

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱՇԽԱՏԱԿ  
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

---

ISSN 0321-1339

**ՉԵՎՈՒՅՑՆԵՐ**  
**ДОКЛАДЫ**  
**REPORTS**

*Ֆինանսավել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ*

*Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год*

*Founded in 1944. Published quarterly*

**Գլխավոր խմբագիր՝ ակադեմիկոս Վ. Ս. ԶԱԽԱՐՅԱՆ**

**Խմբագրական խորհուրդ՝ ակադեմիկոս Ա.Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ),**  
ակադեմիկոս Է.Գ. ԱՖՐԻԿՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Գ.Ա.  
ԲՐՈՒՏՅԱՆ, ակադեմիկոս Է.Ս. ԳԱԲՐԻԵԼՅԱՆ, ակադեմիկոս Ա.Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ, ակադեմիկոս  
Ս. Ա. ՀԱՍԲԱՐՉՈՒՄՅԱՆ, ակադեմիկոս Է.Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Կ.Գ. ՂԱՐՎԳՅՈՂՅԱՆ,  
ակադեմիկոս Ռ. Ս. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու.Հ. ՇՈՒՔՈՒՐՅԱՆ, Լ.Ս. ՍԱՐԱՖՅԱՆ  
(պատ. քարտուղար), ակադեմիկոս Ֆ.Տ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, ակադեմիկոս Դ.Ս. ՍԵՂՐԱԿՅԱՆ

**Главный редактор академик В.С. ЗАХАРЯН**

**Редакционная коллегия: академик А.А.АВETИCЯН (зам. главного редактора),**  
академик С.А. АМБАРЦУМЯН, академик Э.Г. АФРИКЯН, академик Г.Е.  
БАГДАСАРЯН, академик Г.А. БРУТЯН, академик Э.С. ГАБРИЕЛЯН, академик Э.М.  
КАЗАРЯН, академик К.Г. КАРАГЕЗЯН, академик Р.М. МАРТИРОСЯН, Л.С.  
САРАФЯН (отв. секретарь), академик Ф.Т. САРКИСЯН, академик Д.М. СЕДРАКЯН,  
академик А.А. ТАЛАЛЯН, академик Ю.Г. ШУКУРЯН

**Editor-in-chief academician V.S. ZAKARYAN**

**Editorial Board: academician S. A. AMBARTSUMIAN, academician A.A. AVETISSYAN (vice-**  
**editor-in-chief), academician G.E. AFRIKIAN, academician G.E. BAGDASARIAN, academician**  
**G.A. BRUTIAN, academician E.S. GABRIELIAN, academician K.G. KARAGEUZYAN,**  
**academician E.M. KAZARYAN, academician R. M. MARTIROSYAN, L.S. SARAFYAN (executive**  
**secretary), academician F.T. SARGSSIAN, academician D.M. SEDRAKIAN, academician Yu.H.**  
**SHOUKOURIAN, academician A.A. TALALIAN**

*Խմբագրության հասցեն 375019 Երևան 19, Սարչալ Բաղրամյանի պող. 24գ*

*Ֆեռ. 56 – 80 – 67*

*Խմբագրության վարիչ Գ. Ա. Աբրահամյան*

*Адрес редакции: 375019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г*

*Тел. 56-80-67*

*Зав. редакцией Г. А. Абрамян*

*Communication links: address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 375019, Armenia*

*Phone (3741) 56 – 80 – 67*

*URL: <http://elib.sci.am>*



## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

### ՍԱԹԵՍՈՂՏԻԿԱ

<i>Է. Ա. Միրզախանյան, Ն. Է. Միրզախանյան</i> – Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չսփականության հոմոտոպիական խմբերի ալտերնատիվ սահմանումներ .....	309
<i>Ա. Գ. Քամայան</i> – Տյուպլիցյան օպերատորների կորիզների որոշ հատկություններ .....	316
<i>Գ. Ա. Բաբայան</i> – Թռչող սարքի հետագծերի պարամետրական ներկայացման մասին .....	323
<i>Ա. Յա. Սահակյան</i> – Միակոր շրջանից դուրս բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման ընդհանուր լուծումը .....	331
<i>Պ. Ա. Մաթևոսյան</i> – Ներդրման թեորեմներ $A^*$ տարածությունում .....	337

### ՄԵԽԱՆԻԿԱ

<i>Ս. Ա. Համբարձումյան, Ս. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան</i> – Տիեզերական վերելակի ճոպանի երկարության և լարումների նվազեցման հարցեր .....	345
--	-----

### ՖԻԶԻԿԱ

<i>Գ. Ա. Առաքելյան</i> – Օպտիկական անշրջելիության էֆեկտները դիէլեկտրական թեքման բացասական կոմպոնենտով միջավայրերում .....	353
<i>Լ. Ա. Վարդանյան</i> – Գրգռված խառնուկային վիճակների կապի էներգիայի պոլարոնային շեղումը քվանտային կետում էլեկտրական դաշտի առկայության դեպքում .....	360

### ՕՐԳԱՆՈՎԿԱՆ ՔԻՄԻԱ

<i>Ջ. Թ. Կարապետյան, Գ. Գ. Սակարյան, Ա. Ա. Սվետիսյան</i> – Նոր լակտոն-անիզիդրոնների սինթեզ .....	368
--	-----

### ԿԵՆՍԱԷԻՄԻԱ

<i>Ս. Շ. Մուրադյան, Ա. Ն. Եղիզարյան, Լ. Ա. Սեխյան, Ա. Ա. Գալոյան</i> – Կարդիուսկտրվ հեքսապեպտիդի ազդեցությունը [ $^{35}\text{S}$ ] տաուրինի կլանման վրա առնետների սրտի կտրվածքներում ադրենա-, խոլինա- և մորֆինանման ռեցեպտորների բլոկադայի դեպքում .....	372
Բովանդակություն 107-րդ հատորի .....	381

## СОДЕРЖАНИЕ

### МАТЕМАТИКА

- Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян* – Альтернативные определения бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства ..... 309
- А. Г. Камалин* – Некоторые свойства ядер теплицевых операторов..... 316
- О. А. Бабаян* – О параметрическом представлении траекторий полета летательного аппарата..... 323
- А. Я. Саакян* – Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга..... 331
- П. А. Матевосян* – Теоремы вложения в пространстве  $A^*_\omega$ ..... 337

### МЕХАНИКА

- С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян* – Вопросы уменьшения напряжений и длины троса космического лифта ..... 345

### ФИЗИКА

- О. М. Аракелян* – Эффекты оптической необратимости в средах с отрицательной компонентой диэлектрического тензора ..... 353
- Л. А. Варданян* – Поляронный сдвиг энергии связи возбужденных примесных состояний в квантовой точке при наличии электрического поля..... 360

### ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- З. Т. Карапетян, Р. А. Макарян, А. А. Аветисян* – Синтез новых лактон-анизидинов ..... 368

### БИОХИМИЯ

- М. Ш. Мурадян, А. К. Едигарян, Л. А. Сехян, А. А. Галоян* – Влияние кардиоактивного гексапептида на захват [ $^{35}\text{S}$ ] таурина срезами сердца крысы при блокаде адрено-, холино- и опиоидных рецепторов ..... 372
- Содержание 107-го тома ..... 381

## CONTENTS

### MATHEMATICS

- E. A. Mirzakhanian, N. E. Mirzakhanian* – Alternative Definitions of Infinite-Dimensional Homotopic Groups of Subsets of Hilbert Space ..... 309
- A. H. Kamalyan* – Some Properties of Kernels of Toeplitz Operators ..... 316
- H. A. Babayan* – On Parametrical Representation of the Aircraft Flight Trajectories ..... 323
- A. Y. Sahakyan* – General Solution of the Higher Order Properly Elliptic Equation in Exterior of the Unit Disk ..... 331
- P. A. Matevosyan* – Theorems of Inclusion in the Space  $A^*_\omega$  ..... 337

### MECHANICS

- S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan* – Some Aspects of Space Elevator Ribbon Stress and Length Reduction ..... 345

### PHYSICS

- H. M. Arakelyan* – Effects Optical Irreversibility in Media with the Negative Component of the Dielectric Tensor ..... 353
- L. A. Vardanyan* – Polaronic Shift of Binding Energy of Excited Impurity States in the Electric Field in a Quantum Dot ..... 360

### ORGANIC CHEMISTRY

- Z. T. Karapetyan, H. H. Makaryan, A. A. Avetissyan* – New Lacton-Anisidines Synthesis ..... 368

### BIOCHEMISTRY

- M. Sh. Muradyan, A. N. Yedigaryan, L. A. Sekhyan, A. A. Galoyan* – Effect of Hexapeptide on [ $^{35}\text{S}$ ] Taurine Uptake in White Rat Heart at Blockade of Adreno-, Choline- and Morfine-Like Receptors ..... 372
- Contents of 107<sup>th</sup> volume ..... 381

МАТЕМАТИКА

УДК 515.1

Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян

Альтернативные определения бесконечномерных гомотопических групп  
подмножеств гильбертова пространства

(Представлено чл.-кор. НАН РА Г.Г. Геворкяном 27/VII 2007)

**Ключевые слова:** *альтернативные бесконечномерные топологии, гильбертово пространство, конечный дефект, изоморфизм*

Статья посвящена бесконечномерной гомотопической топологии вещественного гильбертова пространства  $H$ . Приведены альтернативные определения бесконечномерных абсолютных и относительных гомотопических групп подмножеств и пар подмножеств из  $H$ . Допустимыми являются отображения, принадлежащие одному специальному классу  $K_0$  непрерывных отображений ( $K_0$ -отображений) подмножеств из  $H$ .

Определения основных понятий и свойства класса  $K_0$  содержатся в [1,2].

Сначала необходимо кратко привести основные определения (подробнее см. [3]).

Пусть  $H$  - произвольное, но зафиксированное, действительное гильбертово пространство. Напомним, что линейное подпространство  $M$  пространства  $H$  называется подпространством конечного дефекта (или конечной коразмерности)  $q \geq 0$ , если ортогональное дополнение  $M^\perp$  подпространства  $M$  относительно  $H$  имеет размерность  $q$ ; если  $q$  - отрицательное целое число, то гильбертово пространство  $M$  будем называть по отношению к  $H$  надпространством дефекта  $q$ , если  $M$  содержит  $H$  в качестве своего подпространства дефекта  $(-q)$ .

Условимся через  $B(M)$ ,  $B^*(M)$  и  $S(M)$  обозначать соответственно единичные замкнутый, открытый шары и единичную сферу подпространства или надпространства  $M$  пространства  $H$ .

Пусть  $(X, x_0)$  - пара, состоящая из произвольного подмножества  $X$  из  $H$  и некоторой точки  $x_0 \in X$ . Такие пары принято называть множеством с отмеченной точкой или пунктированным множеством.

**Определение 1.**  $K_0$ -отображение  $f : (M, M \setminus B(M)) \rightarrow (X, x_0)$  относительно гильбертова пространства  $M \cup H$ , переводящее  $M$  в  $X$ , а  $M \setminus B(M)$  в точку  $x_0$ , будем называть  $K_0$ -сфероидом дефекта  $q \in \mathbb{Z}$  множества  $X$  в точке  $x_0$ .

Множество всех таких сфероидов будем обозначать символом  $K_0(M, M \setminus B(M); X, x_0)$ . Выбрав в  $M$  произвольный единичный вектор  $a$ , определим сумму двух сфероидов  $f, g$  из  $K_0(M, M \setminus B(M); X, x_0)$ , положив

$$(f + g)(x) = \begin{cases} f(2x + a) & \text{при } (x, a) \leq 0, \quad x \in M, \\ g(2x - a) & \text{при } (x, a) \geq 0, \quad x \in M. \end{cases}$$

Определим понятие  $K_0$ -гомотопности двух сфероидов  $f, g$  из  $K_0(M, M \setminus B(M); X, x_0)$ . С этой целью обозначим через  $R$  числовую прямую, а через  $I$  - отрезок  $[0, 1]$ . Декартово произведение  $M' = R \times M$  можно рассматривать как гильбертово пространство, для которого  $M$  является подпространством дефекта 1. По отношению к исходному пространству  $H$  пространство  $M'$  можно рассматривать как подпространство дефекта  $q - 1$  (для этого в случае  $q > 0$  следует за  $R$  принять любую содержащуюся в  $H$  прямую, проходящую через нуль и ортогональную к  $F$ ).

**Определение 2.** Отображение  $\Phi : I \times M \rightarrow X$  мы будем называть  $K_0$ -гомотопией сфероидов, если оно принадлежит классу  $K_0$  в гильбертовом пространстве  $M' \cup H$  и, кроме того, для любого  $t \in I$  отображение  $\varphi_t : M \rightarrow X$ , определяемое равенством  $\varphi_t(x) = \Phi(t, x)$ ,  $x \in M$  является  $K_0$ -сфероидом дефекта  $q$  множества  $X$  в точке  $x_0$ , т.е. принадлежит множеству  $K_0(M, M \setminus B(M); X, x_0)$ .

Если при этом  $\varphi_0 = f$  и  $\varphi_1 = g$ , то будем говорить, что  $K_0$ -гомотопия  $\Phi$  соединяет сфероиды  $f$  и  $g$ . Два сфероида, которые можно соединить  $K_0$ -гомотопией сфероидов, называются  $K_0$ -гомотопными. Сумма сфероидов с точностью до  $K_0$ -гомотопности не зависит от выбора единичного вектора  $a \in M$ . Далее отношение  $K_0$ -гомотопности  $K_0$ -сфероидов  $f, g$  есть отношение эквивалентности в множестве  $K_0(M, M \setminus B(M); X, x_0)$ . Соответствующее фактор-множество будем обозначать символом  $K_0[M, M \setminus B(M); X, x_0]$ . Класс эквивалентности сфероида  $f$  будем называть  $K_0$ -гомотопическим классом  $f$  и обозначать через  $[f]$ ; операция сложения сфероидов корректно распространяется на  $K_0$ -гомотопические классы и формула  $[f] + [g] = [f + g]$  дает групповую операцию в  $K_0[M, M \setminus B(M); X, x_0]$ . Полученная абелева группа обозначается через  $\prod_q^M(X, x_0)$ . Нулем этой группы является класс постоянного сфероида. Для сфероида  $f$  противоположным ему сфероидом будем называть

сфероид  $g = -f$ , который симметричен к  $f$  относительно гиперплоскости  $\Gamma_0$  подпространства  $M$ , определяемой равенством  $(x, a) = 0$ , т.е.  $f(x) = g(y)$  при выполнении условий  $x + y \in \Gamma_0$ ,  $x - y \perp \Gamma_0$ . Таким образом, имеем  $-[f] = [-f]$ . Доказывается, что группа  $\Pi_q^M(X, x_0)$  с точностью до изоморфизма не зависит от выбора  $M$ .

Это позволяет запись  $\Pi_q^M(X, x_0)$  сократить до записи  $\Pi_q(X, x_0)$  и группу  $\Pi_q(X, x_0)$  называть  $K_0$ -бесконечномерной абсолютной гомотопической группой дефекта  $q \in Z$  множества  $X$  в точке  $x_0$ .

Перейдем теперь к рассмотрению бесконечномерных относительных гомотопических групп.

Пусть  $M$ , как и в абсолютном случае, снова есть подпространство или надпространство дефекта  $q \in Z$  гильбертова пространства  $H$ . Выберем некоторый единичный вектор  $e \in M$  и обозначим через  $M_e$  подпространство из  $M$ , ортогональное к прямой  $L_e \subset M$ , проходящей через  $e$ . Положим

$$J^e(M) = \{x \in M : (x, e) \geq 0, x \notin L_e \times B^*(M_e)\} \cup \{x \in M \setminus B^*(M) : (x, e) \leq 0\}.$$

Пусть  $(X, A, x_0)$  - тройка, состоящая из произвольного множества  $X \subseteq H$ , его подмножества  $A \subseteq X$  и точки  $x_0 \in A$ ; такую тройку называют парой с отмеченной точкой или пунктированной парой.

**Определение 3.** *Отображение  $f : (M, M \setminus B(M); J^e(M)) \rightarrow (X, A, x_0)$ , принадлежащее классу  $K_0$  (относительно гильбертова пространства  $M \cup H$ ), будем называть относительным  $K_0$ -сфероидом дефекта  $q \in Z$  пары  $(X, A)$  в точке  $x_0$ ; множество всех таких сфероидов обозначим через  $K_0(M, M \setminus B(M), J^e(M); (X, A, x_0))_q$ .*

Выбрав единичный вектор  $a \in M_e$ , определим сумму двух относительно  $K_0$ -сфероидов  $f, g$  точно по такой же формуле, что и в абсолютном случае. Далее, соответствующим образом определяются  $K_0$ -гомотопии для относительных сфероидов; полученное фактор-множество обозначим через  $\Pi_q^{M, e, a}(X, A, x_0)$ ; относительно формулы  $[f] + [g] = [f + g]$  множество  $\Pi_q^{M, e, a}(X, A, x_0)$  превращается в абелеву группу. При этом нулевой элемент и противоположный элемент определяются так же, как в абсолютном случае. Группа  $\Pi_q^{M, e, a}(X, A, x_0)$  с точностью до изоморфизма не зависит от элементов выбора  $M, e, a$ ; в результате получаем группу  $\Pi_q(X, A, x_0)$ , которую и назовем  $K_0$ -бесконечномерной гомотопической группой дефекта  $q \in Z$  пары  $(X, A)$  в точке  $x_0$ .

Перейдем теперь к описанию некоторых альтернативных (но эквивалентных изложенным выше основным определениям) определений рассматриваемых групп. Сначала рассмотрим абсолютный случай. Пусть по-прежнему  $M$  - произвольное линейное подпространство или надпространство дефекта  $q \in Z$

пространства  $H$ ,  $B(M)$  и  $S(M)$  соответственно единичный замкнутый шар и единичная сфера  $M$  и  $(X, x_0)$  - пунктированное множество из  $H$ .

Обозначим через  $K_0(B(M), S(M); X, x_0)$  множество всех отображений  $f : (B(M), S(M)) \rightarrow (X, x_0)$ , принадлежащих к классу  $K_0$  относительно гильбертова пространства  $M \cup H$ . Введем в множестве  $K_0(B(M), S(M); X, x_0)$  отношение  $K_0$ -гомотопности  $rel(S(M))$ . Полученное фактор-множество (обычно называемое гомотопическим множеством) обозначим через  $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$ .

**Предложение 1.** *Существует биективное соответствие между элементами группы  $\Pi_q(X, x_0)$  и элементами ( $K_0$ -гомотопическими классами) множества  $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$ .*

**Следствие 1.** *Переносом посредством этого соответствия групповую операцию из  $\Pi_q(X, x_0)$  в  $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$ , получим изоморфизм группы  $\Pi_q(X, x_0)$  на группу  $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$ .*

Таким образом, согласно предложению 1 мы можем символом  $\Pi_q(X, x_0)$  обозначать также построенную группу  $K_0[B(M), S(M); X, x_0]$ , т.е. положить  $\Pi_q(X, x_0) = K_0[B(M), S(M); X, x_0]$  и элементы группы  $\Pi_q(X, x_0)$  определять так же, как  $K_0$ -гомотопические классы относительно сферы  $S(M)$   $K_0$ -отображений  $f : (B(M), S(M)) \rightarrow (X, x_0)$ .

Выберем единичный вектор  $e \in M$  и обозначим, как и выше, через  $M_e$  векторное подпространство всех векторов из  $M$ , ортогональных к  $e$ ; рассмотрим единичную сферу  $S(M)$ , единичный замкнутый шар  $B(M_e)$  и единичную сферу  $S(M_e)$ . Ясно, что их дефекты соответственно равны  $q+1$ ,  $q+1$  и  $q+2$ . Нижнюю замкнутую полусферу (т.е. содержащую точку  $-e$ ) сферы  $S(M)$  обозначим через  $E$  и рассмотрим пару  $(S(M), E)$ . Далее, обозначим через  $K_0(S(M), E; X, x_0)$  множества всех отображений  $f : (S(M), E) \rightarrow (X, x_0)$ , принадлежащих классу  $K_0$  относительно гильбертова пространства  $M \cup H$ , введем в этом множестве отношение  $K_0$ -гомотопности  $rel(E)$  и получающееся фактор-множество обозначим через  $K_0[S(M), E; X, x_0]$ .

**Предложение 2.** *Существует биективное соответствие между элементами группы  $\Pi_{q+1}(X, x_0) = K_0[B(M_e), S(M_e); X, x_0]$  и элементами гомотопического множества  $K_0[S(M), E; X, x_0]$ .*

**Следствие 2.** *Как и в следствии 1, переносом групповую структуру в  $\Pi_{q+1}(X, x_0)$  посредством указанного биективного соответствия в  $K_0[S(M), E; X, x_0]$ , мы можем превратить его в группу, изоморфную группе  $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ .*

Таким образом, мы и в данном случае можем писать  $\Pi_{q+1}(X, x_0) = K_0[S(M), E; X, x_0]$  и элементы группы  $\Pi_{q+1}(X, x_0)$  определять так же, как  $K_0$ -гомотопические классы относительно  $E$   $K_0$ -отображений  $f : (S(M), E) \rightarrow (X, x_0)$ . Наконец опишем еще одно альтернативное определение абсолютных

гомотопических групп. Сохраняя обозначения предыдущего случая, точку  $-e$  полусферы  $E$  обозначим через  $s_0$  и рассмотрим пару  $(S(M), s_0)$ ; пусть  $K_0(S(M), s_0; X, x_0)$  - множество всех отображений  $f : (S(M), s_0) \rightarrow (X, x_0)$ , принадлежащих классу  $K_0$  относительно гильбертова пространства  $M \cup H$ .

Введем отношение  $K_0$ -гомотопности  $rel\{s_0\}$  в  $K_0(S(M), s_0; X, x_0)$  и рассмотрим фактор-множество  $K_0[S(M), s_0; X, x_0]$ .

**Предложение 3.** *Существует биективное соответствие между гомотопическими множествами  $K_0[S(M), E; X, x_0]$  и  $K_0[S(M), s_0; X, x_0]$ .*

**Следствие 3.** *Согласно следствию 2 и предложению 3 множество  $K_0[S(M), s_0; X, x_0]$  можно превратить в группу, изоморфную группе  $\Pi_{q+1}(X, x_0)$ .*

Таким образом, элементы группы  $\Pi_{q+1}(X, x_0)$  можно определить как  $K_0$ -гомотопические классы  $rel\{s_0\}$   $K_0$ -отображений  $f : (S(M), s_0) \rightarrow (X, x_0)$ .

Подытоживая результаты предложений 1-3, можем при рассмотрении  $K_0$ -абсолютных бесконечномерных гомотопических групп кроме основного определения пользоваться любым из трех описанных альтернативных определений этих групп.

Рассмотрим множество  $K_0(B(M), S(M), E; X, A, x_0)$  всех отображений  $f : (B(M), S(M), E) \rightarrow (X, A, x_0)$ , принадлежащих классу  $K_0$  относительно гильбертова пространства  $M \cup H$  и в нем отношение  $K_0$ -гомотопности относительно семейства  $\{S(M), E; A, x_0\}$ . Полученное фактор-множество обозначим через  $K_0(B(M), S(M), E; X, A, x_0)$ .

**Предложение 4.** *Существует биективное соответствие между элементами группы  $\Pi_q(X, A, x_0) = K_0[M, M \setminus B^*(M), J^c(M); X, A, x_0]$  и элементами гомотопического множества  $K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$ .*

**Следствие 4.** *Предложение 4 позволяет множество  $K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$  превратить в группу, изоморфную группе  $\Pi_q(X, A, x_0)$ .*

Таким образом, мы можем писать  $\Pi_q(X, A, x_0) = K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$ , т.е. элементы группы  $\Pi_q(X, A, x_0)$  определять как  $K_0$ -гомотопические классы относительно семейства  $\{S(M), E; A, x_0\}$   $K_0$ -отображений  $f : (B(M), S(M), E) \rightarrow (X, A, x_0)$ .

Рассмотрим теперь тройку  $(B(M), S(M), s_0)$  и множество  $K_0(B(M), S(M), s_0; X, A, x_0)$  всех отображений  $f : (B(M), S(M), s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , принадлежащих классу  $K_0$  в гильбертовом пространстве  $M \cup H$ . Введем в этом множестве отношение  $K_0$ -гомотопности относительно семейства  $\{S(M), s_0; A, x_0\}$  и полученное фактор-множество обозначим через  $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$ .

**Предложение 5.** *Существует биективное соответствие между элементами гомотопических множеств  $K_0[B(M), S(M), E; X, A, x_0]$  и  $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$ .*

**Следствие 5.** *В силу предложения 5 множество  $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$*

можно наделить структурой группы, изоморфной группе  $\Pi_q(X, A, x_0)$ .

Таким образом, мы можем группу  $\Pi_q(X, A, x_0)$  отождествлять с группой  $K_0[B(M), S(M), s_0; X, A, x_0]$  и, следовательно, элементы группы  $\Pi_q(X, A, x_0)$  можно определять как  $K_0$ -гомотопические классы относительно семейства  $\{S(M), s_0; A, x_0\}$  отображений  $f : (B(M), S(M), s_0) \rightarrow (X, A, x_0)$ , принадлежащих классу  $K_0$  относительно гильбертова пространства  $M \cup H$ .

Итак, в относительном случае наряду с основным определением существуют альтернативные (эквивалентные основному) определения  $K_0$ -бесконечномерных относительных гомотопических групп.

Ереванский государственный университет

Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян

### Альтернативные определения бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства

Статья посвящена бесконечномерной гомотопической топологии вещественного гильбертова пространства  $H$ . Приведены альтернативные определения бесконечномерных абсолютных и относительных гомотопических групп подмножеств и пар подмножеств из  $H$ . Допустимыми являются отображения, принадлежащие одному специальному классу  $K_0$  непрерывных отображений ( $K_0$ -отображений) подмножеств из  $H$ .

Է. Ա. Միրզախանյան, Ն. Է. Միրզախանյան

### Տիրերության փարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափականության հոմոտոպիական խմբերի ալգորիթմի սահմանումներ

Նոդվածը նվիրված է իրական հիլերության  $H$  փարածության անվերջ չափականության հոմոտոպիական փոպոլոգիայի կառուցմանը: Այնպեղ բերված են  $H$  փարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափականության հոմոտոպիական խմբերի ալգորիթմի սահմանումներ:

Թ-ույլափրելի արքապափկերումներ են  $H$  փարածության ենթաբազմությունների անրնդհափ արքապափկերումների  $K_0$  հափուկ դասին պափկանող անրնդհափ արքապափկերումներ:

Alternative Definitions of Infinite-Dimensional Homotopic Groups of Subsets of Hilbert Space

The paper presents alternative definitions of infinite-dimensional homotopic groups of subsets and pair of subsets of real Hilbert Space  $H$ . The admissible mappings are mappings, which belong to a special class  $K_0$  of continuous mappings of subsets from  $H$  so-called  $K_0$ -mappings. Definitions of basic notions and some properties of class  $K_0$  are containing in [1,2].

Литература

1. *Мирзаханян Э.А.* - Уч. записки ЕГУ. 1990. N3. С. 21-28.
2. *Мирзаханян Э.А.* - Уч. записки ЕГУ. 1991. N1. С. 3-10.
3. *Мирзаханян Э.А.* - Изв. ВУЗов. Математика, 2002. N8 (483). С. 43-52.
4. *Мирзаханян Э.А.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2002. Т. 37. N4. С. 31-44.

УДК 517.968.23

А. Г. Камалян

### Некоторые свойства ядер теплицевых операторов

(Представлено академиком А.Б. Нерсесяном 3/VII 200)

**Ключевые слова:** матрица-функция, теплицев оператор, индексное подпространство

1. Как известно, задача построения факторизации матрицы-функции сводится к описанию ядер соответствующих теплицевых операторов. В частности, частные индексы матрицы-функции полностью определяются структурой ядер этих операторов (см. например [1-3]). В данной работе изучаются некоторые структурные свойства ядер теплицевых операторов при общих предположениях относительно их символов.

Пусть  $\Gamma$  совокупность конечного числа замкнутых непересекающихся жордановых спрямляемых кривых, ограничивающих многосвязную область  $\Omega^+(\ni 0)$ , и  $\Omega^-(\ni \infty)$  дополнение к  $\bar{\Omega}^+$  в расширенной комплексной плоскости  $\bar{\mathbb{C}}$ .  $E_p^+$  ( $E_p^-$ )  $1 \leq p \leq \infty$  – класс Смирнова в  $\Omega^+$  ( $\Omega^-$ ),  $\mathring{E}_p^-$  – класс функций из  $E_p^-$ , исчезающих в бесконечности,  $L_p^\pm$  ( $\mathring{L}_p^-$ ) подпространство функций из  $L_p$  ( $= L_p(\Gamma)$ ), совпадающих почти всюду на  $\Gamma$  с угловыми предельными значениями некоторой функции из  $E_p^\pm$  ( $\mathring{E}_p^\pm$ ),  $\mathcal{P}_+$  ( $\mathcal{P}_-$ ) – оператор, проектирующий прямую сумму  $\mathcal{L}_p = L_p^+ + \mathring{L}_p^-$  на  $L_p^+$  ( $\mathring{L}_p^-$ ) параллельно  $\mathring{L}_p^-$  ( $L_p^+$ ) (см. [3-4]). Действие проекторов  $\mathcal{P}_\pm$  на вектор-функции и матрице-функции (далее в.-ф. и м.-ф.) определяется покомпонентно. Ниже через  $\tau_a^+$  ( $a \in \mathbb{C}$ ),  $\tau_a^-$  ( $a \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ ) мы обозначаем операторы сдвига, действующие на функцию  $f$  (соответственно в.-ф. и м.-ф.) по формулам  $(\tau_a^+ f)(t) = (t - a)f(t)$ ,  $\tau_a^- = -\frac{1}{a} \tau_a^+ (\tau_0^+)^{-1}$ . В частности подразумевается, что  $\tau_\infty^- = (\tau_0^+)^{-1}$ . Далее,  $X^n$  ( $X^{n \times m}$ ) означает пространство вектор-столбцов (матриц) порядка  $n$  ( $n \times m$ ) с элементами из линейного пространства  $X$ .

Пусть  $G$  — м.-ф. порядка  $n \times n$ , элементы которой почти всюду на контуре  $\Gamma$  принимают конечные комплексные значения. Через  $\mathcal{D}_p^+ (= \mathcal{D}_p^+(G))$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  обозначим пространство всех в.-ф.  $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$  таких, что  $G\varphi_+ \in \mathcal{L}_p^n$ , а через  $\mathcal{D}_p^- (= \mathcal{D}_p^-(G))$  — пространство всех в.-ф.  $\varphi_- \in (L_p^-)^n$ , для которых существует  $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$  такое, что  $\varphi_- = G\varphi$ . Заметим, что  $\mathcal{D}_p^\pm \left( (\tau_0^+)^k G \right) = \mathcal{D}_p^\pm(G)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Рассмотрим оператор Теплица  $T_p(G)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , действующий в пространстве  $(L_p^+)^n$  с областью определения  $\mathcal{D}_p^+$  и определенный равенством  $T_p(G)\varphi_+ = \mathcal{P}_+(G\varphi_+)$  ( $\varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+$ ). Пространство  $\text{Ker } T_p \left( (\tau_0^+)^{-j} G \right)$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ) обозначим через  $\mathcal{N}_{p,j}^+$ . Если  $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j}^+$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ), то в.-ф.  $\varphi_- = (\tau_0^+)^{-j+1} G\varphi_+$  назовем  $j$ -двойственной к  $\varphi_+$ . Если  $M \subset \mathcal{N}_{p,j}^+$ , то множество в.-ф.,  $j$ -двойственных к элементам  $M$ , назовем  $j$ -двойственным к  $M$ . Пространство,  $j$ -двойственное к  $\mathcal{N}_{p,j}^+$ , обозначим через  $\mathcal{N}_{p,j}^-$ .

2. Для произвольных  $\alpha_+, \beta_+ \in \mathbb{C}, \alpha_-, \beta_- \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$  имеет место

$$\mathcal{N}_{p,j}^- + \tau_{\alpha^\pm}^\pm \mathcal{N}_{p,j}^\pm = \mathcal{N}_{p,j}^\pm + \tau_{\beta^\pm}^\pm \mathcal{N}_{p,j}^+ \quad (1)$$

Справедливо также следующее утверждение.

**Теорема 1.** Если  $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j+1}^+$  и  $(\tau_\alpha^+)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+$  при некотором  $\alpha \in \bar{\Omega}^+$ , то  $(\tau_\alpha^+)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j}^+$ . Аналогично, если  $\varphi_- \in \mathcal{N}_{p,j+1}^-$  и  $(\tau_\alpha^-)^{-1} \varphi_- \in \mathcal{D}_p^-$  при некотором  $\alpha \in \bar{\Omega}^-$ , то  $(\tau_\alpha^-)^{-1} \varphi_- \in \mathcal{N}_{p,j}^-$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j+1}^+$ ,  $\alpha \in \bar{\Omega}^+$  и  $(\tau_\alpha^+)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{D}_p^+$ . Существуют  $\psi_+ \in (L_p^+)^n$  и  $\psi_- \in (\overset{\circ}{L}_p^-)^n$  такие, что  $(\tau_0^+)^{-(j+1)} G\varphi_+ - \tau_\alpha^+ \psi_- = \tau_\alpha^+ \psi_+$ . Так как левая часть равенства принадлежит  $(L_p^-)^n$ , а правая часть  $(L_p^+)^n$ , то  $\psi_+ = 0$ . В силу  $\varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j+1}^+$  имеем  $\tau_\alpha^+ \psi_- \in (\overset{\circ}{L}_p^-)^n$ . Следовательно  $(\tau_\alpha^+)^{-1} \varphi_+ \in \mathcal{N}_{p,j}^+$ . Второе утверждение теоремы доказывается аналогичными рассуждениями.  $\square$

Условимся подпространство  $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^\pm := \mathcal{N}_{p,j}^\pm + \tau_0^\pm \mathcal{N}_{p,j}^\pm$  называть  $(p, j)_\pm$ -наследственным подпространством м.-ф.  $G$ , а его произвольное прямое дополнение  $\mathcal{M}_{p,j}^\pm$  в  $\mathcal{N}_{p,j+1}^\pm$  —  $(p, j)_\pm$ -индексным подпространством. Таким образом

$$\mathcal{N}_{p,j+1}^\pm = \hat{\mathcal{N}}_{p,j}^\pm + \mathcal{M}_{p,j}^\pm \quad (2)$$

Легко видеть, что  $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^-$  является  $(j+1)$ -двойственным к  $\hat{\mathcal{N}}_{p,j}^+$  множеством. Изучим теперь вопрос двойственности  $(p, j)_\pm$ -индексных подпространств м.-ф.  $G$ .

Через  $\overset{\circ}{\mathcal{N}}_{p,-\infty}^+$  обозначим множество всех  $\varphi_+ \in (L_p^+)^n$  таких, что  $(G\varphi_+)(t) = 0$  п.в. на контуре  $\Gamma$ . Нетрудно видеть, что  $\overset{\circ}{\mathcal{N}}_{p,-\infty}^+ = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}_{p,j}^+$ .

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 2.** Множество,  $(j+1)$ -двойственное к  $(p, j)_+$ -индексному подпространству м.-ф.  $G$ , является  $(p, j)_-$ -индексным подпространством м.-ф.

$G$ . Обратно, для любого  $(p, j)_-$ -индексного подпространства  $M_{p,j}^-$  м.-ф.  $G$  существует  $(p, j)_+$ -индексное подпространство м.-ф.  $G$ ,  $(j+1)$ -двойственное множество которого совпадает с  $M_{p,j}^-$ . Кроме того размерности  $(p, j)_+$  и  $(p, j)_-$ -индексных подпространств совпадают при всех  $j \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Пусть  $M_{p,j}^+$   $(p, j)_+$ -индексное подпространство м.-ф.  $G$ , а  $M_{p,j}^-$  его  $(j+1)$ -двойственное множество. Очевидно, что  $M_{p,j}^- \subset N_{p,j+1}^-$ . Пусть  $\varphi_- \in \tilde{N}_{p,j}^- \cap M_{p,j}^-$ . Тогда существуют  $\varphi_+ \in M_{p,j}^+$ ,  $\psi_+ \in \tilde{N}_{p,j}^+$  такие, что  $\varphi_- = (\tau_0^+)^{-j} G\varphi_+ = (\tau_0^+)^{-j} G\psi_+$ . Следовательно,  $\varphi_+ - \psi_+ \in \dot{N}_{p,-\infty}^+$ . Так как  $\varphi_+ \in \tilde{N}_{p,j}^+ \cap M_{p,j}^+$ , то  $\varphi_+ = 0$  и потому  $\varphi_- = 0$ . Пусть теперь  $\varphi_- \in N_{p,j+1}^-$ . Тогда существуют  $\psi_+ \in \tilde{N}_{p,j}^+$ ,  $\varphi_+ \in M_{p,j}^+$  такие, что  $\varphi_- = (\tau_0^+)^{-j} G(\psi_+ + \varphi_+)$ . Так как  $(\tau_0^+)^{-j} G\psi_+ \in \tilde{N}_{p,j}^-$ , а  $(\tau_0^+)^{-j} G\varphi_+ \in M_{p,j}^-$ , то  $N_{p,j+1}^- = \tilde{N}_{p,j}^- + M_{p,j}^-$  и  $\tilde{N}_{p,j}^- \cap M_{p,j}^- = \{0\}$ .

Пусть теперь  $M_{p,j}^-$  некоторое  $(p, j)_-$ -индексное подпространство м.-ф.  $G$ ,  $\tilde{M}_{p,j}^+ = \{\varphi_+ \in N_{p,j+1}^+; (\tau_0^+)^{-j} G\varphi_+ \in M_{p,j}^-\}$ , а  $M_{p,j}^+$  некоторое прямое дополнение  $\dot{N}_{p,-\infty}^+$  в пространстве  $\tilde{M}_{p,j}^+$ . Очевидно  $(j+1)$ -двойственное множество к  $M_{p,j}^+$  совпадает с  $M_{p,j}^-$ . Если  $\varphi_+ \in M_{p,j}^+ \cap \tilde{N}_{p,j}^+$ , то  $(\tau_0^+)^{-j} G\varphi_+ \in M_{p,j}^- \cap \tilde{N}_{p,j}^-$  и  $\varphi_+ \in \dot{N}_{p,-\infty}^+$ . Следовательно  $\varphi_+ = 0$ . Пусть теперь  $\varphi_+ \in N_{p,j+1}^+$ . Поскольку  $(\tau_0^+)^{-j} G\varphi_+ \in N_{p,j+1}^-$ , то существуют  $\psi_- \in \tilde{N}_{p,j}^-$  и  $\varphi_- \in M_{p,j}^-$  такие, что  $(\tau_0^+)^{-j} G\varphi_+ = \psi_- + \varphi_-$ . Выберем  $\psi_+ \in \tilde{N}_{p,j}^+$  и  $\tilde{\varphi}_+ \in \tilde{M}_{p,j}^+$  таким образом, чтобы  $\psi_-$  и  $\varphi_-$  являлись  $(j+1)$ -двойственными соответственно к  $\psi_+$  и  $\tilde{\varphi}_+$  в.-ф. Легко видеть, что  $\varphi_+ - \psi_+ - \tilde{\varphi}_+ \in \dot{N}_{p,-\infty}^+$ . Поскольку  $\tilde{\varphi}_+ \in M_{p,j}^+ + \dot{N}_{p,-\infty}^+$ , то  $\varphi_+ \in \tilde{N}_{p,j}^+ + M_{p,j}^+$ . Следовательно  $M_{p,j}^+$   $(p, j)_+$ -индексное подпространство м.-ф.  $G$ .

Пусть  $M_{p,j}^\pm$   $(j+1)$ -двойственные  $(p, j)_\pm$ -индексные подпространства. Если  $\dim M_{p,j}^- < \dim M_{p,j}^+$ , то существует ненулевая в.-ф.  $\varphi_+ \in M_{p,j}^+ \cap \dot{N}_{p,-\infty}^+$ .  $\square$

3. Перейдем теперь к более детальному исследованию пространств  $M_{p,j}^\pm$ . Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$  целые числа, в.-ф.  $\varphi_{i,1}^+, \dots, \varphi_{i,m_i}^+$  ( $i = 1, \dots, k, m_i \in \mathcal{N}$ ) принадлежат некоторым  $(p, \xi_i)_+$ -индексным подпространствам  $M_{p,\xi_i}^+$  м.-ф.  $G$  и линейно независимы, а м.-ф.  $\Phi^+$  определена равенством  $\Phi^+ = [\varphi_{1,1}^+, \varphi_{1,2}^+, \dots, \varphi_{1,m_1}^+, \varphi_{2,1}^+, \dots, \varphi_{k,m_k}^+]$ . Тогда если в.-ф.  $(\tau_z^+)^{-1} \Phi^+ v$  принадлежит  $\mathcal{D}_p^+$  для некоторого  $z \in \bar{\Omega}^+$  и  $v \in \mathbb{C}^m$ , где  $m = m_1 + \dots + m_k$ , то  $v = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $v = [\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1,m_1}, \alpha_{21}, \dots, \alpha_{k,m_k}] \in \mathbb{C}^m$  отличный от нуля вектор такой, что при некотором  $z \in \bar{\Omega}^+$ ,  $\psi_0^+ := \Phi^+ v \in \mathcal{D}_p^+$ , а  $s$  — максимальное число из множества  $\{1, 2, \dots, k\}$ , обладающее тем свойством, что  $\alpha_{s,j} \neq 0$  хотя бы для одного  $j$  из множества  $\{1, \dots, m_s\}$ . Пусть  $\psi_1^+ := (\tau_z^+)^{-1} \psi_0^+$ . Из теоремы 1 следует, что  $\psi_1^+ \in N_{p,\xi_s}^+$ . Поскольку правая часть равенства  $\sum_{j=1}^{m_s} \alpha_{s,j} \varphi_{s,j}^+ = - \sum_{i=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} \varphi_{i,j}^+ + \tau_z^+ \psi_1^+$  принадлежит подпространству  $\tilde{N}_{p,\xi_s}^+$ , а левая часть  $M_{p,\xi_s}^+$ , то обе части тождественно равны нулю. В частности  $\alpha_{s,1} = \dots = \alpha_{s,m_s} = 0$ , что противоречит определению числа  $s$ .  $\square$

**Следствие 1.** Для любого  $z \in \Omega^+$  справедливо равенство  $\text{rang} \Phi^+(z) = m$ .

**Доказательство.** Действительно, если  $z_0 \in \Omega^+$  и  $\text{rang} \Phi^+(z_0) < m$ , то существует ненулевой вектор  $v \in \mathbb{C}^m$  такой, что  $\Phi^+(z_0)v = 0$ . Из аналитичности  $\Phi^+(z)v$  следует, что в окрестности точки  $z_0$  имеет место представление  $\Phi^+(z)v = (z - z_0)\psi(z)$ , где  $\psi \in \mathcal{D}_p^+$ , что в силу теоремы 3 противоречит условию  $v \neq 0$ .  $\square$

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения.

**Теорема 4.** Пусть  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$  целые числа, в.-ф.  $\varphi_{1,1}^-, \dots, \varphi_{1,m_1}^-$  ( $i = 1, \dots, k, m_i \in \mathcal{N}$ ) принадлежат некоторым  $(p, \xi_i)$ -индексным подпространствам м.-ф.  $G$  и линейно независимы, м.-ф.  $\Phi^-$  определена равенством  $\Phi^- = [\varphi_{1,1}^-, \varphi_{1,2}^-, \dots, \varphi_{1,m_1}^-, \varphi_{2,1}^-, \dots, \varphi_{s,m_s}^-]$ . Тогда, если в.-ф.  $(\tau_z^-)^{-1} \Phi^- v$  принадлежит  $\mathcal{D}_p^-$  для некоторого  $z \in \Omega^-$  и  $v \in \mathbb{C}^m$ , где  $m = m_1 + \dots + m_k$ , то  $v = 0$ .

**Следствие 2.** Для любого  $z \in \Omega^-$  справедливо равенство  $\text{rang} \Phi^-(z) = m$ .

**Замечание 1.** Пусть м.-ф.  $G$  дополнительно обладает тем свойством, что из условий  $\varphi \in \mathcal{L}_p^n$  и  $G\varphi = 0$  следует, что  $\varphi = 0$ . Тогда если  $z \in \Gamma$ ,  $\varphi \in \mathcal{N}_{p,j+1}^-$  и  $(\tau_z^-)^{-1} \varphi_- \in \mathcal{D}_p^-$ , то  $(\tau_z^-)^{-1} \varphi_- \in \mathcal{N}_{p,j}^-$  (см. теорему 1). Кроме того, для таких м.-ф. теорема 4 остается справедливой и для  $z \in \Gamma$ .

Справедливо также следующее утверждение.

**Теорема 5.** За исключением, быть может, конечного числа  $j \in \mathbb{Z}$  все  $(p, j)_\pm$ -индексные подпространства являются нулевыми. Кроме того для произвольного набора  $(p, j)_\pm$  индексных подпространств  $M_{p,j}^\pm$  справедливо неравенство  $\hat{n} := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim M_{p,j}^\pm \leq n$ .

**Доказательство.** Из теоремы 2 следует, что  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim M_{p,j}^+ = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \dim M_{p,j}^-$ . Условие  $\hat{n} > n$  означает, что существуют числа  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_k$  и линейно независимые в.-ф.  $\varphi_{i,1}^+, \dots, \varphi_{i,m_i}^+$  ( $i = 1, \dots, k$ ), принадлежащие  $M_{p,\xi_i}^+$ , такие, что  $m = m_1 + m_1 + \dots + m_k > n$ . Последнее противоречит следствию 1.  $\square$

**Следствие 3.** Либо  $\dim \mathcal{N}_{p,j}^+ = \infty$  ( $\dim \mathcal{N}_{p,j}^- = \infty$ ) для всех  $j \in \mathbb{Z}$ , либо  $\dim \mathcal{N}_{p,j}^+ < \infty$  ( $\dim \mathcal{N}_{p,j}^- < \infty$ ) для всех  $j \in \mathbb{Z}$ . Если  $\dim \mathcal{N}_{p,k}^+ < \infty$  ( $\dim \mathcal{N}_{p,k}^- < \infty$ ) при некотором  $k$ , то существует  $k_0$  такое, что  $\dim \mathcal{N}_{p,j}^+ = 0$  ( $\dim \mathcal{N}_{p,j}^- = 0$ ) как только  $j \leq k_0$ .

**Доказательство.** Первое утверждение следует из теоремы 5 и равенства (2). Если  $\dim \mathcal{N}_{p,k}^\pm < \infty$ , то существует  $k_0$  такое, что  $\dim \mathcal{N}_{p,j}^\pm = \dim \mathcal{N}_{p,k_0}^\pm$ , как только  $j \leq k_0$ , т.е.  $\mathcal{N}_{p,k_0}^\pm = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{N}_{p,j}^\pm$ . Пусть  $\varphi^+ \in \mathcal{N}_{p,k_0}^+$ ,  $\varphi^+ \neq 0$ . Следовательно  $\tau^m \varphi^+ \in \mathcal{N}_{p,0}^+$  ( $m \geq 0$ ), что противоречит условию  $\dim \mathcal{N}_{p,0}^+ < \infty$ . Пусть теперь  $\varphi^- \in \mathcal{N}_{p,k_0}^-$ ,  $\varphi^- \neq 0$ . Тогда существуют в.-ф.  $\varphi_m^+ \in (L_p^+)^n$  ( $m \leq 0$ ) такие, что  $\tau^m \varphi^- = G\varphi_m^+ \in \mathcal{N}_{p,1}^-$ . Последнее противоречит условию  $\dim \mathcal{N}_{p,1}^- < \infty$ .  $\square$

**4.** Перейдем к локальному исследованию пространств  $\mathcal{N}_{p,j}^\pm, M_{p,j}^\pm$  ( $j \in \mathbb{Z}$ ). Подпространства  $\mathcal{N}_{p,j}^+(z), M_{p,j}^+(z)$  для  $z \in \Omega^+$  и  $\mathcal{N}_{p,j}^-(z), M_{p,j}^-(z)$  для  $z \in \Omega^-$ , пространства  $\mathbb{C}^n$  определим следующим образом:  $\mathcal{N}_{p,j}^\pm(z) = \{\varphi^\pm(z); \varphi^\pm \in \mathcal{N}_{p,j}^\pm\}$ ,

$M_{p,j}^{\pm}(z) = \{\varphi^{\pm}(z); \varphi^{\pm} \in M_{p,j}^{\pm}\}$ . Точку  $z_0 \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$  назовем  $s$ -точкой для м.-ф.  $G$ , если для некоторого  $j \in \mathbb{Z}$

$$\dim \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z_0) < \max_{z \in \Omega^{\pm}} \dim \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z) \quad (z_0 \in \Omega^{\pm}) \quad (3)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 6.** Для произвольного  $j \in \mathbb{Z}$  справедливы равенства

$$\mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z) + M_{p,j}^{\pm}(z) = \mathcal{N}_{p,j+1}^{\pm}(z) \quad (z \in \Omega^{\pm}). \quad (4)$$

Для любого  $z \in \Omega^{\pm}$  имеет место равенство  $\dim M_{p,j}^{\pm}(z) = \dim M_{p,j}^{\pm}$ . Множество  $s$ -точек в  $\Omega^{\pm}$  не более чем счетно и не имеет предельных точек в  $\Omega^{\pm}$ . Если одно из неравенств (3) имеет место при некотором  $j$ , то оно справедливо при всех  $j$ .

**Доказательство.** Пусть  $z \in \Omega^{\pm}$  и  $y \in \mathcal{N}_{p,j+1}^{\pm}(z)$ . Тогда существует  $\varphi^{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j+1}^{\pm}$  такое, что  $\varphi^{\pm}(z) = y$ . Из равенств (1), (2) следует существование  $\varphi_1^{\pm}, \varphi_2^{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$  и  $\psi^{\pm} \in M_{p,j}^{\pm}$  таких, что  $\varphi^{\pm} = \varphi_1^{\pm} + \tau_z^{\pm} \varphi_2^{\pm} + \psi^{\pm}$ . Следовательно  $y = \varphi_1^{\pm}(z) + \psi^{\pm}(z)$ .

Пусть  $y \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z) \cap M_{p,j}^{\pm}(z)$ . Тогда существуют  $\varphi^{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$  и  $\psi^{\pm} \in M_{p,j}^{\pm}$  такие, что  $y = \varphi^{\pm}(z) = \psi^{\pm}(z)$ . Поскольку  $\psi^{\pm} - \varphi^{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j+1}^{\pm}$  и  $\psi^{\pm}(z) - \varphi^{\pm}(z) = 0$ , то в силу теоремы 1  $(\tau_z^{\pm})^{-1}(\psi^{\pm} - \varphi^{\pm}) \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$ , т.е.  $\psi^{\pm} = \varphi^{\pm} + \tau_z^{\pm} \varphi_1^{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$ . Следовательно  $\psi = 0$ , потому что  $y = 0$ . Постоянство чисел  $\dim M_{p,j}^{\pm}(z)$  следует из следствий 1 и 2.

Пусть  $z_0 \in \Omega^{\pm}$  и  $\max_{z \in \Omega^{\pm}} \dim \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z) = \dim \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}(z_0) = m$ . Тогда существуют  $\varphi_k^{\pm} \in \mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$  ( $k = 1, \dots, m$ ) такие, что векторы  $\varphi_k^{\pm}(z_0)$  линейно независимы. Тогда м.-ф.  $[\varphi_1^{\pm}, \dots, \varphi_m^{\pm}]$  обладает минором порядка  $m$ , отличным от нуля в точке  $z_0$ . Применяя теорему единственности к этой аналитической функции, получим доказательство требования относительно  $s$ -точек. Последнее утверждение теоремы следует из равенств (4) и постоянства чисел  $\dim M_{p,j}^{\pm}(z)$ .  $\square$

Следующая теорема описывает структуру пространств  $\mathcal{N}_{p,j}^{\pm}$ .

**Теорема 7.** Пусть  $k < i$  ( $k, i \in \mathbb{Z}$ ) и  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_s$  все возможные целые значения  $j$  ( $k \leq j < i$ ), для которых  $(p, j)_{\pm}$ -индексные подпространства ненулевые. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{p,i}^{\pm} = & \left( \mathcal{N}_{p,k}^{\pm} + \tau_0^+ \mathcal{N}_{p,k}^{\pm} + \dots + (\tau_0^+)^{i-k} \mathcal{N}_{p,k}^{\pm} \right) + M_{p,\xi_1}^{\pm} + \tau_0^+ M_{p,\xi_1}^{\pm} + \\ & \dots + (\tau_0^+)^{i-\xi_1-1} M_{p,\xi_1}^{\pm} + M_{p,\xi_2}^{\pm} + \dots + (\tau_0^+)^{i-\xi_s-1} M_{p,\xi_s}^{\pm}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $M_{p,\xi_m}^{\pm}$  ( $m = 1, \dots, s$ ) произвольные  $(p, \xi_m)_{\pm}$ -индексные подпространства.

**Доказательство.** Из равенства (2) следует, что пространство  $\mathcal{N}_{p,i}^{\pm}$  может быть представлено в виде суммы пространств, присутствующих в правой части равенства (5). Пусть теперь  $\varphi_{0,m}^+ \in \mathcal{N}_{p,k}^+$  ( $m = 0, 1, \dots, i-k$ ),  $\varphi_{j,m}^+ \in M_{p,\xi_j}^+$  ( $j = 1, \dots, s$ ;  $m = 0, \dots, i-\xi_j-1$ ) и

$$\sum_{m=0}^{i-k} (\tau_0^+)^m \varphi_{0,m}^+ + \sum_{j=1}^s \sum_{m=0}^{i-\xi_j-1} (\tau_0^+)^m \varphi_{j,m}^+ = 0. \quad (6)$$

Из равенства (4) следует, что  $\mathcal{N}_{p,i}^+(0) = \mathcal{N}_{p,k}^+(0) + \mathcal{M}_{p,\xi_1}^+(0) + \dots + \mathcal{M}_{p,\xi_s}^+(0)$ . Отсюда, записав равенство (6) в точке  $z = 0$ , получим  $\varphi_{00}^+(0) = \varphi_{1,0}^+(0) = \dots = \varphi_{s,0}^+(0) = 0$ . Из следствия 1 и теоремы 1 имеем  $\varphi_{1,0}^+ = \dots = \varphi_{s,0}^+ = 0$  и  $\varphi_{00}^+ = \tau_0^+ \dot{\varphi}_{00}^+$ , где  $\dot{\varphi}_{00}^+ \in \mathcal{N}_{p,k-1}^+$ . Равенство (6) принимает вид

$$\dot{\varphi}_{00}^+ + \sum_{m=1}^{i-k} (\tau_0^+)^{m-1} \varphi_{0,m}^+ + \sum_{j=1}^s \sum_{m=1}^{i-\xi_j-1} (\tau_0^+)^{m-1} \varphi_{j,m}^+ = 0,$$

где последнее слагаемое в левой части в случае  $i = \xi_s + 1$  исчезает. Последовательно повторяя аналогичную процедуру, получим, что  $\varphi_{j,m}^+ = 0$  при всех  $j = 1, \dots, s$ ;  $m = 0, \dots, i - \xi_j - 1$ , и  $\varphi_{00}^+ + \tau_0^+ \varphi_{0,1}^+ + \dots + (\tau_0^+)^{i-k} \varphi_{0,m}^+ = 0$ . Равенство (5) для пространства  $\mathcal{N}_{p,i}^\pm$  доказывается аналогично.  $\square$

**Замечание 2.** Переобозначим оператор  $\mathcal{T}_p(G)$  через  $\mathcal{T}_{r_+,p}(G)$ . Наряду с оператором  $\mathcal{T}_{r_+,p}(G)$  могут быть рассмотрены операторы  $\mathcal{T}_{l_+,p}(G)$ ,  $\mathcal{T}_{r_-,p}(G)$ ,  $\mathcal{T}_{l_-,p}(G)$ , действующие по формулам  $\mathcal{T}_{l_+,p}(G)\varphi = \mathcal{P}_+((\varphi^t G)^t)$ ,  $\mathcal{T}_{r_-,p}(G)\varphi = \mathcal{P}_-(G\varphi)$ ,  $\mathcal{T}_{l_-,p}(G)\varphi = \mathcal{P}_-((\varphi^t G)^t)$  и определенные на естественных для этих операторов областях определения. Ядра операторов  $\mathcal{T}_{l_+,p}((\tau_0^+)^{-j} G)$ ,  $\mathcal{T}_{r_-,p}((\tau_0^+)^{-j} G)$ ,  $\mathcal{T}_{l_-,p}((\tau_0^+)^{-j} G)$  обладают свойствами, аналогичными вышеприведенным.

Ереванский государственный университет

А. Г. Камалян

### Некоторые свойства ядер теплицевых операторов

Рассматривается семейство теплицевых операторов с матричными символами вида  $t^{-j}G$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Для ядер теплицевых операторов введены понятия индексных и наследственных подпространств. Изучены свойства этих подпространств, а также структура и взаимосвязь ядер теплицевых операторов.

Ա. Ն. Բամալյան

### Տյուպլիցյան օպերատորների կորիզների որոշ հատկություններ

Դիտարկված է  $t^{-j}G$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  տեսքի մատրիցային սիմվոլներով տյուպլիցյան օպերատորների ընդհանուրը: Տյուպլիցյան օպերատորների կորիզների համար ներմուծված են ինդեքսային և



ժառանգական ենթադրաբաժնությունների հասկացությունները: Ուսումնասիրված են այդ ենթա-  
պարաժնությունների հարկությունները, ինչպես նաև տրոպիցյան օպերատորների կառուցվածքը  
և փոխկապակցվածությունը:

A. H. Kamalyan

### Some Properties of Kernels of Toeplitz Operators

The family of Toeplitz operators with the  $t^{-j}G$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , type matrix-valued symbols is considered. Conceptions of indexal and inherited subspaces for kernels of Toeplitz operators are entered. Properties of these subspaces and structures and interconnection of kernels of Toeplitz operators are investigated.

### Литература

1. *Гохберг И. Ц., Фельдман И. А.* Уравнения в свертках и прсекционные методы их решения. Наука. 1971.
2. *Clancey K., Gohberg I.* Factorization of matrix functions and singular integral operators, Birkhäuser Verlag, Basel. 1981.
3. *Litvinchuk G. S., Spitkovskii I. M.* Factorisation of Measurable Matrix Function, Akademie – Verlag, Berlin. 1987.
4. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.-Л., ГИТЛ. 1950.

УДК 517.957

О. А. Бабаян

**О параметрическом представлении траекторий полета летательного аппарата**

(Представлено чл.-кор. НАН РА Н.Е. Товмасыаном 20/VII 2007)

**Ключевые слова:** траектория полета, летательный аппарат переменной массы, параметрическое представление

В работе рассматривается движение летательного аппарата (ЛА) без крыльев под воздействием реактивной силы  $\vec{F}_R$ , силы сопротивления окружающей среды  $\vec{F}_r$  и силы притяжения Земли  $\vec{F}_g$

$$\vec{F}_g = m \vec{g}, \quad \vec{F}_R = -k \frac{dm(t)}{dt} \frac{\vec{V}}{V}, \quad \vec{F}_r = -\kappa \vec{V},$$

где  $m(t)$  – масса ЛА в момент времени  $t$ ,  $\vec{V}(t) = (V_1(t), V_2(t))$  – скорость ЛА в момент времени  $t$ ,  $V(t) = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$ ;  $k$  – постоянный коэффициент реактивной силы,  $\kappa$  – коэффициент сопротивления среды, вообще говоря зависящий от  $V$ . Предполагаем, что движение ЛА происходит около земной поверхности и зона полета мала по сравнению с радиусом Земли, поэтому ускорение силы тяжести можем считать постоянным вектором  $\vec{g} = (0, -g)$ .

Пусть начало координатной системы находится на поверхности Земли и положительное направление оси  $Oy$  направлено вертикально вверх. Движение ЛА происходит в плоскости  $(x, y)$  и описывается уравнением Мещерского [1]:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}_g + \vec{F}_R + \vec{F}_r. \tag{1}$$

Рассматривается полет летательного аппарата от точки  $(0, 0)$  до точки  $(x_0, y_0)$  по траектории  $y = f(x), 0 \leq x \leq x_0$ . Заданы масса летательного аппарата в конечной точке полета и его начальная скорость:

$$m(x_0) = m_0; \quad V(0) = V_0. \tag{2}$$

Переходя к переменной  $x$  и записывая (1) в координатах, получим следующую систему [2]:

$$\begin{cases} m \frac{dV_1}{dx} = -\frac{k}{V} \frac{dm}{dx} V_1 - \kappa, & 0 \leq x \leq x_0 \\ m V_1 \frac{dV_2}{dx} = -\frac{k}{V} \frac{dm}{dx} V_1 V_2 - \kappa V_2 - gm, & 0 \leq x \leq x_0 \end{cases} \quad (3)$$

с краевыми условиями (2). Используя равенство  $V_2 = f'(x)V_1$ , в [2] получена

**Теорема 1.** *Задача (2)-(3) разрешима для любой функции  $\kappa$  тогда и только тогда, когда*

$$f''(x) < 0, \quad f'''(x) \geq 0, \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (4)$$

$$-\frac{1 + (f'(0))^2}{f''(0)} = \frac{V_0^2}{g}. \quad (5)$$

В работах [2] и [3], используя теорему 1, получено следующее интегральное представление допустимых траекторий.

**Теорема 2.** *Функция  $f(x)$  удовлетворяет условиям (4)-(5) тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$f(x) = \frac{y_0}{x_0} x + k x_0 f_0 \left( \frac{x}{x_0} \right), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad (6)$$

где

$$f_0(x) = x - bx^2 + \frac{\rho}{\|\omega\|} \int_0^x \omega(t)(x-t)^2 dt, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad (7)$$

$$k = k_{1,2} = b\gamma - \frac{y_0}{x_0} \pm \sqrt{b\gamma \left( b\gamma - 2\frac{y_0}{x_0} \right) - 1} > 0, \quad \gamma = \frac{V_0^2}{gx_0}; \quad (8)$$

$$b = 1 + \rho \frac{L(\omega)}{\|\omega\|}, \quad (9)$$

где  $\omega(x)$  — произвольная неотрицательная функция из класса  $C[0, 1]$ , удовлетворяющая условию

$$\|\omega\| \left[ \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1} + \frac{y_0}{x_0} \right) - 1 \right] < L(\omega), \quad (10)$$

а  $\rho$  — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\max \left[ 0, \left( \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1} + \frac{y_0}{x_0} \right) - 1 \right) \frac{\|\omega\|}{L(\omega)} \right] \leq \rho < 1. \quad (11)$$

Здесь функционал  $L$  определяется как

$$L(\omega) = \int_0^1 (1-x)^2 \omega(x) dx, \quad (12)$$

а норма  $\omega$  - формулой

$$\|\omega\| = \int_0^1 (2-x)x\omega(x) dx. \quad (13)$$

Для эффективного определения оптимальных параметров полета предпочтительнее параметрическое представление траекторий. Поэтому представляет интерес получить параметрическое представление траекторий, определяющихся функциями заданного класса. Подобная задача для случая, когда  $f = P_3$  - полином третьей степени, рассмотрена в [4]. В настоящей работе рассматривается случай, когда  $f = P_n$  - многочлен порядка  $n$ . В работе [2] доказано, что  $\omega = 0.5f_0'''$ . Таким образом, если функция  $f \in \{P_n\}$ , то  $\omega \in \{P_{n-3}\}$  является неотрицательным не равным тождественно нулю полиномом порядка  $n-3$ . Соответственно, функционал  $L$  будем в дальнейшем обозначать  $L_{n-3}$ . Наша задача — определить значения параметров таких траекторий из  $\{P_n\}$ , по которым возможно осуществить полет из точки  $(0, 0)$  в точку  $(x_c, y_0)$ .

В дальнейшем будем предполагать, что точка  $(x_0, y_0)$  находится в области досягаемости по траекториям рассматриваемого класса. Для класса многочленов  $n$ -ой степени эта область описана в [2].

Итак, пусть  $\omega \in \{P_m\}$ ,  $m = n - 3$  и  $\omega(x) \geq 0, x \in [0, 1]$ . Совершая замену переменной  $x = \frac{t+1}{2}$ , получим функцию  $\omega_1(t) = \omega\left(\frac{t+1}{2}\right)$  такую, что  $\omega_1(t) \geq 0, t \in [-1; 1]$ ;  $\omega_1 \in \{P_m\}$ . Согласно теореме Лукача [5] имеет место следующее представление:

$$\omega_1(t) = (A(t))^2 + (1-t^2)(B(t))^2 \quad \text{при четных } m, \quad (14)$$

$$\omega_1(t) = (1+t)(Q(t))^2 + (1-t)(S(t))^2 \quad \text{при нечетных } m, \quad (15)$$

где  $A, B, Q$  и  $S$  — произвольные многочлены степени

$$\deg A \leq \frac{m}{2}, \quad \deg B \leq \frac{m-2}{2}, \quad \deg Q \leq \frac{m-1}{2}, \quad \deg S \leq \frac{m-1}{2}.$$

Пусть

$$A(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} a_i t^i; \quad B(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} b_i t^i, \quad b_{\frac{m}{2}} = 0; \quad Q(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} q_i t^i; \quad S(t) = \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} s_i t^i. \quad (16)$$

Отметим, что так как  $\omega \neq 0$ , в силу линейности функционала  $L_{n-3}$  вместо функции  $\omega$  в формулах (7) и (9) можно рассматривать нормированную функцию  $\frac{\omega}{\|\omega\|}$ , поэтому, не умаляя общности, можно считать, что в (16)

$$\sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} (a_i^2 + b_i^2) = 1, \quad \sum_{i=0}^{\frac{m-1}{2}} (q_i^2 + s_i^2) = 1. \quad (17)$$

Возвращаясь к переменной  $x$ , получим

$$\omega(x) = (A(2x-1))^2 + (1-(2x-1)^2)(B(2x-1))^2 \quad \text{при четных } n, \quad (18)$$

$$\omega(x) = 2x(Q(2x-1))^2 + 2(1-x)(S(2x-1))^2 \quad \text{при нечетных } n. \quad (19)$$

Обозначим

$$\alpha = \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{y_0^2}{x_0^2} + 1} + \frac{y_0}{x_0} \right) - 1.$$

Пусть  $\|L_{n-3}\|$  — норма функционала  $L_{n-3}$  в классе функций  $\{P_{n-3}\}$  с нормой (13). Ясно, что  $\|L_{n-3}\|$  зависит от  $n$ . Пусть  $n \geq 3$  и  $\omega_0(x) = (1-x)^{n-3}$ . Тогда

$$\frac{L_{n-3}(\omega_0)}{\|\omega_0\|} = \frac{n-2}{2}.$$

Это означает, что

$$\|L_{n-3}\| \geq \frac{n-2}{2}, \quad n \geq 3. \quad (20)$$

В [2] доказано, что при  $n = 3, 4$  в этом неравенстве имеет место равенство.

Из условия (10) следует, что полет по траектории  $y = f(x)$ , где  $f$  — полином порядка не выше  $n$ , из точки  $(0, 0)$  до точки  $(x_0, y_0)$  возможен тогда и только тогда, когда

$$\alpha < \|L_{n-3}\|.$$

Учитывая (20), заметим, что всегда существует  $n$ , при котором это неравенство имеет место. В дальнейшем будем предполагать, что  $n$  настолько большое, что

$$\alpha < \frac{n-2}{2}. \quad (21)$$

Ясно, что условие (21) достаточно для осуществления полета из точки  $(0, 0)$  до точки  $(x_0, y_0)$ .

Условие (10) записывается в виде

$$\alpha\|\omega\| - L_{n-3}(\omega) < 0. \quad (22)$$

Легко видеть, что при  $\alpha \leq 0$  условие (22) всегда выполняется. Пусть  $\alpha > 0$ . Используя определения (12) и (13) и совершая замену переменной  $x = \frac{t+1}{2}$ , получим

$$\begin{aligned} \alpha \|\omega\| - L_{n-3}(\omega) &= \int_0^1 (\alpha x(2-x) - (1-x)^2) \omega(x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 ((3\alpha - 1) + 2(\alpha + 1)t - (\alpha + 1)t^2) \omega_1(t) dt. \end{aligned} \quad (23)$$

Для краткости обозначим  $a_{ij} = a_i a_j$ ,  $b_{ij} = b_i b_j$ ,  $q_{ij} = q_i q_j$ ,  $s_{ij} = s_i s_j$ .

Пусть  $m$  — четное. Имеем

$$\omega_1(t) = \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} a_{ij} t^{i+j} + (1-t^2) \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} b_{ij} t^{i+j} = \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} [(a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j} - b_{ij} t^{i+j+2}].$$

Подставляя это выражение в (23), получаем

$$\begin{aligned} \alpha \|\omega\| - L_{n-3}(\omega) &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 ((3\alpha - 1) + 2(\alpha + 1)t - (\alpha + 1)t^2) \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} ((a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j} - \\ &- b_{ij} t^{i+j+2}) dt = \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \int_{-1}^1 ((3\alpha - 1)(a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j} + 2(\alpha + 1)(a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j+1} - \\ &- (\alpha + 1)(a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j+2} - (3\alpha - 1)b_{ij} t^{i+j+2} - 2(\alpha + 1)b_{ij} t^{i+j+3} + (\alpha + 1)b_{ij} t^{i+j+4}) dt = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \int_{-1}^1 ((3\alpha - 1)(a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j} + 2(\alpha + 1)(a_{ij} + b_{ij}) t^{i+j+1} - (4\alpha b_{ij} + (\alpha + 1)c_{ij}) t^{i+j+2} - \\ &- 2(\alpha + 1)b_{ij} t^{i+j+3} + (\alpha + 1)b_{ij} t^{i+j+4}) dt = \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \left[ \frac{(3\alpha - 1)(a_{ij} + b_{ij})}{i+j+1} (1 - (-1)^{i+j+1}) + \frac{2(\alpha + 1)(a_{ij} + b_{ij})}{i+j+2} (1 - (-1)^{i+j+2}) - \right. \\ &- \frac{4\alpha b_{ij} + (\alpha + 1)a_{ij}}{i+j+3} (1 - (-1)^{i+j+3}) - \frac{2(\alpha + 1)b_{ij}}{i+j+4} (1 - (-1)^{i+j+4}) + \\ &\left. + \frac{(\alpha + 1)b_{ij}}{i+j+5} (1 - (-1)^{i+j+5}) \right] < 0. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые, содержащие  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ , получаем следующее условие

на коэффициенты  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$ :

$$\sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \left[ \left( \frac{3\alpha - 1}{i+j+1} - \frac{\alpha + 1}{i+j+3} \right) \lambda_{ij} + \frac{2(\alpha + 1)(1 - \lambda_{ij})}{(i+j+2)} \right] a_{ij} +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{\frac{m}{2}} \left[ \left( \frac{3\alpha - 1}{i+j+1} - \frac{4\alpha}{i+j+3} + \frac{\alpha + 1}{i+j+5} \right) \lambda_{ij} + \frac{4(\alpha + 1)(1 - \lambda_{ij})}{(i+j+2)(i+j+5)} \right] b_{ij} < 0, \quad (24)$$

где  $\lambda_{ij} = 1$ , когда  $i + j$  — четное, и  $\lambda_{ij} = 0$ , когда  $i + j$  — нечетное.

При нечетных  $m$ , используя формулу (19) и представления (16), аналогично получаем условие на коэффициенты  $q_{ij}$  и  $s_{ij}$ :

$$\sum_{i,j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left[ \left( \frac{3\alpha - 1}{i+j+1} + \frac{\alpha + 1}{i+j+3} \right) \lambda_{ij} + \left( \frac{5\alpha - 1}{i+j+2} - \frac{\alpha + 1}{i+j+4} \right) (1 - \lambda_{ij}) \right] q_{ij} +$$

$$+ \sum_{i,j=0}^{\frac{m-1}{2}} \left[ \left( \frac{3\alpha - 1}{i+j+1} - 3 \frac{\alpha + 1}{i+j+3} \right) \lambda_{ij} + \left( \frac{3 - \alpha}{i+j+2} + \frac{\alpha + 1}{i+j+4} \right) (1 - \lambda_{ij}) \right] s_{ij} < 0, \quad (25)$$

где  $\lambda_{ij}$  те же коэффициенты, что и в (24).

Таким образом, доказана следующая

**Теорема 3.** Пусть  $f$  — многочлен порядка  $n$ . Функция  $f$  удовлетворяет условиям (4), (5) тогда и только тогда, когда она представляется в виде (6), где 1) при  $\alpha \leq 0$   $\omega$  — произвольный многочлен степени  $n - 3$ , определяемый формулой (18) при нечетном  $n$  и формулой (19) при четном  $n$ , 2) при  $\alpha \leq \frac{n-2}{2}$   $\omega$  — многочлен степени  $n - 3$ , определяемый формулами (18) или (19), где при нечетных  $n$  коэффициенты многочленов  $A$  и  $B$  удовлетворяют неравенству (24), а при четных  $n$  коэффициенты многочленов  $Q$  и  $S$  удовлетворяют неравенству (25).

Во всех случаях коэффициенты многочленов  $A, B, Q, S$  удовлетворяют условиям (17).

Применим полученные результаты для случая, когда  $f \in \{P_4\}$  — многочлен четвертого порядка. Итак, пусть  $n = 4$ . Тогда  $m = n - 3 = 1$  и  $\omega \in \{P_1\}$ . Согласно (19) функция  $\omega$  имеет вид

$$\omega(x) = 2x(Q(2x-1))^2 + 2(1-x)(S(2x-1))^2,$$

где  $Q$  и  $S$  многочлены порядка  $\frac{m-1}{2} = 0$ . Таким образом, обозначая  $c = q_0^2$  и учитывая условие (17), получаем

$$\omega(x) = 2cx + 2(1-c)(1-x). \quad (26)$$

Учитывая, что  $0 \leq c \leq 1$  и используя теорему 3, при  $m = 1$  получаем следующую систему неравенств для определения  $c$ :

$$\begin{cases} 0 \leq c \leq 1 \\ 2(1 + \alpha)c - 3(1 - \alpha) \leq 0. \end{cases}$$

Решая эти неравенства, получаем

$$0 \leq c \leq 1 \quad \text{при} \quad \alpha < \frac{1}{5}, \quad (27)$$

$$0 \leq c \leq \frac{3(1 - \alpha)}{2(1 + \alpha)} \quad \text{при} \quad \frac{1}{5} \leq \alpha < 1. \quad (28)$$

Подставляя (26) в (12) и (13), получаем

$$\frac{\|\omega\|}{L(\omega)} = \frac{3 + 2c}{3 - 2c}.$$

Суммируя вышеизложенное, получаем следующую теорему:

**Теорема 4.** Пусть  $\alpha < 1$ , а траектория  $f$  — многочлен четвертого порядка. Полет по такой траектории возможен тогда и только тогда, когда  $f$  представляется в виде (6), где  $\omega$  — многочлен, определяемый формулой (26),  $c$  удовлетворяет неравенствам (27), (28),  $\rho$  удовлетворяет неравенству

$$\max \left[ 0, \alpha \frac{3 + 2c}{3 - 2c} \right] \leq \rho < 1,$$

а  $k$  определяется формулой (8), где  $b = 1 + \rho \frac{3 - 2c}{3 + 2c}$ .

Государственный инженерный университет Армении

О. А. Бабаян

#### О параметрическом представлении траекторий полета летательного аппарата

В работе исследуется движение летательного аппарата без крыльев по полиномиальной траектории под воздействием реактивной силы, силы сопротивления окружающей среды и силы притяжения Земли. Получено параметрическое представление возможных траекторий полета от начала координат до заданной точки.

**Թռչող սարքի հեղազների պարամետրական ներկայացման մասին**

Աշխատանքում դիտարկվում է թռչող սարքի շարժումը ռեակտիվ ուժի, միջավայրի դիմադրության և Երկրի ձգողության ուժերի համատեղ ազդեցության տակ: Ստացված է կոորդինատների սկզբնականից մինչև տրված կետը թռիչքի հնարավոր հեղազների պարամետրական ներկայացումը:

**H. A. Babayan**

**On Parametrical Representation of the Aircraft Flight Trajectories**

The motion of the wingless aircraft by the polynomial trajectory under the simultaneous action of the reactive force, medium resistance force and gravity force of the Earth is considered. The parametrical representation of the possible flight trajectories from the origin to the given point is obtained.

**Литература**

1. *Дмитриевский А.А.* Внешняя баллистика. М. Машиностроение. 1979. 479 с.
2. *Tovmasyan N.E.* - NATO Science series, Series II. Kluwer Academic Publishers. 2004. V.147. P. 347-364.
3. *Բաբայան Օ.Ա.* - Математика в высшей школе. Ереван. 2005. Т. 1. №4. С. 8-15.
4. *Բաբայան Ա.Օ.* - Изв. НАН Армении. Математика. 2006. Т. 41. №5. С. 80-85.
5. *Szego G.* Orthogonal polynomials. Published by American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 1939. 440 p.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.22

А. Я. Саакян

Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка  
 вне круга

(Представлено чл.-кор. НАН РА Н.Е. Товмасыаном 20/VII 2007)

**Ключевые слова:** правильно эллиптическое уравнение, аналитические функции, общее решение, характеристическое уравнение

**Введение. Формулировка результатов.** Пусть  $D^- = \{z \mid |z| > 1\}$  – внешняя область единичного круга комплексной плоскости и  $\Gamma = \partial D$  – ее граница,  $D^+ = \{z \mid |z| < 1\}$ ,  $z = x + iy$ . В области  $D^-$  рассматривается уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^k \partial x^{2n-k}}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D^-, \quad (1)$$

где  $A_k$  – комплексные постоянные,  $A_{2n} \neq 0$ . Мы предполагаем, что уравнение (1) правильно эллиптическое, т.е. характеристическое уравнение

$$\sum_{k=0}^{2n} A_k \lambda^k = 0 \quad (2)$$

не имеет действительных корней и  $n$  корней этого уравнения имеют положительную мнимую часть. Пусть  $\lambda_i$  при  $i = 1, \dots, m$  – различные корни (2) с положительной мнимой частью и кратностями  $\alpha_i$ , а  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) – различные корни (2) с отрицательной мнимой частью и кратностями  $\beta_i$ . Имеем

$$\Re \lambda_i > 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad \Re \mu_i < 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^k \beta_i = n. \quad (3)$$

Решение уравнения (1) ищем в следующих функциональных классах.

Класс  $B \subset C^{2n}(D^-)$  состоит из ограниченных в  $D^-$  функций, т.е. если  $u \in B$ , то  $u \in C^{2n}(D^-)$  и

$$|u(x, y)| \leq K, \quad (x, y) \in D^-, \quad (4)$$

где  $K$  — положительная постоянная, вообще говоря зависящая от  $u$ . В дальнейшем все постоянные, участвующие в оценках, будем обозначать  $K$ .

Класс  $B_{n-1} \subset C^{2n}(D^-)$  состоит из функций в  $D^-$ , растущих не быстрее полинома степени  $n-1$ , т.е. если  $u \in B_{n-1}$ , то  $u \in C^{2n}(D^-)$  и

$$|u(x, y)| \leq K|z|^{n-1}, \quad (x, y) \in D^-. \quad (5)$$

Целью настоящей работы является построение общего решения уравнения (1) в классах  $B$  и  $B_{n-1}$ . В односвязных областях различного вида общее решение уравнения (1) было построено в [1-3]. В монографии [4] получена формула общего решения  $n$ -гармонического уравнения в области  $D^-$ .

В работе получены следующие результаты.

**Теорема 1.** *Общее решение уравнения (1) в классе  $B$  представляется в виде*

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x + \mu_i y) + \sum_{i=1}^{m-1} c_i \ln \frac{x + \lambda_i y}{x + \lambda_m y} + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \ln \frac{x + \mu_i y}{x + \mu_k y} + c_0, \quad (x, y) \in D^-, \quad (6)$$

где  $\Phi_{ij}$  и  $\Psi_{ij}$  — произвольные функции, аналитические в областях  $D(\lambda_i) = \{x + \lambda_i y | (x, y) \in D^-\}$  и  $D(\mu_i) = \{x + \mu_i y | (x, y) \in D^-\}$  соответственно, удовлетворяющие условиям

$$|\Phi_{i0}(x + \lambda_i y)| \leq K|z|^{-1}, \quad |\Phi_{ij}(x + \lambda_i y)| \leq K|z|^{-j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, \alpha_j - 1;$$

$$|\Psi_{i0}(x + \mu_i y)| \leq K|z|^{-1}, \quad |\Psi_{ij}(x + \mu_i y)| \leq K|z|^{-j}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 1, \dots, \beta_j - 1 \quad (7)$$

при  $z = x + iy \in D^-$ , а  $c_0, c_i$  при  $i = 1, \dots, m$  и  $d_i$  при  $i = 1, \dots, k$  — произвольные комплексные постоянные.

**Теорема 2.** *Общее решение уравнения (1) в классе  $B_{n-1}$  представляется в виде*

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x + \mu_i y) + P_{n-1}(x, y) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j P_{n-2-j}^i(x + \lambda_i y) \ln(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j Q_{n-2-j}^i(x + \mu_i y) \ln(x + \mu_i y), \quad (8)$$

$$(x, y) \in D^-,$$

где  $\Phi_{ij}$  и  $\Psi_{ij}$  — произвольные функции, аналитические в областях  $D(\lambda_i)$  и  $D(\mu_i)$  соответственно, при  $z = x + iy \in D^-$  удовлетворяющие условиям

$$|\Phi_{ij}(x + \lambda_i y)| \leq K|z|^{-1}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 0, \dots, \alpha_j - 1;$$

$$|\Psi_{ij}(x + \mu_i y)| \leq K|z|^{-1}, \quad i = 1, \dots, k, \quad j = 0, \dots, \beta_j - 1. \quad (9)$$

Функция  $P_{n-1}$  — произвольный многочлен от двух переменных степени не выше  $n-1$ , а  $P_{n-2-j}^i$  и  $Q_{n-2-j}^i$  — произвольные многочлены от одной переменной степени не выше  $n-2-j$ , удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j P_{n-2-j}^i(x + \lambda_i y) - \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j Q_{n-2-j}^i(x + \mu_i y) = 0, \quad (x, y) \in D^-. \quad (10)$$

**Доказательство теоремы 1.** Пусть  $\Gamma_0 = \{(x, y) : x > 0, y = 0\}$  положительная полуось оси абсцисс и  $D_0 = D^- \setminus \Gamma_0$ . Известно [1], что в односвязной области  $D_0$  общее решение (1) представляется в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \varphi_{ij}(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \psi_{ij}(x + \mu_i y), \quad (x, y) \in D_0, \quad (11)$$

где  $\varphi_{ij}$  и  $\psi_{ij}$  — произвольные функции, аналитические в областях  $D_0(\lambda_i) = \{x + \lambda_i y | (x, y) \in D_0\}$  и  $D_0(\mu_i) = \{x + \mu_i y | (x, y) \in D_0\}$  соответственно.

Применяя оператор

$$L_{2n-\alpha_1} = \prod_{i=2}^m \left( \frac{\partial}{\partial y} - \lambda_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^k \left( \frac{\partial}{\partial y} - \mu_i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{\beta_i} \quad (12)$$

к функции  $u$ , получим

$$L_{2n-\alpha_1} u = w_0(x + \lambda_1 y) + y w_1(x + \lambda_1 y) + \dots + y^{\alpha_1-1} w_{\alpha_1-1}(x + \lambda_1 y), \quad (13)$$

где

$$w_l(x + \lambda_1 y) = \sum_{j=1}^{\alpha_1-l} c_{jl} \varphi_{1,l+j-1}^{(2n-\alpha_1-j+1)}(x + \lambda_1 y), \quad l = 0, \dots, \alpha_1 - 1. \quad (14)$$

Здесь  $c_{jl}$  — комплексные постоянные,  $c_{1l} \neq 0$  при  $l = 0, \dots, \alpha_1 - 1$ .

Пусть  $D_R = \{(x, y) : |z| > R > 1\}$ ,  $D_{0R} = D_R \setminus \Gamma_0$ . Известно ([5], с. 161), что если  $u$  является решением уравнения (1) и удовлетворяет условию (3), то

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}(x, y) \right| \leq K|z|^{-p-q}, \quad p+q \geq 0, \quad z \in D_R. \quad (15)$$

Докажем, что функции  $w_l$  аналитичны в области  $D(\lambda_1)$  и удовлетворяют оценке

$$|w_l(x + \lambda_1 y)| \leq K|z|^{-2n+\alpha_1-l}, \quad l = 0, \dots, \alpha_1 - 1, \quad z \in D_R. \quad (16)$$

Пусть  $L_{\alpha_1-p} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha_1-p}$ ,  $p = 1, \dots, \alpha_1 - 1$ . Из (13) следует, что

$$L_{\alpha_1-1} L_{2n-\alpha_1} u(x, y) = (\alpha_1 - 1)! w_{\alpha_1-1}(x + \lambda_1 y), \quad (x, y) \in D_{0R},$$

и так как левая часть последнего равенства непрерывна в  $D^-$ , то функция  $w_{\alpha_1-1}$  аналитична в  $D(\lambda_1)$ . Используя оценку (15), получаем

$$|w_{\alpha_1-1}(x + \lambda_1 y)| \leq K|z|^{-2n+1}, \quad z \in D_R. \quad (17)$$

Далее,

$$L_{\alpha_1-2}(L_{2n-\alpha_1} u(x, y) - y^{\alpha_1-1} w_{\alpha_1-1}(x + \lambda_1 y)) = (\alpha_1 - 2)! w_{\alpha_1-2}(x + \lambda_1 y)$$

и так как левая часть непрерывна в  $D^-$ , то функция  $w_{\alpha_1-2}$  аналитична в  $D(\lambda_1)$ . Учитывая (15) и (17), получаем оценку

$$|w_{\alpha_1-2}(x + \lambda_1 y)| \leq K|z|^{-2n+2}, \quad z \in D_R.$$

Продолжая аналогично, доказываем аналитичность функций  $w_l$  в  $D(\lambda_1)$ , а также оценку (16).

Далее, решая систему (14) и используя оценку (16), получим:

$$\varphi_{10}(\zeta) = c_1 \ln \zeta + P_{2n-2}(\zeta) + \Phi_{10}(\zeta), \quad \varphi_{1j}(\zeta) = P_{2n-2-j}(\zeta) + \Phi_{1j}(\zeta), \quad j = 1, \dots, \alpha_1 - 1, \quad (18)$$

где функции  $\Phi_{1j}$  аналитичны в  $D(\lambda_1)$  и удовлетворяют оценке (7), а  $P_r$  — многочлены степени  $r$ .

После аналогичных рассуждений для других корней получим представления вида (18) для всех функций  $\varphi_{ij}$  и  $\psi_{ij}$ . Подставляя эти выражения в (11), представляем решение  $u$  в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x + \mu_i y) + \\ + \sum_{i=1}^m c_i \ln(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k d_i \ln(x + \mu_i y) + P_{2n-2}(x, y), \quad (x, y) \in D_0. \quad (19)$$

где  $\Phi_{ij}$  и  $\Psi_{ij}$  — аналитические функции в  $D(\lambda_i)$  и  $D(\mu_i)$  соответственно, удовлетворяющие условию (7),  $c_j$  и  $d_j$  — комплексные постоянные, а  $P_{2n-2}$

— многочлен от двух переменных степени  $2n - 2$ . Из условия (4) следует, что  $P_{2n-2}(x, y) \equiv c_0 = \text{const}$ , и

$$\sum_{i=1}^m c_i + \sum_{i=1}^k d_i = 0. \quad (20)$$

Так как функция  $u$  непрерывна на прямой  $\Gamma_0$ , необходимо выполняется условие

$$\sum_{i=1}^m c_i - \sum_{i=1}^k d_i = 0. \quad (21)$$

Из (20) и (21) получим  $\sum_{i=1}^m c_i = 0$  и  $\sum_{i=1}^k d_i = 0$ . Выражая из этих равенств  $c_m$  и  $d_k$  и подставляя в (19), завершаем доказательство. Теорема 1 доказана.  $\square$

**Доказательство теоремы 2.** Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, поэтому отметим только основные этапы доказательства, опуская детали. Общее решение уравнения (1) в области  $D_0$  представляется в виде (11). Применяя оператор (12) к функции  $u$ , получаем соотношения (13), (14). Так как выполняется оценка (5), то аналогично (15) имеем

$$\left| \frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q}(x, y) \right| \leq K |z|^{n-1-p-q}, \quad p+q \geq 0, \quad z \in D_R. \quad (22)$$

Функции  $w_l$  из (13) аналитичны в области  $D(\lambda_1)$  и удовлетворяют оценке:

$$|w_l(x + \lambda_1 y)| \leq K |z|^{-n-1+\alpha_1-l}, \quad l = 0, \dots, \alpha_1 - 1, \quad z \in D_R. \quad (23)$$

Из (14) и (23) получим:

$$\varphi_{1l}(\zeta) = P_{n-l-1}(\zeta) \ln \zeta + P_{2n-l-2}(\zeta) + \Phi_{1l}(\zeta), \quad l = 0, \dots, \alpha_1 - 1, \quad \zeta \in D_0(\lambda_1), \quad (24)$$

где функции  $\Phi_{1l}$  аналитичны в  $D(\lambda_1)$  и удовлетворяют оценке (9). Аналогичные представления имеем для функций  $\varphi_{ij}$  и  $\psi_{ij}$ . Подставляя полученные формулы в (11), имеем:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j \Phi_{ij}(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j \Psi_{ij}(x + \mu_i y) + \\ & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{\alpha_i-1} y^j P_{i,n-1-j}(x + \lambda_i y) \ln(x + \lambda_i y) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{\beta_i-1} y^j Q_{i,n-1-j} \ln(x + \mu_i y) + \\ & + P_{2n-2}(x, y), \quad (x, y) \in D_0, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $\Phi_{ij}$  и  $\Psi_{ij}$  – аналитические функции в  $D(\lambda_i)$  и  $D(\mu_i)$  соответственно, удовлетворяющие условию (9).  $P_{2n-2}$  – многочлен от двух переменных степени  $2n-2$ , а  $P_{i,n-1-j}$  и  $Q_{i,n-1-j}$  – многочлены от одной переменной степени  $n-1-j$ . Так как функция  $u$  принадлежит классу  $B_{n-1}$ , из (24) получим:

$$P_{2n-2} \equiv P_{n-1}, \quad P_{i,n-1-j} \equiv P_{i,n-2-j}, \quad Q_{i,n-1-j} \equiv Q_{i,n-2-j},$$

а также равенство (10). Теорема 2 доказана.  $\square$

Институт математики НАН РА

А. Я. Саакян

### Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга

В работе получена формула общего решения правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга.

Ա. Յա. Սահակյան

### Միավոր շրջանից դուրս բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման ընդհանուր լուծումը

Աշխատանքում սրացված է միավոր շրջանից դուրս բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման ընդհանուր լուծման բանաձևը:

A. Y. Sahakyan

### General Solution of the Higher Order Properly Elliptic Equation in Exterior of the Unit Disk

The formula of the general solution of the higher order properly elliptic equation in exterior of the unit disk was found in the work.

### Литература

1. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М. Наука. 1966. 204 с.
2. Tovmasyan N.E. Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific. Singapore. 1998.
3. Бабаян А.О. - Изв. НАН Армении. Математика. 2003. Т. 38. №6. С. 39-48.
4. Векуа И.Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. М. Гостехиздат. 1948. 364 с.
5. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М. Наука. 1965. 328 с.

УДК 517.53

Ս. Ա. Մաթեվոսյան

Теоремы вложения в пространстве  $A_{\omega}^*$

(Представлено академиком В.С. Захаряном 11/X 2007)

Ключевые слова: голоморфные функции, вложения, единичный круг, мера, интеграл

Пусть  $D$  - единичный круг на комплексной плоскости и пусть  $\omega(r)$  - монотонная неотрицательная функция из класса  $L^1(0, 1)$ . Обозначим через  $A_{\omega}^*$  класс голоморфных в круге функций  $f(z)$ , для которых

$$\|f(z)\|_{A_{\omega}^*} = \int_D \omega(1 - |z|) \log^+ |f(z)| dm_2(z) < +\infty.$$

Отметим, что при  $\omega(r) = (1 - r^2)^{\beta}$ ,  $\beta > -1$ , эти классы впервые были введены и подробно изучены в работах М.М.Джрбашяна [1,2]. В дальнейшем будем предполагать, что  $\omega(r)$  удовлетворяет условию

$$\sup_{0 < r < 1} \left| \frac{\omega'(r) \cdot (1 - r)}{\omega(r)} \right| = \beta_{\omega} < +\infty.$$

При этом предполагаем, что  $0 < \beta_{\omega} < 1$  имеет место, когда  $\omega(r)$  монотонно растет.

В данной работе получим полное описание тех неотрицательных мер  $\mu$  на  $D$ , для которых имеет место вложение в пространстве  $A_{\omega}^*$ . Основным результатом работы является следующая

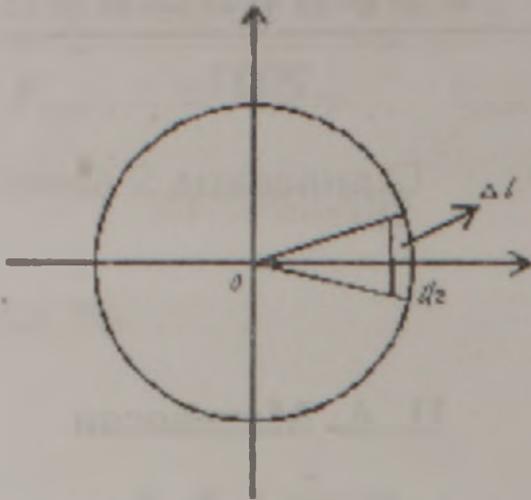
**Теорема 1.** Пусть  $\mu$  - конечная неотрицательная мера в единичном круге  $D$ . Тогда следующие условия равносильны:

$$a) \int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \leq C \int_D \log^+ |f(z)| \cdot \omega(1 - |z|) dm_2(z), \tag{1}$$

$$b) \mu(\Delta_l) \leq \text{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2, \tag{2}$$

где  $C$  - некоторая постоянная, а

$$\Delta_l \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z : 1 - l \leq |z| < 1, |\arg z| < \frac{l}{2} \right\}.$$



**Доказательство.** Докажем импликацию а)  $\Rightarrow$  б).

Рассмотрим функцию  $g(z)$  из класса  $A_\omega^1$ , т.е.

$$\int_D \omega(1 - |z|) |g(z)| dm_2(z) < +\infty.$$

Тогда функция  $f(z) = \exp\{g(z)\}$  будет принадлежать классу  $A_\omega^*$ . Следовательно, имеем

$$\log^+ |f(z)| \leq \log^+ (\exp\{g(z)\}) = (Re g(z))^+ \leq |g(z)|.$$

Поэтому из неравенства (1) получаем

$$\int_D (Re g(z))^+ d\mu(z) \leq \int_D |g(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (3)$$

Обозначим  $u(z) = Re g(z)$ ,  $-u(z) = -Re g(z)$ . По определению  $(u(z))^+$  имеем

$$(u(z))^+ = \begin{cases} u(z), & \text{когда } u(z) \geq 0, \\ 0, & \text{когда } u(z) < 0, \end{cases}$$

$$(u(z))^- = \begin{cases} -u(z), & \text{когда } u(z) \leq 0, \\ 0, & \text{когда } u(z) > 0, \end{cases}$$

Следовательно,

$$|u(z)| = (u(z))^+ + (u(z))^-.$$

Из неравенства (3) имеем

$$\int_D (u(z))^+ d\mu(z) \leq C \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z),$$

$$\int_D (u(z))^- d\mu(z) \leq C \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z).$$

Отсюда получаем

$$\int_D ((u(z))^+ + (u(z))^-) d\mu(z) \leq C_1 \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z)$$

или

$$\int_D |u(z)| d\mu(z) \leq C_1 \cdot \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (4)$$

Рассмотрим функцию  $\exp\{\pm ig(z)\}$ , которая также принадлежит классу  $A_\omega^*$ . Обозначив  $\pm V(z) = \operatorname{Re}\{\pm ig(z)\}$ , получим

$$\int_D |V(z)| d\mu(z) \leq C_2 \cdot \int_D |V(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (5)$$

Объединяя оценки (4) и (5), получим

$$\int_D (|u(z)| + |V(z)|) d\mu(z) \leq C_3 \cdot \int_D (|u(z)| + |V(z)|) \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (6)$$

Так как  $g(z) = u(z) + iV(z)$  и имея в виду лемму Шамояна [3], гласящую, что если  $u(z)$  и  $V(z)$  сопряженные субгармонические функции, тогда имеет место следующая оценка:

$$\int_D |V(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z) \leq C \cdot \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z),$$

из неравенства (6) получим

$$\int_D |g(z)| d\mu(z) \leq C_4 \int_D |u(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z).$$

Отсюда окончательно получим

$$\int_D |g(z)| d\mu(z) \leq C_5 \int_D |g(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (7)$$

Таким образом, для любой  $g(z) \in A_\omega^1$  справедливо неравенство (7). Теперь положим

$$g(z) = \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta z)^{2\beta}}, \quad \beta > 0, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда для оценивания левого и правого интеграла в неравенстве (7) имеем

$$\int_D |g(z)| \omega(1 - |z|) dm_2(z) = \int_D \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta z)^{2\beta}} \omega(1 - |z|) dm_2(z) =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \delta^2)^\beta \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{\omega(1-r)rdrd\varphi}{\left[(1-\delta r)^2 + 4\delta r \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right]^\beta} \leq C \cdot (1 - \delta^2)^\beta \int_0^1 \frac{\omega(1-r)rdr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} = \\
&= C \cdot (1 - \delta^2)^\beta \left( \int_0^\delta \frac{\omega(1-r)rdr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} + \int_\delta^1 \frac{\omega(1-r)rdr}{(1-\delta r)^{2\beta-1}} \right) \leq \\
&\leq C \cdot \frac{(1 - \delta^2)^\beta \omega(1-\delta)}{(1-\delta)^{2\beta-2}} = \frac{C \cdot \omega(l)}{l^{\beta-2}},
\end{aligned} \tag{7'}$$

где  $l = 1 - \delta$ ,  $0 < l < 1$ .

Оценим снизу левый интеграл в неравенстве (7). Имеем

$$\int_D |g(z)| d\mu(z) = \int_D \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{|1 - \delta z|^{2\beta}} d\mu(z) \geq \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta)^{2\beta}} \int_{\Delta_l} d\mu(z) = \frac{\mu(\Delta_l)}{l^\beta}, \tag{7''}$$

так как

$$|1 - \delta z|^2 = [(1 - \delta) + \delta(1 - r)]^2 + 4\delta r \sin^2 \frac{\varphi}{2} \geq (1 - \delta)^2$$

при  $z \in \Delta_l$ . Поэтому

$$\frac{(1 - \delta^2)^\beta}{|1 - \delta z|^{2\beta}} \geq \frac{(1 - \delta^2)^\beta}{(1 - \delta)^{2\beta}}.$$

Объединяя оценки (7') и (7''), из неравенства (7) приходим к неравенству (2):

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(\Delta_l)}{l^\beta} &\leq \frac{\omega(l)}{l^{\beta-2}}, \text{ т.е.} \\
\mu(\Delta_l) &\leq \text{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2.
\end{aligned}$$

Докажем импликацию б)  $\Rightarrow$  а).

Известно, что если функция  $f(z) \in A_\omega^*$ , то  $f(z)$  допускает следующую факторизацию [3]:

$$f(z) = \pi_\beta^f(z, z_k) \cdot \exp\{g_\beta^f(z)\}, \tag{8}$$

где  $\beta > \beta_\omega$ ,

$$\pi_\beta^f(z, z_k) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \exp \left\{ -\frac{2(\beta+1)}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{(1-\rho^2)^\beta \log \left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}} \right\},$$

$$g_\beta^f(z) = \frac{\beta+1}{\pi} \int_0^1 \int_{-\pi}^\pi \frac{(1-\rho^2)^\beta \log |f(\rho e^{i\theta})| \rho d\rho d\theta}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\beta+2}},$$

$$\beta_\omega = \text{Sup}_{0 < t < 1} \left| \frac{\omega'(t) \cdot (1-t)}{\omega(t)} \right|, \quad z \in D.$$

Из (8) имеем

$$\log^+ |f(z)| \leq \log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)| + (\operatorname{Re} g_\beta^f(z))^+.$$

Поскольку  $g_\beta^f(z) \in A_\omega^1$ , то для функций  $(\operatorname{Re} g_\beta^f(z))^+$  неравенство (1) имеет место, как только выполняется условие (2), т.е.

$$\int_D \operatorname{Re}(g_\beta^f(z))^+ d\mu(z) \leq C \cdot \int_D (\operatorname{Re} g_\beta^f(z))^+ \omega(1 - |z|) dm_2(z). \quad (8')$$

Остается доказать, что для функций  $\log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)|$  также имеет место неравенство (1) при условии (2). Известно, что если нули  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^2 \omega(1 - |z_k|) < +\infty, \quad \beta > \beta_\omega,$$

то  $\pi_\beta^f(z, z_k)$  принадлежит классу  $A_\omega^*$  и имеет место следующая оценка [3]:

$$\log |\pi_\beta^f(z, z_k)| \leq \operatorname{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^{\beta+2}}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}}, \quad z \in D,$$

следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int_D \log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)| d\mu(z) &\leq \operatorname{const} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - |z_k|^2)^{\beta+2} d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} \leq \\ &\leq \operatorname{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|^2)^{\beta+2} \int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Отдельно оценим внутренний интеграл. По лемме Шамоаяна [3], имеем

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{1}{|1 - \bar{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}} \cdot \int_{\Delta_{k,l}} d\mu(z) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{\mu(\Delta_{k,l})}{|1 - \bar{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}}, \quad (9')$$

где

$$\Delta_{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^k}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\}.$$

Так как

$$\mu(\Delta_{k,l}) \leq \mu(\tilde{\Delta}_{k,l}) \leq c \cdot \omega\left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2^k}\right)^2,$$

где

$$\tilde{\Delta}_{k,l} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z : 1 - \frac{1}{2^{k-1}} \leq |z| < 1 - \frac{1}{2^k}, \frac{\pi l}{2^k} \leq \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k} \right\},$$

то из (9') получим

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} \leq \operatorname{const} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \frac{\omega(1 - |z_{k,l}|) \cdot (1 - |z_{k,l}|)^2}{|1 - \bar{z}_k z_{k,l}|^{\beta+2}} \leq \int_D \frac{\omega(1 - |z|)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} dm_2(z).$$

Имея в виду работу [3], окончательно получим

$$\int_D \frac{d\mu(z)}{|1 - \bar{z}_k z|^{\beta+2}} \leq \text{const} \cdot \frac{\omega(1 - |z_k|)}{|1 - z_k|^\beta}.$$

Таким образом, из (9) получим

$$\begin{aligned} \int_D \log^+ |\pi_\beta^f(z, z_k)| d\mu(z) &\leq \text{const} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)^2 \omega(1 - |z_k|) \leq \\ &\leq \text{const} \cdot \int_D \omega(1 - |z|) \log^+ |f(z)| dm_2(z). \end{aligned} \quad (8'')$$

Объединяя (8') и (8''), окончательно приходим к доказательству достаточного условия теоремы, т.е.

$$\int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \leq C \int_D \omega(1 - |z|) \log^+ |f(z)| dm_2(z),$$

если имеет место неравенство (2).

Теорема полностью доказана.

На основе этой теоремы можно доказать следующее свойство для функций класса  $A_\omega^*$ .

**Теорема 2.** Пусть последовательность  $\{z_k\}_1^\infty$  удовлетворяет условию Карлесона

$$\prod_{k \neq m} \left| \frac{z_k - z_m}{1 - \bar{z}_k z_m} \right| \geq \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1 - |z_k|) (1 - |z_k|)^2 \log^+ |f(z_k)| < +\infty$$

для любого  $f(z) \in A_\omega^*$ .

**Доказательство.** Положим

$$\mu(e) = \sum_{z_k \in e} \omega(1 - |z_k|) (1 - |z_k|)^2,$$

где  $\mu(e)$  - мера Дирака. Докажем, что для любого  $f(z) \in A_\omega^*$  имеет место

$$\int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) < +\infty.$$

По теореме 1 достаточно доказать, что

$$|\mu(\Delta_l)| \leq \sum_{z_k \in \Delta_l} \omega(1 - |z_k|) (1 - |z_k|)^2 \leq C \cdot \omega(l) \cdot l^2,$$

где  $1 - l \leq |z_k| < 1$ . Имеем

$$|\mu(\Delta_l)| \leq \sum_{z_k \in \Delta_l} \omega(1 - |z_k|)(1 - |z_k|)^2 \leq \omega(l) \cdot l \cdot \sum_{z_k \in \Delta_l} (1 - |z_k|).$$

По теореме Карлесона имеем

$$\sum_{z_k \in \Delta_l} (1 - |z_k|) \leq C \cdot l.$$

Поэтому  $\mu(\Delta_l) \leq \text{const} \cdot \omega(l) \cdot l^2$ .

По доказанной теореме 1 имеем

$$\int_D \log^+ |f(z)| d\mu(z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \omega(1 - |z_k|)(1 - |z_k|)^2 \log^+ |f(z_k)| < +\infty$$

Теорема доказана. Можно доказать и обратное утверждение:

Допустим,  $\{C_k\}_1^{\infty}$  - произвольная последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega(1 - |C_k|)(1 - |C_k|)^2 \log^+ |f(C_k)| < +\infty,$$

тогда существует функция  $f(z) \in A_{\omega}^*$  такая, что  $f(z) = C_k$  при всех  $k$ .

Гюмрийский филиал ГИУА

**П. А. Матевосян**

### Теоремы вложения в пространстве $A_{\omega}^*$

Получено полное описание тех неотрицательных мер  $\mu$  на  $D$ , для которых имеет место вложение в пространстве  $A_{\omega}^*$ .

**Պ. Ա. Մաթևոսյան**

### Ներդրման թեորեմներ $A_{\omega}^*$ փարածությունում

Աշխատանքում ստացվել են բոլոր այն ոչ բացասական  $\mu$  չափերի լրիվ նկարագիրը  $D$ -ի վրա, որոնց դեպքում տեղի ունի ներդրում  $A_{\omega}^*$  փարածությունում:

Theorems of Inclusion in the Space  $A_{\omega}^*$

In the work it is received the full description of those non-negative measures of  $\mu$  on  $D$  in the case of which there is an inclusion in the  $A_{\omega}^*$  space.

Литература

1. Джрбашян М.М. - ДАН АрмССР 1945. Т. 3. N 1, С. 3-9.
2. Джрбашян М.М. - Сообщ. Ин-та математики и механики АН АрмССР. 1948. Вып. 2. С. 3-55.
3. Шамоян Ф.А. - Изв. АН АрмССР. Математика. 1978. Т. 13. N 5-6. С. 405-422.

MECHANICS

УДК 539.3

Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan

Some Aspects of Space Elevator Ribbon Stress and Length Reduction

(Submitted 9/VI 2007)

**Keywords:** *space elevator, mechanical stresses, optimization, nanotechnology*

**1. Statement of the problem.** Let us consider a very long elastic ribbon anchored on the Earth equatorial point [1-3]. The ribbon subject to the action of Earth gravity inward force  $F_1$ , defined by Newton gravity law and centrifugal outward force, due to Earth daily spinning.

$$F_1(\gamma) = \frac{\rho g_0 R_0^2}{(R_0 + \gamma)^2}; F_2(\gamma) = -\rho \omega^2 (R_0 + \gamma). \quad (1)$$

In Eq. (1)  $\gamma$  is a coordinate along ribbon length counted from Earth surface,  $\rho$  is the bulk density of the ribbon material,  $R_0 = 6378\text{km}$  is the Earth equatorial radius,  $g_0 = 980\text{sm}\cdot\text{sec}^{-2}$  is the gravity force acceleration on the Earth surface,  $\omega = 2\pi/T$  is the circular spinning frequency of the Earth,  $T = 86146\text{sec}$  is the period of the Earth spinning.

When the cross-section area  $S(x)$  of the ribbon is the function of its length, using the dimensionless notations the equation determining the elastic stress  $\sigma(x)$  can be written as [2]

$$\frac{d[s(x)\sigma(x)]}{dx} + \rho g_0 R_0 g(x) S(x) = 0, \quad (2)$$

$$g(x) = \alpha(1+x) - (1+x)^{-2}.$$

Here the following dimensionless quantities are used:

$$x = \gamma/R_0, L = l/R_0, \alpha = \omega^2 R_0/g_0 \approx 1/288.$$

Function  $g(x)$  has the following properties

$$g(x) > 0 \text{ at } x < x_0, \quad g(x) < 0 \text{ at } x > x_0, \quad x_0 \approx 5,6,$$

where the point  $x_0$  corresponds to the Earth geosynchronous orbit.

Eq. (2) is to be considered with the following boundary condition at free end  $x = L$

$$\sigma(L) = 0 \quad (3)$$

and condition

$$\sigma(0) = 0. \quad (4)$$

The condition (4) ensures tension stresses  $\sigma(x) \geq 0$  at any point along of ribbon and defines the limiting length  $L_0$  of tensile ribbon.

When  $S(x) = \text{const}$ , the elastic stress is defined by the following function, satisfying Eqs. (2-4)

$$\sigma(x) = \rho g_0 R_0 \bar{\sigma}_0(x),$$

$$\bar{\sigma}_0(x) = \frac{(L_0 - x)[(1 + L_0)(1 + x)(2 + L_0 + x) - 576]}{576(1 + L_0)(1 + x)} \quad (5)$$

Here  $L_0 \approx 22.45$  is the limiting length of tensile ribbon. If ribbon length is less than limiting length  $L_0$ , then the compression stresses arise localized near ribbon base and due to it, the ribbon may become unstable Ref.(3).

The mechanical tension stress reaches its maximum value  $\sigma_0 \approx 0.78\sigma g_0 R_0$ , at point  $x_0 \approx 5.602$

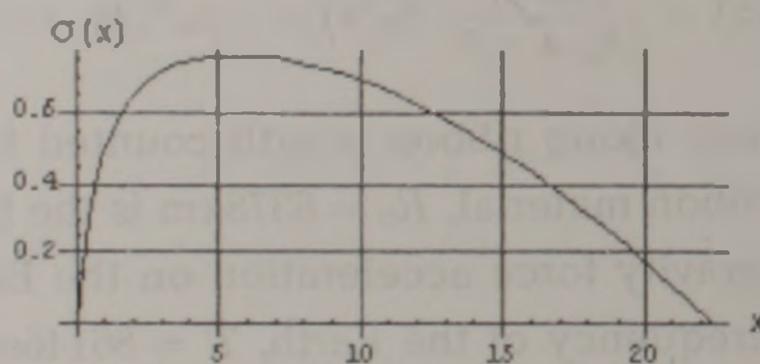


Figure 1. The stress function for the uniform ribbon

**2. Non-uniform Ribbon.** Based on the results presented in the above section the following problem will be considered: by bulging the ribbon cross section in the neighbourhood of point  $x_0$  to minimize the maximum value of stress function of the ribbon of length  $L_0$ , defined by Eq. (4), under restriction  $\sigma(x) \geq 0$ .

For this purpose the model of ribbon with the following step-piece homogeneous cross-section will be studied

$$S(x) = \begin{cases} S_1, & 0 \leq x < l_1 < x_0, \\ S_2, & l_1 \geq x \geq L_0 - l_2, \\ S_1, & x_0 < L_0 - l_2 < x \leq L_0. \end{cases} \quad (6)$$

Integrating the Eq.(2) we come to the following stress functions ( $F(x) = \rho g_0 R_0 g(x)$ )

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma_1(x) \\ \sigma_2(x) \\ \sigma_3(x) \end{cases} = \begin{cases} - \int_0^x F(\xi) d\xi; & 0 \leq x < l_1, \\ - \int_{l_1}^x F(\xi) d\xi + C_1; & l_1 \leq x \leq L_0 - l_2, \\ - \int_{L_0 - l_2}^x F(\xi) d\xi + C_2; & L_0 - l_2 < x < L_0. \end{cases} \quad (7)$$

Arbitrary constants  $C_1$  and  $C_2$  are determined from the conditions of the equality of stress resultants at  $x = l_1$ ,  $x = L_0 - l_2$

$$S_1 \sigma_1(l_1) = S_2 \sigma_2(l_1); \quad S_2 \sigma_2(L_0 - l_2) = S_1 \sigma_3(L_0 - l_2) \quad (8)$$

or

$$\begin{aligned} -S_1 \int_0^{l_1} F(x) dx &= S_2 C_1; \\ S_2 \left[ - \int_{l_1}^{L_0 - l_2} F(x) dx + C_1 \right] &= S_1 C_2. \end{aligned} \quad (9)$$

In the interval  $l_1 \leq x \leq L_0 - l_2$  the maximum value of stress is approached at the point  $x = x_0$ , where  $F(x_0) = 0$

$$\max_x \sigma_2(x) = \sigma_2(x_0). \quad (10)$$

In the intervals  $0 \leq x \leq l_1$ ,  $L_0 - l_2 \leq x \leq L_0$  the maximum value of the stresses is reached at end points  $l_1$ ,  $L_0 - l_2$

$$\max_x \sigma_1(x) = \sigma_1(l_1); \quad \max_x \sigma_3(x) = \sigma_3(L_0 - l_2). \quad (11)$$

The optimization problem is to choose parameters  $l_1$ ,  $l_2$  in such a way, so that to minimize the greatest from maximum values of Eqs. (10,11).

Let us show that the optimization condition will be fulfilled if

$$\sigma_1(l_1) = \sigma_2(x_0) = \sigma_3(L_0 - l_2). \quad (12)$$

From equality  $\sigma_1(l_1) = \sigma_3(L_0 - l_2)$  it follows that

$$\int_{l_1}^{L_0 - l_2} g(x) dx = 0 \quad (13)$$

or

$$l_0 - l_2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(1+l_1)^2 + \frac{8}{\alpha(1+l_1)}} - 3 - l_1 \right]. \quad (14)$$

As the condition  $\sigma_1(l_1) = \sigma_2(x_0)$  does not depend from parameter  $l_2$ , so the equality (14) can be considered as a formula defining  $l_2$  by means of given values of  $l_1$ .

From Eqs. (8,9) the expressions  $\sigma_1(l_1)$ ,  $\sigma_2(x_0)$  can be written as ( $\gamma = S_1/S_2 < 1$ )

$$\begin{aligned} \sigma_1(l_1) &= \rho g_0 R_0 \frac{l_1}{1+l_1} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{l_1}{2} \right) (1+l_1) \right], \\ \sigma_2(x_0) &= \rho g_0 R_0 \left\{ \frac{x_0 - l_1}{(1+x_0)(1+l_1)} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{x_0 + l_1}{2} \right) (1+x_0)(1+l_1) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \gamma \frac{l_1}{1+l_1} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{l_1}{2} \right) (1+l_1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

From the Eqs. (12) the following equation can be obtained

$$\begin{aligned} f(l, \gamma) &\equiv \frac{x_0 - l_1}{1+x_0} \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{x_0 + l_1}{2} \right) (1+x_0)(1+l_1) \right] - \\ &\quad - (1-\gamma)l_1 \left[ 1 - \alpha \left( 1 + \frac{l_1}{2} \right) (1+l_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Derivative  $\sigma_1(l_1)$  respect to  $l_1$  is determined as

$$\frac{\partial \sigma_1(l_1)}{\partial l_1} = \frac{1 - \alpha(1+l_1)^3}{(1+l_1)^2} > 0 \quad (l_1 < x_0) \quad (17)$$

i.e.  $\sigma_1(l_1)$  is an increasing function.

The derivative of function  $\sigma_2(x_0)$  respect to  $l_1$  is a negative one, i.e.  $\sigma_2(x_0)$  is a decreasing function.

So, the optimization problem comes to the solution of Eq.(17) defining the parameter  $l_1$  and as a result the minimum value of  $\max \sigma(x)$  with respect to parameter  $\gamma$ .

Eq. (16) has only one real root in the interval  $0 < l_1 < x_0$ .

Table 1

Numerical results for optimal ribbon

$\gamma$	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0
$\bar{\sigma}_1$	0.782	0.704	0.646	0.595	0.553	0.516	0.484	0.456	0.430	0.408	0.39
$\bar{\sigma}_2$	0.782	0.742	0.701	0.663	0.624	0.585	0.546	0.507	0.468	0.429	0.39
$l_1$	5.6	2.643	1.930	1.533	1.276	1.093	0.957	0.851	0.767	0.698	0.640
$l_2$	16.9	12.616	10.867	9.634	8.818	7.924	7.295	6.761	6.273	5.911	3.741

In Table 1, based on the solution of Eq. (16) the numerical results for  $l_1$ ,  $l_2$  and appropriate corresponding values of maximal stress  $\bar{\sigma}_1 = \max \sigma(x)/\rho g_0 R_0$  are given for different values of parameter  $\gamma$  (the second row of Table 1.)

As it follows from the data of Table 1, the bulging of the ribbon at the point of the Earth's geosynchronous orbit leads to the decreasing of the maximum tension stress. Particularly, if cross-section area in the interval containing point  $x_0$  increasing ten times, the maximum stress will be reduced by two times.

Let us consider now the other case of the ribbon bulging at the Earth's geosynchronous orbit.

Let us take the ribbon cross section as function similar to the uniform ribbon stress function

$$S(x) = S_0 + S_1 \sigma_0(x) > 0. \quad (18)$$

In this case based on solution of Eq. (2) the stress function can be written as ( $\alpha = S_1/S_0$ )

$$\sigma(x) = \frac{\rho g_0 R_0 \int_x^L g(\eta) [1 + \alpha \sigma_0(\eta)] d\eta}{1 + \alpha \sigma_0(x)}. \quad (19)$$

Taking into account that

$$\frac{d\sigma_0(\eta)}{d\eta} = -g(\eta),$$

we come to

$$\sigma(x) = \frac{\rho g_0 R_0 \left[ \sigma_0(x) - \alpha \int_x^L \sigma_0(\eta) \frac{d\sigma_0(\eta)}{d\eta} d\eta \right]}{1 + \alpha \sigma_0(x)} = \rho g_0 R_0 \sigma_0(x) \left[ \frac{2 + \alpha \sigma_0(x) \alpha}{2(1 + \alpha \sigma_0(x))} \right]. \quad (20)$$

This function takes its maximum value at point  $x_0$

$$\bar{\sigma} = \frac{\max \sigma(x)}{\rho g_0 R_0} = \sigma_0(x_0) \left[ \frac{2 + \alpha \sigma_0(x) \alpha}{2(1 + \alpha \sigma_0(x))} \right]; \quad (\sigma_0(x_0) = 0.78). \quad (21)$$

Based on formula Eq.(21) the values of the maximum stress value  $\bar{\sigma}_2$  depend upon  $\gamma = S(0)/S(x_0)$  is given in the third row of Table 1.

The above presented results determine the optimal design projects of the ribbon when the "limit" length does not change, while the ribbon forms permit the decrease of the maximum stress.

**3. Optimal Problem for a Ribbon Made From Non-Homogeneous Material.** Let us consider the ribbon made from a non-homogeneous material, namely when the density of the ribbon material is a function of its length. For this ribbon we would

like to formulate the following optimal problem, the solution of which is important from the applied point of view. Considering the density  $\rho(x)$  of the ribbon as a variable of the design and the mechanical stress as a function of the objective, such a ribbon should be defined, for which  $\max_x \sigma(x) \rightarrow \min_{\rho(x)} \bar{\rho}_{01} < \rho(x) < \bar{\rho}_{02}$ , under restriction  $\sigma(0) = 0$ .

Based on Eq.(3) we have the following solution for the stress function

$$\sigma(x) = g_0 R_0 \int_x^L \rho(\eta) g(\eta) d\eta, \quad (22)$$

Obviously, that

$$\max_x \sigma(x) = g_0 R_0 \int_{x_0}^L \rho(\eta) g(\eta) d\eta. \quad (23)$$

Taking into account restriction we have

$$\max_x \sigma(x) = g_0 R_0 \int_0^{x_0} \rho(\eta) |g(\eta)| d\eta. \quad (24)$$

From Eq.(24) it follows that function

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho_1; & x \in [0, x_0]; \\ \rho_2; & x \in [x_0, \bar{L}_0] \end{cases} \quad (25)$$

is the optimal solution of the problem under consideration.

The minimum value of  $\max_x \sigma(x)$  will be defined as

$$\bar{\sigma}_0 = 0.78 \rho_1 g_0 R_0, \quad (26)$$

while the limiting length of tensile ribbon  $\bar{L}_0$  will be defined from the following equation

$$\rho_2 \int_{x_0}^{\bar{L}_0} g(\eta) d\eta = 0.78 \rho_1. \quad (27)$$

Based on Eq.(27) numerical results for the limiting length of the tensile ribbon  $\bar{L}_0$  with respect to the parameter  $\beta = \rho_1/\rho_2$  is presented in the Table 2.

Table 2

Numerical results for optimal ribbon length

$\beta$	1	0.9	0.7	0.5	0.3	0.1	0.05	0.01
$\bar{L}_0$	22.4	21.7	19.54	17.1	14.2	10.2	8.74	6.9

**4. Conclusions.** Based on the solution of the one- dimension equation of the elasticity theory qualitative and quantitative results are obtained related to the strength of a space elevator cable/ribbon. It is assumed that the ribbon subjected to the action of the Earth gravity inward force, defined by Newton gravity law and the centrifugal outward force, due to the Earth's daily spinning. We confined ourselves to results related to the strength problems of the ribbon bulged in neighbourhood of point of the Earth's geosynchronous orbit. The optimal design problem of the ribbon made from non-homogeneous material when the density of ribbon material is the function of its length is also considered. It is shown that the optimal project is the compound ribbon made from two homogeneous materials.

On the other hand, there is no doubt that the future objects of the investigation should be constructions of elastic closed shell (pipe) type, which are of interest from an applied point of view. For such constructions, the new mechanical problems should be considered, which take into account circular, transversal stresses and displacements arising in the shells. Among these problems we can list the dynamic interaction of closed shells subject to external media, including electromagnetic, temperature and atmosphere fields' actions.

**Acknowledgement.** Authors wish to thank professor Paul G. Edelmann ( Los Alamos National Laboratory, USA) who presented their report "Some Aspects of Space Elevator Ribbon Elastic Stress and Length Reduction" at The Second International Conference and Exposition on Science, Engineering and Habitation in Space and the Second Biennial Space Elevator Workshop (Space Exploration 2007 Conference, Albuquerque, New Mexico, USA, March 2007).

National Academy of Sciences of Armenia

**Academician S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan**

**Some Aspects of Space Elevator Ribbon Stress and Length Reduction**

The possibility of the realization and exploitation of the space elevator project is connected with a number of complicated problems. Some of them are large stresses arising in the space elevator ribbon body, which are considerably bigger than the limit of strength of modern materials. This paper is devoted to the solution of problem of maximum stress reduction in the ribbon by the modification of the ribbon cross-section area. The aspects of the ribbon length reduction are also considered.

Ակադեմիկոս Ս. Ա. Նամբարձումյան, Մ. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան

### Տիեզերական վերելակի ճոպանի երկարության և լարումների նվազեցման հարցեր

Տիեզերական վերելակի նախագծի իրականացման և շահագործման հնարավորությունը բազմաթիվ բարդ գիտաբանական խնդիրների լուծման հետ է կապված: Այդպիսի խնդիրներից մեկը տիեզերական վերելակում մեծ լարումների առաջացումն է, որոնք մի կարգ սովորյալ մեծ են ժամանակակից նյութերի ամրության սահմանից:

Նոդվածը նվիրված է վերելակի ճոպանի ընդլայնական հարույթի մակերեսի փոփոխության միջոցով մաքսիմալ լարման նվազման խնդրի լուծմանը: Քննարկված են նաև ճոպանի երկարության նվազեցման հարցերը:

Академик С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян

### Вопросы уменьшения напряжений и длины троса космического лифта

Возможность реализации и эксплуатации проекта космического лифта связана с решением большого числа сложных научно-технических проблем. Одной из этих проблем является возникновение больших напряжений в теле космического лифта, которые на порядок превышают предел прочности современных материалов.

Статья посвящена решению задачи уменьшения максимального напряжения путем модификации площади поперечного сечения троса лифта. Обсуждены также вопросы уменьшения длины троса.

### References

1. *Edwards B.C., Westling E.A.* The Space Elevator. Houston, USA. 2002.
2. *Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B., Gnuni V.Tc.* - The Space Elevator: 3rd Annual International Conference, June 2004, Washington, DC, USA, URL: <http://www.isr.us/Spaceelevatorconference/2004presentations.html>
3. *Ambartsumian S.A., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B., Gnuni V.Tc.* - Reports of Armenian National Academy of Sciences. 2004. V. 104. N 3. P.189-186.

УДК 548.0

О. М. Аракелян

## Эффекты оптической необратимости в средах с отрицательной компонентой диэлектрического тензора

(Представлено академиком Д.М. Седракяном 7/IX 2007)

**Ключевые слова:** *естественная гиротропия, необратимость волн, оптическая асимметрия*

1. **Введение.** Как известно, поверхности волновых векторов (ПВВ), рассматриваемые в традиционной оптике, замкнуты и центросимметричны [1,2]. Например, для одноосных кристаллов ПВВ - сфера и эллипсоид. Эти два свойства (замкнутость и центросимметричность) считаются столь естественными, что в литературе даже не упоминаются. Замкнуты не только ПВВ, но также и поверхность Френеля, характеристические поверхности (ХП) тензоров  $\epsilon_{ij}$  и  $\epsilon_{ij}^{-1}$ .

Начиная с 1960-х гг. в научной литературе рассматриваются среды, ПВВ которых по форме отличаются от вышеуказанных. В одних случаях авторы указывают на ту или иную особенность ПВВ, в других случаях ПВВ рассматриваются более обстоятельно [3-5]. Нередко ПВВ вообще не рассматриваются [6]. Эти среды, как будет показано ниже, описываются поверхностями волновых векторов с необычной для классической оптики формой. Незамкнутость и нецентросимметричность, а также другие связанные с ними особенности придают среде новые свойства, также необычные для классической оптики. Перечислим ПВВ с новыми формами:

1) замкнутые центросимметричные ПВВ со смещенным физическим центром (магнитоэлектрические среды [7]);

2) замкнутые нецентросимметричные ПВВ (естественно-гиротропные среды в присутствии магнитооптической активности [4,8]);

3) замкнутые центросимметричные инверсные ПВВ (изотропные среды с одновременно отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon$  и  $\mu$  [6]);

4) открытые центросимметричные ПВВ (немагнитные среды с разными знаками компонент тензора диэлектрической проницаемости [3,5]);

5) открытые нецентросимметричные ПВВ (рассмотрены ниже).

Предметом исследования в настоящей работе являются среды с замкнутой и открытой нецентросимметричной ПВВ.

**2. Среда с замкнутой нецентросимметричной ПВВ.** Такими ПВВ описываются естественно-гиротропные среды в присутствии магнитооптической активности. Нецентросимметричностью ПВВ обусловлено установленное сравнительно недавно явление необратимости волн [4,8], заключающееся в нарушении общеизвестного принципа обратимости световых лучей (т.е. одинаковости скорости света для взаимно противоположных направлений распространения). Необратимость приводит к асимметрии ряда оптических свойств, а именно, оптические характеристики становятся неодинаковыми для взаимно противоположных направлений прохождения света. Такими характеристиками являются, например, поворот плоскости поляризации, коэффициент пропускания, круговой дихроизм.

Одними из представителей естественно-гиротропных сред являются холестерические жидкие кристаллы, гиротропия которых обусловлена спиральной структурой.

В настоящей работе приведено точное решение задачи наклонного прохождения электромагнитной волны через слой холестерических жестких кристаллов (ХЖК) в присутствии внешнего магнитного поля. Отметим, что наклонное прохождение электромагнитной волны через слой со спиральной структурой рассматривалось в [9], а в присутствии магнитооптической активности - в [10]. В обоих случаях задача решена приближенно. Точное решение наклонного прохождения впервые получено в [11] в отсутствие внешнего магнитного поля, на основании метода сложения слоев Амбарцумяна [12].

Спиральные среды в присутствии внешнего магнитного поля, как известно [4], описываются материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \hat{\epsilon}\mathbf{E} + i[g\mathbf{E}], \quad (1)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

где

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon} + \frac{\Delta\epsilon}{2} \cos 2az & -\frac{\Delta\epsilon}{2} \sin 2az + ig & 0 \\ \bar{\epsilon} + \frac{\Delta\epsilon}{2} \cos 2az & -\frac{\Delta\epsilon}{2} \sin 2az + ig & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$\bar{\epsilon} = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$ ,  $\Delta\epsilon = \epsilon_1 - \epsilon_2$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_{zz}$ ,  $\epsilon_1, \epsilon_2$  - главные значения тензора  $\epsilon_{ij}$  в плоскости  $xy$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_{zz}$ ,  $a = \frac{2\pi}{\sigma}$ ,  $\sigma$  - шаг спирали. Магнитную проницаемость будем считать скалярной, равной единице. Вектор  $g$ , описывающий магнитооптическую активность, направлен вдоль оси спирали (ось  $z$ ).

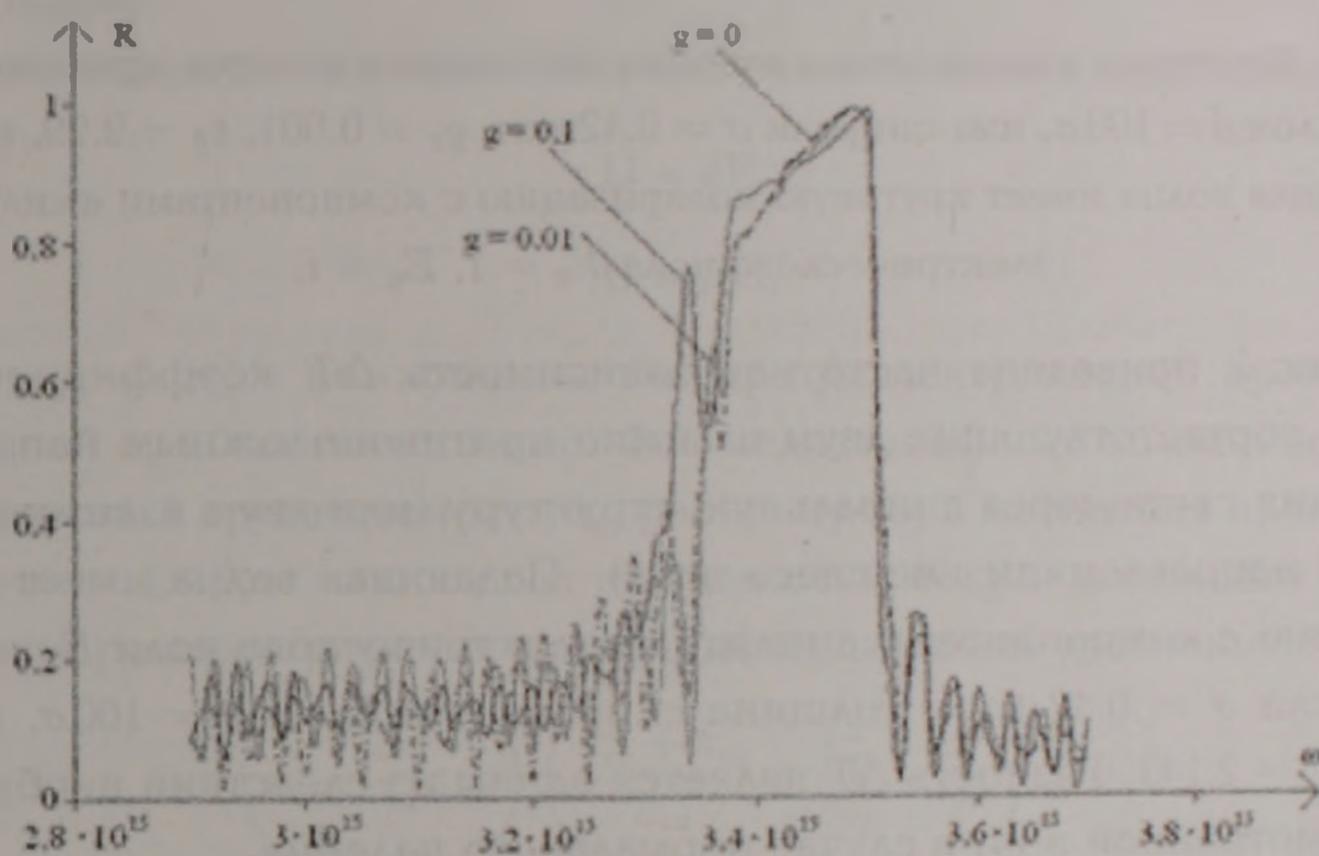


Рис. 1. Частотная зависимость энергетического коэффициента отражения  $R$  при наклонном падении ( $\theta = 45^\circ$ ) для разных значений внешнего магнитного поля. Шаг спирали  $\sigma = 0.42$  мкм,  $\epsilon_{\parallel} = 2.29$ ,  $\epsilon_{\perp} = 2.143$ , толщина спирального слоя  $d = 100\sigma$ .

На рис. 1 представлены частотные зависимости энергетического коэффициента отражения  $R$  при наклонном падении для разных значений внешнего магнитного поля. Угол падения  $\theta = 45^\circ$ .

Падающая волна имеет круговую поляризацию с компонентами амплитуды электрического поля  $E_x = 1$ ,  $E_y = i$ . Шаг спирали  $\sigma = 0.42$  мкм, компонента тензора диэлектрической проницаемости в направлении директора  $\epsilon_{\parallel} = 2.29$ , в направлениях, перпендикулярных к директору,  $\epsilon_{\perp} = 2.143$ , толщина спирального слоя  $d = 100\sigma$ .

Как видно из рис. 1 и 2, при наклонном падении наблюдается смещение области дифракционного отражения в сторону больших частот (для сравнения

см. [11]). Объяснение этому свойству при  $g = 0$ , данное в [11], остается в силе также в рассматриваемом здесь случае  $g \neq 0$ .

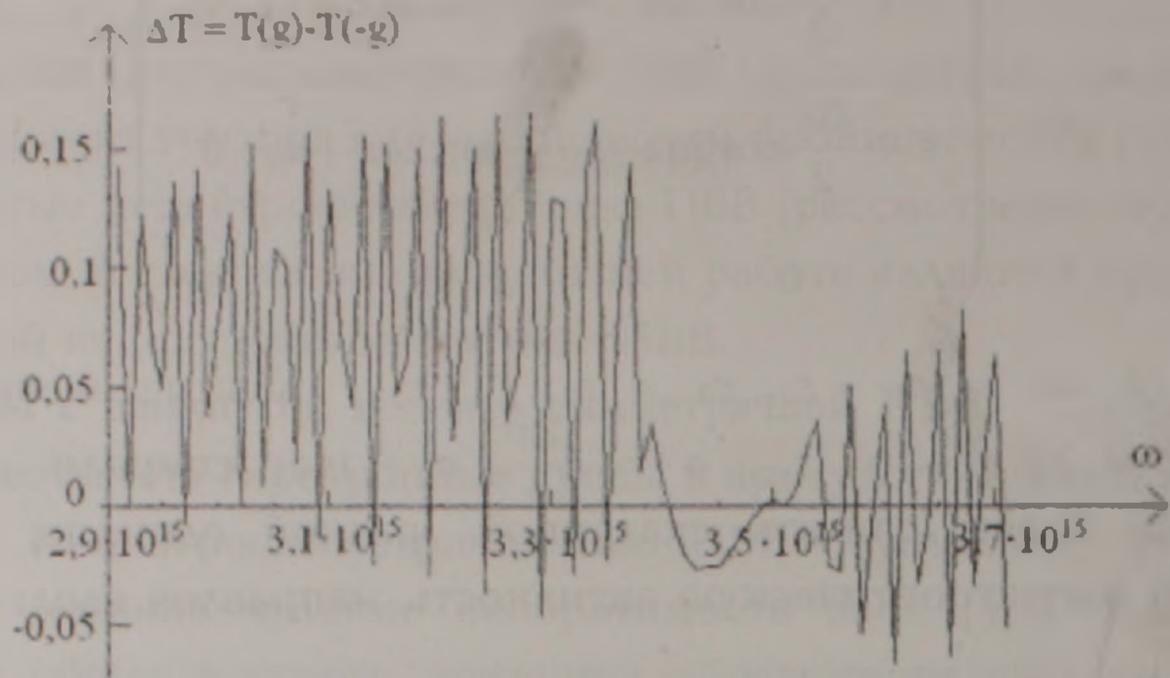


Рис. 2. Частотная зависимость разности  $\Delta T$  коэффициентов прохождения. Толщина слоя  $d = 100 \sigma$ , шаг спирали  $\sigma = 0.42 \text{ мкм}$ ,  $g_z = 0.001$ ,  $\epsilon_{\parallel} = 2.29$ ,  $\epsilon_{\perp} = 2.143$ ; падающая волна имеет круговую поляризацию с компонентами амплитуды электрического поля  $E_x = 1$ ,  $E_y = i$ .

На рис. 2 приведена частотная зависимость  $\Delta T$  коэффициентов прохождения, соответствующих двум взаимно противоположным направлениям прохождения света через спиральную структуру (или двум взаимно противоположным направлениям внешнего поля). Падающая волна имеет круговую поляризацию с компонентами амплитуды электрического поля  $E_x = 1$ ,  $E_y = i$ . Шаг спирали  $\sigma = 0.42 \text{ мкм}$ , толщина спирального слоя  $d = 100 \sigma$ ,  $g = 0.001$ ,  $\epsilon_{\parallel} = 2.29$ ,  $\epsilon_{\perp} = 2.143$ . Разность  $\Delta T$  является одним из следствий необратимости волн, рассмотренной в [4] в случае нормального падения.

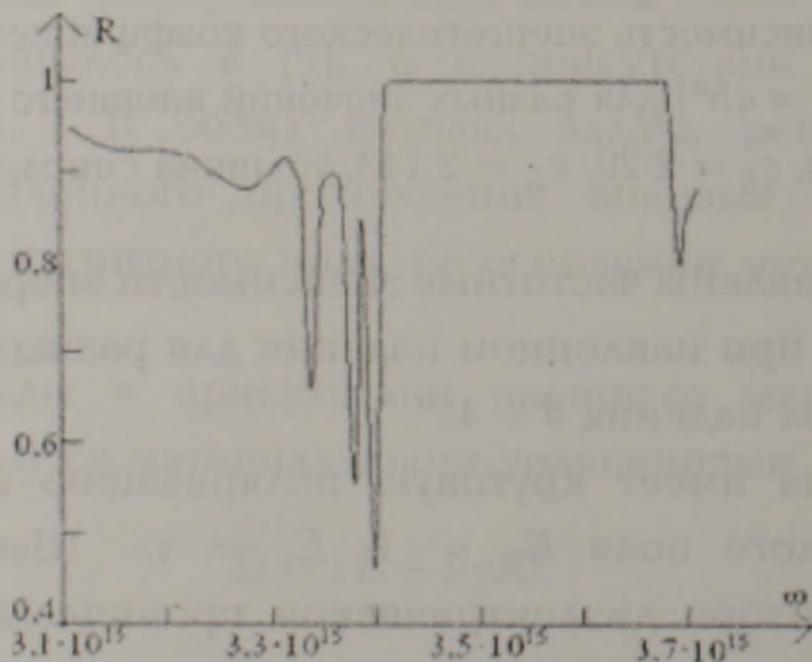


Рис. 3. Частотная зависимость энергетического коэффициента отражения  $R$  при наклонном падении ( $\theta = 45^\circ$ ), в случае  $\epsilon_{\parallel} = -2.29$ ,  $\epsilon_{\perp} = 2.143$ , шаг спирали  $\sigma = 0.42 \text{ мкм}$ ,  $d = 100 \sigma$ ,  $g_z = 0.001$ ; падающая волна имеет круговую поляризацию с компонентами амплитуды электрического поля  $E_x = 1$ ,  $E_y = i$ .

Рис. 3 соответствует случаю, когда одна из компонент тензора диэлектрической проницаемости отрицательна:  $\epsilon_{\parallel} = -2.29$ ,  $\epsilon_{\perp} = 2.143$ , угол падения  $\theta = 45^{\circ}$ . Падающая волна имеет ту же поляризацию, что и на рис. 2, толщина слоя  $d = 100\sigma$ ,  $g = 0.001$ . Присутствие отрицательной компоненты тензора диэлектрической проницаемости приводит к большим значениям коэффициента отражения [13].

**3. Среды с открытой нецентросимметричной ПВВ.** В работе [3] впервые были рассмотрены среды, для которых компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  имеют разные знаки. В [3] показано, что если у тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  кристалла имеются как положительные, так и отрицательные компоненты, то ПВВ оказываются не замкнутой поверхностью, как обычно имеет место в оптике, а открытой поверхностью - гиперболоидом.

В случае одноосного кристалла имеем материальные уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \bar{\epsilon}\mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} \neq \epsilon_{zz}$  - компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  вдоль осей  $x, z$ , соответственно. Все недиагональные компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$  равны нулю, а магнитная проницаемость скалярна,  $\mu = 1$ . Для таких сред зависимость модуля волнового вектора от направления распространения дается дисперсионным уравнением

$$\left(k_0^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{xx}\right) \left(\frac{k_{ex}^2 + k_{ey}^2}{\epsilon_{zz}} + \frac{k_{ez}^2}{\epsilon_{xx}} - \frac{\omega^2}{c^2}\right) = 0, \quad (4)$$

где  $k_0$  - модуль волнового вектора обыкновенной волны,  $k_{ex}, k_{ey}, k_{ez}$  - проекции волнового вектора необыкновенной волны на оси  $x, y, z$ ,  $\omega$  - частота волны, ось  $z$  направлена вдоль оптической оси кристалла. Если  $\epsilon_{xx} > 0$  и  $\epsilon_{zz} > 0$ , то, как видно из (4), ПВВ - сфера и эллипсоид. Если одна из компонент  $\epsilon_{ij}$  отрицательна, то эллипсоид превращается в гиперболоид (см. [5]).

Известно, что нецентросимметричность возникает в присутствии естественной гиротропии и магнитооптической активности. Поэтому при соблюдении разных знаков у компонент  $\epsilon_{ij}$  кристалл, обладающий также естественной гиротропией, в присутствии внешнего магнитного поля должен описываться открытой нецентросимметричной ПВВ. Такой кристалл описывается следующими материальными уравнениями:

$$\mathbf{D} = \bar{\epsilon}\mathbf{E} + i\gamma[\mathbf{kE}] + i[\mathbf{gE}], \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H},$$

где  $\gamma$  описывает естественную гиротропию,  $g$  - магнитооптическую активность. В этом случае дисперсионное уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx} - k_0^2\right)\left(\frac{\omega^4}{c^4}\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{xx}k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz}k_z^2\right) - \left(\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{zz} - k_x^2\right)\frac{\omega^2}{c^2}(\gamma k_z + g)^2 = 0. \quad (6)$$

В уравнении (6) имеется проекция  $k_z$  волнового вектора в нечетной степени. Поэтому дисперсионное уравнение неинвариантно относительно преобразования  $k \rightarrow -k$ . Это означает, что ПВВ не обладает центром симметрии, т.е. имеет место необратимость волн.

Работа выполнена при постоянном внимании проф. О. С. Ерицяна, за что приношу ему свою благодарность.

Ереванский государственный университет

О. М. Аракелян

### Эффекты оптической необратимости в средах с отрицательной компонентой диэлектрического тензора

Рассмотрены однородные кристаллы и холестерические жидкие кристаллы (ХЖК) с отрицательной компонентой тензора диэлектрической проницаемости. Показано, что поверхность волновых векторов для однородного кристалла, будучи открытой, в присутствии естественной гиротропии и магнитооптической активности является также нецентросимметричной. Рассмотрено наклонное прохождение через магнитоактивный слой ХЖК. Приведены частотные зависимости разности коэффициентов прохождения, описывающие оптическую необратимость.

Ն. Մ. Առաքելյան

### Օպտիկական անշրջելիության էֆեկտները դիէլեկտրական թենզորի բացասական կոմպոնենտով միջավայրերում

Դիտարկված են համասեռ անիզոտրոպ միջավայրեր և խոլեստերիկային հեղուկ բյուրեղներ, որոնց դիէլեկտրական թափանցելիության թենզորի կոմպոնենտներից մեկը բացասական է: Տույց է տրված, որ ալիքային վեկտորների մակերևույթները լինելով բաց, բնական գիրոտրոպիայի և մագնիսաօպտիկական ակտիվության առկայության դեպքում նաև անկենտրոնահամաչափ են: Բերված գծանկարը արտահայտում է անցման գործակիցների տարբերության կախումը հաճախությունից թեթև անցման դեպքում, որն էլ նկարագրում է օպտիկական անշրջելիությունը:

Effects Optical Irreversibility in Media with the Negative Component of the Dielectric Tensor

The homogeneous crystals and cholesteric liquid crystals (CLC) at the presence of negative components of the dielectric permittivity tensor are considered. It is shown that the surface of wave vectors for a homogeneous crystal, being open, at the presence of a natural gyrotropy and magneto - optical activity is also non-centrosymmetric. The oblique passing through a magnetoactive layer of CLC is considered. The frequency dependences of a difference of transmission coefficients describing the optical irreversibility are presented.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М. Наука. 1982.
2. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М. Наука. 1970.
3. Ерицян О.С. - Кристаллография. 1978. Т. 33. С. 461.
4. Ерицян О.С. Оптика гиротропных сред и холестерических жидких кристаллов. Ереван. Айастан. 1988.
5. Ерицян О.С., Аракелян О.М. - Изв. НАН Армении. Физика. 2003. Т. 38. С. 312.
6. Веселаго В.Г. - УФН. 1967. Т. 92. С. 517.
7. Любимов В.Н. - Кристаллография. 1968. Т. 13. С. 1008.
8. Ерицян О.С. - Изв. АН Арм.ССР. Физика. 1968. Т. 3. С. 217.
9. Беляков В.А., Сонин А.С. Оптика холестерических жидких кристаллов. М. Наука. 1982.
10. Киеня В.А., Семченко И.В. - Кристаллография. 1994. Т. 39. С. 514.
11. Ерицян О.С., Папоян А.А., Аракелян О.М. - Изв. НАН Армении. Физика. 2005. Т. 40. С. 346.
12. Амбарцумян В.А. Научные труды, т. I. Ереван, Изд. АН Арм.ССР. 1960.
13. Ерицян О.С., Папоян А.А., Аракелян О.М., Лалаян А.А., Костанян Р.Б. - Изв. НАН Армении. Физика. 2006. Т. 41. С. 178.

УДК 621.315

Л. А. Варданян

**Поляронный сдвиг энергии связи возбужденных примесных состояний в  
квантовой точке при наличии электрического поля**

(Представлено академиком Э.М.Казаряном 9/Х 2007)

**Ключевые слова:** *квантовая точка, полярон, электрическое поле*

Нульмерные квантовые системы стали объектом интенсивных исследований вследствие уникальности их физических свойств и перспективности их применения в электронных и оптоэлектронных устройствах [1]. Системы квантовых точек (КТ) демонстрируют необычное электронное поведение из-за "атомоподобной" плотности состояний носителей заряда.

Вследствие сильного влияния поляронных эффектов на оптические и кинетические свойства квантовых точек изучению электрон-фононного взаимодействия на связанные примесные состояния посвящено много работ [2-11]. Как известно, поляронные эффекты в КТ становятся более яркими в присутствии внешних электрических и магнитных полей [12-18]. В рамках теории возмущений в [12] изучена зависимость энергии связи полярона с кулоновским центром от толщины параболической КТ в присутствии магнитного поля. Резонансный, мелкодонорный магнитополяронный эффект был исследован вариационным методом в квантовой точке GaAs/AlGaAs [13]. С использованием точной численной схемы диагонализации в [14] изучен низколежащий спектр связанного с кулоновским центром магнитополярона в КТ. В [15] вычислены поляронные эффекты для электрона, ограниченного в анизотропной КТ в присутствии магнитного поля, а в [16] развита схема унитарных преобразований для диагонализации фреиховского гамильтониана, связанного с примесным центром магнитополярона в трехмерной параболической КТ. Поляронные поправки к энергии основного состояния

электрона, ограниченного в цилиндрической КТ, вдоль оси которой приложены электрическое и магнитное поля, исследованы в [17]. В нашей предыдущей работе [18] на основе вариационного метода было изучено влияние однородного электрического поля на энергию связи основного состояния кулоновского центра в КТ с бесконечным ограничивающим потенциалом с учетом взаимодействия электрона с полярными оптическими фононами (ЭПОФ).

Целью настоящей работы является исследование влияния поляронного эффекта на низколежащие примесные состояния электрона в цилиндрической квантовой точке (ЦКТ) с полярным диэлектрическим окружением, при наличии электрического поля.

В рамках приближения эффективной массы гамильтониан электрон-фононной системы при наличии кулоновской примеси и внешнего однородного электрического поля можно представить в виде

$$H = H_{el} + \sum_{\vec{q}} \hbar\omega_{LO} a_{\vec{q}}^+ a_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}} (V_{\vec{q}} (\exp(i\vec{q}\vec{r}) - \exp(i\vec{q}\vec{r}_i)) a_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}^* (\exp(-i\vec{q}\vec{r}) - \exp(-i\vec{q}\vec{r}_i)) a_{\vec{q}}^*), \quad (1)$$

где  $H_{el}$  гамильтониан электронной подсистемы. Второе и третье слагаемые описывают, соответственно, невзаимодействующую фононную подсистему и электрон-фононное, а также примесь-фононное взаимодействия,  $a_{\vec{q}}^+$  ( $a_{\vec{q}}$ ) - оператор рождения (уничтожения) фонона с волновым вектором  $\vec{q}$  и частотой  $\omega_{LO}$ , амплитуда взаимодействия  $V_{\vec{q}}$  дается выражением

$$V_{\vec{q}} = -\frac{i\hbar\omega_{LO}}{q} \left(\frac{4\pi\alpha}{\Omega}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar}{2m\omega_{LO}}\right)^{1/4}, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \left(\frac{e^2}{2\hbar\omega_{LO}}\right) \left(\frac{2m\omega_{LO}}{\hbar}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{\epsilon_{\infty}} - \frac{1}{\epsilon_0}\right), \quad (3)$$

$m$  - эффективная масса электрона,  $\epsilon_0$  ( $\epsilon_{\infty}$ ) - статическая (оптическая) диэлектрическая постоянная,  $\Omega$  - объем ЦКТ. В (1) использована 3D-фононная аппроксимация, т.е. взаимодействие электрона с ограниченными и интерфейсными фононами заменяется взаимодействием с объемными фононами. Этот подход оправдан, так как конечный результат суммирования по всем фононным модам проявляет слабую зависимость от фононного спектра при вычислении поляронных и биполярных эффектов. Электронная часть гамильтониана, описывающего связанные состояния электрона с кулоновским центром в ЦКТ с радиусом  $R$  и длиной  $d$ , дается выражением

$$H_{el} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + eFz - \frac{e^2}{\epsilon_{\infty} \sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}_i)^2 + (z - z_i)^2}} + V_0(\vec{\rho}, z), \quad (4)$$

где  $F$  - модуль вектора напряженности электрического поля, направленного вдоль оси ЦКТ,  $V_0(\vec{\rho}, z)$  - ограничивающий потенциал, ( $V_0(\vec{\rho}, z) = 0$  при  $\rho < R$  и  $\infty$  при  $\rho > R$ ),  $(\vec{\rho}_i, z_i)$  - радиус-вектор примеси.

Применяя преобразование Плацмана к гамильтониану (1), с помощью унитарного оператора

$$S = \exp \left[ - \sum_{\vec{q}} \left( \frac{V_{\vec{q}}}{\hbar\omega_{LO}} \exp(i\vec{q}\vec{r}_i) a_{\vec{q}}^{\dagger} - h.c. \right) \right], \quad (5)$$

с точностью до постоянной величины  $(\epsilon_{\infty}^{-1} - \epsilon_0^{-1})e^2/r_i$ , для гамильтониана системы получим

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + eFz - \frac{e^2}{\epsilon_0 \sqrt{(\vec{\rho} - \vec{\rho}_i)^2 + (z - z_i)^2}} + V_0(\vec{\rho}, z) + \sum_{\vec{q}} \hbar\omega_{LO} a_{\vec{q}}^{\dagger} a_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}} (V_{\vec{q}} \exp(i\vec{q}\vec{r}) a_{\vec{q}} + V_{\vec{q}}^* \exp(-i\vec{q}\vec{r}) a_{\vec{q}}^{\dagger}). \quad (6)$$

В рамках модели Ландау - Пекара волновая функция электрон-фононной системы представляется в виде

$$|\Psi\rangle = N_{nl} \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z, \{\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}, \alpha_{nl}\}) \exp \left( \sum_{\vec{q}} (f_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^{\dagger} - f_{\vec{q}}^* a_{\vec{q}}) \right) |0\rangle, \quad (7)$$

где  $N_{nl}$  - константы нормирования,  $\Phi_0(\vec{\rho}, z)$  - точная собственная функция гамильтониана (4) в отсутствие кулоновского центра,  $\Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z, \{\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}, \alpha_{nl}\})$  - водородоподобные волновые функции, соответствующие  $(n, l)$  состояниям,  $|0\rangle$  - вакуумное состояние фононной подсистемы  $\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}, f_{\vec{q}}$  и  $f_{\vec{q}}^*$  - вариационные параметры, которые определяются из условия минимизации энергии системы,  $\Phi_0(\vec{\rho}, z)$  дается выражением

$$\Phi_0(\vec{\rho}, z) = \begin{cases} J_0(\eta) Z(\zeta), & \rho < R, \text{ при } |z| < d/2, \\ 0, & \rho \geq R, \text{ при } |z| \geq d/2, \end{cases} \quad (8)$$

где  $J_0(\eta)$  - функция Бесселя нулевого порядка, а  $Z(\zeta)$  - линейная комбинация функций Эйри:

$$Z(\zeta) = Bi(\zeta_+) Ai(\zeta) - Ai(\zeta_+) Bi(\zeta). \quad (9)$$

Аргументы функций Бесселя и Эйри даются выражениями

$$\eta = \kappa_{10} \rho / R \quad \text{и} \quad \zeta = a_c \frac{z}{d} - \frac{E_0 - (\kappa_{10} a^* / R)^2}{\omega_c}, \quad (10)$$

где  $\zeta_{\pm} = \zeta(z = \pm d/2)$ ,  $\kappa_{10}$  - первый нуль функции Бесселя,  $\omega_c = (|e|Fa^*/R^*)^{2/3}$ ,  $a_c = (\omega_c)^{1/2}d/a^*$ ,  $E_0$  - собственное значение гамильтониана (6) без водородоподобной примеси и без учета ЭПОФ-взаимодействия и является первым корнем трансцендентного уравнения

$$Bi(\zeta_+)Ai(\zeta_-) - Ai(\zeta_+)Bi(\zeta_-) = 0. \quad (11)$$

В качестве пробной волновой функции выбраны:

$$\begin{aligned} \Gamma_{1s}(\vec{\rho}, z) &= \exp(-\lambda_{1s}|\vec{r} - \vec{r}_i| - \kappa_{1s}|\vec{\rho} - \vec{\rho}_i|), \\ \Gamma_{2s}(\vec{\rho}, z) &= (1 - \beta_{2s}|\vec{r} - \vec{r}_i|) \exp(-\lambda_{2s}|\vec{r} - \vec{r}_i| - \kappa_{2s}|\vec{\rho} - \vec{\rho}_i|), \\ \Gamma_{2p_x}(\vec{\rho}, z) &= (\rho \cos \varphi - \rho_i) \exp(-\lambda_{2p_x}|\vec{r} - \vec{r}_i| - \kappa_{2p_x}|\vec{\rho} - \vec{\rho}_i|), \\ \Gamma_{2p_z}(\vec{\rho}, z) &= (z - z_i) \exp(-\lambda_{2p_z}|\vec{r} - \vec{r}_i| - \kappa_{2p_z}|\vec{\rho} - \vec{\rho}_i|). \end{aligned} \quad (12)$$

Ожидаемое значение энергии дается выражением

$$\begin{aligned} E_{nl}^{el-ph}(f_{\vec{q}}, \lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}) &= E_{nl}(\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}) + \sum_{\vec{q}} \hbar\omega_{LO} |f_{\vec{q}}|^2 + \\ &+ \sum_{\vec{q}} V_{\vec{q}} \frac{\langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \exp(i\vec{q}\vec{r}) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle}{\langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle} f_{\vec{q}} + \\ &+ \sum_{\vec{q}} V_{\vec{q}}^* \frac{\langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \exp(-i\vec{q}\vec{r}) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle}{\langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle} f_{\vec{q}}^*, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $E_{nl}(\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl})$  - ожидаемое значение электронной части гамильтониана (6) без учета ЭПОФ-взаимодействия. Из вариационного условия

$$\frac{\delta E_{nl}^{el-ph}(f_{\vec{q}}, \lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl})}{\delta f_{\vec{q}}} = 0 \quad (14)$$

находим:

$$f_{\vec{q}} = - \frac{V_{\vec{q}}^* \langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \exp(-i\vec{q}\vec{r}) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle}{\hbar\omega_{LO} \langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в (13), находим энергию для основного и первых возбужденных состояний электрона с учетом ЭПОФ-взаимодействия:

$$\begin{aligned} E_{nl}^{el-ph}(f_{\vec{q}}, \lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}) &= E_{nl}(\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}) - \\ &- \sum_{\vec{q}} \frac{|V_{\vec{q}}|^2}{\hbar\omega_{LO}} \left| \frac{\langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \exp(-i\vec{q}\vec{r}) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle}{\langle \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) | \Phi_0(\vec{\rho}, z) \Gamma_{nl}(\vec{\rho}, z) \rangle} \right|^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Энергия связи определяется как

$$E_{nl,B}^{el-ph}(f_{\vec{q}}, \lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl}) = E_0 - E_{nl}^{el-ph}(f_{\vec{q}}, \lambda_{nl}^0, \kappa_{nl}^0, \beta_{nl}^0), \quad (17)$$

где  $\lambda_{nl}^0$ ,  $\kappa_{nl}^0$  и  $\beta_{nl}^0$  - значения вариационных параметров, минимизирующие энергию  $E_{nl}(\lambda_{nl}, \kappa_{nl}, \beta_{nl})$ . Поляронный сдвиг энергии связи определяется как разность между энергиями связи с учетом и без учета ЭПОФ-взаимодействия.

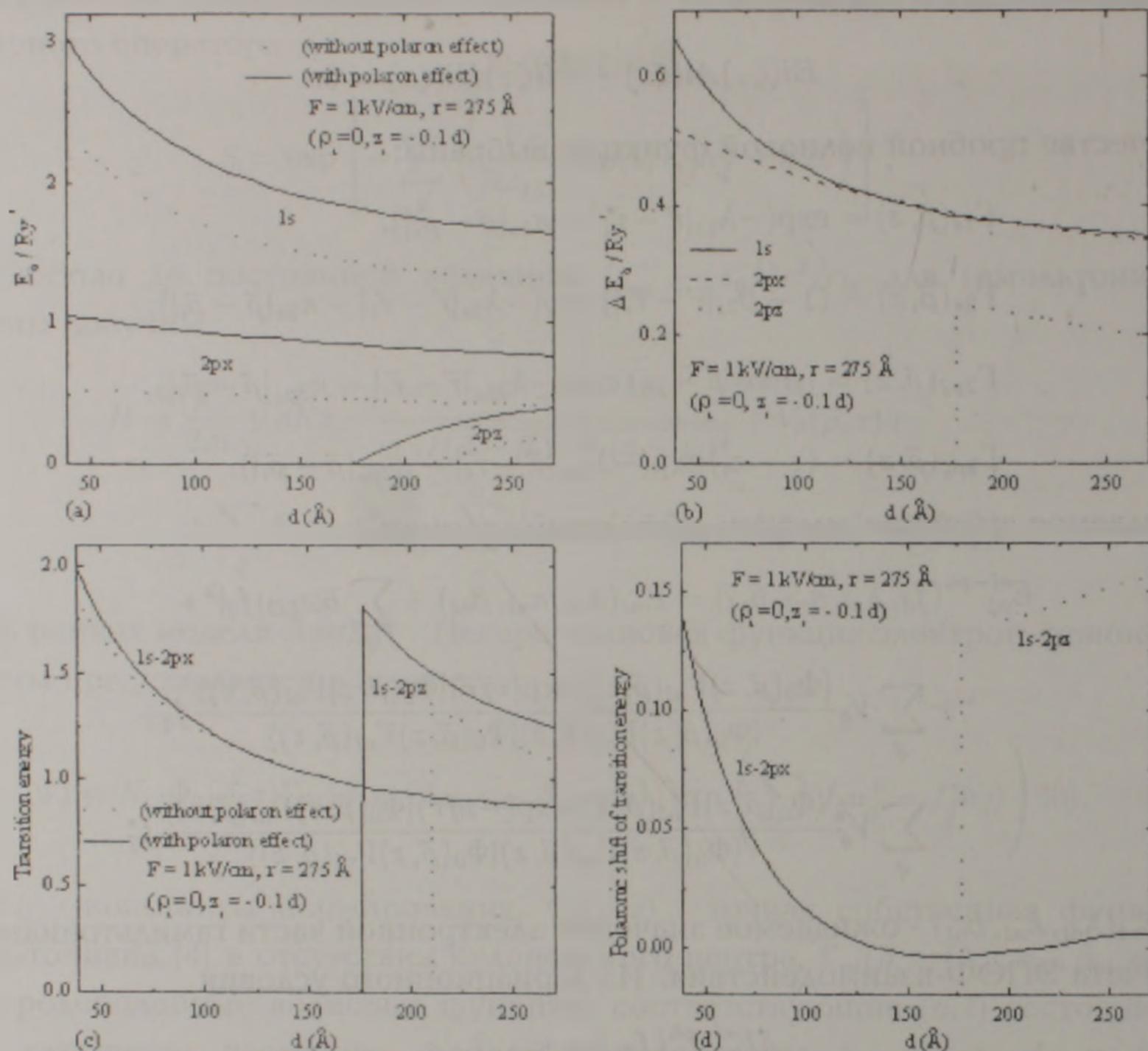


Рис. 1. Зависимость энергии связи примесных состояний  $1s$ ,  $2p_x$ ,  $2p_z$  (a), поляронные сдвиги этих состояний (b), энергии переходов  $1s - 2p_x$  и  $1s - 2p_z$  (c), а также поляронные сдвиги энергии переходов (d) от длины ЦКТ.

Численные расчеты проведены для ЦКТ ZnSe/CdSe/ZnSe с радиусом  $275$  Å, вдоль оси которой приложено электрическое поле  $1$  кВ/см. Предполагается, что примесь находится в точке  $(0, -0.1d)$ . На рис. 1 изображены энергии связи примесных состояний  $1s$ ,  $2p_x$ ,  $2p_z$  (рис. 1,а) с учетом и без учета ЭПОФ-взаимодействия, поляронные сдвиги этих состояний (рис. 1,б), энергии переходов  $1s - 2p_x$  и  $1s - 2p_z$  с учетом и без учета ЭПОФ-взаимодействия (рис. 1,с), а также поляронные сдвиги энергии этих переходов (рис. 1,д) в зависимости от длины ЦКТ. Как видно из рис. 1,а, энергии связи примесных состояний  $1s$  и  $2p_x$  растут с уменьшением длины ЦКТ, как с учетом, так и без учета ЭПОФ-взаимодействия. Это объясняется тем, что

сжатие волновой функции вдоль оси ЦКТ приводит к перераспределению электронной плотности в плоскости, перпендикулярной этой оси и, соответственно, к некоторому росту энергии связи  $1s$ - и  $2p_x$ -состояний. Иная ситуация имеет место для состояния  $2p_z$  с плотностью заряда, распределенного вдоль оси ЦКТ, поскольку в этом случае сжатие ЦКТ вдоль оси приводит к резкому росту кинетической энергии и уменьшению энергии связи  $2p_z$ -состояния вплоть до исчезновения. Связанное состояние  $2p_z$  без учета ЭПОФ-взаимодействия при фиксированных выше значениях параметров возникает лишь при длинах ЦКТ, превышающих  $214\text{\AA}$ . При учете ЭПОФ-взаимодействия этот порог смещается в сторону коротких длин ЦКТ и составляет примерно  $176\text{\AA}$ . Следует отметить, что, в отличие от состояний  $1s$  и  $2p_x$ , энергия связи состояния  $2p_z$  с увеличением длины ЦКТ увеличивается. Поляронные сдвиги энергии связи для состояний  $1s$  и  $2p_x$  при длинах ЦКТ, превышающих  $125\text{\AA}$ , практически совпадают (рис. 1,b). Поэтому при таких длинах ЭПОФ-взаимодействие из-за компенсации в энергии перехода  $1s - 2p_x$  (рис. 1,c) не проявляется. Вклад этого взаимодействия возрастает при уменьшении длины ЦКТ и при  $d = 50\text{\AA}$  составляет 6%. Поляронные сдвиги энергии связи для состояния  $2p_z$  меньше энергии поляронного сдвига  $1s$ , и, несмотря на частичную компенсацию, вклад ЭПОФ-взаимодействия в энергии перехода  $1s - 2p_z$  значителен во всей области существования связанного состояния  $2p_z$  и с увеличением длины ЦКТ увеличивается.

Гусско-Армянский (Славянский) университет

Л. А. Варданян

### Поляронный сдвиг энергии связи возбужденных примесных состояний в квантовой точке при наличии электрического поля

В рамках модели Ландау – Пекара исследовано влияние взаимодействия электрона с полярными оптическими фононами на энергию связи низколежащих примесных состояний в цилиндрической полупроводниковой квантовой точке при наличии электрического поля. Вычислены также энергии переходов и их поляронные сдвиги в зависимости от длины квантовой точки. Численные расчеты проведены для квантовой точки  $\text{ZnSe/CdSe/ZnSe}$ .

Գրգռված իառնուկային վիճակների կապի էներգիայի պոլարոնային շեղումը  
քվանտային կետում էլեկտրական դաշտի առկայության դեպքում

Լանդաու – Պեկարի մոդելի շրջանակներում ուսումնասիրված է բևեռային օպտիկական ֆոնոնների հետ էլեկտրոնի վոլտազդեցության ազդեցությունը ցածրէներգիական իառնուկային վիճակների կապի էներգիայի վրա գլանային կիսահաղորդչային քվանտային կետում երկայնական էլեկտրական դաշտում: Նաշվարկված են նաև  $1s - 2p_x$  և  $1s - 2p_z$  անցումների էներգիաները և դրանց պոլարոնային շեղումները՝ կախված գլանային քվանտային կետի երկարությունից: Թվային հաշվարկները կատարված են ZnSe/CdSe/ZnSe քվանտային կետի համար:

L. A. Vardanyan

Polaronic Shift of Binding Energy of Excited Impurity States in the Electric Field in a  
Quantum Dot

The effect of the electron-polar-optical-phonon interaction on the binding energy of the low-lying impurity states in a cylindrical quantum dot in a longitudinal electric field is investigated in the frame of Landau – Pekar model. The dependence of  $1s - 2p_x$  and  $1s - 2p_z$  transition energies and their polaronic shifts on the length of the cylindrical quantum dot is also calculated. The numerical calculations are carried out for ZnSe/CdSe/ZnSe quantum dot.

Литература

1. *Alivisatos A.P.* Science. 1996. V. 271. P. 933.
2. *Klein M.C., Hache F., Ricard D., Flytzanis C.* - Phys.Rev. 1990. B42. P. 11123.
3. *Zhu K.D., Gu S.W.* - Solid State Commun. 1992. V. 81. P. 211.
4. *Zhu K.D., Gu S.W.* - Solid State Commun. 1992. V. 85. P. 651.
5. *De la Cruz R.M.* - Superlatt. Microstruct., 1994. V. 16. P. 427.
6. *Bhattacharjee A.K.* - Phys. Rev. 1995. B51. P. 9912.
7. *Wan Y., Ortiz G., Phillips P.* - Phys. Rev. 1997. B55. P. 5313.
8. *Knipp P.A., Reinecke T.L., Lorke A., Fricke M., Petroff P.M.* - Phys. Rev. 1989. B56. P. 1516.
9. *Mukhopadhyay S., Chatterjee A.* - Phys. Rev. 1997. B55. P. 9279.
10. *Inoshita T., Sakaki H.* - Phys. Rev. 1997. B56. P. R4355.
11. *Lepine Y., Bruneau G.* - J. Phys.: Condens. Matter. 1998. V. 10. P. 1495.
12. *Chen C-Y., Jin P-W., Li W-S., Lin D.L.* - Phys. Rev. 1997. B56. P. 14913.

13. *Zhu K-D., Kobayashi T.* - Solid State Commun. 1994. V. 92. P. 353.
14. *Lee C.M., Lam C.C., Gu S.W.* - Solid State Commun. 1999. V. 112. P. 555.
15. *Kandemir B.S., Altanhan T.* - Phys. Rev. 1999. B60. P. 4834.
16. *Kandemir B.S., Cetin A.* - J. Phys.: Condens. Matter. 2005. V. 17. P. 667.
17. *Wang R-Q., Xie H-J., Yu Y-B.* - Int. J. Mod. Phys. 2004. B18. P. 2887.
18. *Vartanian A.L., Vardanyan L.A., Kazaryan E.M.* - Phys. Lett. 2007. A360. P. 649.

ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

УДК 547.294.314.07

З. Т. Карапетян, Р. А. Макарян, академик А. А. Аветисян

Синтез новых лактон-анизидинов

(Представлено 14/IX 2007)

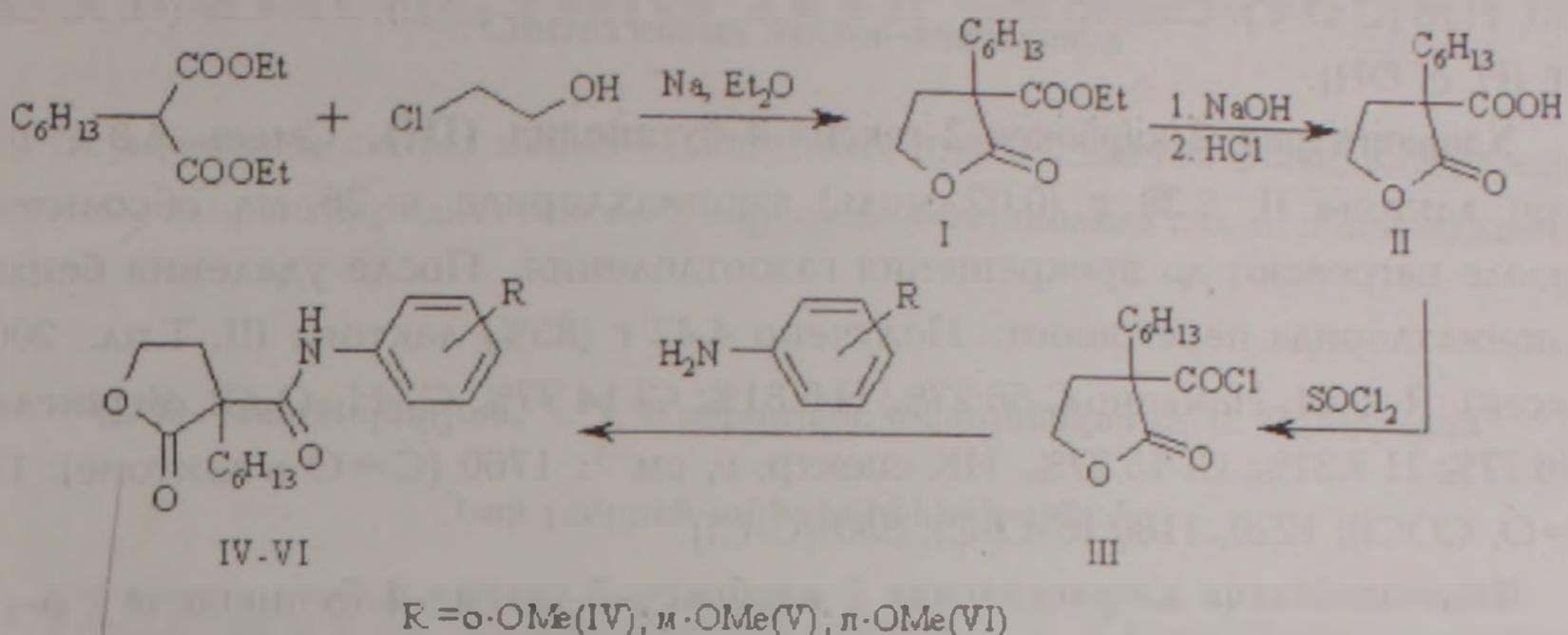
Ключевые слова: *4-бутанолид, о-, м-, п-анизидин*

Анизидины нашли широкое применение в органических синтезах, особенно о-анизидин, из которого получают гваякол, ванилин и др. [1]. Соединения, содержащие одновременно и лактонное кольцо, - малоизвестный класс веществ. Данных о сочетании анизидинов с лактонами, в частности, при С-2, в литературе мы не встречали.

В настоящей статье представлены результаты исследования по синтезу 4-бутанолида с о-, м-, п-анизидинами.

С этой целью взаимодействием гексилмалонового эфира с этиленхлоргидрином в абсолютном эфире в присутствии натрия получен новый 2-гексил-2-этоксикарбонил-4-бутанолид по методике [2], щелочным гидролизом которого выделен 2-гексил-2-карбокси-4-бутанолид. Полученный при С-2 карбоксибутанолид является хорошим синтоном для получения разнообразных гетероциклических систем [3].

Изучена реакция полученного карбоксибутанолида с тионилхлоридом в абсолютном бензоле [4]. Установлено, что с хорошим выходом получается хлорангидрид 2-гексил-2-карбокси-4-бутанолида, который поставлен во взаимодействие с о-, м-, п-анизидинами.



Изучено влияние различных факторов и разработаны оптимальные условия проведения реакции: нагреванием реагирующих компонентов в соотношении 1:2 в среде абсолютного бензола в течение 3 ч. Установлено, что с хорошим выходом образуются соответствующие целевые бутанолиды, строение которых доказано элементарным анализом, ИК и ЯМР  $^1\text{H}$  спектрами.

Спектры ЯМР  $^1\text{H}$  получены при  $30^\circ\text{C}$  на спектрометре Varian Mercury-300 с рабочей частотой 300 МГц, растворитель -  $\text{DMCO-d}_6$ . ИК спектры сняты на спектрофотометре Specord 75-IR или Nicolet FTIR NEXUS в вазелиновом масле и в тонком слое. Индивидуальность и чистота полученных соединений установлены методом ТСХ на пластинках Silufol UV-254, проявленных парами йода.

**2-Этоксикарбонил-2-гексил-4-бутанолид (I).** К эфирному раствору натриевой соли гексилмалонового эфира, приготовленного из 6.38 г (0.28 моля) натрия и 67.6 г (0.28 моля) гексилмалонового эфира в 150 мл абсолютного эфира, прикапывают 23.3 г (0.28 моля) этиленхлоргидрина и нагревают 8 ч. После отгонки растворителя остаток перегоняют. Выход 40.2 г (60 %), т.кип.  $165^\circ\text{C}/4 \text{ мм}$ ,  $n_D^{20}$  1.4520,  $d_4^{20}$  1.0383,  $R_f$  0.41. Найдено  $\text{MR}_D$  62.86; С 63.96%; Н 8.59%;  $\text{C}_{13}\text{H}_{22}\text{O}_4$ . Вычислено  $\text{MR}_D$  63.36; С 64.46%; Н 9.05%. ИК спектр,  $\nu$ ,  $\text{cm}^{-1}$ : 1770 (C=O в лактоне); 1730 (C=O, COOEt); 1210, 1180 (C-O-C). Спектр ЯМР  $^1\text{H}$ ,  $\delta$ , м.д.: 1.2 (3H, т,  $\text{COOCH}_2\text{CH}_3$ ); 2.15 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 2.8 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 4.1 (2H, к,  $\text{COOCH}_2\text{CH}_3$ ).

**2-Карбокси-2-гексил-4-бутанолид (II).** Смесь 15.3 г (0.06 моля) лактона I, 7.2 г (0.18 моля) гидроксида натрия и 15 мл воды нагревают 3 ч, после добавляют 10 мл воды, экстрагируют бензолом, остаток подкисляют соляной кислотой (лакмус), маслянистый слой экстрагируют бензолом, высушивают сульфатом магния. Получено 7.7 г (54%) лактона II, т.пл.  $117^\circ\text{C}$  (петролейный эфир).  $R_f$  0.52. Найдено С 61.1%; Н 7.91%;  $\text{C}_{11}\text{H}_{18}\text{O}_4$ . Вычислено С 61.6%; Н 8.41%.

спектр,  $\nu$ ,  $\text{см}^{-1}$ : 3200-3400 (ОН); 1771 (C=O в лактоне); 1700 (C=O, COOH); 1210, 1170 (C-O-C). Спектр ЯМР  $^1\text{H}$ ,  $\delta$ , м.д.: 0.9 (3H, т,  $\text{CH}_3$ ); 2.2-4.28 (H, м,  $\text{CH}_2$ ); 11.6 (H, с, ОН).

**Хлорангидрид 2-карбоксии-2-гексил-4-бутанолид (III).** Смесь 4.8 г (0.02 моля) лактона II, 2.38 г (0.02 моля) тионилхлорида в 26 мл абсолютном бензоле нагревают до прекращения газоотделения. После удаления бензола и тионилхлорида перегоняют. Получено 4.42 г (85%) лактона III. Т.пл. 200°C (гексан).  $R_f$  0.44. Найдено С 56.27%; Н 6.81%; Cl 14.77%;  $\text{C}_{11}\text{H}_{17}\text{O}_3\text{Cl}$ . Вычислено С 56.77%; Н 7.31%; Cl 15.27%. ИК спектр,  $\nu$ ,  $\text{см}^{-1}$ : 1760 (C=O в лактоне); 1730 (C=O, COCl); 1220, 1180 (C-O-C); 850 (C-Cl).

**Взаимодействие хлорангидрида 2-карбоксии-2-гексил-4-бутанолида с о-, м- и п-анизидинами.** Смесь 3 г (0.013 моля) лактона III, 3.25 г (0.02 моля) о-, м- или п-анизидина в 50 мл абсолютном бензоле нагревают 6 часов при 75-80°C. После соответствующей обработки получены лактоны IV-VI.

**2-Гексил-2-карбоксии-*N*-(о-анизидинил)-4-бутанолид (IV).** Выход 2.6 г (65%). Т.пл. 70°C (петролейный эфир).  $R_f$  0.62. Найдено N 5.21%;  $\text{C}_{18}\text{H}_{25}\text{O}_4\text{N}$ . Вычислено N 5.01%. ИК спектр,  $\nu$ ,  $\text{см}^{-1}$ : 3380-3510 (NH, =C-OH); 1760 (C=O в лактоне); 1640 (C=O, амидный); 1520, 1600 (C=C, Ar); 1240, 1280 (C-O-C); 760 (о-Ar). Спектр ЯМР  $^1\text{H}$ ,  $\delta$ , м.д.: 2.15 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 2.8 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 3.67 (3H, с, OMe); 6.96-7.46 (4H, м, Ar).

**2-Гексил-2-карбоксии-*N*-(м-анизидинил)-4-бутанолид (V).** Выход 2.8 г (69%). Т.пл. 72°C (петролейный эфир).  $R_f$  0.64. Найдено N 5.31%;  $\text{C}_{18}\text{H}_{25}\text{O}_4\text{N}$ . Вычислено N 5.01%. ИК спектр,  $\nu$ ,  $\text{см}^{-1}$ : 3380-3510 (NH, =C-OH); 1760 (C=O в лактоне); 1640 (C=O, амидный); 1510, 1600 (C=C, Ar); 1220, 1280 (C-O-C); 690, 780 (м-Ar). Спектр ЯМР  $^1\text{H}$ ,  $\delta$ , м.д.: 2.15 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 2.8 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 3.67 (3H, с, OMe); 6.83-7.24 (4H, м, Ar).

**2-Гексил-2-карбоксии-*N*-(п-анизидинил)-4-бутанолид (VI).** Выход 2.6 г (65%). Т.пл. 68°C (петролейный эфир).  $R_f$  0.59. Найдено N 5.34%;  $\text{C}_{18}\text{H}_{25}\text{O}_4\text{N}$ . Вычислено N 5.01%. ИК спектр,  $\nu$ ,  $\text{см}^{-1}$ : 3380-3510 (NH, =C-OH); 1771 (C=O в лактоне); 1630 (C=O, амидный); 1520, 1600 (C=C, Ar); 1210, 1280 (C-O-C); 810-840 (п-Ar). Спектр ЯМР  $^1\text{H}$ ,  $\delta$ , м.д.: 2.15 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 2.8 (2H, д,  $\text{CH}_2$  в лактоне); 3.67 (3H, с, OMe); 6.89-7.32 (4H, м, Ar).

Ереванский государственный университет

З. Т. Карапетян, Р. А. Макарян, академик А. А. Аветисян

### Синтез новых лактон-анизидинов

Осуществлен синтез новых замещенных при С-2 лактон-анизидинов, взаимодействием хлорангида 2-гексил-2-карбокси-4-бутанолида с о-, м-, п-анизидинами.

Զ. Թ. Կարապետյան, Ռ. Ն. Մակարյան, ակադեմիկոս Ա. Ա. Ավետիսյան

### Նոր լակտոն-անիզիդինների սինթեզ

Իրականացվել է 2-С փեղակավված նոր լակտոն-о-, մ- և պ-անիզիդինների սինթեզը 2-կարբոքսի-2-հեքսիլ-4-բուտանոլիդի բլորանհիդրիդի փոխազդեցությամբ о-, մ- և պ-անիզիդինների հետ:

Z. T. Karapetyan, H. H. Makaryan, academician A. A. Avetissyan

### New Lakton-Anisidines Synthesis

The interaction of 2-hexyl-2-carboxy-4-butanolids chloroanhydride with o-, m-, p-anisidines lead to formation of new o-, m-, p-anisidin-lactones.

### Литература

1. Гаупман З., Герече Ю., Ремане Х. Органическая химия. М. Химия. 1979.
2. Аветисян А.А., Карапетян З.Т. - Тезисы Респ. науч. конф. по органическому синтезу. Ереван. 1997. с. 45.
3. Кочикян Т.В., Арутюнян Э.В., Арутюнян В.С., Аветисян А.А. - Хим. ж. Армении. 2003. Т. 56. N1-2. С. 57.
4. Карапетян З.Т., Дангян М.Т. - Арм. хим. ж. 1982. Т. 35. N5. С. 258.

БИОХИМИЯ

УДК 577

М. Ш. Мурадян, А. К. Едигарян, Л. А. Сехян, академик А. А. Галоян

Влияние кардиоактивного гексапептида на захват [<sup>35</sup>S] таурина срезами сердца крысы при блокаде адрено-, холино- и опиоидных рецепторов

(Представлено 27/IV 2007)

**Ключевые слова:** таурин, захват, сердце, гексапептид, нейромедиатор, рецептор

В гипоталамо-нейрогипофизарной системе животных кроме кардиоактивных нейрогормонов [1] существуют и некоторые гипофизарные пептиды и нейрсмедиаторные аминокислоты, которые могут оказывать органотропное влияние на организм. Среди них кардиоактивным является гексапептид (ГП) Гли-Тир-Лей-Арг-Про-Гли-NH<sub>2</sub>, являющийся фрагментом люлиберина и имеющий важное значение не только для синаптических процессов мозга, но и для регуляции висцеральных функций различных органов, в частности сердца.

ГП, наряду с коронарорасширяющими свойствами, характеризуется также гипергликемическим эффектом, усиливает секрецию инсулина β-клеток поджелудочной железы и обладает некоторыми инсулиноподобными свойствами [2], играя, вероятно, также важную роль в центральной нейрогуморальной регуляции углеводного обмена.

К числу соединений, влияющих на деятельность сердечной мышцы, относится нейромедиаторная сульфаминокислота - таурин, содержащийся в сердце млекопитающих в больших количествах [3] и являющийся неспецифическим регулятором чувствительности миокардиальных клеток к биологически активным веществам [4]. Дефицит этой аминокислоты может отрицательно влиять на некоторые функции организма, особенно сердца. Миокард сердца способен активно накапливать таурин с помощью механизма активного транспорта против градиента концентрации, который зависит от образования энергии в клетках сердца [5]. Таурин действует, главным

образом, как ингибиторный нейромедиатор гладкой и сердечной мышцы и может включаться в некоторые воспроизводительные и эндокринные функции организма [6].

Таурин обладает инсулинподобным эффектом, в 2 раза повышая содержание гликогена печени, снимает гликемию [7]. Мацудо и др. установлено, что глюкокортикоиды могут влиять на транспорт таурина в сердце [8]. Показано, что в сердце таурин имеет специфическую транспортную систему, которая модифицируется уровнем  $\beta$ -адренергической активации и метаболизирующей системой [9,10]. Сердце крыс может синтезировать таурин. Фермент для синтеза таурина, цистеинсульфат декарбоксилаза, сосредоточен в участках нервных окончаний [11].

Таурин изменяет реакцию сердечной мышцы на адреналин и ацетилхолин и оказывает влияние на рецепторы этих веществ. Возможно, существует конкурентное отношение между холинэргическими агентами и таурином [12].

В настоящей работе представлены результаты изучения влияния ГП и веществ, специфически блокирующих  $\alpha$ - и  $\beta$ -адренорецепторы, холинорецепторы и рецепторы морфина, на скорость захвата таурина [ $^{35}\text{S}$ ] изолированными срезами сердца.

Опыты проводили на белых крысах, самцах и самках, породы Вистар массой 180-200 г. Крыс оглушали электрическим током и декапитировали. Навески срезов правого и левого частей предсердий и желудочков сердца инкубировали в растворе Тироде, содержащем (в мМ): NaCl - 153.9, KCl - 41.5, CaCl<sub>2</sub> - 2.5, MgCl<sub>2</sub> - 1.0, NaHCO<sub>3</sub> - 11.9, NaH<sub>2</sub>PO<sub>4</sub> - 1.0, глюкозы - 5.5, аскорбиновой кислоты - 2.8. Инкубацию проводили в течение 30 мин при 37°C в камере объемом 10 мл, насыщенной кислородом. Затем раствор заменяли и проводили преинкубацию ингибиторами адрено-, холино- и опиоидных рецепторов в течение 20 мин, после чего срезы по 30 мин инкубировали в свежем растворе Тироде в присутствии ГП ( $3 \times 10^{-5}$  М) и [ $^{35}\text{S}$ ] таурина в концентрации 0.25 мк кюри/мл ( $3 \times 10^{-9}$  М). По окончании инкубации проводили пятикратную промывку препаратов раствором Тироде, затем препараты помещали в сцинтилляционные кюветы, заливали 1 мл этилового спирта и оставляли на 16-18 ч, после чего добавляли в кюветы 10 мл сцинтилляционной жидкости, содержащей 4 г ППО (2.5 дифенилоксазол) и 100 мг ПОПОП (1.4 ди-5фенил-2-оксазол) на 1 мл толуола [13]. Радиоактивность измеряли на жидкостном сцинтилляционном счетчике СЛ-30 "Интертехник" (Франция) с внешним стандартом, что позволило выразить захват [ $^{35}\text{S}$ ] таурина в распадах 1 мин на 1 г ткани. В опытах был использован [ $^{35}\text{S}$ ] таурин фирмы "Амершам" (Англия) с удельной активностью 8.2 кюри/ммоль. Обработку полученных результатов проводили методом

вариационной статистики Стьюдента. Инкубационная среда содержала [ $^{35}\text{S}$ ] таурина ( $10^{-9}\text{M}$ ) и немеченую аминокислоту таурина в концентрации  $10^{-5}\text{M}$ . Степень захвата аминокислот выражали отношением числа распадов осадка фракции (мин/мг) к числу распадов среды поглощения (мин/мкл).

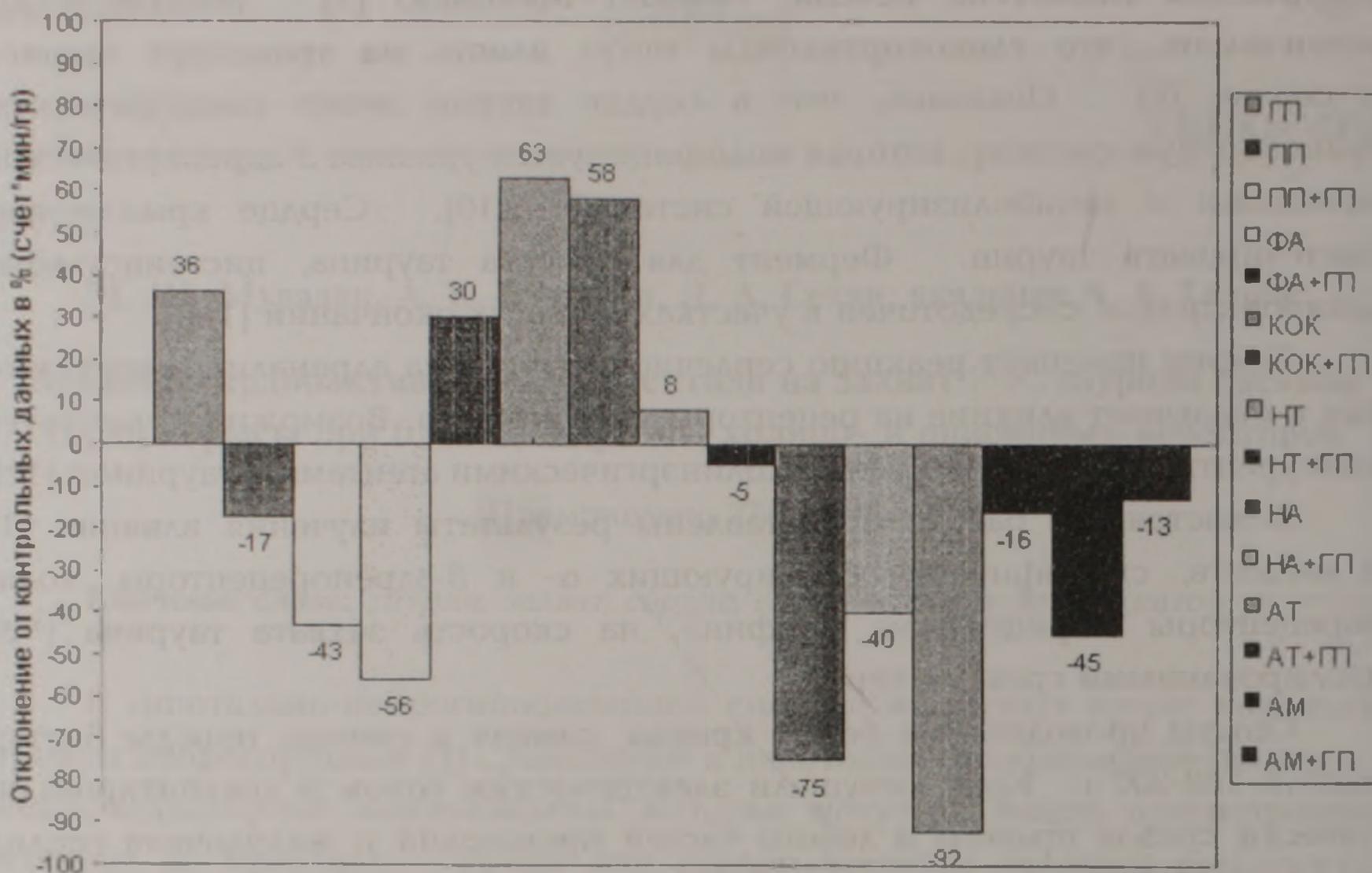


Рис. 1. Захват таурина [ $^{35}\text{S}$ ] срезами правого предсердия под влиянием ГП и в сочетании с ингибиторами адрено-, морфино- и холинорецепторов. По оси ординат отклонение от контрольных данных в %. Вероятность ингибиторов и НС приведена в сравнении с контролем, а сочетания ингибиторов + ГП - с результатами соответствующих ингибиторов. Средние данные 6-12 опытов. Принятые сокращения: ГП - гексапептид, ФА - фентоламин, КОК - кокаин, ПП - пропранолол, НА - налтрексон, НА - налоксан, АМ - амизил, АТ - атропин.

Как нами [14], так другими авторами [15] было показано, что интенсивность захвата таурина в различных участках сердца разная. Предсердия, как и большинство органов, иннервируются длинными постганглионарными адренергическими нейронами и имеют достаточно плотную синаптическую иннервацию при небольшом объеме мышечной ткани.

Для определения звена, на которое действует ГП, была поставлена серия опытов со срезами предсердий и желудочками сердца с использованием разных блокаторов и [ $^{35}\text{S}$ ] таурина.

Как видно из рис. 1-4, ГП в дозе  $3 \times 10^{-6}\text{M}$  вызывает усиление захвата таурина срезами сердца в правом предсердии на 36%, в правом желудочке

- на 69%, а в других изучаемых участках сердца достоверного изменения не происходит.

Блокада  $\beta$ -адренорецепторов пропранололом в концентрации  $5 \times 10^{-7}$ М приводит к угнетению захвата таурина в правом предсердии на 17%, в правом и левом желудочке - на 31 и 35%, соответственно. В сочетании ГП с пропранололом наблюдается угнетение захвата, в правом предсердии составляющее 43, в левом - 20%, тогда как в желудочках сердца наблюдается усиление захвата: в правом - на 31, левом - на 24%.

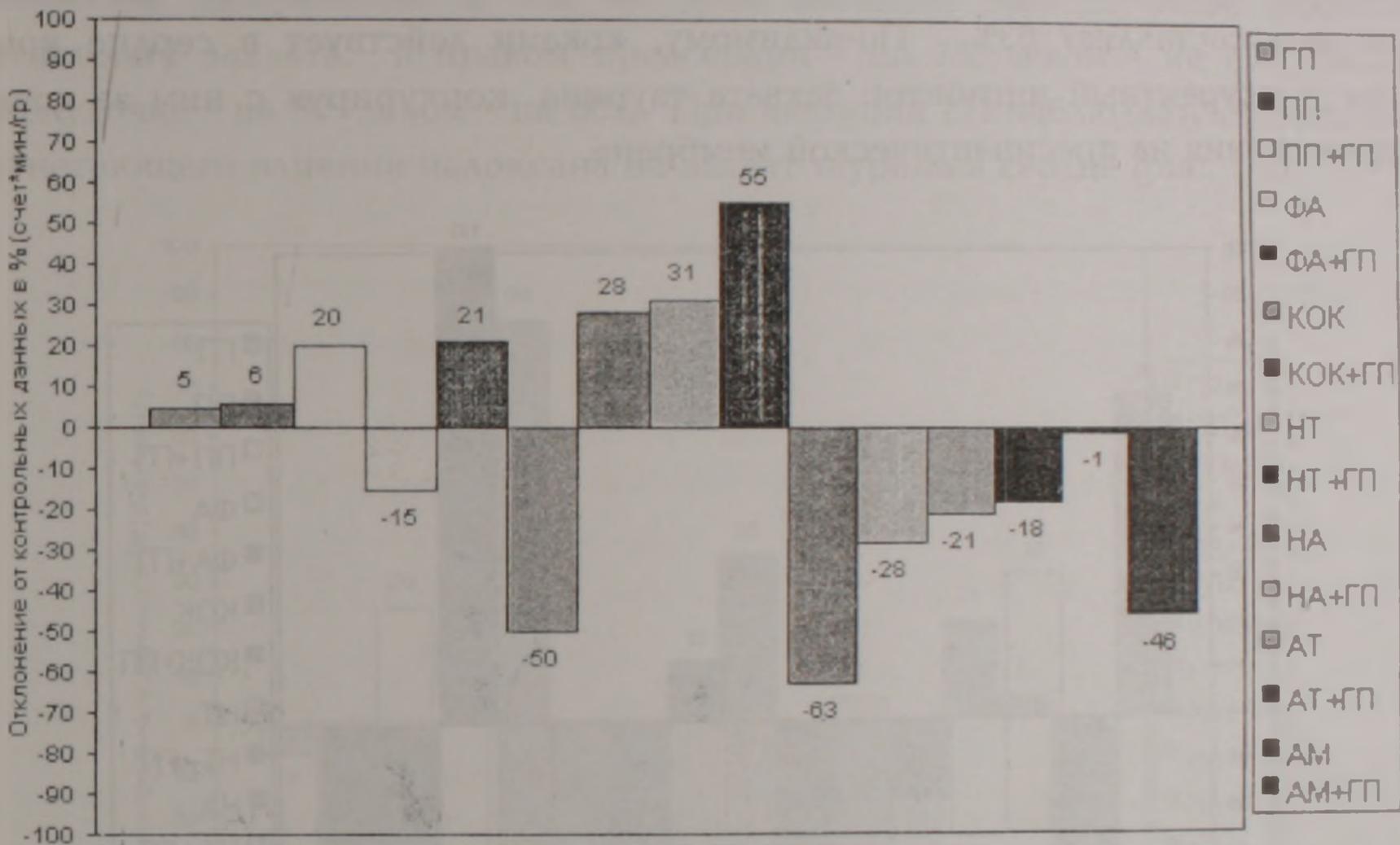


Рис. 2. Захват таурина [ $^{35}\text{S}$ ] срезами левого предсердия под влиянием ГП и его сочетаний с ингибиторами рецепторов. Обозначения те же, что на рис. 1.

Блокатор L-адренорецепторов фентоламин в дозе  $5 \times 10^{-7}$ М приводит к снижению захвата таурина во всех исследуемых участках сердца: в правом предсердии - на 56, левом - на 15, правом желудочке - на 25, левом желудочке - на 60%. Сочетание с ГП снимает угнетающий эффект фентоламина и приводит к активации захвата таурина почти во всех участках сердца, кроме правого желудочка, - в правом предсердии на 30, левом - на 21, левом желудочке - на 84%.

Из данных рисунков видно, что нет какой-либо зависимости между эффектом фентоламина и особенностями в распределении  $\alpha$ - и  $\beta$ -адренорецепторов сердца. Органы преимущественно с  $\alpha$ - и  $\beta$ -адренорецепторами реагируют на введение блокаторов одновременным снижением содержания захвата таурина. Приведенные данные позволяют предположить,

что адренорецепторы не могут принимать участия в регуляции обмена таурина адренергическими нейронами.

Для определения степени нейронального связывания таурина [ $^{35}\text{S}$ ] в сердце было исследовано влияние специфических ингибиторов нейронального захвата кокаина в концентрации  $5 \times 10^{-5}\text{M}$  на скорость захвата таурина в условиях эксперимента. Установлено, что кокаин приводит к выраженному угнетению захвата срезами сердца: в левом предсердии - на 50, правом желудочке - на 63, левом желудочке - на 55%. Исключение составляет правое предсердие, где наблюдается положительный эффект - активация захвата составляет 63%. По-видимому, кокаин действует в сердце крыс как конкурентный ингибитор захвата таурина, конкурируя с ним за точку приложения на пресинаптической мембране.

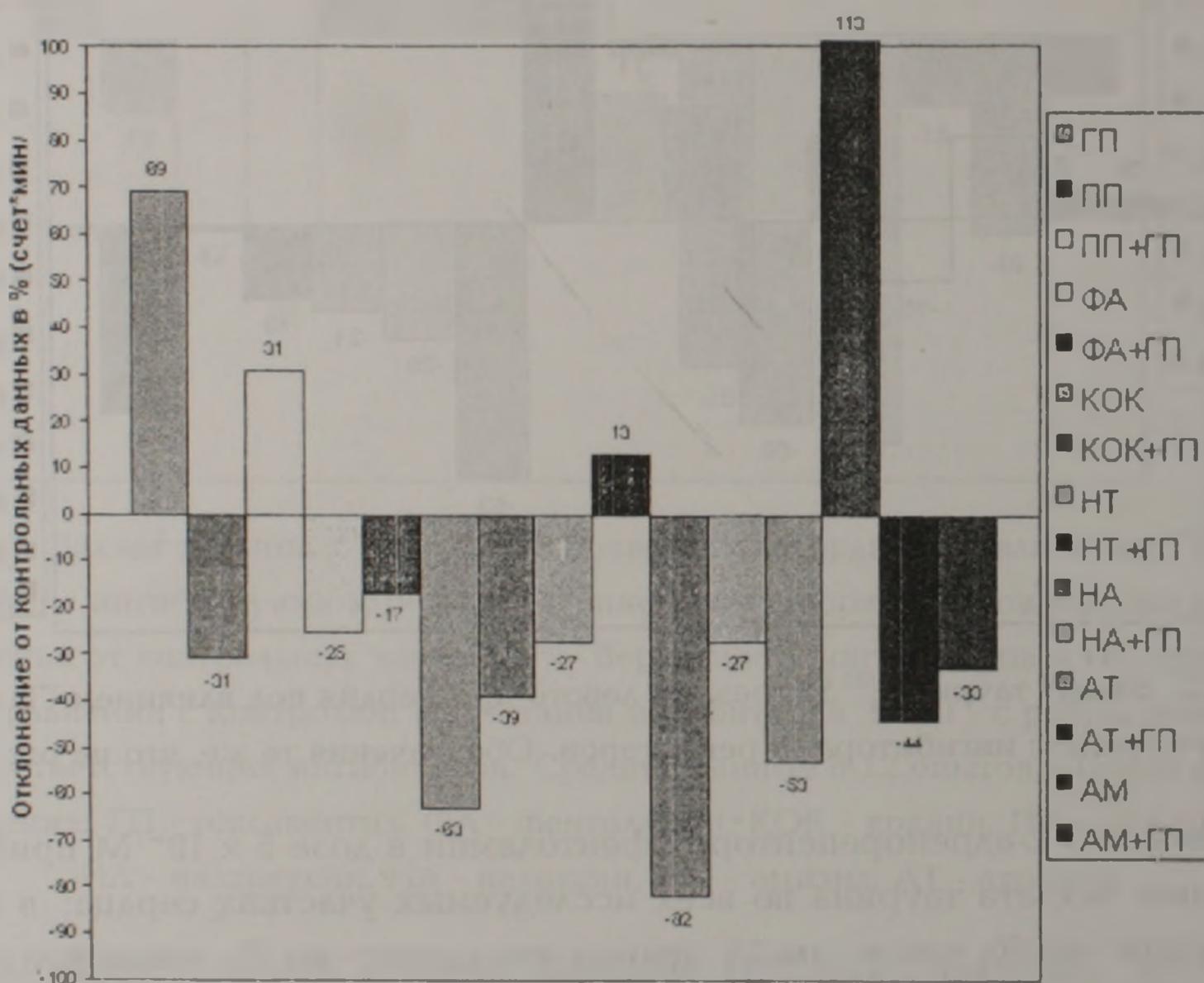


Рис. 3. Захват таурина [ $^{35}\text{S}$ ] срезами правого желудочка сердца под влиянием ГП и его сочетаний с ингибиторами рецепторов. Обозначения те же, что на рис.1.

Под влиянием ГП при предварительной блокаде нейронального захвата кокаином активируется захват в правом и левом предсердиях на 58 и 28%, соответственно. В желудочках подобного эффекта не наблюдается.

При введении кокаина в сочетании с ГП адренергическая реакция сердца крыс усиливается, что, возможно, обусловлено не блокадой захвата таурина, а повышением чувствительности адренорецепторов.

Характер действия блокаторов опиоидных рецепторов морфина налтрексона (НТ) в дозе  $0.3 \times 10^{-8}M$  и налоксона в дозе  $0.39 \times 10^{-8}M$  на разные части сердца неодинаков. В случае НТ в предсердиях заметных изменений не происходит, а в левом и правом желудочках наблюдается угнетение захвата: в правом желудочке - на 27, левом - на 52%. В сочетании НТ и ГП наблюдается усиление захвата: в левом предсердии - на 55, левом желудочке - на 35%, в то время как в других частях сердца ГП заметного влияния не оказывает.

Другой ингибитор опиоидных рецепторов - налоксан, являющийся аналогом налтрексона, в той же дозе вызывает гораздо более глубокое угнетение захвата: в правом предсердии - на 75, левом - на 63, правом желудочке - на 82, левом - на 80%. При введении ГП наблюдается тенденция угнетающего влияния налоксана на захват таурина в сердце (рис. 1-4).

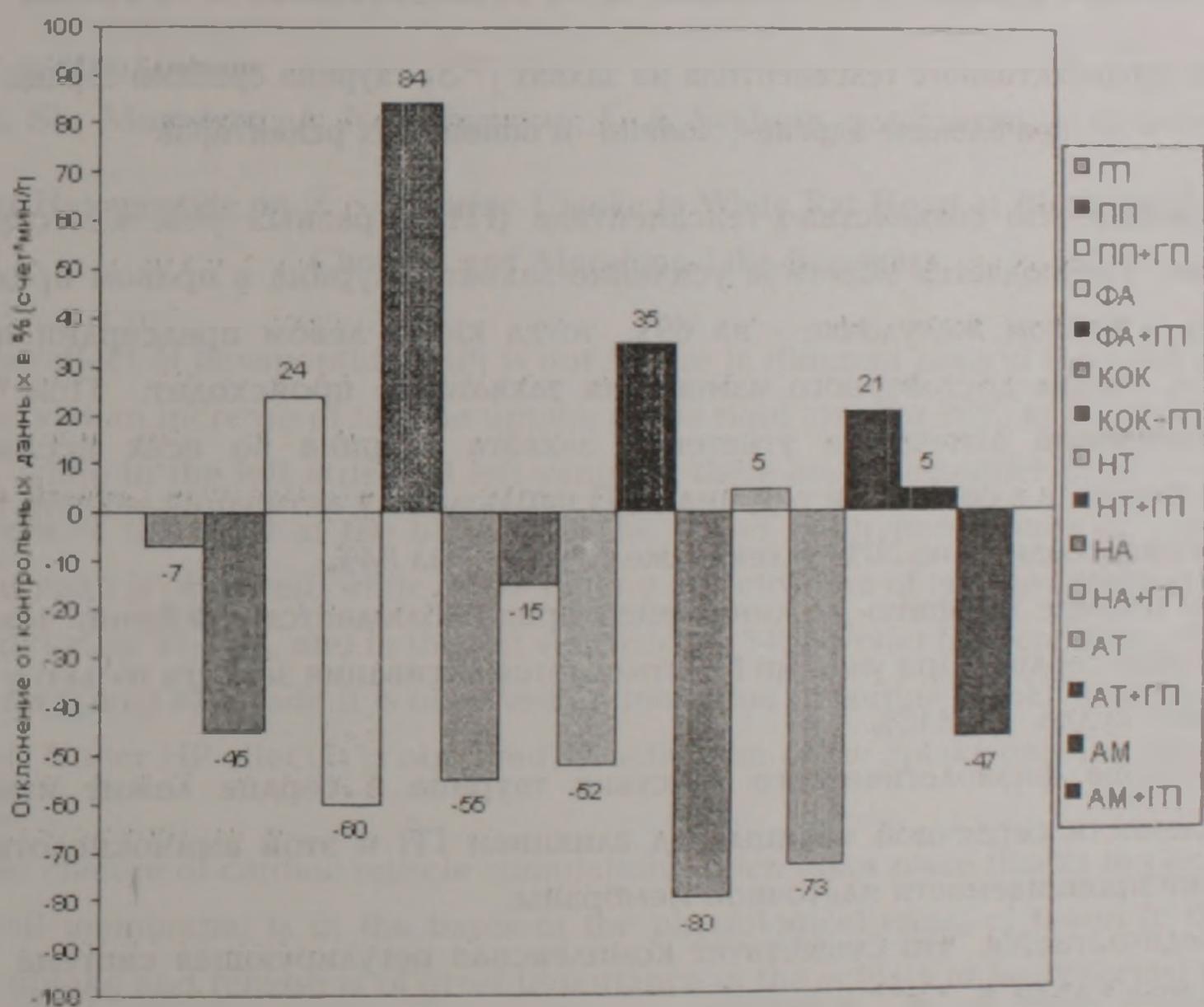


Рис.4. Захват таурина [ $^{35}S$ ] срезами левого желудочка сердца под влиянием ГП и его сочетаний с ингибиторами рецепторов. Обозначения те же, что на рис. 1.

Особый интерес представляют данные, полученные в экспериментах с литиками холинорецепторов, амизилом ( $0.29 \times 10^{-8}M$ ) и атропином ( $0.15 \times 10^{-8}M$ ). Оба блокатора снижают захват таурина во всех исследуемых участках сердца. Под влиянием атропина наступает глубокое угнетение захвата: в правом предсердии оно составляет 92, левом - 21%, правом желудочке - 53, левом - 73%. При сочетании атропина с гексапептидом наблюдается тенденция

усиления захвата таурина, особенно в правом желудочке сердца - на 113%, в левом желудочке оно составляет 21% (рис.1-4).

Полученные результаты позволяют считать, что накопление таурина в сердце при введении ГП, вероятно, обусловлено их влиянием на клеточную мембрану, с активацией транспортной системой клеточной мембраны.

Влияние ГП на накопление таурина в сердце можно рассматривать и на уровне рецепторов таурина.

Институт молекулярной биологии НАН РА

М. Ш. Мурадян, А. Н. Едигарян, Л. А. Сехян, академик А. А. Галоян

### Влияние кардиоактивного гексапептида на захват [<sup>35</sup>S] таурина срезами сердца крысы при блокаде адрено-, холино- и опиоидных рецепторов

Показано, что воздействие гексапептида (ГП) в разных участках сердца не одинаково. Наблюдается заметное усиление захвата таурина в правом предсердии - на 33%, в правом желудочке - на 69%, тогда как в левом предсердии и левом желудочке сердца достоверного изменения захвата не происходит. При блокаде адренорецепторов отмечается угнетение захвата таурина во всех исследуемых участках сердца, а в сочетании таурина с ГП наблюдается активация захвата таурина в правом предсердии - на 30%, в левом желудочке - на 84%.

При блокаде морфино-, холино-рецепторов наблюдается снижение захвата во всех участках сердца. При участии ГП отмечается активация захвата только в правом желудочке сердца - на 113%.

В основе физиологического действия таурина в сердце лежит изменение возбудимости сердечной мышцы под влиянием ГП и этой аминокислоты через изменение проницаемости клеточной мембраны.

Предполагается, что существует комплексная регулирующая система сердца, включающая cAMP, K, Ca<sup>2+</sup> и таурин.

Մ. Շ. Մուրադյան, Ա. Ն. Եդիգարյան, Լ. Ա. Սեխյան, ակադեմիկոս Ա. Ա. Գալոյան

### Կարդիոակտիվ հեքսապեպտիդի ազդեցությունը [<sup>35</sup>S] փաուրինի կլանման վրա՝ առնեփնների սրտի կորվածքներում ադրենա-, խոլինա- և մորֆինանման ռեցեպտորների բլոկադայի դեպքում

Նեքսապեպտիդը (ՆՊ) սրտի փարբեր հարվածներում ազդում է ոչ միապեսակ: Նկարվում է փաուրինի կլանման ուժեղացում աջ նախասրտում 36%, աջ փորորում 69%, այն դեպքում.

երբ ձախ նախասրտում և ձախ փորոքում կլանման էական փեղաշարժեր չեն նկատվում:  $\alpha$  և  $\beta$  ադրենաոնցեպտորների բլոկադայի ժամանակ սրտի բոլոր հատվածներում նկատվում է փառիինի կլանման ճնշում, իսկ  $\alpha$ -ի համակցության դեպքում նկատվում է փառիինի կլանման ինքնեսիվացում, աջ նախասրտում՝ 30%, ձախ փորոքում՝ 84%: Մորֆինա-, խոլինա-ոնցեպտորների բլոկադայի պայմաններում նկատվում է փառիինի կլանման ճնշում սրտի բոլոր հատվածներում:  $\alpha$ -ի համակցության պայմաններում նկատվում է կլանման ինքնեսիվացում միայն սրտի աջ փորոքում՝ 113%:

Մտնում փառիինի ֆիզիոլոգիական ազդեցության հիմքում ընկած է սրտամկանի աշխատանքի փոփոխությունը  $\alpha$ -ի ազդեցության ներքո, որը կարարվում է բջջային մեմբրանի թափանցելիության փոփոխության շնորհիվ: Տաուրինի կլանումը և անջատումը ունի էական նշանակություն սրտի նորմալ գործունեության համար, քանզի ենթադրվում է, որ գոյություն ունի սրտի գործունեության կոնպլեքս կարգավորիչ մեխանիզմ, ներառյալ cAMP, K,  $Ca^{2+}$  և փառիին:

M. Sh. Muradyan, A. N. Yedigaryan, L. A. Sekhyan, academician A. A. Galoyan

### Effect of Hexapeptide on [ $^{35}S$ ] Taurine Uptake in White Rat Heart at Blockade of Adreno-, Choline- and Morphine-Like Receptors

The effect of hexapeptide (HP) is not similar in different parts of the heart of the rat. It is observed an increase of taurine uptake in the right atria for 36%, in the right ventricle for 69%, while in the left atria and left ventricle there are no essential changes observed. In all parts of the heart at the blockade of the  $\alpha$  and  $\beta$  adrenoreceptors an inhibition of taurine uptake is observed, while at HP joining an activation of taurine uptake is observed in the right atria for 30%, and in the left ventricle for 84%. Under the conditions of morphocholine receptors blockade it is observed an inhibition of taurine uptake in all the parts of the heart. Under HP effect it is observed an activation of the uptake only in right ventricle for 113%.

The change of cardiac muscle stimulation, which takes place thanks to permeability of the cell membrane, is in the bases of the physiological effect of taurine in the heart. Taurine uptake and release is of great importance in the activity of heart normal function, as it is supposed the existence of a regulatory mechanism complex including cAMP, K,  $Ca^{2+}$  and taurine.

### Литература

1. Галоян А.А. - ДАН АрмССР. 1962. Т. 34. N 3.
2. Галоян А.А., Хумарян Н.Г., Ханзадян А.Х. - ДАН АрмССР. 1977. Т. 65. N5.
3. Мурадян М.Ш., Едигарян А.Н., Галоян А.А. - Биол. ж. Армении. 1971. Т. 34. N9. С. 968-972.

4. Мальчикова Л.С., Сперанская Н.В., Елизарова Е.Р. - Биол. эксп. биологии. 1979. N12. С.135-138.
5. Мальчикова Л.С., Смирнов В.Н., Елизарова Е.А. В: Матер. 3-го сов.-амер. симп. Вильямсбург. 1979. 172. 80.
6. Yasuo N., Yokio N., Walter.L. - Biochem. Pharmacol. 1978. V. 27. N23. P. 2689.
7. Nara Y., Yemori Y., Lovenberg W. - Biochem. Pharmacol. 1978. V. 27. N23. P. 2689.
8. Matsuda T., Yamagani S., Mizui T., Iwata H. - Biochem. Pharmacol. 1978. V. 27. N24. P. 2973-2975.
9. Henn F.A. In: Metabolic Compartmentation and Neurotransmission (Berl S., Clarke D., Schneider D. eds.). 1975. P. 97-99.
10. Schriez B.K., Thompson F.J. - J. Biol. Chem. 1974. V. 249. P. 1769.
11. Durpe S., Mario C.D., Holl I. - Biol. Chem. 1964. V. 13. P. 386.
12. Fujiomoto S., Iwata H., Yonada Y. - J. Pharmacol. 1976. V. 26. P. 105.
13. Coule J., Axelrod J. - J. Neurochem. 1971. V. 18. P. 2061.
14. Мурадян М.Ш., Едигарян А.Н., Карапетян Р.О., Галоян А.А. - ДАН АрмССР. 1983. Т. 76. N5. С. 225-230.
15. Карапетян Р.О., Попова Т.В., Мурадян М.Ш., Галоян А.А. - Биол. ж. Армении. 1990. Т. 43. N 6. С. 43.

**ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ 107-րդ ՀԱՏՈՐԻ**

**ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

*Ա. Ս. Ջրբաշյան, Վ. Ա. Ջրբաշյան* – Պրոեկտման թեորեմ կիսահարթության  $A_{\infty}^p$  տարածությունների համար..... 5

*Ռ. Հ. Բարխուդարյան, Ա. Վ. Պողոսյան* – Մի քվադրագմանդամային մոտարկման զուգամիտության մասին..... 13

*Ս. Ա. Նիզիյան, Լ. Օ. Խաչոյան, Ա. Վ. Նիզիյան* – Պրոցեդուրային ծրագրավորման տրամաբանական մեկնաբանության մասին..... 20

*Զ. Սստոլա, Է. Ա. Դանիելյան, Ա. Հ. Սոաքելյան* – Հաճախականային բաշխումները ածող կենսամուլտիկուլային համակարգերում հիմնված կայուն խտությունների վրա..... 26

*Լ. Զ. Գևորգյան* – Վատ պայմանավորված օպերատորային հավասարումների մասին..... 111

*Ա. Ս. Հովհաննիսյան* – Լագրանժի անվերջ հորիզոններով խնդրի համար առաջին կարգի անհրաժեշտ պայմանները..... 118

*Ա. Բ. Ներսեսյան* – Սեփական ֆունկցիաներով վերլուծությունների արագացում..... 124

*Է. Ա. Միրզախանյան, Ն. Է. Միրզախանյան* – Հիլբերտյան տարածության ենթաբազմությունների անվերջ չափականության հոմոտոպիական խմբերի ալտերնատիվ սահմանումներ..... 309

*Ա. Հ. Բամալյան* – Տյուպլիցյան օպերատորների կորիզների որոշ հատկություններ..... 316

*Հ. Ա. Բաբայան* – Թռչող սարքի հետագծերի պարամետրական ներկայացման մասին..... 323

*Ա. Յա. Սահակյան* – Միավոր շրջանից դուրս բարձր կարգի ճշգրիտ էլիպսական հավասարման ընդհանուր լուծումը..... 331

*Պ. Ա. Մաթևոսյան* – Ներդրման թեորեմներ  $A_{\infty}^p$  տարածությունում..... 337

**ԿԻՐԱՌԱԿԱՆ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ**

*Ա. Ս. Վարդանյան* – Երկելեմենտ ենթաբազմությունների դասում փակուղային ճանաչող համակարգերի երկարության մասին..... 37

**ԻՆՖՈՐՄԱՏԻԿԱ**

*Գ. Հ. Գեռլեցյան* – Երկկողմանի գրաֆում սահմանափակումներով գազաթային ծածկույթ գտնելու էվրիստիկ ալգորիթմ..... 44

*Լ. Հ. Մարգարյան, Վ. Ս. Հարությունյան, Ա. Լ. Բեսոյան, Զ. Լոպեզ* – Իրական ժամանակի ռեժիմում ինտերնետ ցանցի միջոցով հեռակառավարվող գիտական փորձ իրականացնելու հնարավորության վերաբերյալ..... 132

*Գ. Ա. Բաբայան* – Չայնային ազդանշանի համեմատվող կտորների նմանության գնահատման աստիճանի համալիր մեթոդ..... 140

*Վ. Ս. Աղաբաբով* – Քաղցկեղի *in vitro* մոդելավորման ժամանակ ուռուցքի ներկայացման համար օպտիմալ տվյալների կառուցվածքի ընտրության մասին..... 152

**ՍԵՆԱՆԻԿԱ**

*Ա. Ն. Մարտիրոսյան, Հ. Ա. Մարտիրոսյան, Զ. Ս. Կոստանդյան, Ա. Ս. Դինունց* – Առաձգականության տեսության ոչ ստացիոնար խառը եզրային խնդրի էֆեկտիվ լուծումը..... 49

*Ա. Գ. Բազդոն, Լ. Ա. Մովսիսյան* – Երկայնական մագնիսական դաշտում ոչ գծային ալիքների տարածման մոդուլյացիայի պրոբլեմի մասին..... 161

<i>Ռ. Ա. Գևորգյան, Ե. Գ. Վիրաբյան, Ս. Լ. Բազիկյան</i> – Սեղմելի միջին և անսեղմելի եզրային շերտերով եռաշերտ շրջանային օղակաձև սալի հարկադրական տատանումները.....	213
<i>Լ. Ա. Մովսիսյան</i> – Դարձյալ կառուցվածքների սեյսմիկ պաշտպանության մասին .....	223
<i>Ս. Ա. Համբարձումյան Ս. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան</i> – Տիեզերական վերելակի ճոպանի երկարության և լարումների նվազեցման հարցեր .....	345
<b>ԱՌԱՉԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ</b>	
<i>Ս. Վ. Բելուբեկյան, Կ. Բ. Ղազարյան, Ս. Ռ. Մարտիրոսյան</i> – Հետևող բեռով բարձած հեծանի մոդելային խնդիրները շփման հաշվառման դեպքում .....	167
<i>Լ. Ա. Աղալովյան, Տ. Վ. Չաքարյան</i> – Օրթոտրոպ շերտի ստիպողական տատանումների ասիմպտոտիկայի մասին.....	173
<i>Գ. Լ. Ազատյան</i> – Երկշերտ օրթոտրոպ սալի հարկադրական տատանումների ասիմպտոտիկական առածգականության տեսության երկրորդ եզրային խնդրում մաթուցիկ դիմադրության առկայության դեպքում .....	179
<b>ՖԻԶԻԿԱ</b>	
<i>Ռ. Ա. Ալանակյան</i> – Կրկնակի լիցքավորված Հիգսի բոզոնների ծնումը $W_2^\pm$ -բոզոնների տրոհումներում.....	56
<i>Ռ. Ս. Մովսիսյան, Ա. Ս. Սահակյան</i> – Էլեկտրոնի ցրումը մագնիսական պատճենների արգելքների վրա.....	66
<i>Ալ. Գ. Ալեքսանյան</i> – Զվանտային կետերի անսամբլում օպտիկական անցումների էներգիայի շեղման նախն.....	188
<i>Հ. Ս. Սոաքեյան</i> – Օպտիկական անշրջելիության էֆեկտները դիէլեկտրական թենզորի բացասական կոմպոնենտով միջավայրերում.....	353
<i>Լ. Ա. Վարդանյան</i> – Գրգռված խառնուկային վիճակների կապի էներգիայի պոլարոնային շեղումը թվանտային կետում էլեկտրական դաշտի առկայության դեպքում .....	360
<b>ԱՍՏՂԱՖԻԶԻԿԱ</b>	
<i>Պ. Ս. Հերունի</i> – ՈՕԴ-54/2 6 Մեծ Անտենայի չափված բնութագրերը որպես Մեծ Պայթյունի գոյության ժխտման վկայություն .....	73
<b>ՕՐԳԱՆԱԿԱՆ ԶԻՄԻԱ</b>	
<i>Զ. Թ. Կարապետյան, Հ. Հ. Մակարյան, Ա. Ա. Ավետիսյան</i> – Նոր լակտոն-անիգիդինների սինթեզ.....	368
<b>ԶԻՄԻԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ</b>	
<i>Լ. Ա. Մանուչարովա, Ս. Վ. Ծառուկյան, Ի. Ա. Վարդանյան</i> – Տարբեր մակերևույթների վրա մեթանի և ազոտի երկօքսիդի հետ $CH_3O_2$ ռադիկալների հետերոգեն փոխազդեցության առանձնահատկությունները.....	239
<b>ԿԵՆՍԱՖԻԶԻԿԱ</b>	
<i>Պ. Հ. Վարդևանյան, Ռ. Ա. Կարապետյան, Ս. Ա. Շահինյան, Ա. Պ. Անտոնյան</i> – Էթիդիում բրոմիդի և Hoechst 33258-ի ՂՆԹ-ի հետ կապման մրցակցությունը.....	192
<i>Ս. Հ. Մալաքյան</i> – Էրիթրոցիտների թաղանթների ֆունկցիոնալ հատկությունները որպես բուժական միջամտությունների արդյունավետության գնահատական չափանիշ համակված ճառագայթային և ջերմային վնասվածքների ժամանակ .....	247
<b>ԿԵՆՍԱԶԻՄԻԱ</b>	
<i>Ժ. Ա. Պարոնյան, Գ. Ս. Միսակյան, Գ. Հ. Թուրչյան, Գ. Վ. Ապրիկյան</i> – Ազոտի օքսիդի դերը լյարդի հյուսվածքում ամոնիակի առաջացման և չեզոքացման գործում .....	79
<i>Գ. Ս. Սիմոնյան, Գ. Ռ. Աղամյան, Ս. Ա. Սիմոնյան, Ա. Ա. Գալոյան</i> – Պրոլիճով հարուստ պոլիպեպտիդի ամիդացված անալոգի ազդեցությունը առնետների հյուսվածքների մետաղապրոտեինների մակարդակի և ակտիվության վրա <i>in vitro</i> և <i>in vivo</i> .....	199

*Ա. Ս. Ալեքսանյան, Մ. Ա. Բաբայան, Ա. Ա. Գալոյան, Մ. Ա. Սիմոնյան* – Գենտամիցինի տոքսիկ ազդեցության մեխանիզմները և պրոլինոլ հարուստ պոլիպեպտիդի դրական դերը առնետների գենտամիցինոլ հարուցված նեֆրոտոքսիկոզի ժամանակ..... 254

*Պ. Ա. Ղազարյան, Լ. Ս. Սահակյան, Ա. Ս. Ղարազույան, Ա. Ա. Ավետիսյան* – Ցիան պարունակող լակտոնների ածանցյալի հակաուռուցքային հատկությունները ..... 263

*Ս. Շ. Սուրադյան, Ա. Ն. Եղիզարյան, Լ. Ա. Սեխյան, Ա. Ա. Գալոյան* – Կարդիոակտիվ հեքսապեպտիդի ազդեցությունը [<sup>35</sup>S] տաուրինի կլանման վրա առնետների սրտի կտրվածքներում ադրենա-, խոլինա- և մորֆինանման ռեցեպտորների բլոկադայի դեպքում ..... 372

**ՍՈԼԵԿՈՒԼԱՅԻՆ ԿԵՆՍԱՔԻՄԻԱ**

*Ա. Մ. Սեդրակյան, Ա. Ա. Մնացականյան, Ջ. Դ. Գևորգյան, Կ. Ա. Սոաքելովա* – Հայաստանում շրջանառվող *Salmonella* շտամերի հակաբիոտիկակայունության մոնիտորինգ..... 87

*Դ. Կ. Բղոյան* – Ֆոսֆոլիպիդների մետաբոլիզմի խանգարումների առանձնահատկությունները հիպոգլիկեմիկ ախտանիշի ժամանակ և նատրիումի թիոսուլֆատի կանոնավորիչ ազդեցությունը այս պարագայում ..... 272

*Ա. Վ. Սելքումյան* – Գերօքսիդանտային հեմոլիզի նկատմամբ էրիթրոցիտների դիմադրողականության խանգարումների առանձնահատկությունները և նատրիումի թիոսուլֆատի կանոնավորիչ ազդեցությունը նորածինների հիպոքսիայի բարդությունների պայմաններում..... 279

**ԵՐԿՐԱԷԿՈԼՈԳԻԱ**

*Ռ. Դ. Ունազյան, Ն. Ա. Աջաբյան* – Տեխնատկոհամակարգերի մոդելի կառուցման մեթոդը ..... 285

**ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ**

*Ք. Վ. Ղազարյան, Վ. Յ. Վանցյան, Ա. Մ. Տիրայան, Ռ. Ռ. Հակոբյան* – Առնետի միզատորանի հարերիկամային շրջանի էլեկտրական ակտիվությունը նորմայում և նրա կտրվածքից հետո..... 94

*Ի. Է. Սեկոյան* – Սիջկիսագնդային ասիմետրիայի մոտոր նշաններ և հոգեֆիզիոլոգիական պատտերն. ալեքսիթիմիա, տազնապ, դեպրեսիա ..... 294

**ԲՈՒՅՍԵՐԻ ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ**

*Վ. Վ. Ղազարյան, Վ. Ա. Ղալթյան, Վ. Ս. Մարտիրոսյան* – Գյունեյի լծափնյա մնացորդային անտառների ծառատեսակների ջրային ռեժիմի մասին..... 98

## СОДЕРЖАНИЕ 107-го ТОМА

### МАТЕМАТИКА

<i>А. М. Джрбабян, В. А. Джрбабян</i> – Проекционная теорема для пространств $A_\omega^p$ в полуплоскости .....	5
<i>Р. Г. Бархударян, А. В. Погосян</i> – О сходимости одного квазиполиномиального приближения .....	13
<i>С. А. Нигиян, Л. О. Хачоян, А. В. Нигиян</i> – К логической трактовке процедурного программирования .....	20
<i>Дж. Астола, Э. А. Даниелян, А. Г. Аракелян</i> – Частотные распределения в растущих биомолекулярных системах, основанные на устойчивых плотностях .....	26
<i>Л. З. Геворгян</i> – О плохо обусловленных операторных уравнениях .....	111
<i>А. М. Оганнисян</i> – Необходимые условия первого порядка для задачи Лагранжа с бесконечными горизонтами .....	118
<i>А. Б. Нерсисян</i> – Ускорение сходимости разложений по собственным функциям .....	124
<i>Э. А. Мирзаханян, Н. Э. Мирзаханян</i> – Альтернативные определения бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства .....	309
<i>А. Г. Камалян</i> – Некоторые свойства ядер теплицевых операторов .....	316
<i>О. А. Бабаян</i> – О параметрическом представлении траекторий полета летательного аппарата .....	323
<i>А. Я. Саакян</i> – Общее решение правильно эллиптического уравнения высокого порядка вне круга .....	331
<i>П. А. Матевосян</i> – Теоремы вложения в пространстве $A_\omega^*$ .....	337

### ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

<i>С. М. Варданян</i> – О длинах тупиковых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств .....	37
--	----

### ИНФОРМАТИКА

<i>Г. Г. Геолецин</i> – Эвристический алгоритм решения задачи ограниченного вершинного покрытия двудольного графа .....	44
<i>А. Л. Маргарян, В. М. Арутюнян, А. Л. Кесоян, Дж. Лопез</i> – О возможности проведения дистанционного научного эксперимента в режиме реального времени с использованием сети Интернет .....	132
<i>Г. А. Бабаян</i> – Комплексный метод оценки степени схожести сравниваемых сегментов речевого сигнала .....	140
<i>В. С. Агабабов</i> – О выборе оптимальной структуры данных для представления опухоли при моделировании <i>in vitro</i> раковых заболеваний .....	152

## МЕХАНИКА

- А. Н. Мартиросян, Г. А. Мартиросян, К. С. Костандян, А. С. Динуц* – Эффективное решение нестационарной смешанной граничной задачи для упругой полуплоскости ..... 49
- А. Г. Багдоев, Л. А. Мовсисян* – О проблеме распространения нелинейных волн модуляции в пластине в продольном магнитном поле ..... 161
- Р. С. Геворкян, Е. Г. Вирабян, С. Н. Базикян* – Вынужденные колебания трехслойной круговой кольцевой пластины со сжимаемым средним и несжимаемыми крайними слоями..... 213
- Л. А. Мовсисян* – Еще раз о сейсмической защите сооружений ..... 223
- С. А. Амбарцумян, М. В. Белубекян, К. Б. Казарян* – Вопросы уменьшения напряжений и длины троса космического лифта ..... 345

## ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

- М. В. Белубекян, К. Б. Казарян, С. Р. Мартиросян* – Модельные задачи учета трения для консольной балки со следящей нагрузкой ..... 167
- Л. А. Агаловян, Т. В. Закарян* – Об асимптотике вынужденных колебаний ортотропной полосы ..... 171
- Г. Л. Азатян* – Асимптотика вынужденных колебаний двухслойной ортотропной пластинки во второй краевой задаче теории упругости при наличии вязкого сопротивления..... 179

## ФИЗИКА

- Р. А. Аланакян* – Рождение дважды заряженных хиггсовских бозонов в распадах  $W_2^{\pm}$ -бозонов ..... 56
- Р. М. Мовсисян, А. С. Саакян* – О рассеянии электрона на магнитных барьерах..... 66
- Ал. Г. Алексиян* – О сдвиге энергии оптического перехода в ансамбле квантовых точек .... 188
- О. М. Аракелян* – Эффекты оптической необратимости в средах с отрицательной компонентой диэлектрического тензора ..... 353
- Л. А. Варданян* – Поляронный сдвиг энергии связи возбужденных примесных состояний в квантовой точке при наличии электрического поля..... 360

## АСТРОФИЗИКА

- Парис М. Геруни* – Измеренные параметры Большой Антенны ROT-54/2.6 – свидетельство отсутствия Большого Взрыва ..... 73

## ХИМИЯ

- А. О. Закарян, А. О. Тоноян, С. П. Давтян* – Особенности формирования стационарных фронтальных режимов при радикальной полимеризации виниловых мономеров ..... 230

## ОРГАНИЧЕСКАЯ ХИМИЯ

- З. Т. Карапетян, Р. А. Макарян, А. А. Аветисян* – Синтез новых лактон-анизидиноз ..... 368

## ХИМИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

- Л. А. Манучарова, С. В. Царукян, И. А. Варданян* – Особенности гетерогенного взаимодействия радикалов  $CH_3O_2$  с метаном и диоксидом азота на разных поверхностях..... 239

## БИОФИЗИКА

- П. О. Вардеванян, Р. А. Карапетян, М. А. Шагинян, А. П. Антоян* – Конкурентность связывания бромистого этидия и Hoechst 33258 с ДНК ..... 192

М. Г. Малакян – Функциональные свойства мембран эритроцитов как критерий оценки эффективности терапевтического вмешательства при комбинированных радиационно-термических травмах..... 247

## БИОХИМИЯ

Ж. А. Паронян, Г. С. Мисакян, Г. А. Туриян, Г. В. Априкян – Роль окиси азота в образовании и устранении аммиака в печеночной ткани..... 79

Г. М. Симомян, Г. Р. Агамян, М. А. Симомян, А. А. Галоян – Влияние амидированного аналога богатого пролином полипептида на уровень и активность металлопротеинов тканей крыс *in vitro* и *ex vivo*..... 199

А. С. Алексанян, М. А. Бабалян, А. А. Галоян, М. А. Симомян – Механизмы токсического воздействия гентамицина и положительный эффект богатого пролином полипептида при гентамицин-индуцированном нефротоксикозе крыс..... 254

П. А. Казарян, Л. С. Саакян, А. С. Карагулян, А. А. Аветисян – Противоопухолевые свойства производного цианосодержащих лактонов..... 263

М. Ш. Мурадян, А. К. Едигарян, Л. А. Сехян, А. А. Галоян – Влияние кардиоактивного гексапептида на захват [<sup>35</sup>S] таурина срезами сердца крысы при блокаде адрено-, холино- и опиоидных рецепторов..... 372

## МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОЛОГИЯ

А. М. Седракян, А. А. Мнацаканян, З. У. Геворкян, К. А. Аракелова – Мониторинг антибиотикорезистентности штаммов *Salmonella*, циркулирующих в Армении..... 67

О. К. Бдоян – Особенности метаболических расстройств фосфолипидов при гипогликемическом синдроме у малолетних детей и коррегирующее действие сверхнизких доз тиосульфата натрия при этом..... 272

А. В. Мелкумян – Особенности нарушений резистентности эритроцитов к перекисному гемолизу как тяжелейшее осложнение гипоксий новорожденных и коррегирующее действие тиосульфата натрия на этом фоне..... 279

## ГЕОЭКОЛОГИЯ

Р. Г. Ревазян, Н. А. Аджабян – Метод построения модели техноэкосистем..... 285

## ФИЗИОЛОГИЯ

К. В. Казарян, В. Ц. Ванцян, А. С. Тираян, Р. Р. Акопян – Электрическая активность околопузырной зоны мочеточника крысы в норме и при его перерезке..... 94

И. Э. Секоян – Моторные признаки межполушарной асимметрии и психофизиологический паттерн: алекситимия, тревога, депрессия..... 294

## ФИЗИОЛОГИЯ РАСТЕНИЙ

В. В. Казарян, В. А. Давтян, В. С. Мартиросян – О водном режиме древесных пород остаточных лесов Гюнейского побережья..... 98

## CONTENTS of 107<sup>th</sup> VOLUME

### MATHEMATICS

A. M. Jerbashian, V. A. Jerbashian – Projection Theorem for Spaces $A_{\omega}^p$ in a Half-plane .....	5
R. G. Barkhudaryan, A. V. Poghosyan – On Convergence of a Quasipolynomial Approximation .....	13
S. A. Niginyan, L. O. Khachoyan, A. V. Niginyan – On Logical Interpretation of Procedural Programming .....	20
J. Astola, E. A. Danielyan, A. H. Arakelyan – Frequency Distributions in Growing Biomolecular Networks Based on Stable Densities .....	26
L. Z. Gevorgyan – On Some Ill Conditioned Operator Equations .....	111
A. M. Hovhannisyan – First-Order Necessary Conditions for the Lagrange Problem with Infinite-Horizon .....	118
A. B. Nersessian – Acceleration of Convergence of Eigenfunction Expansions.....	124
E. A. Mirzakhanian, N. E. Mirzakhanian – Alternative Definitions of Infinite-Dimensional Homotopic Groups of Subsets of Hilbert Space .....	309
A. H. Kamalyan – Some Properties of Kernels of Toeplitz Operators.....	316
H. A. Babayan – On Parametrical Representation of the Aircraft Flight Trajectories .....	323
A. Y. Sahakyan – General Solution of the Higher Order Properly Elliptic Equation in Exterior of the Unit Disk .....	331
P. A. Matevosyan – Theorems of Inclusion in the Space $A_{\omega}^*$ .....	337

### APPLIED MATHEMATICS

S. M. Vardanyan – On Lengths of Deadlock Recognizing Systems in the Class of Subsets, Consisting of Two Elements.....	37
---	----

### INFORMATICS

G. H. Geoletsyan – Heuristic Algorithm for Constraint Bipartite Vertex Cover Problem.....	44
H. L. Margaryan, V. M. Aroutiounian, A. L. Kesoyan, G. Lopez – On Possibility of Carrying out a Remote Scientific Experiment in Real Time Mode with the Use of Internet .....	132
G. A. Babayan – Multimeter Method of Estimating the Similarity of the Compared Frames of Speech Signal .....	140
V. S. Agababov – On Optimal Data Structure Selection for Tumor Representation for <i>in vitro</i> Cancer Simulation .....	152

### MECHANICS

A. N. Martirosyan, G. A. Martirosyan, K. S. Kostandyan, A. S. Dynunts – Effective Solution of Nonstationary Mixed Boundary Value Problem for Elastic Halfplane.....	49
A. G. Bagdov, L. A. Movsisyan – On Problem of Propagation of Nonlinear Modulation Waves in Plate in Longitudinal Magnetic Field .....	161
R. S. Gevorgyan, Ye. G. Virabyan, S. N. Bazikyan – Forced Vibrations of a Circular Ring Three-Layered Plate with Compressible Middle and Incompressible Boundari Layers.....	213

<i>L. A. Movsisyan</i> – Again about Seismic Protection of Structures .....	223
<i>S. A. Ambartsumian, M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan</i> – Some Aspects of Space Elevator Ribbon Stress and Length Reduction .....	345
<b>THEORY OF ELASTICITY</b>	
<i>M. V. Belubekyan, K. B. Ghazaryan, S. R. Martirosyan</i> – Damping Effects in Model Problems for Cantilevered Beam with Follower Type Load.....	167
<i>L. A. Aghalovyan, T. V. Zakaryan</i> – On Asimptotic of Forced Vibrations of Orthotropic Strip.....	173
<i>G. L. Azatyan</i> – Asimptotic Form of Forced Vibrations of Double-Layer Orthotropic Plate in Case of the Second Boundary Problem of the Theory of Elasticity at Presence of Viscous Resistance .....	179
<b>PHYSICS</b>	
<i>R. A. Alanakyan</i> – Doubly Charged Higgs Bosons Production in Decays of $W_2^{\pm}$ -bosons .....	56
<i>R. M. Movsessyan, A. S. Sahakyan</i> – Electron Scattering on Magnetic Barriers .....	66
<i>Al. G. Alexanian</i> – On Shift of Energy of Optical Transitions in the Ansamble of Quantum Dots .....	188
<i>H. M. Arakelyan</i> – Effects Optical Irreversibility in Media with the Negative Component of the Dielectric Tensor .....	353
<i>L. A. Vardanyan</i> – Polaronic Shift of Binding Energy of Excited Impurity States in the Electric Field in a Quantum Dot .....	360
<b>ASTROPHYSICS</b>	
<i>Paris M. Herouni</i> – Measured Parameters of Large Antenna of ROT-54/2.6 Tell about Absence of Big Bang.....	73
<b>CHEMISTRY</b>	
<i>H. H. Zakaryan, A. O. Tonoyan, S. P. Davtyan</i> – Peculiarities of Forming Steady-State Frontal Regimes during Radical Polymerization of Vinil Monomers .....	230
<b>ORGANIC CHEMISTRY</b>	
<i>Z. T. Karapetyan, H. H. Makaryan, A. A. Avetissyan</i> – New Lakton-Anisidines Synthesis .....	368
<b>CHEMICAL PHYSICS</b>	
<i>L. A. Manucharova, S. V. Tsarukyan, I. A. Vardanyan</i> – Peculiarities of Heterogeneous Interaction of $CH_3O_2$ Radicals with Methane and Nitrogen Dioxide on Different Surfaces .....	239
<b>BIOPHYSICS</b>	
<i>P. O. Vardevanyan, R. A. Karapetyan, M. A. Shahinyan, A. P. Antonyan</i> – Competition of ErBr and Hoechst 33258 Binding with DNA.....	192
<i>M. H. Malakyan</i> – Erythrocytes Membrane Functional Properties as Valuable Critrion for Evaluation of Therapeutic Interventions Efficacy in Case of Combined Radiation and Thermal Injury .....	247
<b>BIOCHEMISTRY</b>	
<i>Zh. A. Paronyan, G. S. Misakyan, G. H. Thurshyan, G. V. Aprikyan</i> – Role of Nitric Oxide in Ammonia Formation and Neutralization in Liver Tissue .....	79
<i>G. M. Simonyan, G. R. Aghamyan, M. A. Simonyan, A. A. Galoyan</i> – Effect of Amidated Analogue of Proline-Rich Polypeptide on Rat Tissues Metalloproteins Level and Activity <i>in vitro</i> and <i>ex vivo</i> .....	199
<i>A. S. Alexanyan, M. A. Babayan, A. A. Galoyan, M. A. Simonyan</i> – Mechanisms of Toxic Effect of Gentamicin and Positive Role of Proline-Rich Polipeptide at Gentamicin Induced Nephrotoxicosis of Rats ..	254

<i>P. A. Ghazaryan, L. S. Sahakyan, A. S. Garagulian, A. A. Avetissyan</i> – Antitumoral Properties of Cyan Containing Lactones Derivative .....	263
<i>M. Sh. Muradyan, A. N. Yedigaryan, L. A. Sekhyan, A. A. Galoyan</i> – Effect of Hexapeptide on [ <sup>35</sup> S] Taurine Uptake in White Rat Heart at Blockade of Adreno-, Choline- and Morfine-Like Receptors .....	372
<b>MOLECULAR BIOLOGY</b>	
<i>A. M. Sedrakyán, A. A. Mnatsakanyan, Z. U. Gevorgyan, K. A. Arakelova</i> – Monitoring of Antibiotic Resistance of <i>Salmonella</i> Strains Circulating in Armenia .....	67
<i>H. K. Bdoyan</i> – Peculiarities of Phospholipids Metabolism Disorders at Hypoglycemic Syndrome of Young One and Normalizing Action of Super Low Doses of Sodium Thiosulfate on This Background .....	272
<i>H. V. Melkumyan</i> – Specificities of Erythrocytes Resistance to Peroxides-Caused Hemolysis as a Severe Complication of New-Borns Hypoxia and Normalizing Effect of Sodium Thiosulfate on this Background.....	279
<b>GEOECOLOGY</b>	
<i>R. H. Revazyan, N. A. Ajabyan</i> – Man-Made Ecosystem Modeling Method .....	285
<b>PHYSIOLOGY</b>	
<i>K. V. Kazarian, V. Ts. Vantsian, A. S. Tirayan, R. R. Hakobian</i> – Electrical Activity of Rat Ureter Peribladder Zone in Norme and in Presence of Ureter's Cut .....	94
<i>I. E. Secoyan</i> – Motor Sings of Interhemispheric Asymmetry and Psychophysiologic Pattern: Alexithymia, Anxiety and Depression.....	294
<b>PLANTS PHYSIOLOGY</b>	
<i>V. V. Kazaryan, V. A. Davtyan, V. S. Martirosyan</i> – About the Water Regime of Tree Species of Gyuney Seaside's Residual Woods .....	98