ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1969

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Н. Х. АРУТЮНЯН, Б. Л. АБРАМЯН

НЕКОТОРЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И УПРУГОГО СЛОЯ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе исследуется осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием, когда на верхней части поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение, а на нижней части отсутствуют как касательное, так и нормальное напряжения. На плоской поверхности полупространства действует осесимметричная нагрузка*.

Решение этой задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

В частном случае, когда на всей поверхности отверстия отсутствуют нормальное и касательное напряжения (§ 2), полученное интегральное уравнение Фредгольма упрощается. Для этого случая, как и в работе [1], исследован вопрос о разрешимости интегрального уравнения и показано, что его решение может быть построено методом последовательных приближений. В другом частном случае, когда на всей поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение (§ 3), решение задачи получается в замкнутом виде. В § 4 приводится решение для соответствующей задачи в случае упругого слоя, также в замкнутом виде.

Отметим, что задаче определения поля напряжений вблизи вертикальной цилиндрической выработки в однородном упругом пространстве, находящемся под действием собственного веса или осесимметричной нагрузки, посвящены работы С. Г. Лехницкого [2], Г. С. Шапиро [3], М. Матчинского [4].

Вопрос о концентрации напряжений около цилиндрического отверстия в полубесконечном теле, вызванной плоским полем напряжений, параллельным граничной плоскости, рассматривался в работе Юнгдала и Стернберга [5].

Взаимодействие жесткой втулки с поверхностью бесконечной цилиндрической шахты в упругом пространстве при отсутствии силы трения исследовалось в работе В. М. Александрова и А. В. Белоконя [6].

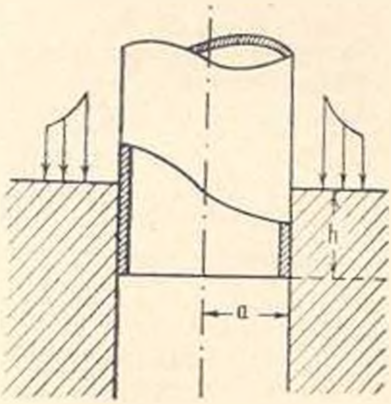
Несколько задач для полупространства с круглым цилиндрическим отверстием при смешанных граничных условиях на плоской поверхности рассматривалось в работах [7—9]. Смешанная задача для

* Работа доложена на XII Международном конгрессе в Станфорде (США) в августе месяце 1968 г.

пространства с круглым цилиндрическим отверстием была решена в работе [10].

§ 1. Осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при смешанных граничных условиях на поверхности отверстия

Для решения задачи направляем ось z по оси цилиндрического отверстия (фиг. 1).



Фиг. 1.

Бигармоническую функцию А. Лява ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \lambda \left[A(\lambda) + \lambda z B(\lambda)\right] e^{-\lambda z} W_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty \left[C(\beta) K_0(\beta r) + \beta r D(\beta) K_1(\beta r)\right] \cos \beta z\, d\beta \qquad (a \leqslant r < \infty, \quad 0 < z < \infty) \tag{1.1}$$

где $W_n(\lambda r)$ определяется соотношением

$$W_n(\lambda r) = J_n(\lambda r)\, Y_1(\lambda a) - Y_n(\lambda r)\, J_1(\lambda a) \tag{1.2}$$

$J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода [11], $K_n(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода.

Заметим, что

$$W_1(\lambda a) = 0 \quad \text{и} \quad W_0(\lambda a) = -\frac{2}{\pi a \lambda} \tag{1.3}$$

Граничные условия для этой задачи имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_z(r, 0) = f_1(r) \\ \tau_{rz}(r, 0) = f_2(r) \end{array}\right\} \qquad (a < r < \infty) \tag{1.4}$$

$$\tau_{rz}(a,\ z) = 0 \qquad (0 < z < \infty)$$

$$u_r(a,\ z) = 0 \qquad (0 < z < h) \tag{1.4}$$

$$\sigma_r(a,\ z) = 0 \qquad (h < z < \infty)$$

Следовательно, полупространство деформируется под действием осесимметричной нагрузки, приложенной на плоской границе полупространства с отверстием, при отсутствии радиальных перемещений на верхней части поверхности отверстия, нормальных напряжений на нижней части поверхности отверстия и касательных напряжений на всей поверхности отверстия.

Вычисляя с помощью выражения (1.1) по обычным формулам перемещение u_r и напряжения, будем иметь

$$u_r(r,\ z) = -\frac{1}{2G}\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}[A(\lambda) - B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_1(\lambda r)\, d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2G}\int_0^\infty \beta^3 [C(\beta) K_1(\beta r) + \beta r D(\beta) K_0(\beta r)] \sin\beta z d\beta \tag{1.5}$$

$$\sigma_z(r,\ z) = \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda z}[A(\lambda) + (1-2\nu) B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \beta^3 \{[2(2-\nu) D(\beta) - C(\beta)]\, K_0(\beta r) - D(\beta)\beta r K_1(\beta r)\} \sin\beta z d\beta \tag{1.6}$$

$$\sigma_r(r,\ z) = \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda z}[(1+2\nu) B(\lambda) - A(\lambda) - \lambda z B(\lambda)]\, W_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\frac{1}{r}\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}[A(\lambda) - B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_1(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \beta^3 \Big\{[(2\nu-1) D(\beta) - C(\beta)]\, K_0(\beta r) + C(\beta)\frac{K_1(\beta r)}{\beta r} +$$

$$+ D(\beta)\beta r K_1(\beta r)\Big\} \sin\beta z d\beta \tag{1.7}$$

$$\tau_{rz}(r,\ z) = \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda z}[A(\lambda) - 2\nu B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_1(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \beta^3 \{[2(1-\nu) D(\beta) - C(\beta)] K_1(\beta r) - D(\beta)\, \beta r K_0(\beta r)\} \cos \beta z d\beta \qquad (1.8)$$

Пользуясь теперь преобразованиями Вебера-Орра [11, 15]

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \lambda \psi(\lambda)\, W_i(\lambda r)\, d\lambda$$

$$\psi(\lambda)\,[J_i^2(a\lambda) + Y_i^2(a\lambda)] = \int_a^\infty r \varphi(r)\, W_i(\lambda r)\, dr \qquad (i = 0, 1) \qquad (1.9)$$

где $W_i(\lambda r)$ определяется соотношением (1.2), и удовлетворив условиям (1.4), находим

$$C(\beta) K_1(\beta a) = D(\beta)\,[2(1-\nu) K_1(\beta a) - \beta a K_0(\beta a)] \qquad (1.10)$$

$$A(\lambda) = 2\nu \varphi_1(\lambda) + (1-2\nu)\, \varphi_2(\lambda) - (1-2\nu)\, \varphi(\lambda) \qquad (1.11)$$

$$B(\lambda) = \varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda) + \varphi(\lambda) \qquad (1.12)$$

где введены обозначения

$$\varphi_{i+1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^3 [J_i^2(a\lambda) + Y_i^2(a\lambda)]} \int_a^\infty r W_i(\lambda r) f_{i+1}(r)\, dr \qquad (i = 0, 1) \qquad (1.13)$$

а функция $\varphi(\lambda)$ зависит от неизвестного коэффициента $D(\beta)$ и определяется соотношением

$$\varphi(\lambda) = \frac{4}{\pi \lambda^3 [J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)]} \int_0^\infty \frac{\beta^3 D(\beta)\, K_1(\beta a)\, d\beta}{(\lambda^2 + \beta^2)^2} \qquad (1.14)$$

Для определения функции $D(\beta)$ получаем следующие парные интегральные уравнения с тригонометрическим ядром:

$$\int_0^\infty \frac{D^*(\beta)}{\beta} \sin \beta z d\beta = 0 \qquad (0 < z < h)$$

$$(1.15)$$

$$\int_0^\infty D^*(\beta) \sin \beta z d\beta = \varphi(z) + f(z) \qquad (h < z < \infty)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\beta^3 D(\beta)\, K_1(\beta a) = D^*(\beta) \qquad (1.16)$$

$$\psi(z) = \int_0^\infty D^*(\beta)\,\Omega(\beta a)\sin\beta z\,d\beta + \frac{2}{\pi a}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda z}(2 - \lambda z)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \qquad (1.17)$$

$$f(z) = \frac{2}{\pi a}\int_0^\infty \lambda^2 e^{-\lambda z}\left[(1 - \lambda z)\,\varphi_1(\lambda) - (2 - \lambda z)\,\varphi_2(\lambda)\right]d\lambda \qquad (1.18)$$

$$\Omega(t) = 1 - t\left[1 - \frac{K_0^2(t)}{K_1^2(t)}\right] - \frac{2(1-\nu)}{t} \qquad (1.19)$$

Решение парных уравнений (1.15) можно представить в виде [16]

$$D^*(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_k^\infty t J_0(t\alpha)\,dt\int_t^\infty \frac{\psi(z) + f(z)}{(z^2 - t^2)^{1/2}}\,dz \qquad (1.20)$$

Подставив в это соотношение значения (1.17) и (1.18), приведем уравнение (1.20) относительно $D^*(\alpha)$ к виду

$$D^*(\alpha) = \int_0^\infty D^*(\beta)\,K(\alpha, \beta)\,d\beta + F(\alpha) \qquad (1.21)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi}\int_k^\infty t J_0(t\alpha)\,dt\int_t^\infty \frac{f(z)\,dz}{(z^2 - t^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{4\alpha}{a\pi^2}\int_0^\infty \lambda^3 d\lambda\left\{\left[\varphi_1(\lambda) - 2\varphi_2(\lambda)\right]\int_k^\infty t J_0(t\alpha)\,K_0(t\lambda)\,dt -\right.$$

$$\left. - \lambda\left[\varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda)\right]\int_k^\infty t^2 J_0(t\alpha)\,K_1(t\lambda)\,dt\right\} \qquad (1.22)$$

$$K(\alpha, \beta) = \frac{2\alpha}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\,\Omega(\beta a)\int_k^\infty t J_0(t\alpha)\,J_0(t\beta)\,dt +\right.$$

$$\left. + \frac{8\beta^2}{a\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2 + \beta^2)^2\left[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)\right]}\int_k^\infty \left[2K_0(t\lambda) - \lambda t K_1(\lambda t)\right] t J_0(t\alpha)\,dt\right\} \qquad (1.23)$$

Здесь были использованы значения интегралов

$$\int_t^\infty \frac{\sin\beta z}{(z^2 - t^2)^{1/2}}\,dz = \frac{\pi}{2} J_0(\beta t) \qquad (1.24)$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda z}\,dz}{(z^2-t^2)^{1/2}} = K_0(\lambda t), \qquad \int_t^\infty \frac{z e^{-\lambda z}\,dz}{(z^2-t^2)^{1/2}} = t K_1(\lambda t) \tag{1.25}$$

Ниже будут рассмотрены два предельных случая для интегрального уравнения (1.21).

§ 2. Осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при отсутствии напряжений на поверхности отверстия

В частном случае предыдущей задачи, когда $h = 0$, то есть когда на поверхности отверстия отсутствуют нормальное и касательное напряжения, в интегральном уравнении (1.21) функция $F(\alpha)$ и ядро $K(\alpha, \beta)$ принимают вид

$$F(\alpha) = \frac{4\alpha}{a\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\left[(\alpha^2-\lambda^2)\varphi_1(\lambda) - 2\alpha^2\varphi_2(\lambda)\right] \tag{2.1}$$

$$K(\alpha, \beta) = \frac{32\alpha^2\beta^2}{a\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda\left[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)\right](\lambda^2+\beta^2)^2(\lambda^2+\alpha^2)^2} \tag{2.2}$$

Эти выражения получаются из (1.22) и (1.23) путем предельного перехода $h \to 0$ с использованием значений интегралов

$$\int_0^\infty t K_0(t\lambda)\, J_0(t\alpha)\, dt = \frac{1}{\lambda^2+\alpha^2}, \qquad \int_0^\infty t^2 K_1(t\lambda)\, J_0(t\alpha)\, dt = \frac{2\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2} \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty t\, J_0(t\alpha)\, J_0(t\beta)\, dt = 0 \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0) \tag{2.4}$$

Значение последнего интеграла легко можно получить из второго экспоненциального интеграла Вебера [12, 17], а именно

$$\int_0^\infty e^{-t^2x^2} x J_p(\alpha x)\, J_p(\beta x)\, dx = \frac{1}{2t^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4t^2}\right) I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2t^2}\right) \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}(p) > -1, \quad |\arg t| < \frac{\pi}{4}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

предельным переходом при $p = 0$ и $t \to 0$.

Докажем, что в рассматриваемом случае, т. е. когда $h = 0$, и, следовательно, в интегральном уравнении (1.21) функция $F(\alpha)$ определяется выражением (2.1), а ядро $K(\alpha, \beta)$ — выражением (2.2), решение интегрального уравнения (1.21) может быть построено методом последовательных приближений.

Пользуясь оценкой [12, 13] при $z > 0$

$$0 < \frac{1}{z[J_1^2(z) + Y_1^2(z)]} < \frac{\pi}{2} \tag{2.6}$$

из (2.2) получим

$$\int_0^\infty |K(\alpha, \beta)| d\beta = \frac{32\alpha^3}{a\pi^2}\int_0^\infty \beta^2 d\beta \int_0^\infty \frac{d\lambda}{[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)](\lambda^2+\beta^2)^2(\lambda^2+\alpha^2)^2} <$$

$$< \frac{16\alpha^3}{\pi^2}\int_0^\infty \beta^2 d\beta \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2+\beta^2)^2(\lambda^2+\alpha^2)^2} =$$

$$= \frac{16\alpha^3}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\int_0^\infty \frac{\beta^2 d\beta}{(\lambda^2+\beta^2)^2} =$$

$$= \frac{16\alpha^3}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2}\cdot\frac{\pi}{4\lambda} = \frac{4\alpha^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2} = 1$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |K(\alpha, \beta)| d\beta < 1 \tag{2.7}$$

Легко видеть, что при ограниченных и интегрируемых функциях $f_1(r)$ и $f_2(r)$ известная функция $F(\alpha)$ (2.1) также ограничена, и, следовательно, решение интегрального уравнения (1.21) может быть построено методом последовательных приближений [14].

§ 3. Осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при отсутствии на поверхности отверстия радиального перемещения и касательного напряжения

В другом частном случае, когда $h \to \infty$, то есть когда на поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение, интегральное уравнение (1.21) задачи отпадает, так как согласно формулам (1.22) и (1.23) $F(\alpha)$ и $K(\alpha, \beta)$ тождественно равны нулю. Таким образом, для этой частной задачи получаем замкнутое решение. В самом деле, на основании формул (1.21), (1.16) и (1.10) имеем

$$D^*(\beta) = D(\beta) = C(\beta) = 0 \tag{3.1}$$

и, следовательно, бигармоническая функция А. Лява согласно (1.1) примет вид

$$\Phi(r,\ z)=\int_0^\infty \lambda[A(\lambda)+B(\lambda)\lambda z]e^{-\lambda z}\,W_0(\lambda r)\,d\lambda \tag{3.2}$$

где неизвестные функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ определяются формулами

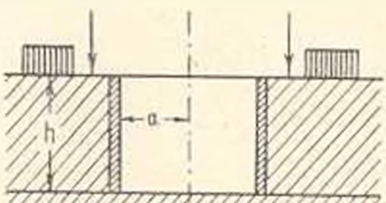
$$\begin{aligned} A(\lambda)&=2\nu\varphi_1(\lambda)+(1-2\nu)\varphi_2(\lambda)\\ B(\lambda)&=\varphi_1(\lambda)-\varphi_2(\lambda)\end{aligned} \tag{3.3}$$

причем $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ имеют значения (1.13).

Напряжения и перемещения для этой задачи при помощи функции (3.2) могут быть вычислены по обычным формулам.

§ 4. Осесимметричная деформация упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием

Пусть упругий слой конечной толщины с вертикальным цилиндрическим отверстием жестко сцеплен с жестким основанием (фиг. 2).



Фиг. 2.

Полагаем, что на поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение.

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\sigma_z(r,\ 0)&=f_1(r)\\ \tau_{rz}(r,\ 0)&=f_2(r)\end{aligned}\right\}\quad (a<r<\infty) \tag{4.1}$$

$$u_r(a,\ z)=\tau_{rz}(a,\ z)=0\quad (0<z<h) \tag{4.2}$$

$$u_r(r,\ h)=u_z(r,\ h)=0\quad (a\leqslant r<\infty) \tag{4.3}$$

Эта задача решается аналогичным образом, и для нее получается замкнутое решение.

Бигармоническую функцию А. Лява берем здесь в виде

$$\begin{aligned}\Phi(r,\ z)=\int_0^\infty \lambda[A(\lambda)\,\mathrm{sh}\,\lambda z+B(\lambda)\,\mathrm{ch}\,\lambda z+{}\\ +C(\lambda)\,\lambda z\,\mathrm{sh}\,\lambda z+D(\lambda)\,\lambda z\,\mathrm{ch}\,\lambda z]\,W_0(\lambda r)\,d\lambda\end{aligned} \tag{4.4}$$

Удовлетворив граничным условиям (4.1)—(4.3), получим

$$A(\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_1(\lambda)[2\nu(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h + (\lambda h)^2 + 2(1-2\nu)^2] +$$

$$+ \varphi_2(\lambda)(1-2\nu)[(3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h + \lambda h]\} \tag{4.5}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_2(\lambda)[(1-2\nu) + (\lambda h)^2 + (1-2\nu)(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h] +$$

$$+ \varphi_1(\lambda)2\nu[(3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h - \lambda h]\} \tag{4.6}$$

$$C(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_1(\lambda)[\lambda h - (3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h] +$$

$$+ \varphi_2(\lambda)[(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h - (1-2\nu)]\} \tag{4.7}$$

$$D(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_1(\lambda)[(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h - (1-2\nu)] -$$

$$- \varphi_2(\lambda)[(3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h + \lambda h]\} \tag{4.8}$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta(\lambda) = (1-2\nu)^2 + (\lambda h)^2 + (3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h \tag{4.9}$$

Решение другой задачи об определении напряженного состояния в упругом слое с вертикальным цилиндрическим отверстием, лежащем на жестком основании без сцепления, при условии (4.1) и (4.2) может быть построено аналогичным образом.

Напряжения и перемещения для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием с рассмотренными выше граничными условиями могут быть определены по обычным формулам с помощью бигармонической функции А. Ляна (1.1), (3.2) или (4.4).

В заключение отметим, что решения всех этих задач можно использовать при определении нормального давления на крепление стенок вертикальных цилиндрических выработок.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XI 1968

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են առանցքասիմետրիկ բեռի ազդեցության տակ ուղղահայաց գլանային անցքեր ունեցող առաձգական կիսատա-

րածության և շերտի դեֆորմացիայի վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրները, երբ անցքի մակերևույթի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ:

Օգտվելով Վեբերի ինտեգրալ ձևափոխություններից, առաջին խնդրի լուծումը բերվում է եռանկյունաչափական կորիզով «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների: Այս հավասարումների լուծումը բերվում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի մեկ ինտեգրալ հավասարման:

Մասնավոր դեպքում, մի կոնտակտային խնդրի համար, երբ գլանային անցքի ամբողջ մակերևույթի վրա բացակայում են շառավիղային տեղափոխությունը և շոշափող լարումը, ստացված է փակ լուծում:

Փակ լուծում է տրված նաև, առաձգական շերտի համապատասխան մասնակի խնդրի համար:

N. KH. ARUTYUNYAN, B. L. ABRAMYAN

SOME AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEMS FOR A HALF-SPACE AND AN ELASTIC LAYER WITH A VERTICAL CYLINDRICAL CAVITY

Summary

In the paper the contact problems on deformation of an elastic semispace and a layer with a vertical cylindrical cavity under the effect of an axisymmetrical loading under mixed boundary value conditions on the cavity surface are considered.

Making use of the integral transformations of Weber, the solution of the first problem is reduced to the „dual" integral equations with a trigonometric kernel. The solution of these equations is reduced to one integral equation of Fredholm of the second kind.

In a particular case, for the contact problem, when all the surface of the cylindrical cavity is free from radial displacement and tangential stress, the solution is obtained in a closed form.

There is given a closed solution of a corresponding particular problem for an elastic layer.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О некоторых контактных задачах для составного полупространства. ПММ, т. 31, в. 6, 1967, 1001—1008.
2. *Лехницкий С. Г.* Определение напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки круглого сечения. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1938, 69—76.
3. *Шапиро Г. С.* К вопросу об определении напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1941, 105—109.
4. *Matczinski M.* A case of the axisymmetric stress concentration. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Techn., vol. 9, No. 3, 1961, 163—168.

5. *Youngdahl C. K., Sternberg E.* Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body. Прикл. механика (Русский перевод Trans. of ASME, Ser. E), т. 33, No. 4, 1966, 149—160.
6. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, т. 31, в. 4, 1967, 704—710.
7. *Srivastav R. P.* An axisymmetric mixed boundary value problem for a half-space with a cylindrical cavity. Journ. Math. and Mech., vol. 13, No. 3, 1964, 385—394.
8. *Prem Narain.* A note on an asymmetric mixed boundary value problem for a half space with a cylindrical cavity. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 7, No. 1, 1965, 45—47.
9. *Rusia K. C.* On certain asymmetric mixed boundary value problem for a half space with a cylindrical cavity. Journ. Sci. and Engng. Res., vol. 10, No. 1, 1966, 159—166.
10. *Srivastav R. P., Narain Prem.* Stress distribution due to pressurized exterior crack in an infinite isotropic elastic medium with coaxial cylindrical cavity. Internat. Journ. Engng. Sci., vol. 4, No. 6, 1966, 689—697.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. II. Функции Бесселя. М., 1966.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
13. *Magnus W., Oberhettinger F.* Formeln und Satze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1948.
14. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
15. *Титчмарш Е.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Иноиздат, М., т. 1, 1960.
16. *Tranter C. J.* A note on dual equations with trigonometrical kernels. Proc. Edinb. Math. Soc., vol. 13 (Ser. 2), Part 3, 1963, 267—268.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. 1. М., Иноиздат, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

О. М. САПОНДЖЯН

ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ СМЕЩЕНИЙ

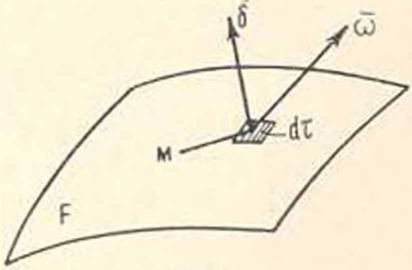
Известный принцип Сен-Венана смягчает граничные условия в случае заданной внешней нагрузки на небольшой части поверхности упругого твердого тела и, тем самым, дает возможность нахождения приближенных решений задач теории упругости.

В настоящей работе сделана попытка сформулировать для случая малых деформаций новый принцип, смягчающий граничные условия в случае заданных на небольшой части поверхности упругого тела смещений.

Ввиду аналогичности формулировки нового принципа и принципа Сен-Венана, мы назвали его принципом Сен-Венана для смещений.

§ 1. Основные уравнения

Небольшую часть поверхности упругого твердого тела, на которой заданы смещения, обозначим через F. Выделим вокруг произвольной точки M поверхности F элемент площади $d\tau$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Имея в виду случай малых деформаций, деформированное состояние элемента $d\tau$ будем характеризовать: линейным смещением $\bar{\delta}$ элемента $d\tau$ и угловым смещением $\bar{\omega}$ того же элемента относительно оси, проходящей через точку M.

Векторы $\bar{\omega}$, зависящие от координат поверхности F, вполне определяются векторами $\bar{\delta}$ (зависящими от тех же координат), однако, для элемента $d\tau$ векторы $\bar{\delta}$ и $\bar{\omega}$ можно рассматривать независимо друг от друга.

Отметим далее, что для элемента $d\tau$ вектор $\bar{\delta}$ является свободным вектором, а $\bar{\omega}$ — скользящим. Учитывая это, перенесем указанные векторы в произвольно выбранное начало координат 0. Вследствие этого, влияния смещений $\bar{\delta}$ и $\bar{\omega}$ на элемент $d\tau$ заменяются влияниями линейного смещения $\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}$, углового смещения $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}$ и дополнительного линейного смещения $\bar{r} \times \bar{\omega}$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор точки M относительно точки 0, а знак $\times$ обозначает векторное умножение.

Обозначим через $\bar{\Delta}$, $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Delta}_{\omega}$ средние значения совокупности соответственно следующих величин $\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}$, $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}$ и $\bar{r} \times \bar{\omega}$, т. е.

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{F}\int_F \bar{\delta} d\tau \qquad (1.1)$$

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{F}\int_F \bar{\omega} d\tau \qquad (1.2)$$

$$\bar{\Delta}_{\omega} = \frac{1}{F}\int_F (\bar{r} \times \bar{\omega})\, d\tau \qquad (1.3)$$

Вектор $\bar{\Delta}$ будем называть главным вектором линейных смещений, вектор $\bar{\Omega}$ — главным вектором угловых смещений, а $\bar{\Delta}_{\omega}$ — главным моментом угловых смещений относительно начала координат.

Сравнивая выражения (1.1)—(1.3) с выражениями главного вектора и главного момента внешней нагрузки, замечаем, что величина $\frac{\bar{\omega}}{F}$ аналогична внешнему напряжению, а величина $\frac{\bar{\delta}}{F}$ — интенсивности распределенных моментов.

Придадим теперь физический смысл векторам $\bar{\Delta}$, $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Delta}_{\omega}$. Для этого, считая поверхность F абсолютно твердой, определим влияние на эту поверхность смещений $\bar{\delta}$ и $\bar{\omega}$ элемента $d\tau$. Затем, пользуясь законом наложения, просуммируем влияния $\bar{\delta}$ и $\bar{\omega}$ всех элементов поверхности F на ту же поверхность.

Влияние линейного смещения $\bar{\delta}$ легко определить, если использовать закон количества движения при следующих условиях.

1. Начальные условия: смещения и скорости точек поверхности F, а также скорость и угловое смещение элемента $d\tau$ равны нулю, а линейное смещение его равно $\bar{\delta}$.

2. Конечные условия: поверхность F и элемент $d\tau$ имеют одинаковое смещение, которое обозначим через $d\bar{\Delta}$.

Полагая, что движение системы F и $d\tau$ происходит благодаря внутренним силам, возникающим между F и $d\tau$, принимая кроме того, что поверхность F однородная, из указанного закона количества движения находим, что линейное смещение $\bar{\delta}$ элемента $d\tau$ сообщает абсолютно твердой поверхности F поступательное смещение

$$d\bar{\Delta} = \frac{\bar{\delta} d\tau}{F} \tag{1.4}$$

Учтем теперь влияние углового смещения $\bar{\omega}$ элемента $d\tau$ на абсолютно твердую поверхность F. Полагаем, что это смещение вызывает бесконечно малое угловое смещение $d\bar{\Omega}$ поверхности F относительно оси, проходящей через точку M.

Перенесем угловое смещение $d\bar{\Omega}$ в начало координат. Вследствие этого указанное смещение заменится поступательным смещением, равным

$$\bar{r} \times d\bar{\Omega} \tag{1.5}$$

и угловым смещением $d\bar{\Omega}_0 = d\bar{\Omega}$ относительно оси, проходящей через точку 0. Перенесем в начало координат также угловое смещение $\bar{\omega}$ элемента $d\tau$. Тогда это смещение, как было указано выше, будет вызывать линейное смещение элемента $d\tau$, равное $\bar{r} \times \bar{\omega}$, которое, согласно (1.4), сообщает поступательное смещение поверхности F, равное

$$\frac{1}{F} (\bar{r} \times \bar{\omega}) \, d\tau \tag{1.6}$$

Приравнивая поступательные смещения (1.5) и (1.6), будем иметь

$$\bar{r} \times \left(d\bar{\Omega} - \frac{\bar{\omega} d\tau}{F} \right) = 0 \tag{1.7}$$

Откуда, ввиду произвольности вектора $\bar{r}$, получим

$$d\bar{\Omega} = \frac{\bar{\omega} d\tau}{F} \tag{1.8}$$

Таким образом, величины $\frac{\bar{\delta} d\tau}{F}$ и $\frac{\bar{\omega} d\tau}{F}$ определяют влияние смещений элемента $d\tau$ на абсолютно твердую поверхность F. При этом первая из них является поступательным смещением указанной поверхности, а вторая — угловым смещением относительно оси, проходящей через точку M.

Учитывая, что величина (1.4) является свободным вектором, а (1.8) — скользящим, и суммируя влияния смещений всех элементов поверхности F на эту поверхность, приходим к формулам (1.1)—(1.3). При этом вектор $\bar{\Delta}$ будет представлять собой поступательное смещение абсолютно твердой поверхности F, вектор $\bar{\Omega}$ — угловое смещение указанной поверхности, а вектор $\bar{\Delta}_0$ — дополнительное поступательное смещение той же поверхности.

Применим формулы (1.1)—(1.3) для определения главных векторов и главного момента жестких смещений поверхности F.

Общий вид указанных смещений такой

$$\begin{gathered}\overline{\delta} = \overline{\delta}_0 + \overline{\omega} \times \overline{r} \\ \overline{\delta}_0 = \text{const}, \quad \overline{\omega} = \text{const}\end{gathered} \tag{1.9}$$

Согласно (1.9) поверхность F совершает поступательное движение с линейным смещением $\overline{\delta}_0$ и вращательное движение вокруг оси, проходящей через начало координат с угловым смещением $\overline{\omega}$.

Внеся (1.9) в (1.1)—(1.3), будем иметь

$$\begin{gathered}\overline{\Delta} = \overline{\delta}_0 - \overline{\omega} \times \overline{r}_c \\ \overline{\Omega} = \overline{\omega} \\ \overline{\Delta}_{\text{м}} = -\overline{\omega} \times \overline{r}_c\end{gathered} \tag{1.10}$$

где $\overline{r}_c$ — радиус-вектор центра тяжести поверхности F относительно начала координат.

Из (1.10) получим

$$\begin{gathered}\overline{\Delta} + \overline{\Delta}_{\text{м}} = \overline{\delta}_0 \\ \overline{\Omega} = \overline{\omega}\end{gathered} \tag{1.11}$$

Эта система смещений совпадает с системой (1.9).

Таким образом, главные векторы и главный момент жестких смещений оказывают на поверхность F то же самое влияние, что и указанные смещения, при этом влияния величин $\overline{\Delta}$ и $\overline{\Delta}_{\text{м}}$ на поверхности F можно заменить влиянием величины $\overline{\Delta} + \overline{\Delta}_{\text{м}}$.

Очевидно, что влияние нежестких смещений на деформированную поверхность F не равносильно влиянию главных векторов и главного момента этих смещений на абсолютно твердую поверхность F. Однако, согласно принятому выше правилу суммирования смещений, системы смещений, имеющие одинаковые главные векторы линейных смещений $\overline{\Delta}$, одинаковые главные векторы угловых смещений $\overline{\Omega}$ и одинаковые главные моменты угловых смещений $\overline{\Delta}_{\text{м}}$, оказывают одинаковые влияния на абсолютно твердую поверхность F. Такие системы смещений будем называть „кинематически эквивалентными" системами смещений.

Принцип Сен-Венана для смещений (принцип упругой равнозначности „кинематически эквивалентных" систем смещений) сформулируем так: *при замене заданной на небольшой части поверхности упругого тела системы смещений „кинематически эквивалентной" ей другой системой, изменение деформированного состояния тела в точках, удаленных от этой части поверхности на расстояния, которые можно считать большими по сравнению с линейными размерами той же части, пренебрежимо мало.*

Эта формулировка совершенно аналогична формулировке известного принципа Сен-Венана.

Отметим, что, если поверхность F не мала по сравнению с поверхностью упругого тела, следует разбить поверхность F на несколько частей и применить сформулированный принцип по отношению к каждой из указанных частей в отдельности.

Применим сформулированный принцип для случая, когда линейные и угловые смещения во всех точках поверхности F равны нулю, т. е. для случая защемления тела по поверхности F. В этом случае должно быть $\bar{\Delta} = \bar{\Omega} = \bar{\Delta}_{\omega} = 0$ и, следовательно, согласно (1.1)—(1.3), условия защемления будут выражаться равенствами

$$\int_F \bar{\delta}\, d\sigma = 0, \qquad \int_F \bar{\omega}\, d\sigma = 0, \qquad \int_F (\bar{r} \times \bar{\omega})\, d\sigma = 0 \tag{1.12}$$

Для применения нового принципа надо иметь связи между компонентами векторов $\bar{\omega}$ и $\bar{\delta}$. Эти связи принимают простой вид, когда поверхность F отнесена к криволинейным координатным линиям α и β, которые являются линиями кривизны этой поверхности. На фиг. 2 оси $M\xi$ и $M\eta$ направлены по касательным, соответственно к линиям $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$. Ось $M\zeta$ направлена по внешней нормали поверхности. Координатная система $M\xi\eta\zeta$ — правая.

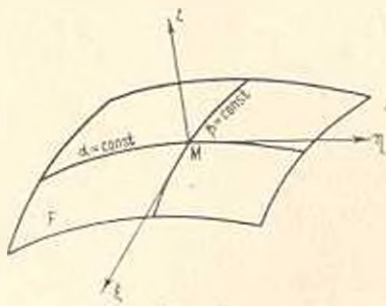


Рис. 2

В рассматриваемой системе координат имеют место следующие соотношения (см., например, [1]):

$$\omega_\xi = \frac{1}{B}\frac{\partial \delta_\zeta}{\partial \beta} + \frac{\delta_\eta}{R_2}$$

$$\omega_\eta = -\frac{1}{A}\frac{\partial \delta_\zeta}{\partial \alpha} - \frac{\delta_\xi}{R_1} \tag{1.13}$$

$$\omega_\zeta = \frac{1}{2AB}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\delta_\eta) - \frac{\partial}{\partial \beta}(A\delta_\xi)\right]$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, соответственно линий $\beta = \text{const}$ и $\alpha = \text{const}$; A и B — коэффициенты первой квадратичной формы.

Пользуясь формулами (1.13), можно установить связи между компонентами ω и δ относительно любой неподвижной координатной системы.

Рассмотрим несколько частных случаев применения выражений (1.13).

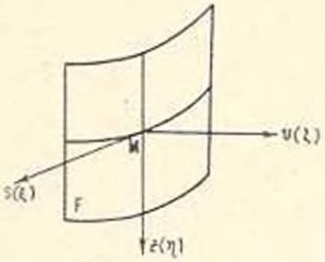
1. *Поверхность F является частью цилиндрической поверхности* (фиг. 3). В этом случае имеем: $R_1 = R$, $R_2 = \infty$, $A = R$, $B = 1$, где R — радиус кривизны цилиндра.

Из (1.13) находим

$$\omega_s = \frac{\partial \delta_\nu}{\partial z}$$

$$\omega_z = -\frac{\partial \delta_\nu}{\partial s} - \frac{\delta_s}{R} \qquad (1.14)$$

$$\omega_\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \delta_s}{\partial z}\right)$$



Фиг. 3.

где w — смещение по направлению оси z.

2. *Случай плоской деформации.* Из (1.14) будем иметь для случая плоской деформации, происходящей в плоскости νs

$$\omega_\nu = \omega_s = 0, \qquad \omega_z = -\frac{\partial \delta_\nu}{\partial s} - \frac{\delta_s}{R} \qquad (1.15)$$

3. *Случай тонкой плиты.* Учитывая известные соотношения

$$\delta_\nu = -z\frac{\partial w}{\partial \nu}, \qquad \delta_s = -z\frac{\partial w}{\partial s}$$

из (1.14) получим

$$\omega_s = -\frac{\partial w}{\partial \nu}$$

$$\omega_\nu = \frac{\partial w}{\partial s} \qquad (1.16)$$

$$\omega_z = z\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]$$

Легко заметить, что в выражениях главного вектора (1.2) и главного момента (1.3) члены, содержащие последнее выражение (1.16), будут исчезать, поэтому условно можно принять, что для тонкой плиты $\omega_z = 0$.

В заключение приведем условия защемления прямолинейного края в случаях плоской деформации и изгиба тонкой плиты.

1. *Случай плоской деформации.* Согласно (1.15) для прямолинейного края (фиг. 4) имеем

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.17}$$

С учетом (1.17) из условий защемления (1.12) получим

$$\begin{aligned} &\int_A^B u(0, y)\,dy = 0, \qquad \int_A^B v(0, y)\,dy = 0 \\ &\int_A^B \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} dy = 0, \qquad \int_A^B y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} dy = 0 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Из третьего условия (1.18) вытекает

$$u(B) - u(A) = 0 \tag{1.19}$$

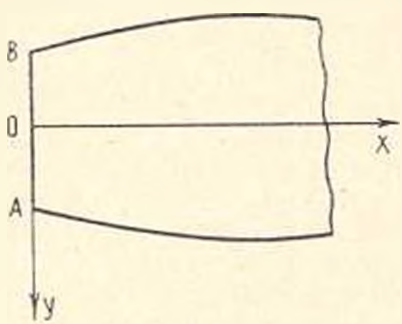
Применяя интегрирование по частям, из четвертого условия (1.18) получим

$$y(B)\,u(B) - y(A)\,u(A) - \int_A^B u(0, y)\,dy = 0 \tag{1.20}$$

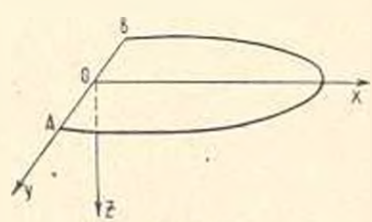
Учитывая (1.19) и (1.20), условия (1.18) представим в окончательном виде

$$\begin{aligned} &u(A) = 0, \qquad u(B) = 0 \\ &\int_A^B u(0, y)\,dy = 0, \qquad \int_A^B v(0, y)\,dy = 0 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Можно показать, что эти условия применимы и в случае обобщенного плоского напряженного состояния.



Фиг. 4.



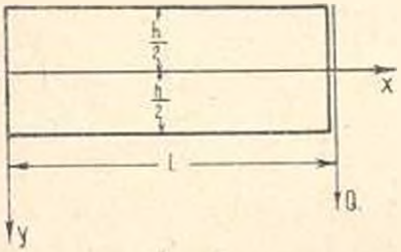
Фиг. 5.

2. *Случай изгиба тонкой плиты.* Применяя формулы (1.16), аналогично предыдущему случаю, из (1.12) находим следующие условия защемления для прямолинейного края AB тонкой плиты (фиг. 5):

$$
\begin{gathered}
w(A)=0, \qquad w(B)=0 \\
\int_A^B w(0,\, y)\, dy=0, \qquad \int_A^B \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} dy=0
\end{gathered}
\tag{1.22}
$$

§ 2. Примеры

1. *Изгиб консоли.* Рассмотрим задачу плоского напряженного состояния консольной балки с прямоугольным поперечным сечением, заделанную левым концом и нагруженную грузом Q, распределенным по правому концевому сечению (фиг. 6).



Фиг. 6.

Эта задача решена в напряжениях в предположении, что условия на продольных краях $y=\pm\dfrac{h}{2}$ удовлетворяются точно, а на торцевом крае $x=l$ — по принципу Сен-Венана (см., например, [2]).

Для смещений найдены следующие выражения:

$$
\begin{gathered}
u=\frac{Q}{EJ}\left(-lxy+\frac{x^2 y}{2}-\frac{2+\mu}{6}y^3+Ay+B\right) \\
v=\frac{Q}{EJ}\left(\frac{\mu l y^2}{2}-\frac{\mu x y^2}{2}+\frac{l x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{1+\mu}{4}h^2 x-Ax+C\right)
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

где μ — коэффициент Пуассона, $J=\dfrac{h^3}{12}$.

Постоянные A, B и C, являющиеся параметрами жестких смещений, определяются из условия защемления в точке $x=y=0$.

Это дает

$$A=B=C=0$$

Внеся эти значения в (2.1), находим окончательные выражения для смещений. В частности, для максимального прогиба имеем

$$
v(l,\,0)=\frac{Ql^3}{3EJ}+\frac{3Ql}{2Gh}
\tag{2.2}
$$

Применим теперь условия (1.21), которые перепишем так:

$$u\left(0, \frac{h}{2}\right) = 0, \qquad u\left(0, -\frac{h}{2}\right) = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u(0, y)\, dy = 0, \qquad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} v(0, y)\, dy = 0$$

С учетом (2.1) первое и второе условия дают

$$A = \frac{2 + \mu}{24} h^2, \qquad B = 0$$

а из третьего и четвертого условий получим соответственно

$$B = 0, \qquad C = -\frac{\mu h^2}{24}$$

Внеся найденные значения постоянных в выражение для v, определим максимальный прогиб

$$v(l, 0) = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{Ql}{Gh} \tag{2.3}$$

Сопоставляя результаты (2.2) и (2.3), заметим, что первый больше второго, что и следовало заранее ожидать.

Например, для случая $\frac{l}{h} = 5$, $\mu = 0.3$ из (2.2) и (2.3) получим соответственно

$$v(l, 0) = 519.5 \frac{Q}{E}, \qquad v(l, 0) = 513 \frac{Q}{E}$$

Поскольку применением принципа Сен-Венана для перемещений максимальный прогиб получается увеличенным, то истинный максимальный прогиб должен быть меньше полученного.

Заметим, что плоская задача для консоли рассматривалась также П. О. Галфаяном [3]. В этой работе для максимального прогиба при $\frac{l}{h} = 5$ получено числовое значение, удовлетворяющее неравенству $517.59 \frac{Q}{E} < v(l, 0) \leqslant 517.65 \frac{Q}{E}$.

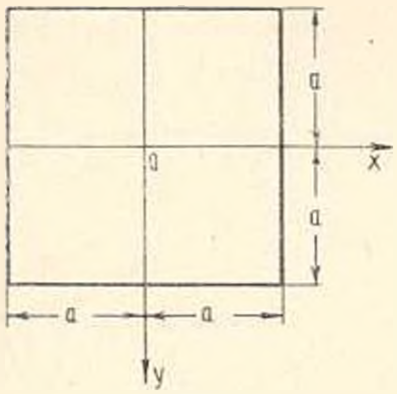
На наш взгляд этот результат требует проверки.

2. *Изгиб защемленной по контуру квадратной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки.* Обозначим через $2a$ сторону квадрата (фиг. 7), и уравнение упругой поверхности представим в виде

$$w = \frac{P}{64\,D}(x^2+y^2)^2 + C_0 + C_2(x^2+y^2) + C_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) +$$

$$+ C_6(x^6 - 5\,x^4y^2 - 5\,x^2y^4 + y^6) + C_8(x^8 - 28\,x^6y^2 +$$

$$+ 70\,x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8) \qquad (2.4)$$



Фиг. 7.

Легко проверить, что выражение (2.4) удовлетворяет дифференциальному уравнению упругой поверхности плиты и симметрично относительно осей симметрии квадрата.

Потребуем, чтобы прогиб (2.4) удовлетворял условиям защемления (1.22) на каждой половине стороны квадрата, т. е.,

$$w(a,\ 0) = 0, \qquad w(a,\ a) = 0$$

$$\int_0^a w(a, y)\, dy = 0 \qquad (2.5)$$

$$\int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a} dy = 0$$

Новый принцип не гарантирует достаточно точного определения максимального отрицательного изгибающего момента, возникающего в точке $(a,\ 0)$. Для достижения этой цели потребуем, чтобы прогиб (2.4) удовлетворял также следующему дополнительному условию:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=a,\ y=0} = 0 \qquad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.5) и (2.6), определим постоянные C_{2k}:

$$C_0 = 1.29625609\,,$$

$$a^2C_2 = -2.25569308\,,$$

$$a^4C_4 = -0.36309089\,,$$

$$a^6 C_6 = 0.30823665\lambda$$

$$a^8 C_8 = 0.01429123\lambda$$

где

$$\lambda = \frac{pa^4}{64D}$$

Из (2.4) находим значение максимального прогиба

$$w(0, 0) = C_0 = 0.02025 \frac{pa^4}{D}$$

точное значение которого равно $0.02016 \frac{pa^4}{D}$.

Погрешность составляет 0.4%.

Изгибающий момент в центре плиты определяется формулой

$$M_x(0, 0) = M_y(0, 0) = M(0, 0) = -2(1+\mu)C_2 D$$

При $\mu = 0.3$ имеем

$$M(0, 0) = 0.0916\, pa^2$$

что меньше точного значения момента, равного $0.0924\, pa^2$ на 0.9%.

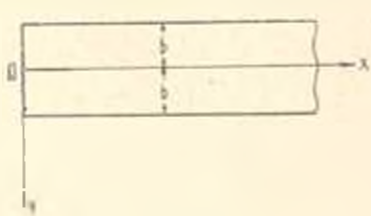
Из (2.4) находим значение максимального отрицательного изгибающего момента при $\mu = 0.3$

$$M_x(a, 0) = -(0.205921 - 0.000578\mu)\, pa^2 = -0.2057\, pa^2$$

что по абсолютному значению меньше точного значения момента, равного $-0.2068\, pa^2$, на 0.5%.

3. *Изгиб полубесконечной полосы, свободно опертой по двум параллельным краям, под действием вдоль торцевого края системы смещений, „кинематически эквивалентной" нулю.*

Обозначим ширину полосы через $2b$ и расположим оси координат x и y так, как показано на фиг. 8. По краям $y = \pm b$ плита оперта. Она изгибается под действием заданных вдоль края $x = 0$ смещений, удовлетворяющих условиям защемления (1.22).



Фиг. 8.

Согласно новому принципу, деформации и внутренние силы, возникающие под действием указанных смещений, должны быстро затухать при удалении от края $x = 0$. Покажем, что это действительно так.

Решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты представим в виде

$$w=\sum_{1}^{\infty}(A_{2k-1}+B_{2k-1}x)\,e^{-\frac{\pi(2k-1)}{2b}x}\cos\frac{\pi(2k-1)}{2b}y \tag{2.7}$$

Непосредственно видно, что (2.7) удовлетворяет условиям свободного опирания на краях $y=\pm b$. Потребуем, чтобы выражение (2.7) удовлетворяло на крае $x=0$ условиям (1.22), которые перепишем так

$$w(0,\ b)=0,\qquad w(0,\ -b)=0$$

$$\int_{-b}^{+b}w(0,y)\,dy=0,\qquad \int_{-b}^{+b}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0}dy=0 \tag{2.8}$$

Согласно (2.7), первые два из этих условий удовлетворяются тождественно, а остальные условия дают

$$\begin{gathered}\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}A_{2k-1}=0\\ \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k-1}\left[\frac{\pi}{2b}(2k-1)A_{2k-1}-B_{2k-1}\right]=0\end{gathered} \tag{2.9}$$

Распоряжаясь постоянными A_{2k-1} и B_{2k-1}, мы получим различные „кинематически эквивалентные нулю" системы смещений, в отдельности удовлетворяющие условиям (2.8).

Принимая, в частности, $A_5=A_7=\cdots=0$, $B_3=B_5=\cdots=0$, из (2.9) находим

$$A_3=3A_1,\quad B_1=-\frac{\pi}{b}A_1$$

Тогда выражение (2.7) примет следующий вид:

$$w=A_1\left[\left(1-\frac{\pi}{b}x\right)e^{-\frac{\pi}{2b}x}\cos\frac{\pi}{2b}y+3e^{-\frac{3\pi}{2b}x}\cos\frac{3\pi}{2b}y\right] \tag{2.10}$$

Построив эпюры для расчетных величин плиты при $y=\text{const}$, $x>0$, мы убеждаемся в том, что при удалении от края $x=0$ указанные величины быстро затухают. На фиг. 9 приведены такие эпюры для величин $w(x,0)$ и $M_x(x,0)$.

4. *Изгиб равномерно нагруженной полубесконечной полосы, свободно опертой по двум параллельным краям и заделанной по торцевому краю (фиг. 8).*

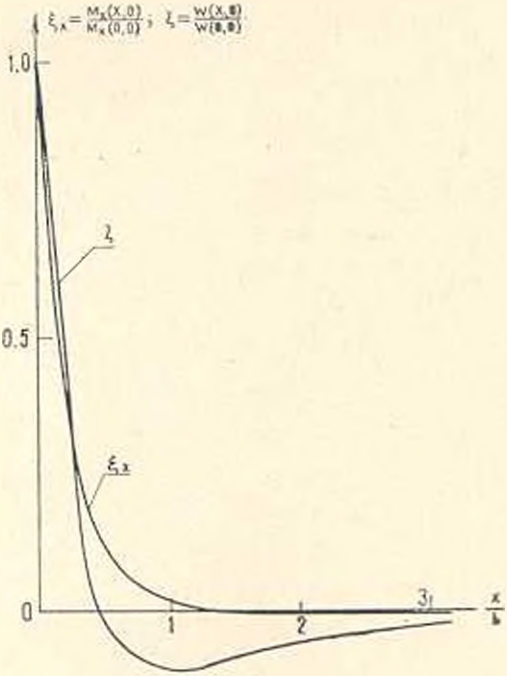
Решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты примем в виде

$$w = \frac{p}{24\,D}\,(y^4 - 6b^2y^2 + 5b^4) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{2} (A_{2k-1} + B_{2k-1}\,x)\, e^{-\frac{\pi(2k-1)}{2b}x} \cos \frac{\pi(2k-1)}{2b}\, y \tag{2.11}$$

где $p = \mathrm{const}$ — интенсивность внешней нагрузки.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (2.11) удовлетворяет условиям свободного опирания на краях $y = \pm b$.



Фиг. 9.

Потребуем, чтобы выражение (2.11) удовлетворяло условиям заделки (1.22) на каждой половине торцевого края $x = 0$, т. е.

$$w(0, 0) = 0, \qquad w(0, b) = 0$$

$$\int_0^b w(0, y)\, dy = 0, \qquad \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=0} dy = 0 \tag{2.12}$$

Для достижения хорошей точности определения максимального отрицательного изгибающего момента, примем также дополнительное условие

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{x=y=0} = 0 \tag{2.13}$$

Второе из условий (2.12) удовлетноряется тождественно. Остальные же условия (2.12) и условие (2.13) дают соответственно

$$A_1 + A_3 = -\frac{5pb^4}{24D}$$

$$-A_1 + \frac{A_3}{3} = \frac{\pi pb^4}{15D}$$

$$-B_1 + \frac{B_3}{3} = \frac{\pi}{2b}(A_3 - A_1)$$

$$B_3 + B_1 = \frac{\pi}{2b}(A_1 + 3A_3)$$

Отсюда имеем

$$A_1 = -0.20916297\frac{pb^4}{D}$$

$$A_3 = 0.00082963\frac{pb^4}{D}$$

$$B_1 = -0.32855242\frac{pb^3}{D}$$

$$B_3 = 0.00390955\frac{pb^3}{D}$$

Внеся эти значения в (2.11), находим приближенное решение рассматриваемой задачи.

В частности, для максимального отрицательного изгибающего момента имеем

$$M_x(0,0) = -0.497666\,pb^2 + 0.002334\,\mu pb^2$$

Точное значение этого момента равно $-0.5\,pb^2$. Максимальная погрешность получается при $\mu = 0.5$ и равна $0.7\,\%$.

В заключении настоящего параграфа отметим, что с помощью нового принципа можно получить достаточно точные решения для ряда сложных задач плоской теории упругости и изгиба тонких плит, например, для задачи об изгибе круглой плиты с круговыми отверстиями, когда на внешней окружности заданы как угодно однородные условия, а по внутренним окружностям плита заделана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 9 VII 1968

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋՅԱՆ

ՍԵՆ-ՎԵՆԱՆԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔԸ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Սեն-Վենանի հայտնի սկզբունքը մեղմացնում է մակերևույթային պայմանները, երբ առաձգական պինդ մարմնի մակերևույթի ոչ մեծ մասի վրա տրված են լինում արտաքին լարումները և դրանով իսկ հնարավորություն է ստեղծում գտնելու առաձգականության տեսության խնդիրների մոտավոր լուծումներ։

Ներկա աշխատանքում փորձ է արված ձևակերպել նոր սկզբունք, որը մեղմացնում է մակերևույթային պայմանները այն դեպքում, երբ մարմնի մակերևույթի ոչ մեծ մասի վրա տրված են լինում տեղափոխությունները։

Այդ նոր սկզբունքը մենք անվանել ենք՝ Սեն-Վենանի սկզբունքը տեղափոխությունների համար։

O. M. SAPONJIAN

SAINT-VENANT'S PRINCIPLE FOR DISPLACEMENTS

S u m m a r y

The well known Saint-Venant's principle softens the boundary conditions if external forces are given on the small part of the surface of the elastic body. Thus making it possible to find some approximate solution of the problem of elasticity.

In the present paper we have tried to formulate a new principle softening the boundary conditions in such a case when displacements are given on the small part of the surface of the body.

This principle has been called Saint-Venant's principle for displacement.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., 1953, стр. 41, 53.
2. *Филоненко-Бородич М. М.* Теория упругости. М., 1947, стр. 130.
3. *Галфаян П. О.* Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 1, 1964, стр. 39–60.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

С. А. КАЛОЕРОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ЭЛЛИПТИЧЕСКИМИ ОТВЕРСТИЯМИ, РАСПОЛОЖЕННЫМИ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

В работе [1] изучена концентрация напряжений в анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий, линия центров которых перпендикулярна границе полуплоскости. В данной статье линия центров отверстий считается параллельной границе полуплоскости. Контуры отверстий предполагаются неподкрепленными или подкрепленными абсолютно жесткими кольцами. Подробно изучено поле напряжений в растягиваемой ортотропной полуплоскости с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями.

§ 1. Пусть анизотропная полуплоскость ослаблена конечным числом эллиптических отверстий L_i, центры которых находятся на расстоянии h от прямолинейной границы L. Будем для простоты считать эллиптические отверстия и расстояния между контурами соседних отверстий одинаковыми*. Обозначим полуоси отверстия и расстояния между центрами соседних отверстий соответственно через a, b, $2l$.

Будем считать заданным напряженное состояние на бесконечности, а в случае неподкрепленных отверстий — также самоуравновешенные усилия, действующие на контурах отверстий.

При отсутствии объемных сил задача об упругом равновесии такой полуплоскости приводится к определению функций комплексных переменных $\Phi_j(z_j)$ $(j=1, 2)$, удовлетворяющих граничным условиям [4]

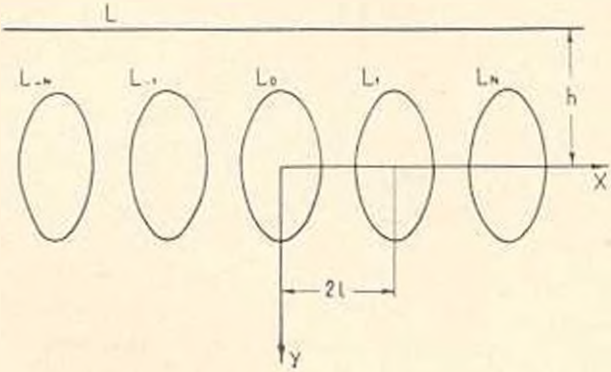
$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{Re}\,[t_1\Phi_1(z_1)+t_2\Phi_2(z_2)] &= f_1, \\ 2\,\mathrm{Re}\,[s_1\Phi_1(z_1)+s_2\Phi_2(z_2)] &= f_2 \quad \text{на } L_i \text{ и } L. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь f_i — функции, зависящие от способа загружения полуплоскости; t_j, s_j — комплексные параметры, равные соответственно 1, μ_j в случае неподкрепленного контура и p_j, q_j в случае подкрепленного контура; μ_j, p_j, q_j характеризуют анизотропию материала полуплоскости [4].

Функции $\Phi_j(z_j)$ определены и голоморфны в областях S_j, получаемых из заданной полуплоскости аффинными преобразованиями. В этих областях будем иметь также полуплоскости с эллиптическими отверстиями, контуры которых L_{ji} получаются из контуров отверстий L_i с помощью указанных преобразований.

* Рассмотрение общего случая проводится аналогичным образом.

Рассмотрим случай анизотропной полуплоскости, ослабленной нечетным числом эллиптических отверстий $2N+1$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Функции $\Phi_j(z_j)$, голоморфные вне эллиптических отверстий L_{jr}, получаемых из L_r $(r=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$, представим в виде

$$\Phi_{1r}(z_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{rk}}{[\zeta_{1r}(z_1)]^k}; \qquad \Phi_{2r}(z_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_{rk}}{[\zeta_{2r}(z_2)]^k} \tag{1.2}$$

Если прямолинейная граница не загружена внешними усилиями, то функции $\Phi_j(z_j)$ принимают вид [1]

$$\Phi_1(z_1)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=-N}^{N}\left\{\frac{a_{rk}}{[\zeta_{1r}(z_1)]^k}+\frac{l_1\bar a_{rk}}{[\bar\zeta_{1r}(z_1)]^k}+\frac{n_1\bar b_{rk}}{[\bar\zeta_{2r}(z_1)]^k}\right\}$$
$$\Phi_2(z_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=-N}^{N}\left\{\frac{b_{rk}}{[\zeta_{2r}(z_2)]^k}+\frac{n_2\bar b_{rk}}{[\bar\zeta_{2r}(z_2)]^k}+\frac{l_2\bar a_{rk}}{[\bar\zeta_{1r}(z_2)]^k}\right\} \tag{1.3}$$

Постоянные a_{rk}, b_{rk} определяются из граничных условий на контурах отверстий, а комплексные переменные $\zeta_{1r}(z_1)$, $\bar\zeta_{jr}(z_1)$ находятся из следующих неявных зависимостей:

$$z_1-2rl=R_1\left(\zeta_{1r}+\frac{m_1}{\zeta_{1r}}\right)$$

$$z_1-2rl+2i\beta h=\bar R_1\left(\bar\zeta_{1r}+\frac{\bar m_1}{\bar\zeta_{1r}}\right) \tag{1.4}$$

$$z_1-2rl+(\alpha-\gamma)h+i(\beta+\delta)h=\bar R_2\left(\bar\zeta_{2r}+\frac{\bar m_2}{\bar\zeta_{2r}}\right)$$

причем

$$R_j=\frac{a-i\mu_j b}{2}, \qquad m_j=\frac{a+i\mu_j b}{a-i\mu_j b}, \qquad \mu_1=\alpha+i\beta, \quad \mu_2=\gamma+i\delta$$

Функции $\zeta_{2r}(z_2)$ и $\bar{\zeta}_{2r}(z_2)$ получаются из соответствующих выражений (1.4), если в них заменить z_1, α, β, ζ_{1r} на z_2, γ, δ, ζ_{2r} и наоборот.

На контуре L_ν ($\nu = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$) представим $\Phi_1(z_1)$ следующим образом:

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{\nu k}}{[\zeta_{1\nu}(z_1)]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{r=-N}^{N}{}^{*} \left\{ \frac{a_{rk}}{[\zeta_{1r}(z_1)]^k} + \right.$$

$$\left. + \frac{l_1 \bar{a}_{rk}}{[\bar{\zeta}_{1r}(z_1)]^k} + \frac{n_1 \bar{b}_{rk}}{[\bar{\zeta}_{2r}(z_1)]^k} \right\} \qquad (1.5)$$

Знак * означает, что в сумме отсутствует член $\dfrac{a_{rk}}{[\zeta_{1r}(z_1)]^k}$ при $r=\nu$.

Функции, входящие во вторую сумму, внутри контура L_ν являются голоморфными. Поэтому их можно разложить в сходящиеся ряды по полиномам Фабера для этих эллипсов

$$[\zeta_{1r}(z_1)]^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} A_{ki}^{(1r\nu)} P_{\nu i}(z_1)$$

$$[\bar{\zeta}_{2r}(z_1)]^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} B_{ki}^{(1r\nu)} P_{\nu i}(z_1) \qquad (1.6)$$

$$[\bar{\zeta}_{1r}(z_1)]^{-k} = \sum_{i=0}^{\infty} C_{ki}^{(1r\nu)} P_{\nu i}(z_1)$$

Коэффициенты разложений (1.6) при $k=1$ вычисляются так же, как и в работе [3]. Для других же степеней их легко получить по следующей рекуррентной формуле:

$$A_{l+1,i} = \sum_{j=0}^{i} A_{1j} A_{l,i-j} + \sum_{n=1}^{\infty} m_1^n (A_{1n} A_{l,n-j} + A_{1,n+j} A_{ln}) \qquad (1.7)$$

где A_{1i} — соответствующие коэффициенты разложений (1.6) при $k=1$. Теперь на контуре L_ν функцию $\Phi_1(z_1)$ можно записать в виде

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_{\nu k}}{\sigma^k} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=-N}^{N} [a_{rk} D_{ki}^{(1r\nu)} + \right.$$

$$\left. + l_1 \bar{a}_{rk} A_{ki}^{(1r\nu)} + n_1 B_{ki}^{(1r\nu)} \bar{b}_{rk}] \left(\sigma^i + \frac{m_1^i}{\sigma^i} \right) \right\}$$

Аналогичным образом найдем

$$\Phi_2(z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{b_{\nu k}}{\sigma^k} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{r=-N}^{N} [b_{rk} D_{ki}^{(2r\nu)} + \right.$$

$$\left. + n_2 \bar{b}_{rk} B_{ki}^{(2r\nu)} + l_2 \bar{a}_{rk} A_{ki}^{(2r\nu)}] \left(\sigma^i + \frac{m_2^i}{\sigma^i} \right) \right\}$$

где

$$D_{kl}^{(jr\nu)} = \begin{cases} C_{kl}^{(jr\nu)} & \text{при} \quad \nu \neq r \\ 0 & \text{при} \quad \nu = r \end{cases}$$

Для определения постоянных a_{rk} и b_{rk} из граничных условий (1.1) на контурах отверстий получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами:

$$\begin{gathered} t_1 a_{\nu k} + t_2 b_{\nu k} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=-N}^{N} \left[M_{1pk}^{(r\nu)} \bar{a}_{rp} + M_{2pk}^{(r\nu)} a_{rp} + M_{3pk}^{(r\nu)} \bar{b}_{rp} + M_{4pk}^{(r\nu)} b_{rp} \right] = \alpha_{\nu k} \\ s_1 a_{\nu k} + s_2 b_{\nu k} + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=-N}^{N} \left[N_{1pk}^{(r\nu)} \bar{a}_{rp} + N_{2pk}^{(r\nu)} a_{rp} + N_{3pk}^{(r\nu)} \bar{b}_{rp} + N_{4pk}^{(r\nu)} b_{rp} \right] = \beta_{\nu k} \end{gathered} \qquad (1.8)$$

$$(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N)$$

Здесь

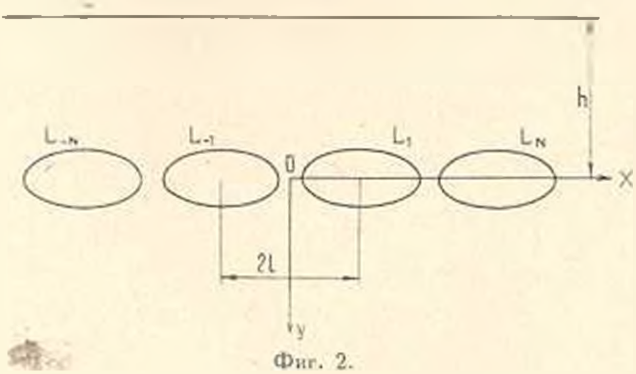
$$\begin{aligned} M_{1pk}^{(r\nu)} &= t_1 l_1 m_1^k A_{pk}^{(1r\nu)} + t_2 l_2 m_2^k A_{pk}^{(2r\nu)} + \bar{t}_1 D_{pk}^{(1r\nu)} \\ M_{2pk}^{(r\nu)} &= \bar{t}_1 \bar{l}_1 \bar{A}_{pk}^{(1r\nu)} + \bar{t}_2 \bar{l}_2 \bar{A}_{pk}^{(2r\nu)} + t_1 m_1^k D_{pk}^{(1r\nu)} \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Коэффициенты $M_{3pk}^{(r\nu)}$, $M_{4pk}^{(r\nu)}$ получаются соответственно из $M_{1pk}^{(r\nu)}$, $M_{2pk}^{(r\nu)}$, если в них заменить l_j, $A_{pk}^{(jr\nu)}$, $D_{pk}^{(1r\nu)}$ на n_j, $B_{pk}^{(jr\nu)}$, $D_{pk}^{(2r\nu)}$. Коэффициенты же $N_{npk}^{(r\nu)}$ получаются из $M_{npk}^{(r\nu)}$, если в последних заменить t_j на s_j.

Постоянные $\alpha_{\nu k}$, $\beta_{\nu k}$ зависят от способа загружения полуплоскости и закрепления отверстий.

Система (1.8) оказывается квазирегулярной при любой близости отверстий друг от друга и от границы полуплоскости. Доказательство этого факта проводится так же, как и в работах [1, 2].

Рассмотрение полуплоскости, ослабленной четным числом эллиптических отверстий L_r ($r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$) (фиг. 2), проводится аналогичным образом. Только в этом случае в выражениях (1.3) сле-



Фиг. 2.

дует опустить член, соответствующий значению $r = 0$, а в соотношениях (1.4) вместо $2rl$ взять $(2r \mp 1) l$. Знак $+$ или $-$ следует брать соответственно, в случае, если $r>0$ или $r<0$, т. е. когда контур L_r располагается справа или слева от начала координат. Система для определения постоянных a_{rk}, b_{rk} в этом случае получается такая же, как и система (1.8), с той лишь разницей, что ν и r не принимают нулевого значения.

После определения коэффициентов a_{rk}, b_{rk} функции $\Phi_j(z_j)$ становятся известными. Через эти функции находятся напряжения в полуплоскости

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_x^0 + 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\Phi_2'(z_2)\right]\\
\sigma_y &= \sigma_y^0 + 2\,\mathrm{Re}\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)\right]\\
\tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 - 2\,\mathrm{Re}\left[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)\right]
\end{aligned} \qquad (1.10)$$

где σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0 — напряжения, возникшие в сплошной полуплоскости под действием приложенных к ней на бесконечности усилий.

Некоторые упрощения в полученных формулах возникают в случае ортотропной полуплоскости, когда $\mu_1 = i\beta$, $\mu_2 = i\delta$.

Если предполагать, что для ортотропной полуплоскости имеет место упругая, силовая и геометрическая симметрия относительно оси y, то получим

$$\Phi_j'(z_j) = \overline{\Phi_j'}(-\bar{z}_j) \qquad (1.11)$$

Учитывая это соотношение, легко показать, что между коэффициентами, входящими в разложения (1.3), существует следующая связь:

$$a_{-rk} = (-1)^{k+1}\bar{a}_{rk}, \qquad b_{-rk} = (-1)^{k+1}\bar{b}_{rk} \qquad (1.12)$$

Следовательно, для данной полуплоскости, ослабленной нечетным числом эллиптических отверстий, расположенных вдоль прямолинейной границы, функцию $\Phi_1(z_1)$ следует выбирать в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{a_{0k}}{[\zeta_{10}(z_1)]^k} + \frac{l_1\bar{a}_{0k}}{[\bar{\zeta}_{10}(z_1)]^k} + \frac{n_1\bar{b}_{0k}}{[\bar{\zeta}_{20}(z_1)]^k}\right\} + \\
+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{N}\left\{\frac{a_{rk}}{[\zeta_{1r}(z_1)]^k} + \frac{l_1\bar{a}_{rk}}{[\bar{\zeta}_{1r}(z_1)]^k} + \frac{n_1\bar{b}_{rk}}{[\bar{\zeta}_{2r}(z_1)]^k} + \right. \\
\left. + (-1)^{k+1}\left[\frac{\bar{a}_{rk}}{[\zeta_{1,-r}(z_1)]^k} + \frac{l_1 a_{rk}}{[\bar{\zeta}_{1,-r}(z_1)]^k} + \frac{n_1 b_{rk}}{[\bar{\zeta}_{2,-r}(z_1)]^k}\right]\right\}
\end{aligned} \qquad (1.13)$$

Здесь $\zeta_{1n}(z_1)$, $\bar{\zeta}_{jn}(z_1)$ $(n=\pm r)$ — функции, определяемые из соотношений (1.4), где нужно принять $\alpha=\gamma=0$. Аналогичное выражение получается для $\Phi_2(z_2)$.

При таком выборе функций для определения постоянных a_{rk}, b_{rk} достаточно удовлетворить граничным условиям на контуре среднего отверстия и на контурах отверстий, расположенных вправо (влево) от оси y. При этом граничные условия на контурах остальных отверстий удовлетворяются автоматически.

В случае четного числа отверстий следует поступать так же, как это указано ранее для неортотропной полуплоскости.

§ 2. Пусть ортотропная полуплоскость ослаблена двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями, центры которых находятся на расстоянии h от границы полуплоскости и на расстоянии $2l$ друг от друга.

В этом случае

$$\Phi_1(z_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{[\zeta_{11}(z_1)]^k} + \frac{l_1 \bar{a}_k}{[\bar{\zeta}_{11}(z_1)]^k} + \frac{n_1 \bar{b}_k}{[\bar{\zeta}_{21}(z_1)]^k} + \right.$$

$$\left. + (-1)^{k+1} \left[\frac{\bar{a}_k}{[\zeta_{1,-1}(z_1)]^k} + \frac{l_1 a_k}{[\bar{\zeta}_{1,-1}(z_1)]^k} + \frac{n_1 b_k}{[\bar{\zeta}_{2,-1}(z_1)]^k} \right] \right\} \tag{2.1}$$

Здесь опущен индекс 1 у коэффициентов a_{1k}, b_{1k}. Комплексные переменные $\zeta_{1n}(z_1)$, $\bar{\zeta}_{jn}(z_1)$ $(n = \pm 1)$ определяются из равенств

$$z_1 - nl = R_1 \left(\zeta_{1n} + \frac{m_1}{\zeta_{1n}} \right)$$

$$z_1 - nl - 2i\beta h = R_1 \left(\bar{\zeta}_{1n} + \frac{m_1}{\bar{\zeta}_{1n}} \right) \tag{2.2}$$

$$z_1 - nl - i(\beta + \delta) h = R_2 \left(\bar{\zeta}_{2n} + \frac{m_2}{\bar{\zeta}_{2n}} \right)$$

Для функции $\Phi_2(z_2)$ получаются аналогичные соотношения.

Из граничных условий на контуре правого отверстия получим бесконечную систему для определения постоянных a_k, b_k

$$\begin{aligned} t_1 a_k + t_2 b_k + \sum_{p=1}^{\infty} [M_{1pk} \bar{a}_p + M_{2pk} a_p + M_{3pk} \bar{b}_p + M_{4pk} b_p] &= \alpha_k \\ s_1 a_k + s_2 b_k + \sum_{p=1}^{\infty} [N_{1pk} \bar{a}_p + N_{2pk} a_p + N_{3pk} \bar{b}_p + N_{4pk} b_p] &= \beta_k \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$M_{1pk} = t_1 l_1 m_1^k A_{pk}^{(11)} + t_2 l_2 m_2^k A_{pk}^{(21)} + (-1)^{p+1} [\bar{t}_1 l_1 \bar{A}_{pk}^{(1,-1)} +$$

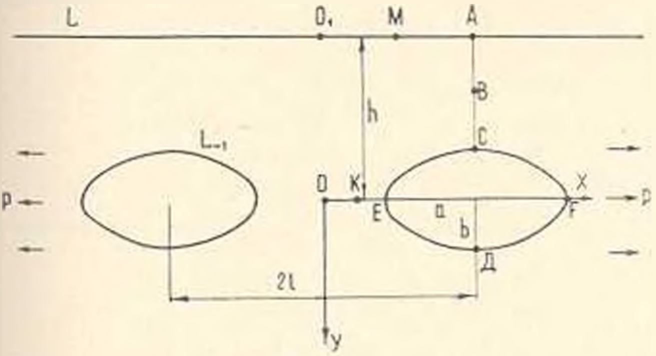
$$+ \bar{t}_2 l_2 \bar{A}_{pk}^{(2,-1)} + t_1 m_1^k C_{pk}^{(1,-1)}]$$

$$M_{2pk} = \bar{t}_1 l_1 \bar{A}_{pk}^{(11)} + \bar{t}_2 l_2 A_{pk}^{(21)} + (-1)^{p-1} [t_1 l_1 m_1^k A_{pk}^{(1,-1)} +$$

$$+ t_2 l_2 m_2^k A_{pk}^{(2,-1)} + \bar{t}_1 \bar{C}_{pk}^{(1,-1)}]$$

Остальные коэффициенты получаются по аналогичным формулам так же, как и в случае общей анизотропии.

§ 3. Пусть полуплоскость растягивается усилиями интенсивности p, приложенными к ней на бесконечности параллельно прямолинейной границе (фиг. 3).



Фиг. 3.

В этом случае

$$\sigma_x^0 = p; \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0$$

Если эллиптические отверстия свободны, то

$$t_j = 1, \quad s_j = \mu_j, \quad \beta_1 = -\frac{ibp}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k \geqslant 2)$$

В случае эллиптических отверстий, подкрепленных абсолютно жесткими ядрами

$$t_j = p_j = a_{11}\mu_j^2 + a_{12}, \quad s_j = q_j = a_{12}\mu_j + \frac{a_{22}}{\mu_j}$$

$$\alpha_1 = -\frac{ap}{2} a_{12}; \quad \beta_1 = -\frac{ibp}{2} a_{12}; \quad \alpha_k = \beta_k = 0 \quad (k \geqslant 2)$$

где a_{ik} — упругие постоянные для полуплоскости.

При исследовании напряженного состояния полуплоскости, изготовленной из различных ортотропных материалов, нами в широких пределах варьировалось расстояние между контурами эллиптических отверстий и границей полуплоскости, расстояние между самими отверстиями, а также отношение полуосей отверстий $c = b/a$. Все вычисления по определению напряжений проводились на ЭВМ „Урал"-2, что позволило получить результаты высокой точности. Незначительную часть полученных результатов для одного случая фанерной полуплоскости ($\mu_1 = i\beta = 4.11\,i$; $\mu_2 = i\delta = 0.343\,i$), ослабленной двумя круговыми отверстиями, когда расстояние между их контурами равно половине радиуса одного из них, приводим в таблицах.

При приближенном решении квазирегулярной бесконечной системы (2.3) в ней оставлялось от восьми до шестнадцати уравнений с комплексными коэффициентами. Это позволило для рассматриваемых расстояний между контурами с большой точностью удовлетворить граничным условиям на контурах отверстий (граничные условия на границе полуплоскости удовлетворяются точно).

В табл. 1 даны значения напряжений σ_x, σ_y в наиболее интересных точках растягиваемой полуплоскости с двумя свободными круговыми отверстиями, а в табл. 2 — значения напряжений σ_θ вблизи контура правого отверстия. Для случая, когда контуры отверстий были подкреплены жесткими кольцами, в табл. 3 приведены значения напряжений σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$, действующих на контуре правого отверстия.

Таблица 1

Точки \ h/a	σ_x					σ_y				
	3	2	1.5	1.25	1.1	3	2	1.5	1.25	1.1
A	0.991	1.049	1.056	0.853	0.827	0	0	0	0	0
B	1.280	1.572	2.043	2.738	4.156	0.070	0.080	0.082	0.079	0.038
C	4.669	5.064	5.948	7.489	10.062	0.000	0.000	−0.000	0.008	0.076
D	4.551	4.671	4.851	5.062	5.274	0.000	0.000	−0.000	−0.003	0.028
E	−0.005	−0.005	−0.005	−0.005	−0.003	−0.381	−0.361	0.266	−0.143	0.013
F	−0.001	−0.001	−0.001	−0.001	0.000	−0.706	−0.746	−0.785	−0.774	−0.565

Таблица 2

θ \ h/a	3	2	1.5	1.25	1.1
0	−0.706	−0.746	−0.785	−0.774	−0.565
30	0.096	0.115	0.149	0.202	0.321
60	0.994	0.960	1.032	1.094	1.159
90	4.551	4.671	4.851	5.061	5.274
120	0.325	0.336	0.363	0.392	0.406
150	−0.151	−0.145	−0.115	−0.075	−0.010
180	−0.381	−0.381	−0.266	−0.143	0.013
210	−0.155	−0.179	−0.212	−0.249	−0.267
240	0.332	0.273	0.113	−0.185	−0.753
270	4.669	5.064	5.948	7.489	10.062
300	0.897	0.883	0.792	0.461	−0.381
330	0.028	−0.043	−0.176	−0.351	−0.465

Проведенные исследования напряженного состояния показывают, что при сближении отверстий к границе полуплоскости напряжения сильно возрастают в зоне между контурами в точках, близких к контурам. Особенно большие напряжения возникают вблизи точек C и O_1. При сближении отверстий друг с другом напряжения возрастают в точках прямолинейной границы и убывают около отверстий. Большая концентрация напряжений наблюдается также при $c > 1$ и для полуплоскости с сильно выраженной анизотропией. Влияние одного контура на напряженное состояние около других становится незначи-

Таблица 3

h/a	3			1.5			1.1		
θ°	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$	σ_r	σ_θ	$\tau_{r\theta}$
0	1.307	0.046	0.003	1.274	0.045	−0.002	1.255	0.044	−0.010
30	1.009	0.290	−0.559	0.990	0.278	−0.558	0.981	0.270	−0.564
60	0.393	0.823	−0.614	0.382	0.815	−0.614	0.376	0.816	−0.620
90	0.039	0.007	−0.162	0.029	0.006	−0.166	0.023	0.005	−0.174
120	0.223	0.446	0.326	0.209	0.426	0.315	0.149	0.400	0.297
150	1.064	0.294	0.606	1.020	0.280	0.584	0.963	0.264	0.553
180	2.140	0.076	0.000	2.055	0.073	−0.005	1.941	0.069	−0.006
210	1.064	0.295	−0.573	1.013	0.272	−0.592	0.952	0.249	−0.566
240	0.226	0.447	−0.325	0.210	0.429	−0.318	0.197	0.412	−0.309
270	0.042	0.007	0.158	0.037	0.007	0.120	0.019	0.002	0.026
300	0.389	0.813	0.607	0.349	0.734	0.548	0.287	0.600	0.448
330	1.001	0.285	0.541	0.950	0.268	0.534	0.904	0.256	0.505

тельным, если расстояние между рассматриваемыми контурами больше диаметра отверстия. Подкрепление отверстий сильно снижает концентрацию напряжений около контуров, а также роль анизотропии, формы отверстий и расстояния между ними и границей полуплоскости.

Донецкий государственный
университет

Поступила 17 V 1968

Ս. Ա. ԿԱԼՈԵՐՈՎ

ԻՐԱՐ ԵՐԿԱՅՆՔՈՎ ԴԱՍԱՎՈՐՎԱԾ, ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԹՎՈՎ ԷԼԻՊՏԱԿԱՆ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է՝ իրար երկայնքով դասավորված, վերջավոր թվով էլիպտական անցքերով, անիզոտրոպ կիսահարթության առաձգական հավասարակշռության խնդիրը:

Խնդիրը բերվում է՝ գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ, քվազիռեգուլյար սիստեմի լուծմանը:

Մանրամասն ուսումնասիրված է լարումների բաշխվածությունը, երկու էլիպտական անցքերով, օրթոտրոպ կիսահարթության ձգման դեպքում:

S. A. KALOEROV

THE STRAINED STATE OF AN ANISOTROPIC SEMI-PLANE WITH ELLIPTIC HOLES, LYING ALONG THE BOUNDARY

Summary

The paper presents the problem of elastic equilibrium of an anisotropic semi-plane with finite number of elliptic holes, lying along the boundary.

The problem is reduced to the solution of an infinite quasi-regular system at linear algebraic equations.

A detailed analysis at the stress distribution in an expanding orthotropic semi-plane with two elliptic holes are given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калоеров С. А.* Напряженное состояние анизотропной полуплоскости с конечным числом эллиптических отверстий. Прикл. мех., т. II, вып. 10, 1966.
2. *Космодамианский А. С.* Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями. Прикл. мех., т. 1, вып. 10, 1965.
3. *Гурьянов В. М., Космодамианский А. С.* Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями. В сб. „Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел", вып. 2. Изд-во Саратовского университета, 1965.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат. М., 1957.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

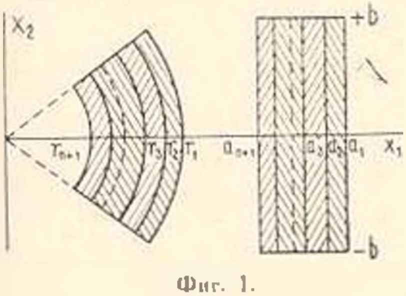
ЗАДАЧА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ИЗГИБА СОСТАВНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ИЗ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Задача больших упругих деформаций для цилиндрического изгиба однородного изотропного и несжимаемого параллелепипеда с помощью функции энергии деформации общего вида исследована в работе Ривлина [1, 2]. В работе [3] эта же задача была решена для случая, когда функция энергии деформации материала определяется выражением Муней-Ривлина.

В настоящей работе эта задача рассматривается для параллелепипеда, составленного из нескольких параллелепипедов из различных упругих изотропных и несжимаемых материалов.

1. Пусть границы и поверхности контакта недеформированного параллелепипеда, составленного из различных однородных, изотропных, несжимаемых и упругих материалов, в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3) определяются плоскостями (фиг. 1)

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \dots, \quad x_1 = a_{n+1}$$
$$x_2 = \pm b, \quad x_3 = \pm c \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

Пусть параллелепипед деформируется симметрично относительно оси x_1, так что

1) каждая плоскость, первоначально нормальная к оси x_1, становится в деформированном состоянии частью цилиндра с осью x_3;

2) плоскости, первоначально нормальные к оси x_2, в деформированном состоянии параллелепипеда проходят через ось x_3;

3) в направлении оси x_3 происходит равномерное растяжение с коэффициентом растяжения λ.

Для определения деформированного состояния тела выберем систему цилиндрических полярных координат (r, θ, y_1).

Используя условия несжимаемости, получаем соотношения [2]

$$x_1 = \frac{1}{2} A r^2 + B, \quad x_2 = \frac{\lambda\theta}{A}, \quad x_3 = \frac{y_3}{\lambda} \tag{1.2}$$

где A и B — постоянные.

Обозначая через $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ радиусы граничных цилиндрических поверхностей деформированного составного параллелепипеда, на основании (1.2) для A и B будем иметь выражения

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(a_1 - a_{k+1})}{r_1^2 - r_{k+1}^2} = \frac{2(a_1 - x_1)}{r_1^2 - r^2} = \frac{2(x_1 - a_{n+1})}{r^2 - r_{n+1}^2} \\ B &= \frac{a_{k+1} r_1^2 - a_1 r_{k+1}^2}{r_1^2 - r_{k+1}^2} = \frac{x_1 r_1^2 - a_1 r^2}{r_1^2 - r^2} = \frac{a_{n+1} r^2 - x_1 r_{n+1}^2}{r^2 - r_{n+1}^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Контрвариантные компоненты тензора напряжения будут [2]

$$\begin{gathered} \tau^{11}_{(k)} = L_{(k)}(r) + H_k \\ r^2 \tau^{22}_{(k)} = \tau^{11}_{(k)} + \left(\frac{A^2 r^2}{\lambda^2} - \frac{1}{A^2 r^2}\right)\left(\Phi_{(k)} + \lambda^2 \Psi_{(k)}\right) = \tau^{11}_{(k)} + r\frac{dW_{(k)}}{dr} \\ \tau^{33}_{(k)} = \tau^{11}_{(k)} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{A^2 r^2}\right)\left(\Phi_{(k)} + \frac{A^2 r^2}{\lambda^2}\Psi_{(k)}\right) \\ \tau^{23}_{(k)} = \tau^{31}_{(k)} = \tau^{12}_{(k)} = 0 \\ r_k \geqslant r \geqslant r_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где H_k — постоянные,

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^{r} \left(\frac{A^2 r}{\lambda^2} - \frac{1}{A^2 r^3}\right)\left(\Phi_{(k)} - \lambda^2 \Psi_{(k)}\right) dr = W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) \tag{1.5}$$

$$\Phi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2} \tag{1.6}$$

$W_{(k)}$ — функция энергии деформации; I_1 и I_2 — первый и второй инварианты деформации, определяемые уравнениями

$$I_1 = \frac{1}{A^2 r^2} + \frac{A^2 r^2}{\lambda^2} + \lambda^2, \quad I_2 = A^2 r^2 + \frac{\lambda^2}{A^2 r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \tag{1.7}$$

На основании (1.4) для τ^{11} на граничных цилиндрических поверхностях деформированного тела имеем

$$\begin{array}{ll} \tau^{11}_{(1)}\big|_{r=r_1} = H_1 & \tau^{11}_{(1)}\big|_{r=r_2} = L_{(1)}(r_2) + H_1 \\ \tau^{11}_{(2)}\big|_{r=r_2} = H_2 & \tau^{11}_{(2)}\big|_{r=r_3} = L_{(2)}(r_3) + H_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau^{11}_{(n)}\big|_{r=r_n} = H_n & \tau^{11}_{(n)}\big|_{r=r_{n+1}} = L_{(n)}(r_{n+1}) + H_n \end{array} \tag{1.8}$$

Из условия сцепления

$$\tau^{11}_{(k)}\Big|_{r=r_{k+1}} = \tau^{11}_{(k+1)}\Big|_{r=r_{k+1}} \tag{1.9}$$

и (1.8) следует

$$H_1 = \tau^{11}_{(1)}\Big|_{r=r_1} = R_1$$

$$H_{k+1} = H_k + L_{(k)}(r_{k+1}) = H_k + W_{(k)}(r_{k+1}) - W_{(k)}(r_k)$$

$$\tau^{11}_{(n)}\Big|_{r=r_{n+1}} = R_2 = H_n + L_{(n)}(r_{n+1}) = H_n + W_{(n)}(r_{n+1}) - W_{(n)}(r_n) \tag{1.10}$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1)$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях деформированного тела.

На основании (1.10) и (1.5) получаем соотношение

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^{n} L_{(k)}(r_{k+1}) = 0 \tag{1.11}$$

или

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^{n} [W_{(k)}(r_{k+1}) - W_{(k)}(r_k)] = 0 \tag{1.12}$$

На каждой из граней $\theta = \pm\theta_0$ действует результирующая нормальная сила

$$F = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r^2 \tau^{22}_{(k)} dr \tag{1.13}$$

Так как согласно (1.4) и (1.5)

$$r^2\tau^{22}_{(k)} = W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) + H_k + r\,\frac{dW_{(k)}(r)}{dr} =$$

$$= \frac{d}{dr}\, r\,[W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) + H_k] = \frac{d}{dr}\, r\,[L_{(k)}(r) + H_k] = \frac{d}{dr}\,(r\tau^{11}_{(k)}) \tag{1.14}$$

выражение (1.13), если принять во внимание условия сцепления (1.9), приводится к виду

$$F = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} [r\tau^{11}_{(k)}]\Big|_{r_{k+1}}^{r_k} = 2\lambda c\,(r_1 R_1 - r_{n+1} R_2) \tag{1.15}$$

Отсюда следует, что если внешняя и внутренняя цилиндрические поверхности свободны от напряжений, или $r_1 R_1 = r_{n+1} R_2$, то $F = 0$.

Результирующий момент, действующий на каждую из граней $\theta = \pm\theta_0$, равен

$$M = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r\tau^{22}_{(k)} dr = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r \frac{d}{dr} (r\tau^{11}_{(k)})\, dr =$$

$$= 2\lambda c\,(r_1^2 R_1 - r_{n+1}^2 R_2) + 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} r\tau^{11}_{(k)} dr \tag{1.16}$$

Если $R_1 = R_2 = 0$ или $r_1^2 R_1 = r_{n+1}^2 R_2$, то

$$M = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} r\tau^{11}_{(k)} dr \tag{1.17}$$

Результирующая сила, действующая на поверхностях $y_3 = \pm \lambda c$, будет

$$N = 2\pi \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r\tau^{33}_{(k)} dr \tag{1.18}$$

Для полного решения задачи необходимы конкретные граничные условия, например:

а) заданы радиусы r_1 и r_{n+1} (или один из них и ϑ_0), коэффициент растяжения λ и напряжение R_1 (или R_2).

Тогда для определения деформированного состояния из (1.2) и (1.3) получаем

$$r = \sqrt{\frac{x_1 r_1^2 - x_1 r_{k+1}^2 - a_{k+1} r_1^2 + a_1 r_{k+1}^2}{a_1 - a_{k+1}}} \tag{1.19}$$

$$\vartheta = \frac{2x_1 (a_1 - a_{k+1})}{\lambda (r_1^2 - r_{k+1}^2)} \tag{1.20}$$

Постоянные H_k и другое нормальное напряжение R_2 (или R_1) определяются из (1.10). Напряженное состояние определяется уравнениями (1.4), (1.15), (1.16) и (1.18);

б) заданы нормальные напряжения R_1 и R_2, коэффициент растяжения λ и ϑ_0.

Тогда можно с помощью (1.19) и (1.20) все радиусы r_k выразить, например, через r_1, после чего легко найти остальные радиусы и напряженное состояние;

в) заданы нормальные напряжения R_1 и R_2, коэффициент растяжения λ и один из радиусов r_k, например, r_1.

В этом случае можно с помощью (1.20) все остальные радиусы выразить через ϑ_0 и решить уравнение (1.12) относительно ϑ_0;

г) заданы нормальные напряжения R_1 и R_2, результирующий момент M и λ.

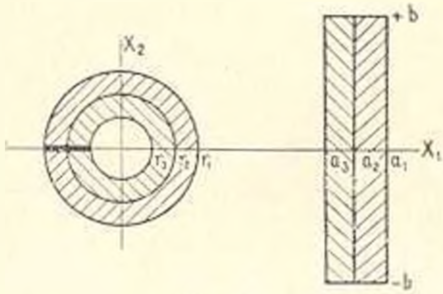
Тогда для определения деформированного состояния можно с помощью (1.20) все радиусы выразить через r_1 и θ_0, а потом, подставляя в (1.16) и (1.12), получить в общем случае два трансцендентных уравнения для определения r_1 и θ_0. Напряженное состояние определяется соотношениями (1.4), (1.15), (1.16) и (1.18).

2. Рассмотрим следующий численный пример. Пусть параллелепипед, составленный из двух упругих материалов, для которых функции энергии деформации имеют выражения

$$\begin{aligned} W_{(1)} &= (I_1 - 3) + 0.14\,(I_2 - 3) \\ W_{(2)} &= 2\,(I_1 - 3) + 0.28\,(I_2 - 3) \end{aligned} \tag{2.1}$$

в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3) недеформированного состояния определяется плоскостями (фиг. 2)

$$\begin{gathered} x_1 = a_1 = 25\,см, \quad x_1 = a_2 = 22\,см, \quad x_1 = a_3 = 20\,см \\ x_2 = \pm b = \pm 10, \quad x_3 = \pm c = \pm 10\,см \end{gathered} \tag{2.2}$$



Фиг. 2.

Пусть параллелепипед изгибается в круглую цилиндрическую трубу, внешние цилиндрические поверхности которой свободны от напряжений, причем по направлению x_3 эта труба не растягивается.

$$R_1 = R_2 = 0, \quad \lambda = 1, \quad \theta_0 = \pi \tag{2.3}$$

Из (1.20) получаем

$$\theta_0 = \frac{2b\,(a_1 - a_2)}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{2b\,(a_1 - a_3)}{r_1^2 - r_3^2} \tag{2.4}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_1^2 - 19.09855 \\ r_3^2 &= r_1^2 - 31.83091 \end{aligned} \tag{2.5}$$

На основании (1.7)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{A^2 r^2} + A^2 r^2 + 1 \tag{2.6}$$

где A определяется из (1.2),

$$A = \frac{\lambda\theta_0}{b} = 0.1\,\pi \tag{2.7}$$

Функции энергии деформации первого и второго слоев упрощаются

$$W_{(1)}(r) = 1.14\,(I_1 - 3) = 11.55056\,\frac{1}{r^2} + 0.11251\,r^2 - 2.28 \tag{2.8}$$

$$W_{(2)}(r) = 2.28\,(I_1 - 3) = 23.10112\,\frac{1}{r^2} + 0.22502\,r^2 - 4.56$$

Из (1.12) находим

$$W_{(1)}(r_2) - W_{(1)}(r_1) + W_{(2)}(r_3) - W_{(2)}(r_2) = 0 \tag{2.9}$$

Подстановляя (2.8) и (2.5) в (2.9), после простых преобразований получаем

$$r_1^6 - 50.9295\,r_1^4 + 505.2654\,r_1^2 - 1400.4540 = 0 \tag{2.10}$$

Отсюда

$$r_1 = 5.9715\,см, \quad r_2 = 4.0694\,см, \quad r_3 = 1.9564\,см$$

$W_{(1)}(r_1) = 2.056, \quad W_{(1)}(r_2) = 0.281, \quad W_{(2)}(r_2) = 0.561, \quad W_{(2)}(r_3) = 2.337$

На основании (1.10) получаем

$$H_1 = R_1 = 0, \quad H_2 = W_{(1)}(r_2) - W_{(1)}(r_1) = -1.775$$

Компоненты контрвариантного тензора напряжений будут

$$\sigma^{11}_{(1)} = 11.55056\,\frac{1}{r^4} + 0.1125\,r^2 - 4.336$$

$$r^2\sigma^{22}_{(1)} = -11.55056\,\frac{1}{r^4} + 0.3375\,r^2 - 4.336$$

$$\sigma^{33}_{(1)} = 5.18438\,\frac{1}{r^4} + 0.2005\,r^2 - 2.616$$

$$\sigma^{11}_{(2)} = 23.10112\,\frac{1}{r^4} + 0.2250\,r^2 - 6.896$$

$$r^2\sigma^{22}_{(2)} = -23.10112\,\frac{1}{r^4} + 0.6750\,r^2 - 6.896$$

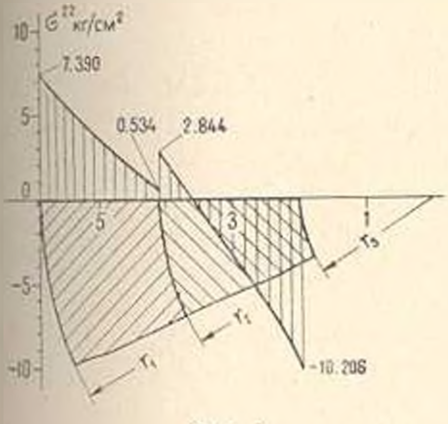
$$\sigma^{33}_{(2)} = 10.36876\,\frac{1}{r^4} + 0.4010\,r^2 - 3.456$$

На фиг. 3 показан график распределения нормальных нагрузок $\sigma^{22} = r^2\sigma^{22}$, действующих на каждую из плоскостей $\theta = \pm\pi$. Результирующий момент этих нагрузок определяется из (1.17)

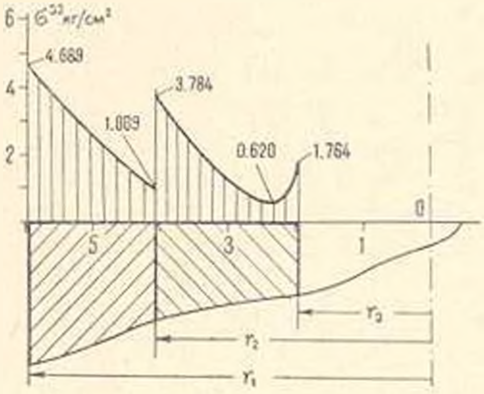
$$M = 4.26\ кгм$$

График распределения нормальных нагрузок на торцевых плоскостях $y_3 = \pm 10$ *см* изображен на фиг. 4. Результирующая сила этих нагрузок определяется из (1.18)

$$N = 254.14 \text{ кг}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за руководство работой и ценные сонеты.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IV 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ԾՌՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա աշխատանքում մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա դիտարկվում է անսեղմելի նյութերից պատրաստված բազմաշերտ զուգահեռանիստի շրջանային ծռման խնդիրը, երբ դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան ունի ընդհանուր տեսք։

Մասնավորապես, թվային օրինակի տեսքով, ուսումնասիրված է Մունի-Ռիվլինի նյութերից պատրաստված, երկշերտ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծռման խնդիրը։ Ընդունված է, որ զուգահեռանիստը ծռվում է մինչև կլոր գլանային խողովակ դառնալը, որի արտաքին գլանային մակերևույթները ազատ են լարումներից։

Աշխատանքում օգտագործված է համասեռ զուգահեռանիստի ծռման համար Ռիվլինի կողմից տրված լուծումները [1, 2]։

R. E. MKRTCHIAN

THE PROBLEM OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR FLEXURE OF A COMPOSITE INCOMPRESSIBLE CUBOID

Summary

The solution of the problem of large elastic deformations for flexure of a composite incompressible cuboid is considered, when the strain-energy function has a general form.

In particular, the numerical solution of the problem of flexure of a cuboid composed of two layers of Mooney-Rivlin's materials, when the cuboid after deformation becomes a cylindrical tube, is considered in detail.

R. S. Rivlin's solutions [1, 2] for a homogeneous cuboid are used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Futher Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure. Philos. Trans Roy. Soc., A, 242, 1949, 173—195.
2. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, V. The Problem of Flexure. Proc. Roy. Soc., A, 195, 1949, 463.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Б. Л. ПЕЛЕХ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

В работе на базе одного варианта обобщенной прикладной теории изгиба трансверсально-изотропных пластин, учитывающей деформации поперечных сдвигов [1, 2], рассмотрена задача о несимметричном изгибе круглой сплошной пластинки нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами классической теории [3].

§ 1. *Исходные соотношения.* Задача изгиба трансверсально-изотропных пластинок сводится к интегрированию уравнений [1, 2]

$$
\begin{aligned}
&D\Delta\Delta w = q - \varepsilon\Delta q \\
&\Delta\varphi - k^2\varphi = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

где w, φ — функции прогибов и углов поворота, q — интенсивность внешней нагрузки, $\varepsilon = \frac{2h^2}{5(1-\nu)}\left(\frac{2G}{G'} - \nu'\frac{E}{E'}\right)$, $k^2 = \frac{5}{2}\frac{G}{G'}h^{-2}$, $2h$ — толщина пластинки.

При этом перерезывающие силы, изгибающие и крутящие моменты выражаются через функции w и φ следующим образом (в полярных координатах r, θ):

$$
\begin{aligned}
N_r &= -D\left(\frac{\partial}{\partial r}\Delta w + \frac{\varepsilon}{D}\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\
N_\theta &= -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta w + \frac{\varepsilon}{Dr}\frac{\partial q}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial r} \\
M_r &= -D\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]\left(w + \varepsilon\Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D}q\right) + \\
&\quad + \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \\
M_\theta &= -D\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(w + \varepsilon\Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D}q\right) - \\
&\quad - \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) \\
H_{r\theta} &= -D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(w + \varepsilon\Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D}q\right)\right] + \varphi - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

В случае опертого контура возможны два варианта граничных условий [2]

$$w = 0, \qquad M_r = 0, \qquad N_\theta = 0 \tag{1.3}$$

либо

$$w = 0, \qquad M_r = 0, \qquad H_{r\theta} = 0 \tag{1.4}$$

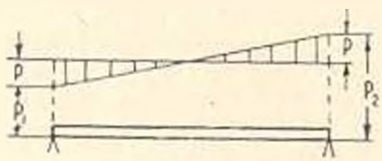
которые могут быть названы условиями шарнирно- и свободно-опертого края соответственно.

§ 1. *Постановка и решение задачи.* Рассмотрим круглую пластинку под действием нагрузки, изменяющейся по линейному закону (фиг. 1). Исследование будем вести на базе уравнений (1.1)—(1.4). Решение указанной задачи можно получить наложением решений двух задач изгиба круглой пластины под действием:

а) равномерно-распределенной нагрузки интенсивности

$$q = p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2);$$

б) нагрузки, изменяющейся линейно вдоль диаметра пластины от $-p$ до $+p$.



Фиг. 1.

Решение задачи а) получено С. А. Амбарцумяном [1, 2]. Остается решить задачу б). Исследуем поэтому действие на пластинку неравномерной нагрузки, изображенной на фиг. 1. В этом случае интенсивность нормальной нагрузки q представляется так [3]:

$$q = \frac{pr}{a}\cos\theta \tag{2.1}$$

Решения уравнений (1.1) разыскиваем в виде

$$w = w_1 + w_0 = w_1 + \sum_{m=1}^{\infty}[W_m(r)\cos m\theta + \bar{W}_m(r)\sin m\theta]$$

$$\varphi = \varphi_0 = \sum_{m=1}^{\infty}[\Phi_m(r)\sin m\theta + \bar{\Phi}_m(r)\cos m\theta] \tag{2.2}$$

где w_1 — частное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) = \frac{q}{D} - \frac{\Delta q}{D} \tag{2.3}$$

которое легко разыскивается

$$w_1 = \frac{pr^5}{192\,aD}\cos\theta \tag{2.4}$$

и w_0, φ_0 — общие решения однородных уравнений (1.1), которые в данном случае можно представить в форме

$$
\begin{aligned}
w_0 &= A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r \\
\varphi_0 &= E_1 J_1(kr) + F_1 K_1(kr)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Вводя безразмерную координату ρ по формуле

$$
\rho = \frac{r}{a} \quad (\rho \leqslant 1) \tag{2.6}
$$

окончательные искомые функции w, φ запишем в виде

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{pa^4}{192\,D}(\rho^5 + A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho \ln \rho) \cos \theta \\
\varphi &= \frac{pa^4}{192}[EJ_1(t\rho) + FK_1(t\rho)] \sin \theta
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где $t = ka$.

Постоянные в (2.7) определяются из граничных условий на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластинки.

Если пластинка сплошная, то прогибы и моменты в центре пластинки должны быть конечными и в (2.7) надо положить $C = D = F = 0$ (условия „в центре").

В этом случае

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{pa^4}{192\,D}(\rho^5 + A\rho + B\rho^3) \cos \theta \\
\varphi &= \frac{pa^4}{192} EJ_1(t\rho) \sin \theta
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

§ 3. *Изгиб свободно-опертой пластины линейно-изменяющейся нагрузкой.* В предположении, что край сплошной круглой пластинки свободно оперт, постоянные в (2.8) определяем из условий (1.4) при $\rho = 1$. Эта процедура приводит к трем алгебраическим уравнениям относительно A, B и E:

$$
\begin{gathered}
1 + A + B = 0 \\
2(5+\nu) + 24\,\varepsilon_0(3+\nu) + (3+\nu)B - \frac{1}{2}E\varepsilon_0(1-\nu)[tJ_1'(t) - J_1(t)] = 0 \\
2 + 24\,\varepsilon_0 + B - \frac{E\varepsilon_0}{4}[t^2 J_1(t) - 2(tJ_1'(t) - J_1(t))] = 0
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

отсюда

$$
A = \frac{7+\nu}{3+\nu} + 24\varepsilon_0 + \frac{8(1-\nu)}{3+\nu}\,\frac{L_1(t)}{L(t)}
$$

$$
B = -\left[\frac{2(5+\nu)}{3+\nu} + 24\varepsilon_0 + \frac{8(1-\nu)}{3+\nu}\,\frac{L_1(t)}{L(t)}\right] \qquad E = -\frac{16}{\varepsilon_0 L(t)} \tag{3.2}
$$

где

$$
L(t) = (3+\nu)\,t^2 J_1(t) - 8L_1(t), \quad L_1(t) = tJ_1'(t) - J_1(t), \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{a^2} \tag{3.3}
$$

Таким образом, прогиб пластинки w и функция φ оказываются равными

$$
w = \frac{pa^4\rho(1-\rho^2)}{192D}\left[\left(\frac{7+\nu}{3+\nu} - \rho^2\right) + 24\varepsilon_0 + \frac{1-\nu}{3+\nu}\,\frac{8L_1(t)}{L(t)}\right]\cos\theta \tag{3.4}
$$

$$
\varphi = -\frac{pa^4}{12\varepsilon_0}\,\frac{J_1(t\rho)}{L(t)}\sin\theta \tag{3.5}
$$

По известным функциям w, φ находим изгибающие моменты и перерезывающие силы

$$
M_\rho = \frac{pa^2}{48}\left\{\rho(1-\rho^2)(5+\nu) - \frac{4(1-\nu)}{\rho L(t)}\left[\rho^2 L_1(t) - L_1(t\rho)\right]\right\}\cos\theta
$$

$$
M_\theta = \frac{pa^2\rho}{48(3+\nu)}\Big\{(5+\nu)(1+3\nu) - (1+5\nu)(3+\nu)\rho^2 +
$$

$$
+ \frac{4(1-\nu)}{\rho^2 L(t)}\left[\rho^2(1+3\nu)L_1(t) - (3+\nu)L_1(t\rho)\right]\Big\}\cos\theta
$$

$$
N_\rho = \frac{pa}{24(3+\nu)}\Big\{2(5+\nu) - 9(3+\nu)\rho^2 -
$$

$$
- \frac{1-\nu}{L(t)}\left[t^2(3+\nu)J_1(t\rho) - 8L_1(t)\right]\Big\}\cos\theta
$$

$$
N_\theta = -\frac{pa}{24(3+\nu)}\Big\{\rho\left[2(5+\nu) - 3\rho^2(3+\nu)\right] +
$$

$$
+ \frac{1-\nu}{L(t)}\left[t^2(3+\nu)J_1'(t\rho) + 8\rho L_1(t)\right]\Big\}\sin\theta \tag{3.6}
$$

Перейдем к обсуждению результатов. Во всех внутренних точках пластины, не принадлежащих границе ($\rho < 1$), справедливо следующее: при неограниченном увеличении параметра $\frac{a}{h}$ до бесконечности из полученных выражений для усилий и моментов (3.6) следуют соответствующие зависимости теории Кирхгофа [3].

Действительно, используя ассимптотические представления для функций Бесселя, выводим, что

$$\lim_{a/h \to \infty} M_\rho(\rho, \theta) = M_\rho^{(k)} = \frac{pa^2}{48} \rho (1 - \rho^2)(5 + \nu) \quad \text{и т. д.,} \tag{3.7}$$

где индексом (k) обозначены величины, соответствующие классической теории [3].

Несколько по-иному обстоит дело на граничном контуре плиты. При $\rho = 1$ из (3.6) для перерезывающих усилий получаем

$$N_\rho = -\frac{pa}{4} \cos \theta \tag{3.8}$$

$$N_\theta = -\frac{pa}{12} \frac{tJ_0(t)}{\varepsilon_0 L(t)} \sin \theta \tag{3.9}$$

При этом

$$4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{pa}{4} \cos \theta \, a^2 \cos \theta d\theta = \frac{\pi a^3 p}{4} \tag{3.10}$$

что, как и должно быть, уравновешивает момент внешней нагрузки относительно диаметра пластинки.

Исследуя выражение (3.9), приходим к выводу, что перерезывающие усилия N_θ, действующие в площадках, перпендикулярных к граничному контуру, имеют порядок h^{-1}, т. е. на единицу выше порядка усилий, определяемых классической теорией [3].

Соответствующие касательные срезывающие напряжения $\tau_{\theta z}$ при этом порядка h^{-2}, т. е. порядка главных изгибных напряжений σ_ρ, σ_θ, $\tau_{\rho\theta}$.

Качественно совпадающий с отмеченным результат получен на базе уравнений теории типа Тимошенко в работах [4, 5] для прямолинейного свободно-опертого края и свободной круговой полости; для свободной полости этот же эффект замечен в работах [6, 7], выполненных на базе уравнений теории упругости.

Львовский политехнический институт

Поступила 10 VII 1968

Բ. Լ. ՊԵԼԵԽ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԾՌՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ս. Ա. Համբարձումյանի սալերի ծռման ընդհանրացված տեսության հիման վրա, դիտարկված է՝ գծային օրենքով փոփոխվող բեռի ազդեցության տակ, տրանսվերսալ-իզոտրոպ կլոր սալի ոչ-սիմետրիկ ծռման խնդիրը։

Ստացված լուծումների ասիմպտոտիկության ժամանակ, ինչպես են բերված մի շարք քանակական և որակական շեղումներ Կիրխհոֆի կլասիկ տեսության համապատասխան արդյունքներից։

Մասնավորապես, ցույց է տրված, որ ազատ հենված եզրին ուղղահայաց հարթակներում, կտրող ուժերի կարգը մեկով բարձր է Կիրխհոֆի կլասիկ տեսությամբ որոշվող համապատասխան կտրող ուժերից։

B. L. PELEKH

ON THE PROBLEM OF ASYMMETRICAL BENDING OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC ROUND PLATES

Summary

In this paper the problem of bending of transversal-isotropic round plates with a linear load is considered on the base the specified theory of bending of plates [1, 2]. The results are compared with the classical theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.
4. *Пелех Б. Л.* К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. мех., т. I, вып. 7, 1965.
5. *Шереметьев М. П., Пелех Б. Л., Дячина О. П.* Исследование влияния деформаций сдвига на изгиб квадратной плиты сосредоточенной силой. Прикл. мех., т. IV, вып. 4, 1968.
6. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. XXVIII, вып. 3, 1964.
7. *Колос А. В.* Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. XXVIII, вып. 3, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

С. Р. САРОЯН

КРУЧЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО БРУСА, НЕСООСНО АРМИРОВАННОГО КРУГОВЫМ СТЕРЖНЕМ

В настоящей работе рассматривается задача кручения призматического бруса, армированного несоосным круговым стержнем. Поперечное сечение рассматриваемого бруса представляет собой область, ограниченную криволинейным прямоугольником, с нецентральным ядром из другого материала.

Поставленная задача решается методом конформного отображения. Получены численные значения касательных напряжений и жесткостей для прямоугольников с различными соотношениями сторон.

Отметим, что задача о кручении призматического стержня квадратного профиля, армированного несоосным круговым стержнем, была решена Ю. А. Амензаде [1].

1. Как известно [2], отображение внутренней области единичного круга $|\zeta| < 1$ на внутреннюю область G многоугольника осуществляется функцией Кристоффеля-Шварца

$$z = \omega(\zeta) = A \int_0^{\zeta} (a_1 - t)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - t)^{\alpha_2 - 1} \cdots (a_n - t)^{\alpha_n - 1} dt + B \quad (1.1)$$

где z и ζ — комплексные координаты, соответственно для областей многоугольника и единичного круга $|\zeta| < 1$; n — число сторон многоугольника; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — комплексные координаты точек на окружности единичного круга, соответствующие вершинам многоугольника; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника; A и B — вообще, комплексные постоянные, характеризующие положение многоугольника и его размеры.

В дальнейшем, следуя (3), будем представлять функцию (1.1) в виде

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \zeta^{k} \quad (1.2)$$

Коэффициенты B_k определяются по рекуррентным соотношениям, полученным в [3]

$$B_k = \frac{1}{k(k-1)} \Big[(k-1) B_{k-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1-\alpha_\nu}{a_\nu} +$$

$$+(k-2)B_{k-2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1-\alpha_s}{\gamma_s^2}+\cdots+B_1\sum_{s=1}^{n}\frac{1-\alpha_s}{\gamma_s^{k-1}}\Bigg| \tag{1.3}$$

$$B_1=1 \quad (k=2,3,\ldots)$$

В случае произвольного расположения по отношению к границе области G начала координат в плоскости z величина γ_s, входящая в (1.3), определяется по формуле, полученной в [4]

$$\gamma_s=\frac{d_s+\zeta_0}{1+d_s\bar{\zeta}_0} \tag{1.4}$$

где $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ — комплексные координаты точек единичной окружности $|\zeta|=1$, соответствующие вершинам многоугольника $D_1, D_2, \ldots, D_n$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ — измеренные в долях π внутренние углы многоугольника; а ζ_0 — произвольная точка круга.

В рассматриваемой задаче производится отображение внутренней области единичного круга $|\zeta|<1$ на внутреннюю область прямоугольника. При этом для малых значений $\rho_2<1$ окружностям на плоскости ζ будут соответствовать замкнутые кривые на плоскости z, близкие к окружности. Поэтому (1.2) можно рассматривать как функцию, приближенно отображающую кольцо $\rho_2<\rho<1$ на двусвязную область, ограниченную извне криволинейным прямоугольником, а изнутри—окружностью.

Поэтому, окружности γ_1 и γ_2 плоскости ζ отобразятся соответственно на контуры Γ_1 и Γ_2 плоскости z. Для получения достаточно точного контура Γ_1 прямоугольника в отображающей функции (1.2) взято 100 членов.

Внутренний контур Γ_2 независимо от внешнего контура Γ_1, при малых $\rho_2<1$, близок к окружности с любой заданной точностью, которая возрастает с уменьшением ρ_2.

Так как в данной задаче производится отображение внутренней области единичного круга на внутреннюю область прямоугольника, то в качестве исходных данных в (1.4) примем

$$d_1=e^{i\varepsilon},\quad d_2=-e^{-i\varepsilon},\quad d_3=-e^{i\varepsilon},\quad d_4=e^{-i\varepsilon},\quad \zeta_0=-0.6$$

Вычисляя по (1.4) значение γ_s $(s=1,2,3,4)$, получим

$$\gamma_1=e^{i\theta_1},\quad \gamma_2=e^{i\theta_2},\quad \gamma_3=e^{-i\theta_2},\quad \gamma_4=e^{-i\theta_1} \tag{1.5}$$

где

$$\theta_1=\operatorname{arctg}\frac{0.16\sin\varphi}{0.34\cos\varphi-0.3}$$

$$\theta_2=\operatorname{arctg}\frac{0.16\sin\varphi}{0.34\cos\varphi+0.3} \tag{1.6}$$

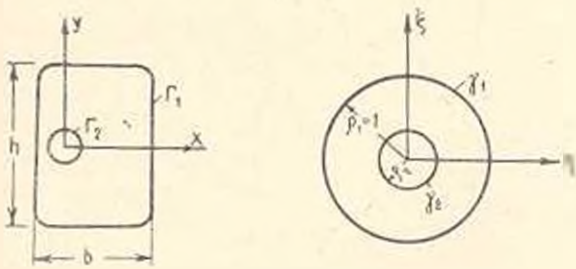
Подставляя (1.5) в (1.3) и принимая $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\dfrac{1}{2}$, для коэффициентов B_k получим

$$B_k = \frac{1}{k(k-1)}\{(k-1)B_{k-1}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + (k-2)B_{k-2}(\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2) + \cdots + B_1[\cos(k-1)\theta_1 + \cos(k-1)\theta_2]\} \qquad (1.7)$$

Придавая значения параметру φ и вычисляя по (1.7) с учетом (1.6) коэффициенты B_k, получим прямоугольники с разными отношениями сторон. В табл. 1 приведены значения отношения сторон h/b прямоугольника в зависимости от параметра φ.

Таблица 1

φ	0.25π	0.38π	0.442π	0.473π	0.487π
h/b	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0



Фиг. 1.

2. Задача свободного кручения составных призматических стержней, поперечные сечения которых представляют собой двусвязные области, сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2\Psi_j = -2 \quad (j = 1, 2) \quad (\nabla^2 \text{ — оператор Лапласа}) \qquad (2.1)$$

при следующих граничных условиях:

на γ_1 $(\rho = \rho_1 = 1)$ $\qquad \Psi_1 = 0$

на γ_2 $(\rho = \rho_2)$ $\qquad \mu_1\Psi_1 = \mu_2\Psi_2, \quad \operatorname{Re}\Phi_1 = \operatorname{Re}\Phi_2 \qquad (2.2)$

Входящая в (2.1) $\Psi_j(x, y)$ — функция напряжений. Индекс $j = 1$ имеет место для области сечения, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 (соответствующий модуль сдвига μ_1), а индекс $j = 2$ — для области сечения, ограниченной извне контуром Γ_2 (соответствующий модуль сдвига μ_2).

Представим функцию напряжений $\Psi_j(x, y)$ в комплексном виде

$$\Psi_j(x, y) = -\frac{i}{2}[\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - iz\bar{z}] \qquad (2.3)$$

где

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

Функция

$$\Phi_j(z) = \varphi_j(x, y) + i\psi_j(x, y) \qquad (2.4)$$

есть комплексный потенциал кручения, причем $\varphi_j(x, y)$ — функция кручения, а $\psi_j(x, y)$ — функция, сопряженная с $\varphi_j(x, y)$.

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = B_0 \sum_{k=1}^{N} B_k \zeta^k \tag{2.5}$$

составленная из первых N членов разложения (1.2), реализует отображение внутренности единичного круга $|\zeta| < 1$ на внутреннюю область прямоугольника.

Подставляя (2.5) в (2.3), получим

$$\Psi_j = -\frac{i}{2}\left[\Phi_j(\zeta) - \overline{\Phi_j(\zeta)} - i\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}\right] \tag{2.6}$$

Функции $\Phi_1(\zeta)$ и $\Phi_2(\zeta)$, регулярные соответственно в кольце $\rho_2 < \rho < 1$ и в круге $0 < \rho < \rho_2$, будем искать в виде

$$\Phi_1(\zeta) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \zeta^n \tag{2.7}$$

$$\Phi_2(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} b_n \zeta^n \tag{2.8}$$

Фигурирующие в (2.7) и (2.8) коэффициенты a_n и b_n — чисто мнимые.

Произведение $\frac{1}{2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}$, входящее в (2.6), на линиях $\rho = \mathrm{const}$ разложим в ряд Фурье

$$\frac{1}{2}\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\vartheta + \beta_n \sin n\vartheta) \tag{2.9}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}B_0^2 \sum_{k=1}^{N} B_k^2 \rho^{2k}$$

$$\alpha_n = B_0^2 \sum_{k=1}^{N-n} B_k B_{k+n} \rho^{2k+n}$$

$$\beta_n = 0 \tag{2.10}$$

При $\rho = \rho_1 = 1$ коэффициенты α_0 и α_n будут снабжены сверху индексом 1, а при $\rho = \rho_2$ — индексом 2.

Удовлетворяя граничным условиям (2.2), определим коэффициенты a_n и b_n, фигурирующие в (2.7) и (2.8)

$$a_n = \frac{(\mu_1 - \mu_2)\alpha_n^{(2)} - (\mu_1 + \mu_2)\alpha_n^{(1)}\rho_2^{-n}}{\mu_1(\rho_2^n - \rho_2^{-n}) - \mu_2(\rho_2^n + \rho_2^{-n})}$$

$$a_{-n}=\frac{(\mu_1-\mu_2)\left(\alpha_n^{(1)}\rho_2^n-\alpha_n^{(2)}\right)}{\mu_1\left(\rho_2^n-\rho_2^{-n}\right)-\mu_2\left(\rho_2^n+\rho_2^{-n}\right)}$$

$$b_n=\frac{(\mu_1-\mu_2)\left(\rho_2^n+\rho_2^{-n}\right)\alpha_n^{(2)}-2\mu_1\alpha_n^{(1)}}{\rho_2^n\left[\mu_1\left(\rho_2^n-\rho_2^{-n}\right)-\mu_2\left(\rho_2^n+\rho_2^{-n}\right)\right]}$$

$$a_0=\alpha_0^{(1)},\qquad b_0=\frac{\mu_1}{\mu_2}\alpha_0^{(1)}-\frac{\mu_1-\mu_2}{\mu_2}\alpha_0^{(2)} \tag{2.11}$$

3. Крутящий момент, приложенный к основанию стержня, равен

$$M=\tau K \tag{3.1}$$

где τ — степень закручивания, K — жесткость при кручении.

Как известно [5],

$$K=\sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{\mu_j}{8i}\int_{\gamma_j}\overline{\omega(\sigma)}^2\omega(\sigma)\,d\omega(\sigma)-\frac{\mu_j}{8i}\int_{\gamma_j}\omega(\sigma)^2\overline{\omega(\sigma)}\,d\overline{\omega(\sigma)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_j}{4}\int_{\gamma_j}\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]d\omega(\sigma)\overline{\omega(\sigma)}\right\} \tag{3.2}$$

где σ — граничное значение переменной ζ ($\sigma\bar{\sigma}=\rho_j^2$, $j=1, 2$).

Произведя интегрирование и учитывая, что скручиваемый стержень состоит из двух материалов с модулями сдвига μ_1 и μ_2, получим

$$K=\mu_1\frac{\pi}{2}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\lambda_n^{(1)}A_{-n-1}^{(1)}+\lambda_{-n-1}^{(1)}A_n^{(1)}\right)-\sum_{n=0}^{N}\left(\lambda_n^{(2)}A_{-n-1}^{(2)}+\lambda_{-n-1}^{(2)}A_n^{(2)}\right)\right]+$$

$$+\mu_1\pi\left[\sum_{n=1}^{N}n\left(a_{-n}\lambda_n^{(1)}-a_n\lambda_{-n}^{(1)}\right)-\sum_{n=1}^{N}n\left(a_{-n}\lambda_n^{(2)}-a_n\lambda_{-n}^{(2)}\right)\right]+$$

$$+\mu_2\frac{\pi}{2}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(\lambda_n^{(2)}A_{-n-1}^{(2)}+\lambda_{-n-1}^{(2)}A_n^{(2)}\right)\right]-\mu_2\pi\sum_{n=1}^{N}nb_n\lambda_{-n}^{(2)} \tag{3.3}$$

где

$$\lambda_n^{(j)}=\alpha_n^{(j)}\rho_j^{-n},\qquad \lambda_{-n}^{(j)}=\alpha_n^{(j)}\rho_j^{n},\quad \lambda_0^{(j)}=2\alpha_0^{(j)} \tag{3.4}$$

$$(j=1, 2)$$

$$A_0^{(j)}=\sum_{k=1}^{N-1}(k+1)B_kB_{k+1}\rho_j^{2k}$$

$$A_{-n}^{(j)}=\sum_{k=1}^{N-n+1}kB_kB_{k+n-1}\rho_j^{2(k+n-1)}$$

$$A_n^{(j)}=\sum_{k=1}^{N-n-1}(k+n+1)B_kB_{k+n+1}\rho_j^{2k} \tag{3.5}$$

$$(j=1, 2)$$

4. Как известно (5), касательные напряжения при кручении определяются по формуле

$$T_{\rho}^{(j)} - iT_{\theta}^{(j)} = \mu_j \tau \frac{\zeta}{\rho_j |\omega'(\zeta)|} [\Phi_j'(\zeta) - i\omega'(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}] \tag{4.1}$$

Отделяя действительные и мнимые части в (4.1) и полагая, что фигурирующие в (3.5) коэффициенты $A_n^{(j)}$, $A_{-n}^{(j)}$, $A_n^{(j)}$ — действительные, с учетом (2.5), (2.7), (2.8) и (3.5) получим

$$T_{\theta}(\rho = \rho_1) = \frac{\mu_1 \tau}{|\omega'(\zeta)|} \Big\{ A_{-1}^{(1)} \rho_1^{-1} + \sum_{n=1}^{N} [(A_{n-1}^{(1)} - na_n) \rho_1^{n-1} +$$

$$+ (A_{-n-1}^{(1)} + na_{-n}) \rho_1^{-n-1}] \cos n\theta \Big\}$$

$$T_{\theta}(\rho = \rho_2) = \frac{\mu_1 \tau}{|\omega'(\zeta)|} \Big\{ A_{-1}^{(2)} \rho_2^{-1} + \sum_{n=1}^{N} [(A_{n-1}^{(2)} - na_n) \rho_2^{n-1} +$$

$$+ (A_{-n-1}^{(2)} + na_{-n}) \rho_2^{-n-1}] \cos n\theta \Big\}$$

$$T_{\theta}(\rho = \rho_2) = \frac{\mu_2 \tau}{|\omega'(\zeta)|} \Big\{ A_{-1}^{(2)} \rho_2^{-1} + \sum_{n=1}^{N} [(A_{n-1}^{(2)} - nb_n) \rho_2^{n-1} +$$

$$+ A_{-n-1}^{(2)} \rho_2^{-n-1}] \cos n\theta \Big\}$$

Рассмотрим численный пример. Примем $\frac{\mu_2}{\mu_1} = 8$, $\rho_1 = 0.3$. Радиусу ρ на плоскости ζ соответствует радиус R на плоскости z. За радиус R принята половина отрезка действительной оси, отсекаемого пересечением Γ_0 с этой осью. Расстояния от центра окружности до 10 дискретных точек, расположенных на Γ_0, отличаются от R не более, чем на 3%.

Значения R, ρ и жесткостей для прямоугольников с разными отношениями сторон приведены в табл. 2 и 3.

Как видно из построения с помощью (1.2) по дискретным точкам, кривая Γ_1 представляет собой прямоугольник с закругленными углами и почти прямыми сторонами. За одну из сторон прямоугольника принят отрезок, отсекаемый кривой Γ_1 от действительной оси, а за другую сторону — отрезок, отсекаемый кривой Γ_1 от мнимой оси. Отклонение сторон от прямолинейности для прямоугольников с разными отношениями сторон не превышает $\Delta\%$, значения которого приведены в табл. 4.

Эпюры касательных напряжений на внешнем контуре поперечного сечения, границе спая двух материалов и на оси симметрии поперечного сечения бруса в долях $\mu_1 \tau B_0$ приведены на фиг. 2, 3 и 4.

Таблица 2

h/b	R/B_0	δ %
1.0	0.3109	2.15
1.5	0.3172	1.99
2.0	0.3185	1.91
2.5	0.3189	1.93
3.0	0.3190	1.93

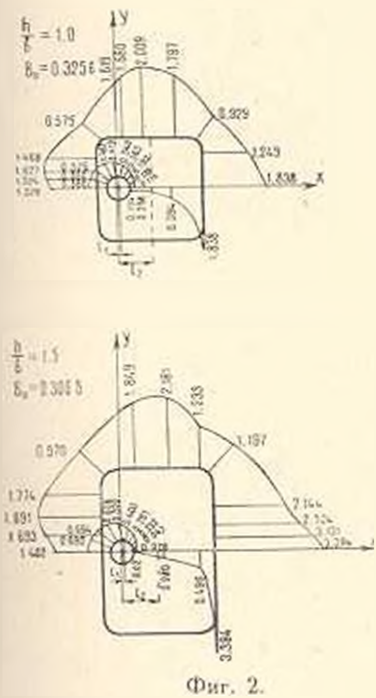
Таблица 3

h/b	$K/\mu_1 B_0^4$
1.0	0.904166
1.5	2.537221
2.0	4.166546
2.5	5.788586
3.0	7.318624

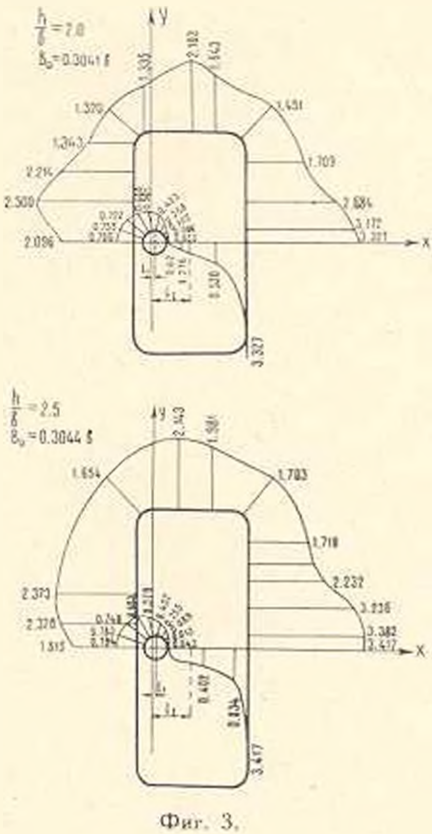
Таблица 4

h/b	l/B_0	Δ %
1.0	0.9209	0.55
1.5	1.0323	0.82
2.0	1.0576	4.08
2.5	1.0611	2.28
3.0	1.0623	4.86

Принимая сторону прямоугольника, параллельную оси x, за b, можно вычислить значения коэффициента B_0 для прямоугольников с разными соотношениями сторон. Результаты вычислений показаны на фиг. 2, 3 и 4.

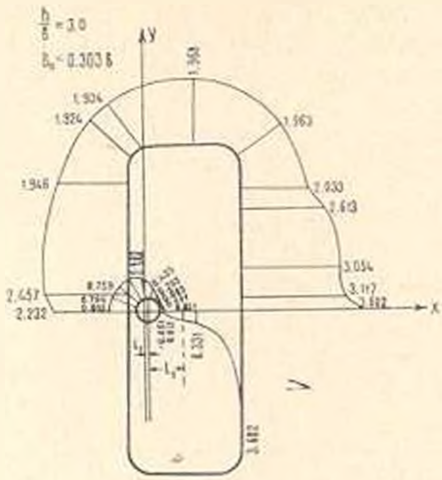


Фиг. 2.



Фиг. 3.

Величины эксцентриситетов $l = l_2 - l_1$ кругового стержня от оси рассматриваемого бруса для прямоугольников с разными отношениями сторон приведены в табл. 4.



Фиг. 4.

В заключение отметим, что достаточно высокая точность полученных отображений (это видно из приведенных в табл. 4 значений $\Delta\%$) позволяет ограничиться 100 членами в отображающей функции (1.2), как это сделано в рассматриваемой задаче.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 11 VII 1968

Ս. Ռ. ՍԱՐՈՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ՁՈՂԻ ՈԼՈՐՈՒՄԸ, ՈՐԸ ԱՄՐԱՎՈՐՎԱԾ Է ՈՉ ՀԱՄԱՌԱՆՑՔ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՁՈՂՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է անհամասեռ պրիզմատիկ ձողի ոլորումը, որը կազմված է՝ երկու տարբեր նյութերից բաղկացած, իրար մեջ, ոչ համառանցք ներդրված ձողերից, որոնք զոդված են միմյանց ընդհանուր կոնտակտային մակերևույթով։

Ձողի լայնական կտրվածքը իրենից ներկայացնում է կլորացված ուղղանկյունով սահմանափակված մի տիրույթ, որի ներսում գտնվում է այլ նյութից պատրաստված միջուկ։

Դիտարկվող խնդիրը լուծված է կոնֆորմ արտապատկերումների մեթոդով։

Ուղղանկյան կողմերի տարբեր հարաբերությունների համար ստացված են շոշափող լարումների և կոշտությունների թվային արժեքները։

S. R. SAROJAN

TORSION OF THE RECTANGULAR BAR, REINFORCED BY A NON-AXIAL CIRCULAR PIVOT

Summary

In the present paper the torsion problem of a rectangular bar, reinforced by a non-axial circular pivot, is considered.

The problem is solved by the conform mapping method, where results of O. M. Sapondjian and S. S. Zargarian are used.

Numerical examples are considered for different relations of the sides of the cross section, where values of shear stresses on the boundaries of both materials and on the line of symmetry of the cross section are calculated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амензаде Ю. А.* Кручение призматического бруса с квадратным сечением, армированного круговым стержнем. Изв. АН Аз.ССР, сер. физ.-тех. и хим. наук, № 2, 1958, 35—53.
2. *Канторович Л. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, М.-Л., 1952.
3. *Сапонджян О. М.* К разложению в ряд отображающей функции Кристоффеля-Шварца. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. IX, № 9, 1956.
4. *Заргарян С. С.* Кручение призматических стержней полигонального поперечного сечения с произвольно расположенной круговой цилиндрической полостью. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, 2, 1964.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изв. АН СССР, 1954.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЯХ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПОД КОЛЬЦЕВОЙ НАГРУЗКОЙ

1. Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка радиуса R, длины l, толщины h, шарнирно опертая по торцам, при действии осесимметричной поперечной нагрузки. Деформированное состояние оболочки определяется радиальным перемещением w и силовой функцией Φ, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям [1]

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Eh}\nabla^4\Phi + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1}{2}L(w, w) = 0 \\ D\nabla^4 w - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - L(w, \Phi) = q \end{cases} \tag{1.1}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

$$L(w, \Phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$$

q — интенсивность нагрузки, $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость, E — модуль упругости материала. Положение произвольной точки цилиндра определяется величиной параметров x и y, где x — расстояние вдоль образующей цилиндра, y — длина направляющей дуги цилиндра.

До потери статической устойчивости деформации оболочки будут осесимметричными.

Обозначив в этом состоянии w и Φ через $w_0 = w_0(x)$ и $\Phi_0 = \Phi_0(x)$, вместо (1.1) будем иметь

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Eh}\dfrac{d^4\Phi_0}{dx^4} + \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \\ D\dfrac{d^4 w_0}{dx^4} - \dfrac{1}{R}\dfrac{d^2\Phi_0}{dx^2} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Систему (1.3) можно привести к виду

$$\frac{d^2\Phi_0}{dx^2} = -\frac{Eh}{R}w_0 \tag{1.4}$$

$$\frac{d^4 w_0}{dx^4} + 4\beta^4 w_0 = \frac{q}{D}, \qquad \beta^4 = \frac{3(1-\nu^2)}{R^2h^2} \tag{1.5}$$

Интегрируя уравнение (1.5) при заданной нагрузке q и краевых условиях

$$w_0 = \frac{d^2 w_0}{dx^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l \tag{1.6}$$

находим решение для $w_0 = qF(x)$.

Это решение характеризует докритическое моментное состояние оболочки.

Ниже это решение мы будем представлять в виде ряда, как в работах [2] и [3]

$$w_0 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos \lambda_k x, \qquad \text{где} \quad \lambda_k = \frac{k\pi}{l} \tag{1.7}$$

При достижении параметром q верхнего критического значения $q = q_{\text{верх. кр.}}$, деформации оболочки перестают быть осесимметричными и в исходных уравнениях (1.1) необходимо принять

$$\begin{cases} w = w_0 + w_1 \\ \Phi = \Phi_0 + \Phi_1 \end{cases} \tag{1.8}$$

где $w_1 = w_1(x, y)$, $\Phi_1 = \Phi_1(x, y)$ будут возмущениями.

Подставив (1.8) в выражение (1.2) для оператора и отбрасывая при этом малые величины, из (1.1) с учетом (1.3) получаем следующие дифференциальные уравнения для возмущений w_1 и Φ_1:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{Eh}\nabla^4\Phi_1 + \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \dfrac{d^2 w_0}{dx^2}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \\ D\nabla^4 w_1 - \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} - \dfrac{d^2 w_0}{dx^2}\dfrac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} - \dfrac{d^2\Phi_0}{dx^2}\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Эти уравнения отличаются от известных уравнений устойчивости наличием членов, содержащих докритические прогибы w_0 и Φ_0.

Представив возмущения w_1 и Φ_1 в виде рядов

$$w_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin \lambda_m x \tag{1.10}$$

$$\Phi_1 = \cos \mu_n y \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \lambda_m x, \quad \text{где} \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{l}, \quad \mu_n = \frac{n}{R}$$

и подставляя (1.7) и (1.10) в систему (1.9), приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений

$$(V_p - 2S_0 + S_{2p})\, a_p - \sum_{m=1}^{p-1} (S_{p-m} - S_{p+m})\, a_m - \sum_{m=p+1}^{\infty} (S_{m-p} - S_{m+p})\, a_m = 0 \tag{1.11}$$

где

$$V_p = \frac{2}{R\beta\mu_n^2}\left[\frac{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}{4\beta^4} + \frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right] \tag{1.12}$$

$$S_i^{m,p} = \left\{1 + \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2} + \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2+\mu_n^2)^2}\right]\lambda_i^2\right\} f_i$$

где

$$i = \begin{pmatrix} p-m \\ p+m \\ m-p \end{pmatrix}$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.11)

$$\begin{vmatrix} V_1 - 2S_0 + S_2 & -S_1^{\substack{p=2\\m=1}} + S_3^{\substack{p=2\\m=1}} & -S_2^{\substack{p=3\\m=1}} + S_4^{\substack{p=3\\m=1}} & \cdots \\ -S_1^{\substack{p=1\\m=2}} + S_3^{\substack{p=1\\m=2}} & V_2 - 2S_0 + S_4 & -S_1^{\substack{p=3\\m=2}} + S_5^{\substack{p=3\\m=2}} & \cdots \\ -S_2^{\substack{p=1\\m=3}} + S_4^{\substack{p=1\\m=3}} & -S_1^{\substack{p=2\\m=3}} + S_5^{\substack{p=2\\m=3}} & V_3 - 2S_0 + S_6 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \tag{1.13}$$

является условием потери статической устойчивости оболочки.

Соответствующие математические выкладки приведены в работе[3].

Ограничиваясь в разложениях (1.7) и (1.10) несколькими первыми членами и раскрыв определитель (1.13), получим характеристическое уравнение, из которого находим зависимость верхнекритической нагрузки от количества полуволн n в окружном направлении.

2. Приведем приложение изложенной методики к задаче об устойчивости цилиндра при действии равномерно распределенной кольцевой нагрузки P_0, приложенной по окружности, отстоящей на расстоянии a от левого торца.

Пользуясь методом начальных параметров, представим решение уравнения (1.5) в виде

$$w_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) \qquad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{2.1}$$

$$w_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x) + \bar{q} Y_4(\beta x - \beta a) \qquad a \leqslant x \leqslant l$$

где $Y_2(\beta x)$ и $Y_4(\beta x)$ — функции Крылова

$$Y_2(\beta x) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x + \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x) \tag{2.2}$$

$$Y_4(\beta x) = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\beta x \sin\beta x - \operatorname{sh}\beta x \cos\beta x)$$

A_2 и A_4 — постоянные, определяемые из условий (1.6), причем

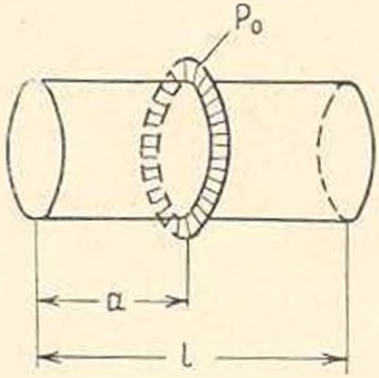
$$A_2 = \dot{q}\,\frac{\operatorname{sh}\beta(2l-a)\sin\beta a - \operatorname{sh}\beta a\sin\beta(2l-a)}{\operatorname{ch}^2\beta l - \cos^2\beta l} \tag{2.3}$$

$$A_4 = \dot{q}\,\frac{\operatorname{ch}\beta(2l-a)\cos\beta a - \operatorname{ch}\beta a\cos\beta(2l-a)}{\operatorname{ch}^2\beta l - \cos^2\beta l}$$

где

$$\dot{q} = \frac{P_0}{D\beta^3} = 4q^*Rl\beta \tag{2.4}$$

$q^* = \dfrac{P_0R}{Ehl}$ — приведенная безразмерная нагрузка.



Фиг. 1.

Коэффициент разложения (1.7) в данном примере при произвольном a $0 < a < l$ определяется формулами

$$f_0 = q^*\left|\frac{A_2}{\dot{q}}\operatorname{sh}\beta l\sin\beta l - \frac{A_4}{2\dot{q}}(\operatorname{ch}\beta l\cos\beta l - 1) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\beta(l-a)\cos\beta(l-a) - 1)\right| \tag{2.5}$$

$$f_m = 2q^*\left|(-1)^m\operatorname{sh}\beta l\sin\beta l\left(C_1\frac{A_2}{\dot{q}} + C_2\frac{A_4}{2\dot{q}}\right) + \right.$$
$$+ \left((-1)^m\operatorname{ch}\beta l\cos\beta l - 1\right)\left(C_2\frac{A_2}{\dot{q}} - C_1\frac{A_4}{2\dot{q}}\right) +$$
$$+ \frac{(-1)^m}{2}\Big(C_2\operatorname{sh}\beta(l-a)\sin\beta(l-a) -$$
$$\left. - C_1\operatorname{ch}\beta(l-a)\cos\beta(l-a)\Big) + \frac{1}{2}C_1\cos\lambda_m x\right|$$

где

$$C_1 = \frac{2\beta - \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} + \frac{2\beta + \lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]} \tag{2.6}$$

$$C_2 = \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta - \lambda_m)^2]} - \frac{\lambda_m}{2[\beta^2 + (\beta + \lambda_m)^2]}$$

Ниже приведена таблица значений q, соответствующих потере устойчивости, для оболочки, имеющей следующие характеристики:

$$\frac{h}{R} = 0.331 \cdot 10^{2}, \quad \frac{l}{R} = 0.1\pi \tag{2.7}$$

Оболочка с такими характеристиками взята в работах [2] и [3].

Таблица 1

n	17	18	19	20	21
I	0.00033601	0.00033577	0.0003329	0.00034277	0.00035838
II	0.0004038	0.00039073	0.00038573	0.00039067	0.00039815

В первой строке табл. 1 даны значения q, соответствующие потере устойчивости оболочки при учете докритических прогибов w_0.

Во второй строке той же таблицы даны значения q без учета докритических прогибов.

В табл. 2 приведены значения q при $n = 19$ и следующих a: $a = \frac{l}{2}$, $a = \frac{l}{4}$, $a = \frac{l}{8}$.

Сохранение в уравнениях (1.9) членов, содержащих w_0, снижает верхнекритическую нагрузку. Для $n = 19$ эта разница составляет $\approx 10\%$.

Таблица 2

n	19		
q^* \ a	$l/2$	$l/4$	$l/8$
I	0.0003329	0.00043472	0.0010607
II	0.00038573	0.0005057	0.0012895

Из табл. 2 видно, что для всех состояний, характеризуемых строками I, II, верхнекритическая нагрузка возрастает с приближением кольцевой нагрузки P_0 к опорам.

При переходе от безразмерной приведенной нагрузки q^* к размерной P_0^* имеем

$$P_0 = q^* \frac{Ehl}{R} = 1.047 \cdot 10^{-1} Eh \tag{2.8}$$

В работе [1], стр. 561—565, приведено решение той же задачи для бесконечного цилиндра, при этом для величины критической нагрузки получена формула

$$P_{*}^{кр} = \frac{\sqrt{12}}{9}\frac{Eh}{(1-\mu^2)^{0.75}}\left(\frac{h}{R}\right)^{1.5}$$

которая при $h/R = 0.331\cdot 10^{-2}$, $\mu = 0.3$ дает

$$P_0^{кр} = 0.8124\cdot 10^{-4}Eh$$

Для числа полуволн в названной работе получена формула, которая при принятом h/R дает полученное нами значение, $n = 19$.

3. В заключение отметим, что по изложенной выше методике можно исследовать колебания загруженной оболочки, описываемые уравнениями

$$\left|\begin{aligned} &\frac{1}{Eh}\nabla^4\Phi + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}L(w, w) = 0\\ &D\nabla^4 w - \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - L(w, \Phi) = q - m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right. \tag{3.1}$$

Поступая так же, как и при исследовании статической устойчивости и полагая

$$w_1 = \cos\omega t\cos\mu_n y\sum_{m=1}^{\infty} a_m\sin\lambda_m x \tag{3.2}$$

$$\Phi_1 = \cos\omega t\cos\mu_n y\sum_{m=1}^{\infty} b_m\sin\lambda_m x$$

вместо (1.11) здесь приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений, содержащей частоту колебаний ω

$$\left(V_p - \frac{2\rho\omega^2 R}{\mu_n^2 E} - 2S_0 + S_{2p}\right)a_p - \sum_{m=1}^{p-1}(S_{p-m} - S_{p+m})\,a_m -$$

$$-\sum_{m=p+1}^{\infty}(S_{m-p} - S_{m+p})\,a_m = 0$$

где V_p и $S_i^{m\cdot p}$ имеют те же значения (1.12).

Ниже приводится таблица частот колебаний $\omega^* = \omega\frac{1}{\mu_n}\sqrt{\frac{\rho}{E}}$ при различных q^*, n и $a = \frac{l}{2}$

Таблица 3

a	q \ n	17	18	19	20	21
$a=l/2$	q^*	0	0	0	0	0
	$q^*/2$	$10^{-2}\cdot 1.9393$	$10^{-2}\cdot 1.9059$	$10^{-2}\cdot 1.8925$	$10^{-2}\cdot 1.9039$	$10^{-2}\cdot 1.9213$
	$q^*/4$	$10^{-2}\cdot 2.3752$	$10^{-2}\cdot 2.3343$	$10^{-2}\cdot 2.3178$	$10^{-2}\cdot 2.3318$	$10^{-2}\cdot 2.3531$
	$q^*/8$	$10^{-2}\cdot 2.5655$	$10^{-2}\cdot 2.5213$	$10^{-2}\cdot 2.5036$	$10^{-2}\cdot 2.51868$	$10^{-2}\cdot 2.5417$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 28 V 1968

Գ. Ի. ԱՎԱՆԵՍՈՎԱ

ԳԼԱՆԱՁԵՎ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԲԵՌՆՎԱԾՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում քննարկվում է՝ ճակատներում հոդակապային ամրացում ունեցող, վերջավոր երկարության գլանաձև թաղանթը՝ առանցքասիմետրիկ շառավղային բեռի ազդեցության տակ։

Բերվում է թաղանթի ստատիկական կայունության և ազատ տատանումների խնդիրների լուծումները։ Երկու դեպքում էլ, հավասարումների հիմնական սիստեմը բերվում է հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմի, որի դետերմինանտի զրոյի հավասար լինելը հանդիսանում է թաղանթի ստատիկ կայունության կորստի պայմանը։

G. I. AVANESOVA

ON THE STABILITY AND OSCILLATIONS OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER A HOOP LOAD

S u m m a r y

In the present paper the cylindrical shell of finite length hingely supported at the but-ends under the action of the axialsymmetric hoop load is considered.

The solution of the problem of the static stability and the problem of free oscillations tor the given shell with momented initial stressed state is performed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
2. *Hoff NJ.* Buckling of thin cylindrical shell under Hoop stresses. J. of Applied Mechanics, vol. 24, No 3, 1957.
3. *Гнуни В. Ц., Мовсисян Л. А.* К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Докл. АН АрмССР, XLVI, № 4, 1968.