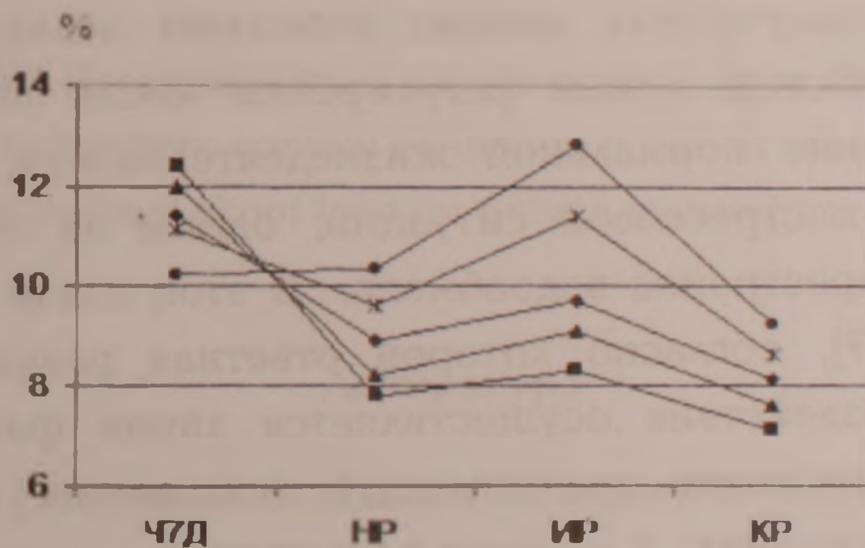


Рис. 3. Изменение водного дефицита после порослевой нагрузки. Обозначения те же, что на рис. 1.

Одним из звеньев общего процесса водного обмена является водоудерживающая способность и водный дефицит листьев порослей (рис. 3, 4). В этом аспекте установлено, что физиологическая реакция на нагрузку через 7 дней проявилась ослаблением водоудерживающей способности и повышением водного дефицита. Далее, по мере прохождения периодов роста, эта

закономерность сохраняется в отношении водоудерживающей способности, а при учете водного дефицита проявляется диаметрально противоположная картина: чем больше порослей на пне, тем выше водный дефицит [5]. По мнению авторов, это явление также объясняется корнеобеспеченностью, т.е. чем меньше корней приходится на единицу поверхности листьев, тем выше компенсаторная реакция на повышение поглотительной активности и водообеспеченности. Снижение исследуемых показателей водного режима объясняется старением листьев [6].

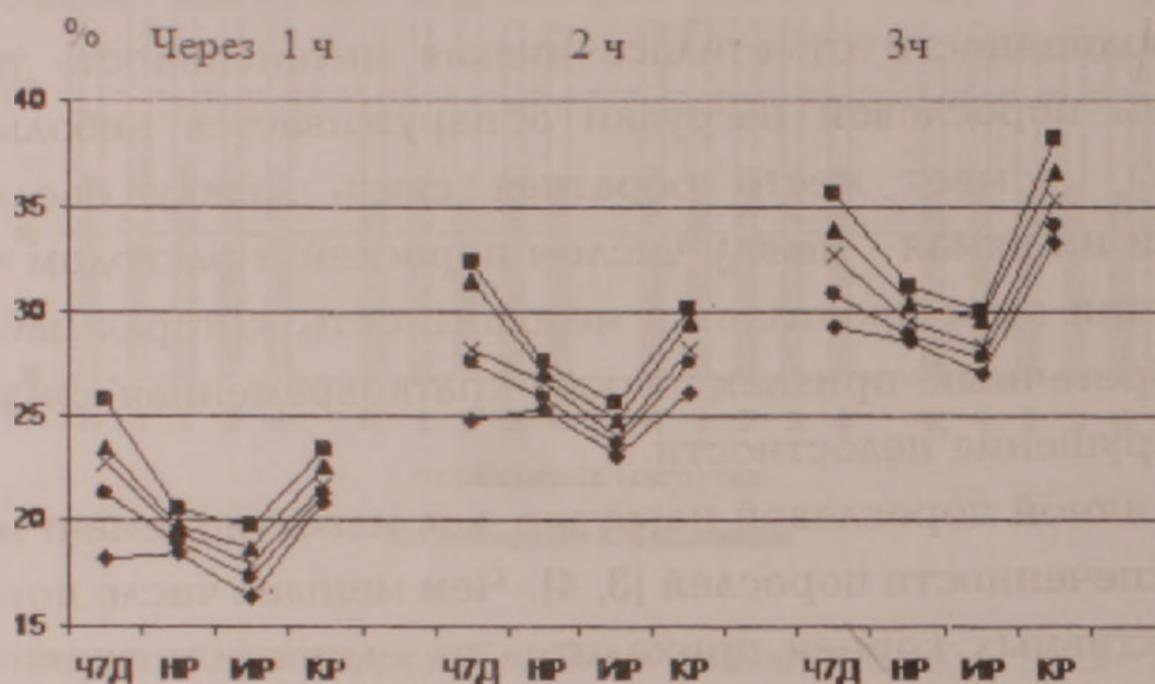


Рис. 4. Изменение водоудерживающей способности (% потерянной воды) после порослевой нагрузки. Обозначения те же, что на рис. 1.

Рассмотрение полученных данных позволяет заключить, что примененный фитотехнический прием регулировки числа порослей вызывает у растений нарушение нормальной жизнедеятельности, что, по нашему мнению, приводит к стрессовой ситуации, одним из путей преодоления которой является перестройка водообмена. В этой связи уместно отметить работу Штоккера [7], согласно которой ответная реакция организма на неблагоприятное воздействие осуществляется двумя фазами: 1 – фаза реакции, когда происходят значительные отклонения в метаболизме и физиологических функциях; 2 – фаза реституции – восстановление нарушенных процессов и их стабилизация на новом уровне. В этом аспекте можно утверждать, что в наших опытах фаза реакции проявилась через 7 дней, а реституции – в постепенном выравнивании нарушенных процессов в ходе прохождения периодов роста.

В. В. Казарян, В. А. Давтян, В. С. Мартиросян

Динамика водного режима дуба крупнопыльникового в зависимости от порослевой нагрузки

Показано, что регулировка числа порослей вызывает у дуба крупнопыльникового неодинаковую реакцию на число оставленных порослей, что отражается на водообмене. Это позволяет выбрать оптимальную порослевую нагрузку для усиления роста.

Վ. Վ. Դազարյան, Վ. Ա. Դավթյան, Վ. Ս. Մարտիրոսյան

Խոշորառնէջ կաղնու ջրային ռեժիմի շարժընթացը՝ կախված մացառային ծանրաբեռնվածությունից

Ցույց է փրված, որ մացառների թվի կարգավորումը հարուցում է խոշորառնէջ կաղնու ոչ միաբնակ ռեակցիա թողնված մացառների քանակի նկատմամբ, որն անդրադառնում է ջրափոխանակության վրա: Դա թույլ է փալիս աճը խթանելու համար ընտրել օպտիմալ մացառային ծանրաբեռնվածություն:

V. V. Kazaryan, V. A. Davtyan, V. S. Martirosyan

The Dynamics of Quercus Macranthera Water Regime Depending on Shoots Load

It was shown, that the regulation of shoots content arose the Quercus macranthera the unequal reaction to the kept content of shoots. It has an effect on water metabolism. It allows to choose the optimal shoot load for growth stimulation.

Литература

1. Гусев Н.А. Некоторые методы исследования водного режима растений. Л. ВБО. 1960. 61 с.
2. Горьшина Т.К. Экология растений. М. Высшая школа. 1979. 368 с.
3. Казарян В.О., Махатадзе Л.Б. - ДАН АрмССР. 1955. Т.20. N 2. С. 61-64.
4. Саркисян К.Ш. Зеленое кольцо Еревана. История создания и пути восстановления. Ереван. Асогик. 2007. 160 с.
5. Казарян В.О., Гезалян М.Г. - ДАН АрмССР. 1968. Т. 46. N 4. С.195-199.
6. Казарян В.О. Старение высших растений. М. Наука. 1969. 314 с.
7. Штоккер О. В сб.: Растение и вода. М. Наука. 1970. С.27-38.