ՄԵԽԱՆԻԿԱ

МЕХАНИКА

MECHANICS

1968

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

С. М. МХИТАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В настоящей работе эффективно решаются линейные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\pi)\tag{0.1}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\infty)\quad(|\mu|<\infty)\tag{0.2}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\mathrm{ctg}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\pi)\tag{0.3}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\mathrm{cth}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\infty)\tag{0.4}$$

Первым интегральным уравнением описывается плоская периодическая контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления. Эта задача сведением к краевой задаче Римана—Гильберта рассматривалась в [1, 2, 3].

Третьим интегральным уравнением описывается плоская периодическая контактная задача с учетом сил сцепления, когда в одном периоде имеются два равных, кососимметрически нагруженных участка контакта. Эта задача без учета сил сцепления была рассмотрена в работе [4].

К решению последнего интегрального уравнения можно свести решение плоской контактной задачи с учетом сил сцепления с двумя равными, расположенными симметрично относительно начала координат и кососимметрично нагруженными участками контакта. Во всех этих задачах $0<\mu<\frac{\ln 3}{2\pi}$.

Решения интегральных уравнений* (0.1) — (0.4), свободные от сингулярных интегралов в смысле Коши, получены методом М. Г. Крейна**. С этой целью предварительно построены решения этих же уравнений при правых частях, равных единице.

Затем, отправляясь от результатов М. Г. Крейна [8], по обратным задачам спектральной теории дифференциальных уравнений, порождаемых эрмитовыми акселерантами, составляются соответствующие этим интегральным уравнениям дифференциальные системы.

Для произвольной двумерной вектор-функции из $L_2^2(0, T)$ получены формулы разложения по фундаментальным функциям канонических систем, эквивалентных этим дифференциальным системам.

Эти фундаментальные функции, по-видимому, образуют новый класс ортогональных, полных систем функций и выяснение некоторых вопросов, связанных с разложениями по этим функциям, подлежит дальнейшему исследованию.

Дифференцированием обеих частей уравнений (0.1) — (0.4) получаются сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта и родственными ядрами:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau = \operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}f'(t) \qquad (0.1')$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha} \operatorname{cth}\frac{\tau-t}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau = \operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}f'(t) \qquad (0.2')$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sin\frac{\tau-t}{2}} = \operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}f'(t) \qquad (0.3')$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\operatorname{sh}\frac{\tau-t}{2}} = \operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}f'(t) \qquad (0.4')$$

Интегральные уравнения аналогичной структуры рассматриваются в работах [9, 10].

Решения интегральных уравнений (0.1) — (0.4) при $f(t) = \mathrm{const}$ являются обобщенными собственными функциями соответственно операторов, стоящих в левых частях (0.1′) — (0.4′). Последние рассматриваются в $L^2(-\alpha, \alpha)$.

* Решения интегральных уравнений (0.1), (0.2) и (0.4) при $\mu = 0$ получены в [5, 6, 7]. Интегральное уравнение (0.3) при $\mu = 0$ рассмотрено в [4].

** Этот общий метод решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода, впервые опубликованный в работах [5, 6], подробно изложен в книге [7].

Устанавливается связь обобщенных собственных функций в случаях* (0.3′) и (0.4′) с некоторыми дифференциальными уравнениями, отправляясь от которых выписываются формулы разложений произвольной функции из $L^2(-\alpha, \alpha)$ по этим функциям. Эти разложения аналогичны разложениям по обобщенным собственным функциям конечного преобразования Гильберта, исследованным в работе [11].

§ 1. В этом параграфе будут доказаны следующие важные соотношения:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=A_\mu(\alpha) \tag{1.1}$$

$$(|t|<\alpha<\pi;\ |\mu|<\infty)$$

где

$$A_\mu(\alpha)=\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\pi\mu}\left[B_{\exp(2it)}\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ 0\right)+B_{\exp(2i\alpha)}\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ 0\right)+\right.$$

$$+2i\operatorname{Im}\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-2\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)+2\Psi(1)-2\ln 2\sin\alpha-$$

$$\left.-2\pi i\operatorname{th}\pi\mu-i\pi\right]$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi t}{\operatorname{ch}\pi\mu} \tag{1.2}$$

$$(|t|<\alpha<\pi;\ |\mu|<\infty);$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=B_\mu(\alpha) \tag{1.3}$$

$$(|t|<\alpha<\infty;\ |\mu|<\infty)$$

где

$$B_\mu(\alpha)=\frac{\pi}{2\operatorname{ch}\pi\mu}\left[\operatorname{Re}B_{\exp(2\alpha)}\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ 0\right)+2i\operatorname{Im}\Psi\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)-\right.$$

---

* В первых двух случаях дело обстоит сложнее и здесь не обсуждается.

$$-2\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)+2\Psi(1)-2\ln 2\,\mathrm{sh}\,\alpha-2\pi i\,\mathrm{th}\,\pi\mu\Big\}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi t}{\mathrm{ch}\,\pi\mu} \tag{1.4}$$

$$(|t|<\alpha<\infty;\ |\mu|<\infty)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\mathrm{ctg}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)\right] \tag{1.5}$$

$$(|t|<\alpha<\pi;\ |\mu|<\infty)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\mathrm{ctg}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha)\right] \tag{1.6}$$

$$(|t|<\alpha<\infty;\ |\mu|<\infty)$$

В этих соотношениях $B_z(x, y)$ означает неполную бэта-функцию [12], $\Psi(x)$ — пси-функцию Эйлера [12], а $Q_\nu(x)$ — функцию Лежандра второго рода индекса ν.

Для доказательства соотношений (1.1) и (1.2) рассмотрим бесконечнозначную функцию $f(\zeta)=(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ с точками ветвления $\zeta=a=e^{i\alpha}$ и $\zeta=\bar{a}=e^{-i\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$, лежащими на единичной окружности. Легко видеть, что в плоскости, разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$ окружности, можно выбрать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Условимся выбирать ту ветвь этой функции, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+\frac{a_1}{\zeta^2}+\dots$$

Обозначив через s любую точку дуги $\bar{a}a$, к которой стремится точка ζ, на внешнем берегу разреза будем считать, что $\zeta-a$ и $\zeta-\bar{a}$ принимают соответственно значения $(a-s)e^{-\pi i}$ и $s-\bar{a}$, а на внутреннем берегу разреза — соответственно значения $(a-s)e^{\pi i}$ и $s-\bar{a}$.

Следовательно, выбранная нами ветвь функции $f(\zeta)$ на внешнем берегу разреза принимает значение $ie^{-\pi\mu}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$, а на внутреннем берегу разреза — значение* $(-i)e^{\pi\mu}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$
$\times(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$.

В области, ограниченной замкнутым контуром C вокруг разреза $\bar{a}a$ и окружностью Γ_R, мы вправе применить к выбранной ветви функции $f(\zeta)$ формулу Коши**

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(-\oint_{\Gamma_R}+\oint_{C}\right)(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

где z — любая точка в упомянутой области.

Приняв во внимание поведение подынтегральной функции в окрестности бесконечно удаленной точки, можно показать, что при $R\to\infty$ первый интеграл исчезает и, следовательно,

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

Отсюда, стягивая контур C к разрезу $\bar{a}a$ и учитывая значения функции $f(\zeta)$ на внешнем и внутреннем берегах разреза, можем записать

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\int_{\bar{a}}^{a}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{ds}{z-s}=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

Далее, поступив как в работе [13], обе части этого соотношения проинтегрируем сперва по линии, соединяющей точку $\bar{a}$ и некоторую точку z, а затем по линии (a, z) и результаты сложим. Выполнение этих операций даст следующее соотношение:

$$\frac{2\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\int_{\bar{a}}^{a}\ln(z-s)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds=F_{\pm}(z) \qquad (1.7)$$

где

$$F_{\pm}(z)=\left(\int_{\bar{a}}^{z}+\int_{a}^{z}\right)(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\zeta+C_{\pm}$$

* Можно было бы эти значения получить, вычислив значения некоторой функции, в которую переходит функция $f(z)$ при конформном отображении единичного круга на верхнюю полуплоскость, на верхнем и нижнем берегах разреза по некоторому отрезку действительной оси.

** Здесь и в дальнейшем под символом $\oint$ будем понимать контурный интеграл, взятый по часовой стрелке.

Здесь произвольная постоянная C_+ соответствует случаю, когда линия интегрирования вместе с точкой z лежит вправо от разреза (например, в области, расположенной вправо от линии, состоящей из внешнего берега разреза и отрезков $(\infty, \bar{a})$, (a, ∞) прямой $x = \cos\alpha$), а C_- — случаю, когда линия интегрирования вместе с точкой z лежит влево от разреза (например, в области, расположенной влево от линии, состоящей из внутреннего берега разреза и тех же отрезков прямой $x = \cos\alpha$).

Наличие разных постоянных объясняется тем, что функция, стоящая в левой части соотношения (1.7), имеет на бесконечности точку ветвления.

Функции $F_\pm(z)$ представим в виде

$$F_\pm(z) = C_\pm \mp \int\limits_{\infty \atop l^\mp}^{a} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta + 2G(z) \qquad (1.8)$$

где

$$G(z) = \int\limits_{a}^{z} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta$$

Интеграл в (1.8), учитывая значения подынтегральной функции на внешнем и внутреннем берегах разреза, по которым производится интегрирование, запишем в виде

$$\int\limits_{l^\pm} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta = \pm e^{\mp \pi\mu} \int\limits_{\bar{a}}^{a} (a - s)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (s - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} ds$$

Для вычисления последнего интеграла заметим, что по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(-\oint\limits_{\Gamma_R} + \oint\limits_{C}\Big)(\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta = 0$$

Устремив R к бесконечности и стягивая контур C к разрезу, обнаружим, что упомянутый интеграл равен $\pi/\mathrm{ch}\,\pi\mu$. Поэтому соотношение (1. 8) можно переписать в виде

$$F_\pm(z) = C_\pm \pm i\frac{\pi e^{\mp \pi\mu}}{ch\,\pi\mu} + 2G(z) \qquad (1.9)$$

Неизвестные пока постоянные $C_\pm$ определим из сравнения поведения при $z \to \infty$ левой и правой частей в соотношении (1.7). Легко видеть, что поведение левой части определяется соотношением

$$\ln(z - s) = \ln z + O(1), \; z \to \infty \qquad (1.10)$$

Чтобы выяснить поведение правой части, преобразуем выражение функции $G(z)$. Положив $\frac{1}{2} - i\mu = \gamma$, эту функцию представим в виде

$$G(z) = \int_a^z \frac{1}{\zeta - a}\left(\frac{\zeta - a}{\zeta - \bar{a}}\right)^{\gamma} d\zeta$$

В результате замены

$$\frac{\zeta - a}{\zeta - \bar{a}} = w$$

и выполнения простых операций выражение $G(z)$ принимает вид

$$G(z) = \ln(z - a) - \ln(a - \bar{a}) + \frac{1}{\gamma}\int_0^{\left(\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right)^{\gamma}} \frac{1 - w^{\frac{1}{\gamma}-1}}{1 - w^{\frac{1}{\gamma}}}\, dw$$

Отсюда легко получим, что

$$G(z) = \ln z - \ln(a - \bar{a}) - \Psi\left(\frac{1}{2} - i\mu\right) + \Psi(1) + 0(1), \quad z \to \infty \tag{1.11}$$

Принимая во внимание (1.9), (1.10) и (1.11), сравним поведение при $z \to \infty$ обеих частей соотношения (1.7). Это сравнение дает нам постоянные

$$\begin{aligned} C_+ &= -\frac{i\pi e^{-\pi\mu}}{\operatorname{ch}\pi\mu} + 2\ln(a - \bar{a}) + 2\Psi\left(\frac{1}{2} - i\mu\right) - 2\Psi(1) \\ C_- &= \frac{i\pi e^{\pi\mu}}{\operatorname{ch}\pi\mu} + 2\ln(a - \bar{a}) + 2\Psi\left(\frac{1}{2} - i\mu\right) - 2\Psi(1) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Далее, обозначив через σ любую точку на внешнем (внутреннем) берегу разреза по дуге $\bar{a}a$, к которой стремится точка z и выбрав такую ветвь логарифма, что

$$\ln(z - s) \to \ln(\sigma - s), \text{ если } s \in \bar{a}\sigma$$

$$\ln(z - s) \to \ln(s - \sigma) - (+)\, i\pi, \text{ если } s \in \sigma a$$

из соотношения (1. 7) получим

$$\frac{2\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\left[\int_{\bar{a}}^{\sigma} \ln(\sigma - s)\,(a - s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s - \bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\, ds + \right.$$

$$+ \int_{\sigma}^{a} \ln(s - \sigma)\,(a - s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s - \bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\, ds -$$

$$
-i\pi\int_{\sigma}^{a}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds\Bigg] =
$$

$$
= ie^{-\pi\mu}\left(\int_{\bar{a}}^{\sigma}+\int_{\sigma}^{a}\right)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds + C_{+}
$$

$$
\frac{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu}{\pi}\Bigg[\int_{\bar{a}}^{\sigma}\ln(\sigma-s)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds +
$$

$$
+\int_{\sigma}^{a}\ln(s-\sigma)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds +
$$

$$
+ i\pi\int_{\sigma}^{a}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds\Bigg] =
$$

$$
= -ie^{\pi\mu}\left(\int_{\bar{a}}^{\sigma}+\int_{\sigma}^{a}\right)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds + C_{-}
$$

Сложив эти соотношения и приняв во внимание (1.12), можем записать

$$
\frac{4\,\mathrm{ch}\,\pi\mu}{\pi}\Bigg[\int_{\bar{a}}^{\sigma}\ln(\sigma-s)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds +
$$

$$
+\int_{\sigma}^{a}\ln(s-\sigma)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds\Bigg] =
$$

$$
= -2i\,\mathrm{sh}\,\pi\mu\left(\int_{\bar{a}}^{\sigma}-\int_{\sigma}^{a}\right)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds +
$$

$$
+\frac{2\pi i\,\mathrm{sh}\,\pi\mu}{\mathrm{ch}\,\pi\mu} + 4\ln(a-\bar{a}) + 4\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right) - 4\Psi(1)
$$

Положив в последнем соотношении $\sigma = e^{it}$, $s = e^{i\tau}$ и $a = e^{i\alpha}$, после элементарных операций придем к следующему:

$$
\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}} - \frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\times
$$

$$\times\cos\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau+$$

$$+i\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=$$

$$=\frac{i\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}t+\frac{C_\mu}{2}-\frac{i\pi^2\,\mathrm{sh}\,\pi\mu}{\mathrm{ch}^2\,\pi\mu}-\frac{2\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}\ln 2\sin\alpha+\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-\Psi(1)\quad(1.13)$$

где

$$C_\mu=i\int_{-\alpha}^{\alpha}\tau e^{\mu\alpha+\frac{i\tau}{2}}\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau$$

Чтобы вычислить эту действительную постоянную, переходим обратно к дуге $\bar{a}a$ единичной окружности, в результате чего будем иметь

$$C_\mu=2\int_{\frac{1}{a}}^{a}\ln s\,(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-a)^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds$$

Сравнив это выражение с соотношением, которое получается из (1.7) с C, если в последнем положить $z=0$, и учитывая (1. 9), находим

$$C_\mu=\frac{2\pi}{\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left[\ln 2\sin\alpha+\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-\Psi(1)-\frac{i\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+B_{\exp(2i\alpha)}\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ 0\right)\right]$$

Наконец, отделяя в (1.13) действительную и мнимую части, получим соотношения (1.1) и (1.2).

Рассматривая функцию $f(\zeta)=(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ ($a=e^{\alpha}$, $\alpha<\infty$) в плоскости, разрезанной вдоль дуги $a^{-1}a$ кривой $y=e^x$, совершенно аналогичным образом докажем соотношения (1. 3) и (1.4).

В остальных двух случаях только наметим путь доказательства. Для доказательства соотношения (1.6) рассматривается бесконечная функция $f(\zeta)=(\zeta^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ с точками ветвления $\zeta=\pm a$, $\zeta=\pm b$, лежащими на действительной оси. Затем, в плоскости с выключенными отрезками $[-a,\ -b]$ и $[b,\ a]$ выбирается определенная ветвь этой функции. В области, ограниченной замкнутыми контурами вокруг разрезов и окружностью Γ_R достаточно большого радиуса, к ней применяется теорема Коши. Таким путем устанавливается справедливость соотношения

$$\int_b^a \left| \ln \frac{x+s}{|x-s|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu \operatorname{sign}(x-s) \right| (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} ds =$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\mu} \int_0^b (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} ds +$$

$$+ \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu \int_b^a (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} ds \qquad (b < x < a)$$

Экспоненциальной заменой переменных и последующими преобразованиями из последнего соотношения получается соотношение (1.6).

Для доказательства соотношения (1.5) рассматривается многозначная функция $f(\zeta) = (\zeta^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (\zeta^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ с точками ветвления $\zeta = \pm a$, $\zeta = \pm b$ $(a = e^{i\alpha},\ b = e^{i\beta};\ 0 < \alpha, \beta < \pi)$, лежащими на единичной окружности. Затем, аналогичным образом устанавливается соотношение (1.5).

§ 2. Перейдем к построению решений интегральных уравнений (0.1)—(0.4) при произвольной правой части и установлению связи как этих, так и уравнений (0.3')—(0.4') с дифференциальными уравнениями.

Эти решения, как уже упоминалось, будут построены методом М. Г. Крейна. Согласно этому методу применительно к уравнениям с эрмитовыми ядрами, если для любого u $(-a < u < a)$ известны решения $g(t, u)$ уравнения

$$\int_{-a}^{u} K(t-\tau)\, g(\tau, u)\, d\tau = 1 \qquad (K(t) = \overline{K(-t)}) \tag{2.1}$$

то решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{a} K(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t)$$

при произвольной функции из определенного класса может быть получено по формуле [7]

$$\varphi(t) = \left| \frac{1}{M_1(u)} \int_{-a}^{a} \overline{g(\tau, u)}\, f(\tau)\, d\tau \right|_{u=a} g(t, a) -$$

$$- \int_t^a g(t, u) \frac{d}{du} \left| \frac{1}{M_1'(u)} \frac{d}{du} \int_{-a}^{u} g(\tau, u)\, f(\tau)\, d\tau \right| du \tag{2.2}$$

где

$$M_1(u) = \int_{-\alpha}^{u} g(\tau, u)\, d\tau \tag{2.3}$$

Но решения $g(t, \alpha) = q(t, \alpha)$ интегральных уравнений

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} K(t-\tau)\, q(\tau, \alpha)\, d\tau = 1 \tag{2.4}$$

где $K(t)$ означает одно из четырех ядер в уравнениях (0.1)—(0.4), согласно соотношениям (1.1), (1.3), (1.5) и (1.6) соответственно имеют вид

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \frac{1}{A_\mu(\alpha)} \cos\left(\frac{t}{2} - i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha - t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - i\mu}\left(\sin\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + i\mu} \\
&2) \quad \frac{1}{B_\mu(\alpha)} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2} - i\mu\alpha\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha - t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - i\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + i\mu} \\
&3) \quad \frac{\pi\left(\sin\frac{\alpha - t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - i\mu}\left(\sin\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + i\mu}}{\operatorname{ch}\pi\mu\left[Q_{-\frac{1}{2} - i\mu}(\cos\alpha) + Q_{-\frac{1}{2} + i\mu}(\cos\alpha)\right]} \\
&4) \quad \frac{\pi\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha - t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} - i\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha + t}{2}\right)^{-\frac{1}{2} + i\mu}}{\operatorname{ch}\pi\mu\left[Q_{-\frac{1}{2} - i\mu}(\operatorname{ch}\alpha) + Q_{-\frac{1}{2} + i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)\right]}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Произведя в (2. 1) и (2. 3) подстановки $t \to t - \frac{u - \alpha}{2}$, $\tau \to \tau - \frac{u - \alpha}{2}$, убедимся, что

$$g(t, u) = q\left(t - \frac{u - \alpha}{2}, \alpha\right), \qquad M_1(u) = 2M\left(\frac{u + \alpha}{2}\right) \tag{2.6}$$

где

$$M(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} q(\tau, \alpha)\, d\tau$$

Для $M(\alpha)$, соответственно, будем иметь следующие выражения:

$$
\begin{gathered}
1) \quad \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu\, A_\mu(\alpha)}, \qquad 2) \quad \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu\, B_\mu(\alpha)} \\
3) \quad \frac{P_{-\frac{1}{2} - i\mu}(\cos\alpha)}{Q_{-\frac{1}{2} - i\mu}(\cos\alpha) + Q_{-\frac{1}{2} + i\mu}(\cos\alpha)}
\end{gathered}
\tag{2.7}
$$

$$F(\lambda)=\int\limits_0^T (f_1(t),\ f_2(t))\,H(t)\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ \Phi_2(t)\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

Если $\sigma(\lambda)$ $(\sigma(\lambda)=\sigma(\lambda-0),\ \sigma(0)=0,\ -\infty<\lambda<\infty)$ — ортогональная спектральная функция дифференциальной системы (2. 9), то имеет место формула обращения

$$\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\begin{pmatrix}\Phi_1(t)\\ \Phi_2(t)\end{pmatrix}d\sigma(\lambda) \tag{2.13}$$

При помощи соотношения (2.7), (2.10) и (2.11) можем выписать в интересующих нас случаях формулы обобщенного преобразования Фурье (2.12) и (2.13).

В частности, если в соотношениях (2.7), (2.10) и (2.11) в случае 4) положить $\mu=0$, то можно показать, что формулы (2.12) и (2.13) представляют собой известные формулы преобразования Мелера-Фока.

Наконец, перейдем к интегральным уравнениям* (0.1')—(0.4'). Дифференцирование соотношений (1.1), (1.3), (1.5) и (1.6) дает обобщенные собственные функции стоящих в правых частях (0.1')—(0.4') самосопряженных операторов. Обобщенные собственные функции указанных операторов даются соответственно выражениями из (2.5).

В случаях 3) и 4) легко показать, что обобщенные собственные функции $h(t,\mu)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению типа

$$-ip(t)\frac{d}{dt}[p(t)\,h(t,\mu)]=\xi(\mu)\,h(t,\mu)\qquad(\alpha<t<\beta;\ \sigma<\mu<\tau), \tag{2.14}$$

где $p(t)>0$, а $\xi(\mu)$ — монотонно возрастающая функция. Эти функции соответственно указанным случаям имеют вид

$$\sqrt{\frac{2\sin\frac{\alpha-t}{2}\sin\frac{\alpha+t}{2}}{\sin\alpha}},\qquad \xi(\mu)=\mu\quad(-\alpha<t<\alpha;\quad -\infty<\mu<\infty)$$

$$\sqrt{\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\alpha-t}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha+t}{2}}{\mathrm{sh}\,\alpha}},\qquad \xi(\mu)=\mu\quad(-\alpha<t<\alpha;\quad -\infty<\mu<\infty)$$

Решением дифференциального уравнения (2.14) будет

$$h(t,\mu)=\frac{\sqrt{\xi'(\mu)}}{p(t)}\,e^{i\xi(\mu)\int\frac{dt}{p(t)}}$$

Далее, как в работе [11], воспользуемся формулами обращения Фурье-Планшереля в $L^2(-\infty,\infty)$

* Подробное изложение результатов, относящихся к этим уравнениям, содержится в [14].

Соответствующие $\chi(\alpha, \lambda)$ будут:

1) $$\frac{\lambda\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu\, A_\lambda(\alpha)}\left| e^{i\lambda\alpha} F\left(-\lambda, \frac{1}{2} + i\mu;\ 1;\ 1 - e^{-2i\alpha}\right) + e^{-i\lambda\alpha} F\left(\lambda, \frac{1}{2} - i\mu;\ 1;\ 1 - e^{-2i\alpha}\right)\right|$$

2) $$\frac{\lambda\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu\, B_\lambda(\alpha)}\left| e^{\lambda\alpha} F\left(-i\lambda, \frac{1}{2} + i\mu;\ 1;\ 1 - e^{-2\alpha}\right) + e^{-\lambda\alpha} F\left(i\lambda, \frac{1}{2} - i\mu;\ 1;\ 1 - e^{-2\alpha}\right)\right| \tag{2.11}$$

3) $$\frac{\lambda e^{-i\alpha}\, e^{-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)i\alpha}}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha) + Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)}\, F\left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} - i\mu;\ 1;\ 1 - e^{-2i\alpha}\right)$$

4) $$\frac{\lambda e^{-i\alpha}\, e^{-\left(\frac{1}{2}+i\lambda\right)\alpha}}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha) + Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha)}\, F\left(\frac{1}{2} + i\lambda, \frac{1}{2} - i\mu;\ 1;\ 1 - e^{-2\alpha}\right)$$

Чтобы записать формулу разложения произвольной двумерной вектор-функции из $L^2_n(0, T)$ по фундаментальным функциям дифференциальной системы (2.9), эту систему представим в виде

$$\frac{d\chi}{d\alpha} = \lambda p \Theta$$

$$\frac{d\Theta}{d\alpha} = -(\lambda + 2l)\frac{\chi}{p}, \qquad \chi(0, \lambda) = 0, \qquad \Theta(0, \lambda) = 1$$

Известным способом [7] последнюю систему можно преобразовать к каноническому виду

$$\frac{d}{d\alpha}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix} = \lambda J H(\alpha)\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}$$

где

$$J = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad H(\alpha) = \begin{pmatrix}\frac{1}{p} + V(\alpha)\,p & V(\alpha)\,p\\ V(\alpha)\,p & p\end{pmatrix}$$

$$V(\alpha) = -2\int_0^\alpha \frac{l(t)}{p(t)}\,dt$$

Строим обобщенное преобразование Фурье [7, 8] двумерной вектор-функции $\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}$ из $L^2_n(0, T)$

$$4)\qquad \frac{P_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)} \tag{2.7}$$

Приняв во внимание (2.5), (2.6), (2.7) и (2.2), нетрудно выписать формулы решений интегральных уравнений (0.1)—(0.4) при произвольной правой части.

Далее, воспользовавшись результатами работы [8], установим связь между интегральными уравнениями (0.1)—(0.4) и некоторыми дифференциальными системами.

Пусть $K(t)=\overline{K(-t)}$ $(-2T<t<2T)$ такая функция, что при любом α $(0\leqslant\alpha<T)$ интегральное уравнение (2.4) имеет единственное интегрируемое решение. Подчинив $K(t)$ определенным дополнительным условиям (см. [8]), из результатов той же работы [8], в частности, можно получить следующее утверждение.

Если для любого комплексного λ положить

$$\chi(\alpha,\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} q(t,\alpha)\,e^{-i\lambda t}\,dt \tag{2.8}$$

то оказывается, что функция $\chi(\alpha,\lambda)$ является решением дифференциальной системы*

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{p(\alpha)}\frac{d\chi}{d\alpha}\right)+[\lambda^2+2\lambda l(\alpha)]\frac{\chi}{p(\alpha)}=0;\qquad \chi(0,\lambda)=0$$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\left(\frac{1}{p}\frac{d\chi}{d\alpha}\right)=\lambda \tag{2.9}$$

где

$$p(\alpha)=M'(\alpha),\quad l(\alpha)=-\frac{d}{d\alpha}\operatorname{Arg} q(\alpha,\alpha)\quad (0<\alpha<T)$$

Приведем соответственно случаям в (2.5) выражения $l(\alpha)$:

$$1)\qquad -\frac{2\mu\sin\alpha+\operatorname{sh}2\mu\alpha}{4\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}^2\mu\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\mu\alpha}-\mu\operatorname{ctg}\alpha$$

$$2)\qquad \frac{2\mu\operatorname{sh}\alpha+\sin 2\mu\alpha}{4\left(1+\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\mu\alpha\right)\operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\mu\alpha}-\mu\operatorname{cth}\alpha \tag{2.10}$$

$$3)\quad -\mu\operatorname{ctg}\alpha,\qquad 4)\quad -\mu\operatorname{cth}\alpha$$

* Из результатов работы [8] эта дифференциальная система получается, исходя из интегрального уравнения второго рода. Однако, она справедлива и для определенных классов интегральных уравнений первого рода. В обсужденных нами примерах ее справедливость может быть установлена и непосредственной проверкой.

М. Г. Крейн любезно предоставил возможность автору познакомиться с излагаемым результатом по одной его неопубликованной работе, а затем указал на возможность ее вывода из [8].

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m}_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} e^{-iuv} f(v)\, dv$$

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m}_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} e^{iuv} F(u)\, du$$

Отметим также равенство Планшереля

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(v)|^2 dv$$

Предположим, что функции

$$u = \xi(\mu), \qquad v = \int\limits_0^t \frac{dt}{p^2(t)} \tag{2.15}$$

преобразуют интервалы (σ, τ) и (α, β) в интервал $(-\infty, \infty)$. Тогда, произведя в формулах обращения Фурье-Планшереля замену переменных (2.15), получим формулу разложения произвольной функции из $L^2(-\alpha, \alpha)$ по фундаментальным функциям дифференциального уравнения (2.14).

В интересующем нас случае 3) эти формулы разложения имеют вид

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m}_{\delta\to 0,\ \delta>0} \int\limits_{-\alpha+\delta}^{\alpha-\delta} \left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu} \varphi(t)\, dt$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m}_{N\to\infty} \int\limits_{-N}^{N} \left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu} \left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \Phi(\mu)\, d\mu$$

$$\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi(t)|^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\mu)|^2 d\mu$$

Аналогичные формулы могут быть записаны и случае 4).

Коль скоро известны обобщенные собственные функции и формулы разложения по этим функциям, решение интегральных уравнений (0.3′) и (0.4′) могут быть получены по общей формуле для резольвенты.

В заключение отметим, что исследование указанных здесь плоских контактных задач теории упругости можно далее провести известным способом [15,16].

Автор выражает сердечную благодарность чл.-корр. АН УССР М. Г. Крейну за руководство работой.

Автор благодарит также Г. Я. Попова за интерес к работе.

Результаты работы были доложены на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Одесский инженерно-строительный
институт

Поступила 4 IV 1968

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ՝ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՀՊՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՈՒ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում է առաձգականության տեսության՝ հարակցման ուժերի հաշվառմամբ հպման մի քանի խնդիրներ նկարագրող գծային ինտեգրալ հավասարումների նոր դաս (0.1) — (0.4), որոնց Կոշու իմաստով ինտեգրալներից զերծ փակ լուծումները կառուցվում են Մ. Գ. Կրեյնի առաջարկած մեթոդով:

Ընդ որում առաջին ինտեգրալ հավասարմամբ նկարագրվում է հպման հարթ պարբերական խնդիրը:

Երկրորդ ինտեգրալ հավասարմամբ նկարագրվում է հպման հարթ պարբերական խնդիրը, երբ մեկ պարբերության մեջ կան երկու համահավասար չեղ-համաչափ բեռնավորված հպման տեղամասեր:

Չորրորդ ինտեգրալ հավասարման լուծմանը կարելի է հանգեցնել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ դասավորված, բայց ոչ-համաչափ բեռնավորված երկու համահավասար տեղամասով հպման հարթ խնդրի հետազոտությունը:

Հիշատակված ինտեգրալ հավասարումները, այնուհետև, կապվում են մի քանի տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների եզրային խնդիրների հետ, որոնց լուծումները, ըստ երևույթին, կազմում են օրթոգոնալ լրիվ ֆունկցիաների նոր դաս: Այդ կապը հիմնված է Մ. Գ. Կրեյնի՝ էրմիտյան օպերատորներից ծնված դիֆերենցիալ հավասարումների սպեկտրալ տեսության հակադարձ խնդիրներին վերաբերող արդյունքների վրա:

Այդ տիպի դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնց հետ դիտարկվող ինտեգրալ հավասարումները առնչվում են, կապված են Հիլբերտի հայտնի կորիզով ու մերձավոր կորիզներով ինտեգրալ օպերատորների (0.1′) — (0.4′) ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների հետ:

S. M. MKHITARIAN

ON SOME PLANE CONTACT PROBLEMES OF THE THEORY OF ELASTICITY WITH COHESIVE FORCES TAKEN INTO ACCOUNT THE INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS CONNECTED WITH THEM

Summary

In this work the solution of the integral equations of the first kind (0. 1)—(0. 4) by the Krein method are effectively constructed in a closed form.

By means of these integral equations, some plane mixed boundary problems of the theory of elasticity (contact problems) with consideration of cohesive forces are described.

Taking into consideration the results of M. G. Krein, the differential systems are given and their solutions form the full orthogonal systems in space $L^2(0, T)$.

The generalized eigenfunctions for the operators, on the left hand side of (0.1′)—(0.4′) are found.

In the last two cases (0. 3′) and (0. 4′) the formulas of the expansion of function in $L^2(-\alpha, \alpha)$ by the generalized eigenfunctions of the corresponding operators are written down. For finite Hilbert transformations, these questions have been investigated by Koppelman and Pincus.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. „Наука", 1966.
2. *Брилла И.* Периодические смешанные задачи для анизотропных пластинок. Приложения т. ф. в мех. сплош. ср. IUTAM, т. 1, „Наука", 1965.
3. *Черский Ю. И.* Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши. Докл. АН СССР, т. 140, №1, 1961.
4. *Попов Г. Я.* По поводу одной плоскости контактной задачи для упругой полуплоскости. Изв. АН СССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, №4, 1955.
5. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, №6, 1954.
6. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, №3, 1955.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве. „Наука", 1967.
8. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. Докл. АН СССР, т. 105, №4, 1955.
9. *Ахиезер Н. И.* О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 9, №4, 1945.
10. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Краевые зад. т. анал. ф-ий. Изд. Казанского ун-та, т. 122, №3, 1962.
11. *Koppelman W.* and *Pincus I. D.* Spectral representations for finite Hilbert Transformations. Math. Z., Bd 71, H. 4, 1959.

12. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.
13. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, №2, 1963.
14. *Мхитарян С. М.* О спектральных разложениях интегральных операторов, аналогичных конечному преобразованию Гильберта. Матем. исследования, Кишинев, т. 4, вып. 1, 1969.
15. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.
16. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

В. С. ТОНОЯН

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ С ДВУМЯ УЧАСТКАМИ КОНТАКТА

Рассмотрена задача о давлении жесткого штампа нормальной силой P на верхнюю границу упругой изотропной бесконечной полосы, когда на двух участках нижней границы предполагается скользящая заделка. Задача сначала сведена к системе „парных" интегральных уравнений, которые затем преобразуются в систему двух регулярных интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Доказано, что последнюю систему можно решить методом последовательных приближений. В частности, при $h \to \infty$ получена известная контактная задача для полуплоскости*.

Осесимметричная контактная задача с двумя участками контакта для упругого слоя рассматривалась в работах Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда [1], Р. Д. Лоу [2] и Ю. Н. Кузьмина, Я. С. Уфлянда [3].

Контактная задача с двумя круговыми участками контакта для упругого полупространства рассмотрена в работе В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко [4].

§ 1. Постановка задачи и сведение ее к системе „парных" интегральных уравнений

Рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа нормальной силой P на верхнюю границу упругой изотропной бесконечной полосы, когда на двух участках нижней границы предполагается скользящая заделка (фиг. 1), то есть на части верхней границы полосы задается нормальное перемещение, а на нижней границе, соответствующей этой части, отсутствует нормальное напряжение. Остальная часть верхней границы полосы свободна от нормальных напряжений, а на соответствующей части нижней границы нормальное перемещение равно нулю. На всех этих границах отсутствует касательное напряжение.

Будем пользоваться известными выражениями смещений и напряжений через бигармоническую функцию

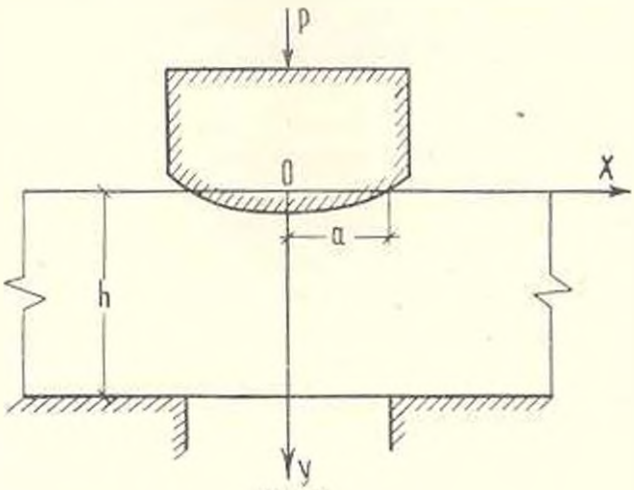
$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

$$u = \frac{1}{E}\left[\int \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,dx - \nu \frac{\partial F}{\partial x}\right] - a_0 y + b_0 \qquad (1.1)$$

* Работа доложена на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

$$v = \frac{1}{E}\left| \int \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, dy - \nu \frac{\partial F}{\partial y} \right| + a_0 x + c_0 \tag{1.1}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона. В силу симметрии граничных условий относительно оси $0y$, можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой бесконечной полосы.



Фиг. 1.

Поставленная задача состоит в нахождении одной бигармонической в области $0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant h$ функции $F(x, y)$, удовлетворяющей граничным условиям

$$\begin{aligned} &v(x, 0) = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant a), && \sigma_y(x, 0) = 0 \quad (a < x < \infty) \\ &\sigma_y(x, h) = 0 \quad (0 \leqslant x < a), && v(x, h) = 0 \quad (a \leqslant x < \infty) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(x, h) = 0 \quad (0 \leqslant x < \infty) \tag{1.3}$$

и условиям симметрии

$$u(0, y) = \tau_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant h) \tag{1.4}$$

Кроме того, при $x \to \infty$ функция F должна стремиться к нулю. Будем искать решение задачи в виде интегрального разложения Фурье

$$F(x, y) = \int_0^\infty \{A(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha y + B(\alpha)\,\mathrm{sh}\,\alpha y + \alpha y\,[C(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha y +$$

$$+ D(\alpha)\,\mathrm{sh}\,\alpha y]\}\cos \alpha x\, d\alpha \quad \begin{pmatrix} 0 \leqslant x < \infty \\ 0 \leqslant y \leqslant h \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Здесь $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий при $y = 0$ и $y = h$.

Используя формулы (1.1) и (1.5), будем иметь

$$\sigma_x = \int_0^\infty \alpha^2 \{[A(\alpha) + 2D(\alpha)]\,\mathrm{ch}\,\alpha y + [B(\alpha) + 2C(\alpha)]\,\mathrm{sh}\,\alpha y +$$

$$+\alpha y[C(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+D(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y]\}\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$\sigma_y=-\int_0^\infty\alpha^2\{A(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+B(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+\alpha y[C(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+$$

$$+D(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y]\}\cos\alpha x\,d\alpha$$

$$\tau_{xy}=\int_0^\infty\alpha^2\{[A(\alpha)+D(\alpha)]\operatorname{sh}\alpha y+[B(\alpha)+C(\alpha)]\operatorname{ch}\alpha y+$$

$$+\alpha y[C(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+D(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y]\}\sin\alpha x\,d\alpha \qquad (1.6)$$

$$u=\frac{1}{E}\int_0^\infty\alpha\{[(1+\nu)A(\alpha)+2D(\alpha)]\operatorname{ch}\alpha y+[(1+\nu)B(\alpha)+2C(\alpha)]\operatorname{sh}\alpha y+$$

$$+(1+\nu)\alpha y[C(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+D(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y]\}\sin\alpha x\,d\alpha-a_0y+b_0$$

$$v=-\frac{1}{E}\int_0^\infty\alpha\{[(1+\nu)A(\alpha)-(1-\nu)D(\alpha)]\operatorname{sh}\alpha y+[(1+\nu)B(\alpha)-$$

$$-(1-\nu)C(\alpha)]\operatorname{ch}\alpha y+(1+\nu)\alpha y[C(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+$$

$$+D(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y]\}\cos\alpha x\,d\alpha+a_0x+c_0$$

Так как при $x\to\infty$ перемещения $u(x,y)$ и $v(x,y)$ должны стремиться к нулю, то в формулах (1.6) следует положить $a_0=b_0=c_0=0$.

Легко видеть, что условия симметрии (1.4) удовлетворяются тождественно.

Условиям отсутствия касательных напряжений на границах полосы (1.3) можно удовлетворить при помощи связей

$$B(\alpha)=-C(\alpha)$$

$$A(\alpha)=-\alpha hC(\alpha)-[1+\alpha h\operatorname{cth}\alpha h]D(\alpha) \qquad (1.7)$$

Исключая при помощи (1.7) величины $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ и вводя вместо $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$ новые неизвестные величины $C^*(\alpha)$ и $D^*(\alpha)$, из оставшихся граничных условий (1.2) получаем следующую систему „парных“ интегральных условий:

$$\int_0^\infty C^*(\alpha)\cos\alpha x\,d\alpha=\frac{E}{2}f(x)\qquad 0\leqslant x\leqslant a$$

$$\int_0^\infty\alpha\left[C^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h+\frac{\alpha h+\operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha h}{sh\,\alpha h}D^*(\alpha)\right]\cos\alpha x d\alpha=0\quad 0\leqslant x<a \qquad (1.8)$$

$$\int_0^\infty [C^*(\alpha)\operatorname{ch}\alpha h + D^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h]\cos\alpha x\, d\alpha = 0 \qquad a \leqslant x < \infty$$

$$\int_0^\infty \alpha\,[\alpha h\, C^*(\alpha) + (1 + \alpha h\operatorname{cth}\alpha h)\, D^*(\alpha)]\cos\alpha x\, d\alpha = 0 \qquad a < x < \infty \tag{1.9}$$

В (1.8), (1.9) введены обозначения

$$\alpha\, C(\alpha) = C^*(\alpha), \quad \alpha\, D(\alpha) = D^*(\alpha) \tag{1.10}$$

§ 2. Определение функций $C^*(\alpha)$ и $D^*(\alpha)$

Умножая уравнения (1.8) на $\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}$, интегрируя по x в пределах от 0 до r, меняя порядок интегрирования и имея в виду интегральное представление Пуассона для $J_0(\alpha r)$ через $\cos\alpha x$

$$J_0(\alpha r) = \frac{2}{\pi}\int_0^r \frac{\cos\alpha x\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \tag{2.1}$$

получим

$$\int_0^\infty C^*(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha = \frac{E}{\pi}\int_0^r \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \qquad 0 \leqslant r \leqslant a$$

$$\int_0^\infty \alpha \left[C^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h - \frac{\alpha h + \operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha h}{\operatorname{sh}\alpha h} D^*(\alpha)\right] J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0 \qquad 0 \leqslant r < a \tag{2.2}$$

Дифференцируя первое уравнение (1.9) по x, интегрируя второе уравнение по x от 0 до x, умножая полученные выражения на $\frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 - r^2}}$, интегрируя затем по x в пределах от r до ∞, меняя порядок интегрирования и учитывая интегральное представление Пуассона для $J_0(\alpha r)$ через $\sin\alpha x$

$$J_0(\alpha r) = \frac{2}{\pi}\int_r^\infty \frac{\sin\alpha x\, dx}{\sqrt{x^2 - r^2}} \tag{2.3}$$

получаем

$$\int_0^\infty \alpha\,[C^*(\alpha)\operatorname{ch}\alpha h + D^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h]\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0 \qquad a \leqslant r < \infty$$

$$\int_0^\infty [\alpha h\, C^*(\alpha) + (1 + \alpha h\operatorname{cth}\alpha h)\, D^*(\alpha)]\, J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0 \qquad a < r < \infty \tag{2.4}$$

где $J_0(\alpha r)$ — функции Бесселя первого рода с действительным аргументом. Таким образом, вместо системы (1.8), (1.9) получаем систему (2.2) и (2.4) относительно $C^*(\alpha)$ и $D^*(\alpha)$.

Подобные системы рассматривались в работах Н. Н. Лебедева, Я. С. Уфлянда [1], Р. Д. Лоу [2], Ю. Н. Кузьмина, Я. С. Уфлянда [3].

Для решения системы (2.2) и (2.4) введем новые неизвестные $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ следующим образом [1—3]:

$$C^*(\alpha)\operatorname{ch}\alpha h + D^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h = \frac{1}{\alpha}\int_0^a \Phi(t)\sin\alpha t\,dt, \qquad \Phi(0)=0$$

$$\alpha h C^*(\alpha) + (1 + \alpha h \operatorname{cth}\alpha h) D^*(\alpha) = \alpha\int_0^a \Psi(t)\cos\alpha t\,dt \tag{2.5}$$

Подстановка (2.5) дает возможность удовлетворить уравнениям (2.4).

Для удовлетворения уравнениям (2.2) выражаем $C^*(\alpha)$ и $C^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h + (\alpha h + \operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha h) D^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h$ через функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$.

$$C^*(\alpha) = [g_1(\alpha h) - 1]\int_0^a \Psi(t)\cos\alpha t\,dt + g_2(\alpha h)\int_0^a \Phi(t)\sin\alpha t\,dt \tag{2.6}$$

$$C^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h + (\alpha h + \operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha h) D^*(\alpha)\operatorname{sh}\alpha h =$$

$$= g_3(\alpha h)\int_0^a \Psi(t)\cos\alpha t\,dt - [1 - g_4(\alpha h)]\int_0^a \Phi(t)\sin\alpha t\,dt \tag{2.7}$$

где

$$g_1(\alpha h) = 1 - \alpha\operatorname{sh}^2\alpha h / E(\alpha h), \quad g_2(\alpha h) = (\operatorname{sh}\alpha h + \alpha h\operatorname{ch}\alpha h)/E(\alpha h)$$

$$g_3(\alpha h) = \alpha(\operatorname{sh}\alpha h + \alpha h\operatorname{ch}\alpha h)/E(\alpha h), \quad g_4(\alpha h) = 1 + (\alpha^2 h^2 - \operatorname{sh}^2\alpha h)/\alpha E(\alpha)$$

$$E(\alpha h) = \alpha h + \operatorname{sh}\alpha h\operatorname{ch}\alpha h \tag{2.8}$$

Если теперь подставить (2.7), (2.8) в уравнения (2.2), воспользоваться (2.1) и переставить порядок интегрирования, то получим следующую систему уравнений относительно искомых функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$:

$$\int_0^r \frac{dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}\Big\{\Psi(z) - \int_0^a \Psi(t)[G_1(z+t) + G_1(z-t)]\,dt -$$

$$- \int_0^a \Phi(t)[G_2(z+t) - G_2(z-t)]\,dt\Big\} = -f_1(r) \quad 0 \leqslant r \leqslant a \tag{2.9}$$

$$\int_0^r \frac{dz}{\sqrt{r^2-z^2}}\left\{\Phi'(z)+\int_0^a \Psi(t)\left[G_3'(z+t)+G_3'(z-t)\right]dt+\right.$$

$$\left.+\int_0^a \Phi(t)\left[G_4'(z+t)-G_4'(z-t)\right]dt\right\}=0 \qquad (2.10)$$

Здесь введены обозначения

$$G_1(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_1(\alpha h)\cos u\alpha d\alpha, \qquad G_2(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_2(\alpha h)\sin u\alpha d\alpha$$

$$(2.11)$$

$$G_3(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_3(\alpha h)\sin u\alpha d\alpha, \qquad G_4(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty g_4(\alpha h)\cos u\alpha d\alpha$$

$$f_1(r)=\frac{E}{\pi}\int_0^r \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{r^2-x^2}} \qquad (2.12)$$

Решая (2.9) и (2.10) как интегральные уравнения Абеля с известными правыми частями, приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\left.\begin{aligned}
\Psi(z)&=f_2(z)+\int_0^a K_1(z,t)\Psi(t)\,dt+\int_0^a K_2(z,t)\Phi(t)\,dt \qquad (2.13)\\
\Phi(z)&=-\int_0^a K_3(z,t)\Psi(t)\,dt-\int_0^a K_4(z,t)\Phi(t)\,dt \qquad (2.14)
\end{aligned}\right\}\ 0\leqslant z<a$$

ядра которых даются формулами

$$K_1(z,t)=G_1(z+t)+G_1(z-t), \quad K_2(z,t)=G_2(z+t)-G_2(z-t)$$

$$(2.15)$$

$$K_3(z,t)=G_3(z+t)+G_3(z-t), \quad K_4(z,t)=G_4(z+t)-G_4(z-t)$$

$$f_2(z)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dz}\int_0^z \frac{rf_1(r)}{\sqrt{z^2-r^2}}\,dr \qquad (2.16)$$

При получении уравнения (2.14) интегрировали уравнение (2.10) по z в пределах от 0 до z и имели в виду, что $\Phi(0)=0$, $G_3(u)$ — нечетная функция, а $G_4(u)$ — четная функция.

Для получения конкретных результатов при различных значениях геометрических параметров следует применить какие-либо численные методы для определения функций $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ из систем (2.13), (2.14).

Систему интегральных уравнений (2.13) и (2.14) можно решить методом последовательных приближений, так как

$$\int_0^c |K_1(z,t)|\,dt + \int_c^a |K_2(z,t)|\,dt < 1$$

$$\int_0^a K_3(z,t)\,dt + \int_0^a |K_1(z,t)|\,dt < 1 \tag{2.17}$$

После получения решения уравнений (2.13), (2.14) методом последовательных приближений, нетрудно найти функции $A(\alpha)$, $B(\alpha)$, $C(\alpha)$, $D(\alpha)$ посредством квадратуры, следовательно, напряжения и перемещения в любой точке бесконечной полосы.

Нормальное напряжение $\sigma_y(x,0)$, $\sigma_y(x,h)$ под штампами, выраженное через функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, имеет вид

$$\sigma_y(x,0) = \frac{\Psi(a)}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int_x^a \frac{\Psi'(t)\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}} \quad (0 \leqslant x < a) \tag{2.18}$$

$$\sigma_y(x,h) = -\frac{\pi}{2}\Big\{\Phi'(x) + \int_0^a \Psi(t)\left[G_3(x+t) + G_3(x-t)\right]dt +$$

$$+ \int_0^a \Phi(t)\left[G_4(x+t) - G_4(x-t)\right]dt\Big\} \quad (a < x < \infty) \tag{2.19}$$

В частном случае, переходя к пределу при $h \to \infty$, получим задачу о давлении жесткого штампа с произвольным основанием на упругую полуплоскость, рассмотренную в работах многих авторов. В этом случае система интегральных уравнений (2.13), (2.14) отпадает, одна из неизвестных функций $\Phi(x) = 0$, а другая $\Psi(x)$ приравнивается свободному члену. Следовательно, решение этой задачи получается в замкнутом виде. Если в этом частном случае положим и $f(x) = \mathrm{const}$ (штамп с плоским основанием), то получим

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = f_2(z) = -\frac{P}{\pi} \qquad \left(P = -2\int_0^a \sigma_y(x,0)\,dx\right)$$

и формула (2.18) перейдет в известную формулу

$$\sigma_y(x,0) = -\frac{P}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} \qquad 0 \leqslant x < a \tag{2.20}$$

В качестве примера рассмотрим задачу вдавливания жесткого штампа с плоским основанием в верхнюю границу упругой изотропной бесконечной полосы. В этом случае $f(x) = \delta = \mathrm{const}$ и формулы (2.12), (2.16) дают

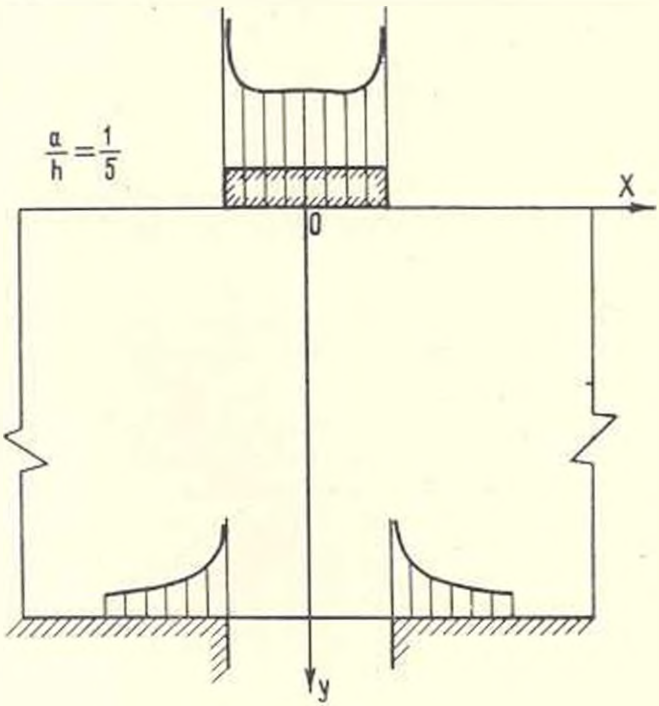
$$f_1(r) = E\delta/2, \qquad f_2(z) = -E\delta/\pi$$

Некоторые значения напряжений $\sigma_y(x, 0)$ и $\sigma_y(x, h)$, вычисленные по формулам (2.18) — (2.19) для различных точек границы бесконечной полосы в зависимости от $\varepsilon = a/h$, приведены в табл. 1.

Таблица 1

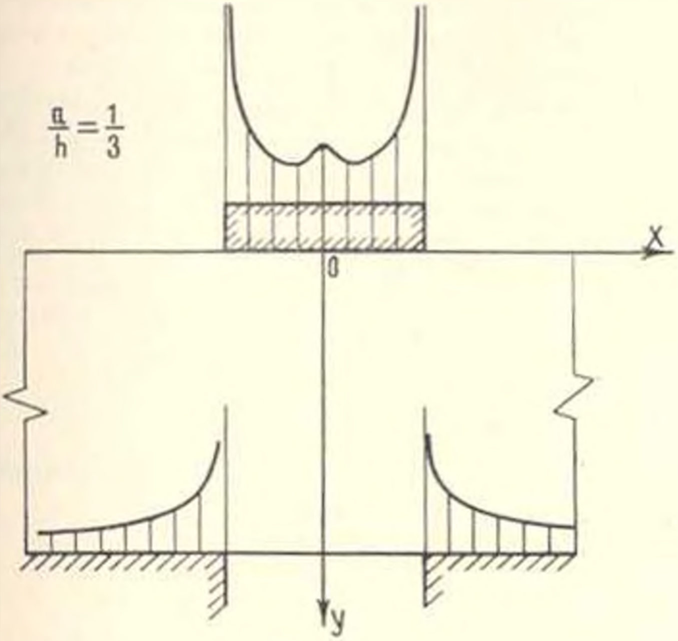
$-\sigma_y(x, 0)\, a/P$			$-\sigma_y(x, h)\, a/P$		
x	ε = 1/5	1/3	x	ε = 1/5	1/3
0	0.5885	0.4349	$5a/4$	0.2611	0.2256
$a/4$	0.5722	0.3485	$3a/2$	0.1939	0.1987
$a/2$	0.5808	0.3984	$7a/4$	0.1747	0.1517
$3a/4$	0.5875	0.4982	$2a$	0.1440	0.1402

Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений $\sigma_y(x,0)$, $\sigma_y(x,h)$ под штампами на фиг. 2 и 3 приведены

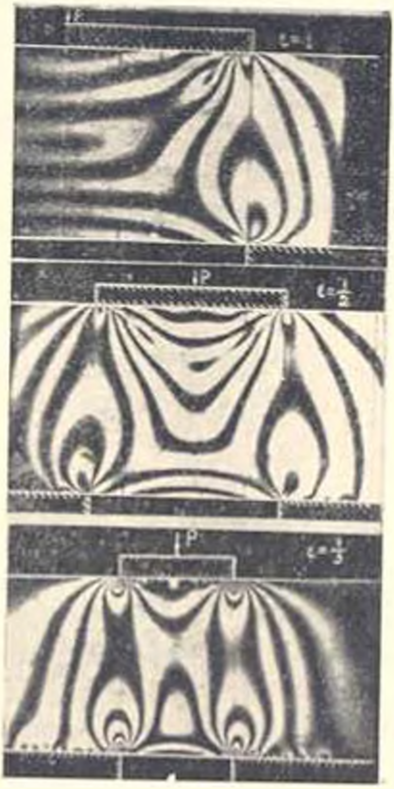


Фиг. 2.

эпюры этих напряжений. Следует отметить, что приведенные эпюры составлены приближенно: на основании расчетов, произведенных только для четырех точек оси. Как показывают произведенные вычисления (табл. 1) и построенные графики (фиг. 2, 3), закон распределения нормальных напряжений под штампом для полосы (фиг. 1) существенно отличается от закона распределения соответствующего напряжения под штампом для полуплоскости в том случае, когда ширина полосы довольно узкая (ε = 1, 1/2, 1/3).



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Закон распределения этого же напряжения для полосы качественно совпадает с законом распределения соответствующего напряжения для полуплоскости при довольно широкой полосе ($\varepsilon = 1/5$ и т. д.). Это заключение проверено опытом, проведенным в лаборатории фотоупругости Института математики и механики АН АрмССР Р. А. Шириняном. Наконец, на фиг. 4 для случая ($\varepsilon = 1, 1/2, 1/3$) приводятся фотографии картин изохром (линии равных максимальных касательных напряжений).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 V 1968

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԱՍԵՐՈՎ ԱՆՎԵՐՋ ՇԵՐՏԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է առաձգական, իզոտրոպ անվերջ շերտի վերին եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը, երբ ներքին եզրի երկու մասերում ներթաղված է սահող ամրացում: Խնդիրը սկզբում բերված է զույգ ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի, իսկ հետո Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի երկու ռեգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի: Ցույց է տրված, որ այդ սիստեմը կարելի է լուծել հաջորդական մոտավորությունների եղանակով: Մասնավոր դեպքում, երբ $h \to \infty$ ստացված է կիսահարթության համար կոնտակտային խնդրի լուծումը:

Վերջում բերված է թվային օրինակ:

V. S. TONOYAN

THE CONTACT PROBLEM FOR THE INFINITE STRIP WITH TWO PART CONTACTS

Summary

The problem of pressing of a rigid punch on the upper bound of the elastic isotropic infinite strip, when the double parts of the lower bound is supposed to be a sliding clamp, is considered. At first, the problem is brought to a system of dual integral equations which is transformed afterwards to the system of Fredholm integral equation of the second kind.

It is shown, that this system can be solved by the methods of successive approximations. In a particular case with $h \to \infty$ the solution of the known contact problems for the semi-infinite plain is obtained.

At the end a numerical example is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С.* Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, т. 22, вып. 3, 1958, 320.
2. *Low R. D.* On a doubly mixed boundary value problem for an elastic layer. Quarterly of applied mathematics, vol. XXII, No 2, 1964, pp. 153—157.
3. *Кузьмин Ю. Н., Уфлянд Я. С.* Контактная задача о сжатии упругого слоя двумя штампами. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967, 711.
4. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Контактная задача для двух круговых штампов на упругом полупространстве. Аннотации докладов III Всесоюзного съезда по теорет. и прикл. механике, М., 1968.
5. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

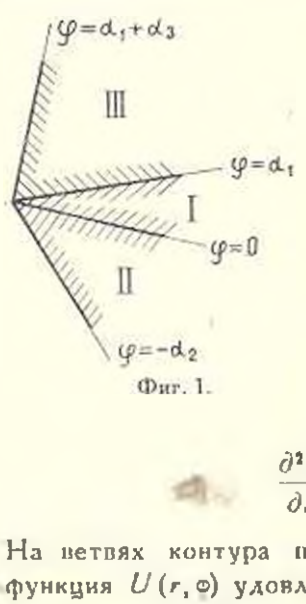
Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

С. Х. ГЕВОРКЯН

ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ОКОЛО УГЛОВЫХ ТОЧЕК ЛИНИИ РАЗДЕЛА И КОНТУРА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ СКРУЧИВАЕМОГО СТЕРЖНЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ТРЕХ РАЗЛИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Задача о кручении и изгибе призматического стержня, составленного из различных материалов, впервые поставлена и исследована Н. И. Мусхелишвили [1]. Различные вопросы этой задачи исследованы в [2—5] и других работах. В настоящей статье методами работ [6—8] исследованы особенности напряжений около угловой точки линии раздела и контура поперечного сечения призматического стержня, составленного из трех различных изотропных материалов. Случаи двух материалов рассмотрены в работах [8—9]. Рассматриваемые задачи приводятся к трансцендентным уравнениям относительно порядка особенности, зависящего от величин некоторых геометрических характеристик поперечного сечения и деформативных характеристик составляющих стержень материалов.

1. Рассмотрим решение задачи кручения составного призматического стержня вблизи угловой точки линии раздела областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам, когда две линии раздела выходят на угловую точку контура поперечного сечения (фиг. 1.) Поместим начало полярной системы координат (r, φ) в угловой точке линии раздела, причем отсчет угла φ будем производить от направления одной из ветвей линии раздела. В случае криволинейности ветвей контура поперечного сечения и линии раздела областей заменим их соответствующими касательными в угловой точке. От этого характер напряженного состояния вблизи угловой точки не изменится.



Фиг. 1.

Функция напряжений $U(r, \varphi)$ в каждой из областей I, II и III удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}=-2 \tag{1.1}$$

На ветвях контура поперечного сечения и линии раздела областей функция $U(r, \varphi)$ удовлетворяет следующим граничным условиям [4]:

$$
\begin{gathered}
G_1 U_1(r, \alpha_1) = G_3 U_3(r, \alpha_1), \quad G_1 U_1(r, 0) = G_2 U_2(r, 0) \\
U_3(r, \alpha_1 + \alpha_3) = 0, \qquad U_2(r, -\alpha_2) = 0 \\
\left.\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial U_2}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=0}, \qquad \left.\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} = \left.\frac{\partial U_3}{\partial \varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1}
\end{gathered} \tag{1.2}
$$

где U_1, U_2 и U_3 представляют U в соответствующих областях, а G_1, G_2, G_3 — модули сдвига составляющих стержень материалов.

Решение однородной граничной задачи (1.1)—(1.2) представим в виде

$$
U_i(r, \varphi) = R_i(r) \Phi_i(\varphi) \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.3}
$$

Разделяя переменные, получим

$$
r^2 R_i'' + r R_i' - \lambda_i^2 R_i = 0 \tag{1.4}
$$

$$
\Phi_i'' + \lambda_i^2 \Phi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{1.5}
$$

Линейно независимыми решениями уравнения (1.4) будут

$$
R_i = r^{\lambda_i}, \qquad R_i = r^{-\lambda_i} \qquad (\lambda_i > 0) \tag{1.6}
$$

Решением уравнения (1.5) будет

$$
\Phi_i = A_i \cos \lambda_i \varphi + B_i \sin \lambda_i \varphi \tag{1.7}
$$

Удовлетворив условиям (1.2), из (1.3) и (1.6) получим

$$
\begin{gathered}
\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda \\
G_1 \Phi_1(\alpha_1) = G_3 \Phi_3(\alpha_1), \qquad G_1 \Phi_1(0) = G_2 \Phi_2(0) \\
\Phi_3(\alpha_1 + \alpha_3) = 0, \qquad \Phi_2(-\alpha_2) = 0 \\
\Phi_1'(0) = \Phi_2'(0), \qquad \Phi_1'(\alpha_1) = \Phi_3'(\alpha_1)
\end{gathered} \tag{1.8}
$$

Из (1.7) и (1.8) имеем

$$
\begin{gathered}
G_1 (A_1 \cos \lambda\alpha_1 + B_1 \sin \lambda\alpha_1) - G_3 (A_3 \cos \lambda\alpha_1 + B_3 \sin \lambda\alpha_1) = 0 \\
G_1 A_1 - G_2 A_2 = 0, \qquad B_1 - B_2 = 0 \\
-A_1 \sin \lambda\alpha_1 + B_1 \cos \lambda\alpha_1 + A_3 \sin \lambda\alpha_1 - B_3 \cos \lambda\alpha_1 = 0 \\
A_2 \cos \lambda\alpha_2 - B_2 \sin \lambda\alpha_2 = 0, \qquad A_3 \cos \lambda(\alpha_1 + \alpha_3) + B_3 \sin \lambda(\alpha_1 + \alpha_3) = 0
\end{gathered} \tag{1.9}
$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (1.9) после некоторых преобразований получим трансцендентное уравнение относительно λ

$$
\begin{gathered}
\Delta(\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \mu_2, \mu_3) = (\mu_2 + 1)[(\mu_3 + 1)\sin \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \\
- (\mu_3 - 1)\sin \lambda(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)] - (\mu_2 - 1)[(\mu_3 + 1)\sin \lambda(\alpha_3 - \alpha_2 + \alpha_1) + \\
+ (\mu_3 - 1)\sin \lambda(\alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_1)] = 0
\end{gathered} \tag{1.10}
$$

$$
\text{где } \mu_2 = \frac{G_2}{G_1}, \qquad \mu_3 = \frac{G_3}{G_1}.
$$

Общее решение однородной граничной задачи (1.1)—(1.2) можно представить в виде

$$\bar{U}(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}a^{(k)}r^{\lambda_k}\Phi^{(k)}(\varphi) \tag{1.11}$$

где $\Phi^{(k)}(\varphi)$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_k, которые являются корнями трансцендентного уравнения (1.10).

Покажем, что система функций $\{\Phi^{(k)}(\varphi)\}$ на отрезке $[-\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3]$ ортогональна с кусочно-постоянным весом

$$G(\varphi)=\begin{cases} G_1 & 0<\varphi<\alpha_1 \\ G_2 & -\alpha_2<\varphi<0 \\ G_3 & \alpha_1<\varphi<\alpha_1+\alpha_3 \end{cases}$$

Пусть $\Phi^{(m)}$ и $\Phi^{(n)}$ — собственные функции, соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n, причем $\lambda_m\neq\lambda_n$. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_3}G(\varphi)\lambda_m^2\Phi^{(n)}\Phi^{(m)}d\varphi=-G_2\int_{-\alpha_2}^{0}\Phi_2'^{(m)}\Phi_2'^{(n)}d\varphi-G_1\int_{0}^{\alpha_1}\Phi_1'^{(m)}\Phi_1'^{(n)}d\varphi-$$

$$-G_3\int_{\alpha_1}^{\alpha_1+\alpha_3}\Phi_3'^{(m)}\Phi_3'^{(n)}d\varphi=\lambda_n^2\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_3}G(\varphi)\Phi^{(m)}\Phi^{(n)}d\varphi \tag{1.12}$$

откуда, так как $\lambda_m\neq\lambda_n$, получим

$$\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_3}G(\varphi)\Phi^{(m)}\Phi^{(n)}d\varphi=0$$

что и требовалось доказать.

При выводе формулы (1.12) были использованы уравнение (1.5) и условия (1.8), которым удовлетворяют $\Phi^{(k)}$ $(k=1,2\ldots)$. Покажем теперь, что все собственные значения граничной задачи (1.12), (1.8) действительны. Допустим, что существуют комплексные $\lambda_k=p_k+iq_k$. Соответствующие собственные функции обозначим $\Phi^{(k)}=\varphi^{(k)}+i\psi^{(k)}$. Из условия (1.12) имеем

$$4iq_k\int_{-\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_3}G(\varphi)\left(\varphi^{(k)2}+\psi^{(k)2}\right)d\varphi=0$$

откуда, так как функции $\varphi^{(k)}$ и $\psi^{(k)}$ не могут одновременно тождественно равняться нулю в $[-\alpha_2, \alpha_1+\alpha_3]$, получим $q_k=0$. Положительные собственные значения пронумеруем следующим образом:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

Как будет видно в дальнейшем, отрицательные собственные значения для рассматриваемой задачи не нужны.

Эти утверждения вместе с полнотой системы $\{\Phi^{(k)}\}$ на отрезке $[-\alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2]$ в классе функций, удовлетворяющих условиям (1.8), следуют также из самосопряженности линейного оператора, порожденного дифференциальным выражением (1.5) и граничными условиями (1.8).

Частное решение уравнения (1.1) U_i^0 можно представить в виде

$$U_i^0 = \frac{r^2}{2}\left(A_i^0 \cos 2\varphi + B_i^0 \sin 2\varphi - 1\right) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.13}$$

Коэффициенты A_i^0, B_i^0 $(i = 1,\ 2,\ 3)$ определятся из условий (1.2).

Удовлетворяя условиям (1.2), относительно коэффициентов A_i^0, B_i^0 $(i=1,\ 2,\ 3)$ частного решения (1.13) получаем систему

$$A_1^0 \cos 2\alpha_1 - A_2^0 \mu_2 \cos 2\alpha_1 + B_1^0 \sin 2\alpha_1 - B_2^0 \mu_2 \sin 2\alpha_1 = 1 - \mu_2$$

$$A_1^0 - \mu_3 A_3^0 = 1 - \mu_3, \qquad A_2^0 \cos 2\alpha_2 - B_2^0 \sin 2\alpha_2 = 1$$

$$B_1^0 - B_3^0 = 0, \qquad A_3^0 \cos 2(\alpha_1 + \alpha_3) + B_3^0 \sin 2(\alpha_1 + \alpha_3) = 1 \tag{1.14}$$

$$-A_1^0 \sin 2\alpha_1 + A_2^0 \sin 2\alpha_1 + B_1^0 \cos 2\alpha_1 - B_2^0 \cos 2\alpha_1 = 0$$

Определителем системы (1.14) будет $\Delta(2,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \mu_2,\ \mu_3) = \Delta_0$.

Когда $\Delta_0^0 = \Delta(2,\ \alpha_1^0,\ \alpha_2^0,\ \alpha_3^0,\ \mu_2^0,\ \mu_3^0) = 0$, частное решение U_i^0 можно получить предельным переходом при $\alpha_i \to \alpha_i^0$, $\mu_j \to \mu_j^0$, предварительно объединяя первые два слагаемых частного решения (1.13) со слагаемыми общего решения, соответствующими собственному значению, стремящемуся к 2.

Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи, согласующееся с граничными условиями (1.2) и не приводящее к накоплению бесконечной энергии упругой деформации в ограниченном объеме, можно представить в виде ряда

$$U_i(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} r^{\lambda_k}\left(A_i^{(k)} \cos \lambda_k \varphi + B_i^{(k)} \sin \lambda_k \varphi\right) + U_i^0 \qquad (\lambda_k > 0) \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{1.15}$$

Компоненты касательного напряжения τ_{rz} и $\tau_{\theta z}$ определяются через функцию напряжений $U(r, \varphi)$ формулами

$$\tau_{rz} = G\theta \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad \tau_{\theta z} = -G\theta \frac{\partial U}{\partial r} \tag{1.16}$$

где G — модуль сдвига скручиваемого стержня, θ — относительный угол закручивания.

Из представления функции $U(r, \varphi)$ в виде (1.15) и выражений компонент напряжения (1.16) видно, что, если значение параметра λ

лежит в интервале $(0, 1)$, при приближении к угловой точке линии раздела областей поперечного сечения напряжения неограниченно возрастают. Поэтому определение характера напряженного состояния в рассматриваемой задаче кручения составного призматического стержня сводится к исследованию существования корней трансцендентного уравнения (1.10) в интервале $(0,1)$ при различных сочетаниях значений углов и модулей сдвига. Порядок особенностей при этом равен $\lambda - 1$. Трансцендентное уравнение (1.10), определяющее систему собственных значений $\{\lambda_k\}$, в общем случае содержит пять параметров α_1, α_2, α_3, μ_2 и μ_3 и его можно интерпретировать как уравнение некоторой выпуклой поверхности в пятимерном пространстве, зависящей от параметра λ. Проведя различные сечения поверхности $\lambda = 1$, для отдельных конкретных случаев можно получить двумерные области изменения параметров, где напряжения в угловой точке контура поперечного сечения не имеют особенностей.

Рассмотрим следующие частные случаи.

1. Допустим, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$$

Тогда уравнение (1.10) примет вид

$$\Delta(\lambda, \alpha, \mu_2, \mu_3) = \sin\lambda\alpha \left| \sin^2\lambda\alpha - \frac{\mu_2 + \mu_3 + 1}{(\mu_2 + 1)(\mu_3 + 1)} \right| = 0$$

откуда, так как

$$\lim_{\mu_2, \mu_3 \to \infty} \frac{\mu_2 + \mu_3 + 1}{(\mu_2 + 1)(\mu_3 + 1)} = 0$$

вытекает, что для любых малых углов α возможны такие модули сдвига составляющих стержень материалов, при которых в угловой точке контура поперечного сечения напряжения имеют особенность.

2. Допустим $\alpha_1 = n\alpha$, $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu$, причем $(n+2)\alpha < 2\pi$. Тогда из уравнения (1.10) при $\lambda = 1$ получим

$$\mu = \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\frac{n\alpha}{2} \tag{1.17}$$

В плоскости (α, μ) кривые (1.17) для некоторых значений n изображены на фиг. 2.

При фиксированном n для тех значений параметров α и μ, которые принадлежат области плоскости (α, μ), лежащей между кривой (1.17) и координатными осями и расположенной на стороне начала координат, напряжения не имеют особенностей. В общем случае при $\lambda = 1$ уравнение (1.10) можно представить в виде

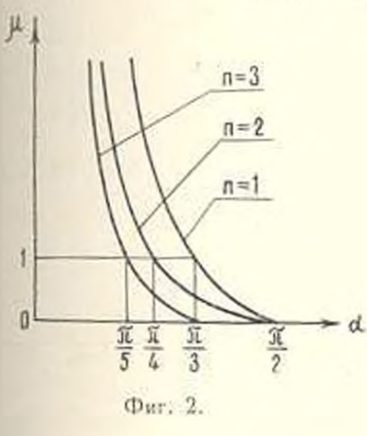
$$\mu_3 = \frac{\mu_2 \operatorname{ctg}\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2}{\mu_2 - \operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\alpha_1} \operatorname{ctg}\alpha_3 \tag{1.18}$$

На плоскости (μ_2, μ_3) уравнение (1.18) представляет гиперболу, зависящую от значений углов α_1, α_2 и α_3 (фиг. 3) с центром в точке C, имеющей координаты

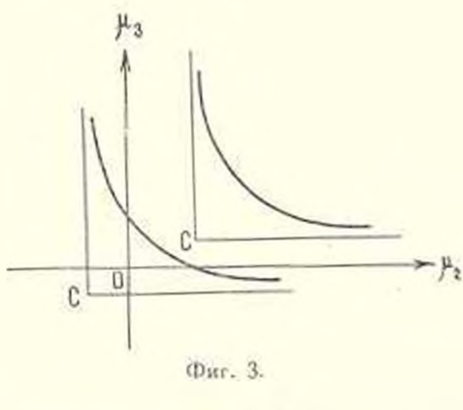
$$\mu_2 = \operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_2, \quad \mu_3 = \operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{ctg}\alpha_3 \qquad (1.19)$$

Внутренние точки области на плоскости (μ_2, μ_3), расположенной между гиперболой и координатными осями, свободны от особенностей напряжений. Из выражений (1.19) для координат центра гиперболы видно, что при увеличении центрального угла α_1, соответствующего области 1 поперечного сечения, точка C стремится к началу координат и при $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ совпадает с ним. При дальнейшем увеличении центр гиперболы переходит в третий квадрант и ветви гиперболы пересекаются с координатными осями, т. е. область параметров μ_j, где напряжения не имеют особенностей, в этом случае конечна (фиг. 3). В табл. 1 приведены значения λ для различных случаев параметров α_1, α_2, α_3, μ_2 и μ_3, когда напряжения в угловой точке контура поперечного сечения имеют особенность. Эти значения получены из уравнения (1.10), когда параметры μ_2, μ_3 и α_3 фиксированы, а α_1 и α_2, начиная с $\frac{\pi}{12}$, возрастают с шагом $\frac{\pi}{12}$ до получения корня трансцендентного уравнения в интервале $(0,1)$. Допустим, что это достигается при значениях

$$\alpha_i = \alpha_i^0, \quad \mu_j = \mu_j^0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ j = 2, 3)$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Если $\alpha_i < \alpha_i^0$ и $\mu_j < \mu_j^0$ все корни уравнения (1.10) $\lambda_k > 1$ $(k = 1, 2 \ldots)$ и, как это видно из формул (1.16) компонент напряжений, при приближении к угловой точке контура поперечного сечения напряжения стремятся к нулю. Из табл. 1 видно, что наибольший порядок особенности во всех рассмотренных случаях получается при

Таблица 1

$\alpha_2=2\cdot\frac{\pi}{12}$	$\frac{\alpha_1}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$3\cdot\frac{1}{12}$	$4\cdot\frac{1}{12}$	$5\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_2=1.1$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$13\cdot\frac{1}{12}$	$13\cdot\frac{1}{12}$	$12\cdot\frac{1}{12}$	$9\cdot\frac{1}{12}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_3=15$	λ	0.90483	0.89421	0.93411	0.94190	0.86589	0.78306
$\mu_2=2$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$13\cdot\frac{1}{12}$	$12\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{0}{12}$
$\mu_3=15$	λ	0.89113	0.92598	0.94129	0.88051	0.84257	0.75895
$\mu_2=10$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$4\cdot\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_3=15$	λ	0.91079	0.89383	0.73145	0.63261	0.54627	0.51333
$\mu_2=20$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_3=15$	λ	0.86620	0.79702	0.64990	0.56086	0.49948	0.45383
$\mu_2=30$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$2\cdot\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_3=15$	λ	0.82465	0.76048	0.61894	0.53339	0.47446	0.43063
$\mu_2=0.9$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.90527	0.88809	0.87625	0.86685	0.85855	0.85053
$\mu_2=0.5$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.92662	0.90050	0.88501	0.87392	0.86488	0.85676
$\mu_2=0.1$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$8\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.86594	0.92132	0.89759	0.88304	0.87237	0.86352
$\mu_2=0.05$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$8\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.87576	0.92497	0.89956	0.88436	0.87341	0.86442

$\alpha_2=2\cdot\frac{\pi}{12}$	$\frac{\alpha_1}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$8\cdot\frac{1}{12}$	$9\cdot\frac{1}{12}$	$10\cdot\frac{1}{12}$	$11\cdot\frac{1}{12}$	
$\mu_2=1.1$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$			
$\mu_3=15$	λ	0.78306	0.71622	0.66101			
$\mu_2=2$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$			
$\mu_3=15$	λ	0.69296	0.63925	0.59150			
$\mu_2=10$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$			
$\mu_3=15$	λ	0.47343	0.44106	0.41409			

Таблица 1 (Продолжение)

$\mu_2=20$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$		
$\mu_3=15$	λ	0.41812	0.38920	0.36513		
$\mu_2=30$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$		
$\mu_3=15$	λ	0.39637	0.36860	0.34550		
$\mu_2=0.9$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$	$5\cdot\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.84266	0.94758	0.92335	0.94913	0.93038
$\mu_2=0.5$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$	$5\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.84866	0.84008	0.94250	0.91646	0.93432
$\mu_2=0.1$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.85541	0.84732	0.83859	0.93902	0.91164
$\mu_2=0.05$	$\frac{\alpha_3}{\pi}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$7\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$	$6\cdot\frac{1}{12}$
$\mu_3=0.07$	λ	0.85627	0.84821	0.83957	0.94151	0.91501

$$\mu_2 = 15, \ \mu_3 = 30, \ \alpha_1 = \frac{9}{12}\pi, \ \alpha_2 = \frac{2}{12}\pi, \ \alpha_3 = \frac{\pi}{12}$$

когда $\lambda - 1 = -0.6544$. При $\mu_2 = 15$, $\mu_3 = 30$, $\alpha_2 = \frac{2}{12}\pi$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{12}$ и $\alpha_3 = \frac{2}{12}\pi$, т. е. при суммарном угле $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 75^\circ$ порядок особенности равен -0.17535. Когда $\mu_j < 1$, напряжения имеют особенность при $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 > \pi$, если только α_1 достаточно большое. Например, при $\mu_2 = 0.03$, $\mu_3 = 0.07$, $\alpha_1 = \frac{11}{12}\pi$ особенность появляется только при общем угле $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 270^\circ$.

2. В случае, когда точка пересечения линий разделов областей поперечного сечения, соответствующих различным материалам, находится внутри поперечного сечения скручиваемого составного стержня, начало полярной системы координат помещаем в этой точке, а ось $\varphi = 0$ направляем по одной из линий разделов областей (фиг. 4). Аналогично вышеуказанному, в случае криволинейности ветвей линий разделов областей поперечного сечения заменим их касательными в точке их пересечения.

Функция напряжений $U(r,\varphi)$ удовлетворяет в каждой из областей поперечного сечения уравнению (1.1) и следующим условиям на ветвях линии разделов:

$$G_1 U_1(r,0) = G_3 U_3(r,0), \quad G_1 U_1(r,\alpha_1) = G_2 U_2(r,\alpha_1)$$

$$G_2 U_2(r, 2\pi-\alpha_2) = G_3 U_3(r,-\alpha_2)$$

$$\left.\frac{\partial U_2}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=2\pi-\alpha_2} = \left.\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=-\alpha_2}, \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0} = \left.\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=0}, \quad \left.\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} = \left.\frac{\partial U_2}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\alpha_1} \tag{2.1}$$

Решение уравнения (1.1) в каждой из областей I, II и III поперечного сечения можно представить в виде

$$U_i(r,\varphi) = R_i(r)\Phi_i(\varphi) =$$

$$= r^{\lambda_i}(A_i\cos\lambda_i\varphi + B_i\sin\lambda_i\varphi) + \frac{r^2}{2}(A_i^0\cos 2\varphi + B_i^0\sin 2\varphi - 1) \tag{2.2}$$

$$i = (1,\ 2,\ 3)$$

где коэффициенты A_i^0 и B_i^0 частного решения U_i^0 определяются из условий (2.1). Удовлетворив граничным условиям (2.1), на основании (2.2) получим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$$

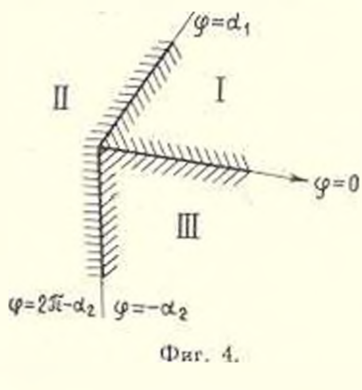
$$G_1 A_1 - G_3 A_3 = 0, \quad B_1 - B_3 = 0, \quad -A_1\sin\lambda\alpha_1 + B_1\cos\lambda\alpha_1 +$$

$$+ A_2\sin\lambda\alpha_1 - B_2\cos\lambda\alpha_1 = 0$$

$$G_1(A_1\cos\lambda\alpha_1 + B_1\sin\lambda\alpha_1) - G_2(A_2\cos\lambda\alpha_1 + B_2\sin\lambda\alpha_1) = 0 \tag{2.3}$$

$$G_3(A_3\cos\lambda\alpha_2 - B_3\sin\lambda\alpha_2) - G_2[A_2\cos(2\pi-\alpha_2)\lambda + B_2\sin(2\pi-\alpha_2)\lambda] = 0$$

$$A_3\sin\lambda\alpha_2 + B_3\cos\lambda\alpha_2 + A_2\sin(2\pi-\alpha_2)\lambda - B_2\cos(2\pi-\alpha_2)\lambda = 0$$



Фиг. 4.

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (2.3) после некоторых преобразований получим трансцендентное уравнение относительно λ

$$[\mu_3(\mu_2+1)^2+\mu_2-\mu_3]\sin^2\lambda\pi-\mu_3(\mu_2-1)^2\sin^2(\pi-\alpha_1)\lambda-$$
$$-(\mu_2-\mu_3)^2\sin^2(\pi-\alpha_2)\lambda-(\mu_2-1)(\mu_2-\mu_3)(\mu_3+1)\times$$
$$\times\cos[2\pi-(\alpha_1+\alpha_2)]\lambda\sin\lambda\alpha_1\sin\lambda\alpha_2=0 \qquad (2.4)$$

где $\mu_2=\dfrac{G_2}{G_1}$, $\mu_3=\dfrac{G_3}{G_1}$.

Общее решение однородной задачи (1.1)—(1.2) можно представить в виде

$$U(r,\varphi)=\sum_{k=1}^{\infty}a^{(k)}r^{\lambda_k}\Phi^{(k)}$$

где $\Phi^{(k)}$ — собственные функции однородной краевой задачи для определения Φ, соответствующие собственным значениям λ_k, которые являются корнями уравнения (2.4). Используя дифференциальное уравнение (1.5) и граничные условия (2.1), можно показать, как это сделано в п 1, что: 1) система функций $\{\Phi^{(k)}\}$ на отрезке $[-\alpha_3, 2\pi-\alpha_2]$ ортогональна с весом

$$G(\varphi)=\begin{cases}G_1 & 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha_1\\ G_2 & \alpha_1\leqslant\varphi\leqslant 2\pi-\alpha_2\\ G_3 & -\alpha_3\leqslant\varphi\leqslant 0\end{cases}$$

2) все собственные значения граничной задачи (1.5), (2.1) действительны и 3) система функций $\{\Phi^{(k)}\}$ на отрезке $[-\alpha_3, 2\pi-\alpha_2]$ полна в классе функций, удовлетворяющих условиям (2.1). Таким образом, общее решение рассматриваемой задачи можно представить в виде (1.15).

Как отмечалось в п 1, задача о выявлении особенностей напряженного состояния в точке пересечения линий разделов областей поперечного сечения скручиваемого составного стержня сводится к исследованию существования в интервале (0,1) корней трансцендентного уравнения (2.4) при различных сочетаниях значений углов и модулей сдвига. Рассмотрим частный случай.

Допустим $\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\pi}{2}$. Трансцендентное уравнение (2.4) примет вид

$$\cos^2\frac{\lambda\pi}{2}=\frac{\mu_3(\mu_2-1)^2}{2(\mu_2+1)(\mu_3+1)(\mu_2+\mu_3)}$$

откуда вытекает, что если $\mu_2\neq 1$, при любых μ_2 и μ_3 напряжения в точке пересечений линий разделов областей поперечного сечения имеют особенность. Численным анализом можно показать, что если G_1, G_2 и G_3 попарно разные, в этой точке напряжения имеют особенность, независимо от величин углов α_1, α_2 и от отношения модулей сдвига.

В заключение заметим, что исследования аналогичных задач электростатики для составных сред можно провести при помощи результатов, полученных другим методом в работе [10].

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 5 V 1968

Ս. Խ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ԵՐԵՔ ՏԱՐԲԵՐ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ԲԱՂԿԱՑԱԾ ՈԼՈՐՎՈՂ ՁՈՂԻ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՈՒՅԹԻ ԵԶՐԱԳԾԻ ԵՎ ԲԱԺԱՆՄԱՆ ԳԾԻ ԱՆԿՅՈՒՆԱՅԻՆ ԿԵՏԵՐԻ ՄՈՏ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ԵԶԱԿԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրված են՝ լարումների եզակիությունները երեք տարբեր իզոտրոպ նյութերից պատրաստված ձողի ընդլայնական հատույթի եզրագծի և բաժանման գծի անկյունային կետերի մոտ։

Բևեռային կոորդինատական սիստեմում կառուցված է, տեղական լուծում, որը թույլ է տալիս դիտարկված խնդիրները բերել եզակիության կարգի նկատմամբ տրանսցենդենտ հավասարման, կախված անկյունների մեծություններից և մարմինը կազմող նյութերի դեֆորմացիոն հատկություններից։

S. KH. GEVORGIAN

THE SINGULARITIES OF STRESSES NEAR THE CORNER POINTS OF THE LINE OF CONTACT AND THE CONTOUR OF THE CROSS SECTION OF A TWISTED ROD CONSISTING OF THREE DIFFERENT MATERIALS

S u m m a r y

The singularities of stresses near the corner points of the line of contact and contour of the cross section of the twisted rod which consists of three different isotropic materials are investigated.

The local solution in the polar system of coordinates is constructed. The investigated problem is reduced to the transcendental equation with respect to the degree of singularity which depends on the magnitudes of angles and deformation characteristics of the body materials.

Numerical examples are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Векуа И. Н., Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, т. 1, вып. 2, 1933, 167—178.
3. *Шерман Д. И.* Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб. АН СССР, т. 10, 1951.
4. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VIII, №2, 1955, 17—30.
5. *Хатиашвили Г. М.* Задача Альманси-Митчеля для составного бруса. Тр. вычисл. центра АН Груз. ССР, т. II, 1961.
6. *Williams M. L.* Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. Journ. Appl. Mech., v. 19, 1952.
7. *Цянь Вэй-чан, Линь Хунь-сунь, Ху Хай-чан, Е Кай-юань.* Теория кручения цилиндрических тел (на китайском языке). Пекин, 1956.
8. *Чобанян К. С.* Об особенностях распределения напряжений около угловых точек линии раздела и контура сечения скручиваемого составного стержня. Доклад на общем годичном собрании АН Арм. ССР, 1966.
9. *Геворкян С. Х.* Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропных тел. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, №4, 1968.
10. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд. АН СССР, М.—Л., 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Д. В. ПЕШТМАЛДЖЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

ОБ ИЗГИБЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе исследуется концентрация напряжений около кругового неподкрепленного отверстия в прямоугольной пластинке с помощью теории, учитывающей влияние поперечных сдвигов [1]. Материал пластинки трансверсально изотропный, плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки.

1. Приведем основную систему уравнений изгиба трансверсально изотропной пластинки в полярных координатах, которая, как известно [2], в случае отсутствия поверхностной нагрузки, представляется в виде

$$\Delta\Delta w = 0, \qquad \Delta \Phi - \delta_0^2 \Phi = 0 \tag{1.1}$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через искомые функции $w(r, \theta)$ и $\Phi(r, \theta)$ следующим образом:

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{2D}{\delta_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Delta w + \frac{2}{\delta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \tag{1.2}$$

$$M_\theta = -D\left[\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{2D}{\delta_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Delta w) - \frac{2}{\delta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)$$

$$H = -D(1-\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{2D}{\delta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w)\right] + \Phi - \frac{2}{\delta_0^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$N_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \qquad N_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w) - \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{1.3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \qquad \delta_0^2 = \frac{10\,G'}{Gh^2}$$

где h — толщина пластинки; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; G' — модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных к плоскости изотропии.

2. Пусть прямоугольная пластинка с круговым неподкрепленным отверстием, находящимся на достаточно большом расстоянии от ее краев, деформируется моментами M_1 и M_2, равномерно распределенными по сторонам.

Край отверстия свободен от усилий.

Зная решение для сплошной пластинки, нетрудно путем наложения [3] получить решение для поставленной задачи.

Решение для сплошной пластинки, изгибаемой моментами M_1 и M_2, имеет вид*

$$w' = -\frac{r^2}{4D}\left(\frac{M_1+M_2}{1+\mu}+\frac{M_1-M_2}{1-\mu}\cos 2\theta\right), \qquad \Phi' = 0 \tag{2.1}$$

При этом

$$M_r' = \frac{1}{2}\left|(M_1+M_2)+(M_1-M_2)\cos 2\theta\right|$$

$$M_\theta' = \frac{1}{2}\left|(M_1+M_2)-(M_1-M_2)\cos 2\theta\right|$$

$$H' = -\frac{1}{2}(M_1-M_2)\sin 2\theta \tag{2.2}$$

$$N_r' = 0, \qquad N_\theta' = 0$$

Накладываем на (2.1) и (2.2) решение для бесконечной пластинки с отверстием, край которого загружен следующими усилиями и моментами:

$$\left.\begin{aligned} M_r^* &= -\frac{1}{2}\left|(M_1+M_2)+(M_1-M_2)\cos 2\theta\right| \\ H^* &= \frac{1}{2}(M_1-M_2)\sin 2\theta, \qquad N_r^* = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } r = a \tag{2.3}$$

взятыми из (2.2) с обратным знаком.

Решение этой задачи, в отличие от результатов для сплошной пластинки, будем обозначать двумя штрихами. Найдем его при граничных условиях (2.3) и условии, что все усилия стремятся к нулю на бесконечности.

Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$w'' = w_0(r) + w_1(r)\cos 2\theta, \qquad \Phi = F(r)\sin 2\theta \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в систему (1.1), для функций $w_0(r)$, $w_1(r)$ и $F(r)$ получим

* Одним штрихом обозначаем решение для сплошной пластинки.

$$
\begin{gathered}
w_0 = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r \\
w_1 = C_5 + C_6 r^2 + C_7 r^4 + C_8 r^{-2} \qquad (2.5) \\
F = C_9 I_2(\delta_0 r) + C_{10} K_2(\delta_0 r)
\end{gathered}
$$

Здесь $I_n(\delta_0 r)$, $K_n(\delta_0 r)$ — функции Бесселя чисто мнимого аргумента соответственно первого и второго рода.

Удовлетворяя указанным граничным условиям и исключая жесткое смещение пластинки, для постоянных $C_1, \ldots, C_{10}$, входящих в (2.5), получим

$$C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_7 = C_9 = 0$$

$$C_3 = -\frac{(M_1 + M_2)\, a^2}{2D(1-\mu)}, \qquad C_5 = \frac{M_1 - M_2}{2D} \frac{a^2}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \qquad (2.6)$$

$$C_8 = \frac{(M_1 - M_2)\, a^4}{4D(1-\mu)} \frac{1 - \mu + 4\lambda(\delta)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)}, \qquad C_{10} = -\frac{2(M_1 - M_2)}{[3 + \mu - 4\lambda(\delta)]\, K_2(\delta)}$$

где

$$\delta = \delta_0 a = \frac{a}{h}\sqrt{\frac{10\, G'}{G}}, \qquad \lambda(\delta) = \frac{1}{\delta} \frac{K_1(\delta)}{K_2(\delta)} \qquad (2.7)$$

Вычисляя теперь $M_r', \ldots$ и выполняя указанное наложение ($M_r = M_r' + M_r'', \ldots$), получим решение поставленной задачи, когда край отверстия свободен от напряжений.

Приведем лишь интересующие нас значения момента M_θ и перерезывающей силы N_θ по контуру отверстия ($r = a$)

$$M_\theta = M_1 + M_2 - \frac{2(1+\mu)(M_1 - M_2)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \cos 2\theta \qquad (2.8)$$

$$N_\theta = -\frac{2(M_1 - M_2)}{a} \frac{\delta^2 \lambda(\delta)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \sin 2\theta \qquad (2.9)$$

Полагая в выражении (2.8) $\delta \to \infty$, получим соответствующее выражение момента, найденное по классической теории пластинок

$$M_\theta = M_1 + M_2 - \frac{2(M_1 - M_2)}{3 + \mu} \cos 2\theta \qquad (2.10)$$

Что же касается выражения перерезывающей силы (2.9), то в пределе оно, как и в работах [5,6], не дает результатов классической теории. Это объясняется тем, что классическая теория для перерезывающей силы дает существенно неверный результат, внося искажение самого порядка рассматриваемой величины [6]. Поэтому предельный переход в этом случае теряет смысл.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $M_1 = M$, $M_2 = 0$, то

$$M_\theta = M\left[1 + \frac{2(1+\mu)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \cos 2\theta\right] \qquad (2.11)$$

$$N_\theta = -\frac{2M}{a} \frac{\delta^2 \lambda(\delta)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \sin 2\theta \qquad (2.12)$$

б) Если $M_1 = M_2 = M$, то

$$M_\theta = 2M, \qquad N_\theta = 0 \tag{2.13}$$

в) Если $M_1 = -M_2 = M$, то

$$M_\theta = -\frac{4M(1+\mu)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}\cos 2\theta \tag{2.14}$$

$$N_\theta = -\frac{4M}{a}\,\frac{\delta^2\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}\sin 2\theta \tag{2.15}$$

Максимальных значений изгибающий момент достигает при $\theta=\pi/2$, а перерезывающая сила — при $\theta=\pi/4$ и в точках, им симметричных:
в случае а)

$$M_\theta^{\max} = k_0 M, \qquad N_\theta^{\max} = -k_1\frac{M}{a}$$

в случае в)

$$M_\theta^{\max} = -k_2 M, \qquad N_\theta^{\max} = -k_1\frac{2M}{a}$$

Здесь k_0, k_1, k_2 представляют собой коэффициенты концентрации соответствующих величин и определяются следующими формулами:

$$k_0 = \frac{5+3\mu-4\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}, \qquad k_1 = \frac{2\delta^2\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)} \tag{2.16}$$

$$k_2 = \frac{4(1+\mu)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}$$

В табл. 1 приведены значения δ в зависимости от a/h, G/G'

Таблица 1

a/h \ G/G'	1.0	2.0	5.0	10.0	20.0
1.0	3.16	2.24	1.41	1.0	0.71
2.0	6.32	4.47	2.83	2.0	1.41
4.0	12.65	8.94	5.66	4.0	2.83
10.0	31.62	22.36	14.14	10.0	7.07

В табл. 2 приведены значения коэффициентов концентрации k_0, k_1, k_2 в зависимости от величины δ при $\mu = 0.3$

Таблица 2

δ	∞	10	5	3
k_0	1.788	1.880	1.966	2.070
k_1	—	5.872	2.832	1.612
k_2	1.576	1.761	1.933	2.140

Здесь первый столбец ($\delta \to \infty$) соответствует результатам классической теории пластинок.

Из приведенных здесь таблиц нетрудно заметить, что при сильно анизотропном материале даже для сравнительно больших отверстий учет поперечных сдвигов дает ощутимую поправку к классической теории.

3. Плита с круговым отверстием деформируется скручивающими моментами H_0, равномерно распределенными по всем четырем сторонам. Край отверстия свободен от усилий.

Как и в предыдущем пункте, решение поставленной задачи получим путем наложения решения для сплошной пластинки

$$w' = -\frac{H_0 r^2}{2D(1-\mu)} \sin 2\theta, \qquad \Phi' = 0$$

$$M_r' = H_0 \sin 2\theta, \qquad M_\theta' = -H_0 \sin 2\theta \tag{3.1}$$

$$H' = H_0 \cos 2\theta, \qquad N_r' = 0, \qquad N_\theta' = 0$$

на решение для пластинки с отверстием, край которого загружен следующими силами и моментами:

$$\left.\begin{aligned} M_r'' &= -H_0 \sin 2\theta, \qquad N_r'' = 0 \\ H'' &= -H_0 \cos 2\theta \end{aligned}\right| \text{при } r = a \tag{3.2}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$w'' = w_1(r) \sin 2\theta$$

$$\Phi'' = F_0(r) + F_1(r) \cos 2\theta \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в исходную систему (1.1), будем иметь

$$w_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^4 + C_4 r^{-2}$$

$$F_0(r) = C_5 I_0(\delta_0 r) + C_6 K_0(\delta_0 r) \tag{3.4}$$

$$F_1(r) = C_7 I_2(\delta_0 r) + C_8 K_2(\delta_0 r)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.2) и условию стремления к нулю всех усилий при $r \to \infty$, для постоянных $C_1, \ldots C_8$, входящих в (3.4), получим

$$C_1 = -\frac{H_0 a^2}{D} \frac{1}{3+\mu-4\lambda(\delta)}, \qquad C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_7 = 0$$

$$C_4 = \frac{H_0 a^4}{2D(1-\mu)} \frac{1-\mu+4\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}, \qquad C_8 = \frac{4H_0}{K_2(\delta)} \frac{1}{3+\mu-4\lambda(\delta)} \tag{3.5}$$

Поступая аналогично предыдущему пункту и выполняя указанное наложение, можно получить решение поставленной задачи.

По контуру отверстия $(r=a)$ для момента и перерезывающей силы будем иметь выражения

$$M_\theta = -\frac{4(1+\mu)H_0}{3+\mu-4\lambda(\delta)}\sin 2\theta \tag{3.6}$$

$$N_\theta = \frac{4H_0}{a}\,\frac{\delta^2\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}\cos 2\theta \tag{3.7}$$

Максимальных значений момент достигает при $\theta=\pi/4$, а перерезывающая сила — при $\theta=\pi/2$ и в точках им симметричных

$$M_\theta^{\max} = -k_2 H_0, \qquad N_\theta^{\max} = \frac{2H_0}{a}k_1 \tag{3.8}$$

где k_1 и k_2 определяются по (2.16).

Принимая в (3.6) $\delta\to\infty$, получим значение момента M_θ, соответствующее результатам классической теории [4]

$$M_\theta = -\frac{4(1+\mu)H_0}{3+\mu}\sin 2\theta$$

Относительно перерезывающей силы N_θ справедливо замечание, приведенное в предыдущем пункте.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 V 1967

Զ. Վ. ՓԵՇՏՄԱԼՋՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ելնելով Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջարկված անիզոտրոպ սալերի ծռման ճշգրտված տեսությունից, դիտարկված է՝ տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված, կլոր անցքով, անվերջ սալի ծռման խնդիրը եզրերում ազդող ծռող կամ ոլորող մոմենտների ազդեցության տակ:

Ընդունվում, որ սալի չափերը բավականին մեծ են անցքի չափից. ուսումնասիրված է անցքի շուրջը առաջացող լարումների կոնցենտրացիան սալի ծռման ժամանակ: Ստացված են բանաձևեր, կատարված են թվային հաշվումներ և ստացված արդյունքները համեմատված են կլասիկ տեսությունով ստացվող համապատասխան արդյունքների հետ:

D. V. PESHTMALDJIAN, A. A. KHACHATRIAN

ON THE BENDING OF A TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR HOLE

Summary

The concentration of stresses near the circular hole in the rectangular plate is investigated by using the theory that takes into account the influence of transversal displacements.

The plate is made from transversal-isotropic material. The plane of isotropy is parallel to the middle plane of the plate.

The plate is bended by moments uniformly distributed on its sides. The obtained concentration coefficients are compared with the results of the classical theory.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Хачатрян А. А.* Некоторые задачи трансверсально изотропных круглых пластинок. Инж. ж., МТТ, №3, 1966.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., 1963.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
5. *Колос А. В.* Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.
6. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

А. А. МОВСИСЯН

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящей работе рассматриваются задачи свободных колебаний цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения, причем вдоль образующих срединная поверхность оболочки может претерпевать изломы в конечном числе точек. Введением функции обобщенной кривизны определение собственных частот свободно опертой оболочки сводится к отысканию собственных значений бесконечной матрицы, которой соответствует нормальный определитель.

1. Уравнения колебаний изгибного типа цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения имеют вид [1, 2]

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\varphi - k(\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0$$
$$D\nabla^4 w + k(\beta)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь сохранены общепринятые обозначения, но следует отметить только, что α и β — длины дуг соответственно по образующей и по направляющей, $k(\beta)$ — главная кривизна поперечного сечения.

Кривизну оболочки, срединная поверхность которой имеет изломы, можно представить в виде

$$k(\beta) = k_1(\beta) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Gamma(\beta, \beta_i) \tag{1.2}$$

интерпретируя углы излома γ_i как импульсы кривизны, сосредоточенные вдоль образующих β_i, N — число изломов, $k_1(\beta)$ — вместе с производной непрерывная функция.

Использование обобщенной кривизны для расчета контактных задач мы встречаем у А. Г. Назарова [3]. В дальнейшем это нашло применение и в работах [4—7].

Здесь рассматриваются замкнутые оболочки, поэтому $k_1(\beta)$ и $\Gamma(\beta, \beta_i)$ представляются в виде рядов

$$k_1(\beta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos\mu_j\beta + b_j\sin\mu_j\beta)$$
$$\Gamma(\beta, \beta_i) = \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(c_{ij}\cos\mu_j\beta + d_{ij}\sin\mu_j\beta) \tag{1.3}$$

где

$$a_j = \frac{2}{\beta_0}\int\limits_0^{\beta_0} k_1(\beta)\cos\mu_j\beta\, d\beta, \quad b_j = \frac{2}{\beta_0}\int\limits_0^{\beta_0} k_1(\beta)\sin\mu_j\beta\, d\beta \tag{1.3}$$

$$c_{ij} = \frac{\cos\mu_j\beta_i}{\beta_0}, \qquad d_{ij} = \frac{\sin\mu_j\beta_i}{\beta_0}, \qquad \mu_j = \frac{2\pi j}{\beta_0}$$

а β_0 — длина поперечного сечения.

Решение (1.1) ищется в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= e^{i\omega t}\sin\lambda_m\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(\varphi_n^{(1)}\cos\mu_n\beta + \varphi_n^{(2)}\sin\mu_n\beta) \\ w &= e^{i\omega t}\sin\lambda_m\alpha\sum_{n=0}^{\infty}(w_n^{(1)}\cos\mu_n\beta + w_n^{(2)}\sin\mu_n\beta) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь ω — частота колебаний, $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{l}$, а l — длина оболочки.

Как видно из (1.4), φ и w удовлетворяют условиям свободного опирания на торцах.

Подстановка (1.2)—(1.4) в (1.1) для определения $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_n^{(2)}$, $w_n^{(1)}$, $w_n^{(2)}$ дает следующую однородную систему бесконечных уравнений:

$$\begin{aligned} &A_{mn}\varphi_n^{(1)} + L_1(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i c_{ni} L_i(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) = 0 \\ &A_{mn}\varphi_n^{(2)} + L_2(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i d_{ni} L_i(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) = 0 \\ &B_{mn}w_n^{(1)} - L_1(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i c_{ni} L_i(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) = 0 \\ &B_{mn}w_n^{(2)} - L_2(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i d_{ni} L_i(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) = 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{mn} = \frac{1}{Eh}(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2, \qquad B_{mn} = D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 - \rho h\omega^2$$

$$L_1(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) = \frac{\lambda_m^2}{2}\Bigg[\sum_{q=0}^{n}(a_{n-q}w_q^{(1)} - b_{n-q}w_q^{(2)}) +$$

$$+ \sum_{q=n}^{\infty}(a_{q-n}w_q^{(1)} + b_{q-n}w_q^{(2)}) + \sum_{q=0}^{\infty}(a_{q+n}w_q^{(1)} + b_{q+n}w_q^{(2)})\Bigg] \tag{1.6}$$

$$L_2(w_q^{(1)},\ w_q^{(2)}) = \frac{\lambda_m^2}{2}\left[\sum_{q=1}^{\infty}(a_{n-q}\,w_q^{(1)} + b_{n-q}\,w_q^{(2)}) +\right.$$

$$\left.+\sum_{q=n}^{\infty}(a_{q-n}\,w_q^{(2)} - b_{q-n}\,w_q^{(1)}) + \sum_{q=1}^{\infty}(b_{q+n}\,w_q^{(1)} - a_{q+n}\,w_q^{(2)})\right] \tag{1.6}$$

$$L_i(w_q^{(1)},\ w_q^{(2)}) = \lambda_m^2 \sum_{q=0}^{\infty}(c_{qi}\,w_q^{(1)} + d_{qi}w_q^{(2)})$$

Из условия нетривиальности решения системы (1.5) определяются частоты колебаний оболочки.

Легко видеть, что определитель системы (1.5) нормальный, следовательно, итерационный процесс определения частот сходится.

С практической точки зрения, когда интересно определить наименьшую и близкие к ней частоты, в общем случае, можно пользоваться следующим способом. Вначале определить главную гармонику колебаний [8]. Вместо (1.5) взять каноническую систему, т. е. в выражениях L_1, L_2 и L_i оставить только члены с индексом n. Задаваясь значением m, нужно определить то число n, при котором частота будет наименьшей ($m = 1$). Соответствующая ей гармоника будет главной на том основании, что среди прочих форм она наиболее близка к истинной форме колебаний. Естественно, что после главной гармоники наиболее близкие к истинной форме будут гармоники, непосредственно примыкающие к главной, поэтому собственные частоты, найденные уже в первом приближении, можно последовательно улучшить.

2. В случае оболочек открытых профилей расчеты, приведенные в предыдущем пункте, достаточно укорачиваются.

Для свободно опертой по четырем кромкам оболочки кривизну можно представить в виде

$$k(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j\cos\mu_j\beta + \frac{2}{b}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\sum_{j=1}^{\infty}\sin\mu_j\beta_i\sin\mu_j\beta \tag{2.1}$$

Здесь $\mu_j = \dfrac{j\pi}{b}$, b — длина поперечного сечения.

Тогда решение системы (1.1) ищется в виде

$$\begin{aligned}\varphi &= e^{i\omega t}\sin\lambda_m\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\mu_n\beta\\ w &= e^{i\omega t}\sin\lambda_m\alpha\sum_{n=1}^{\infty}w_n\sin\mu_n\beta\end{aligned} \tag{2.2}$$

Из (1.1), (2.1) и (2.2) для φ_n и w_n получается следующая однородная система:

$$
\begin{aligned}
&A_{mn}\varphi_n+\frac{\lambda_m^2}{2}L(w_q)+\frac{2\lambda_m^2}{b}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\sin\mu_n\beta_i\sum_{q=1}^{\infty}w_q\sin\mu_q\beta_i=0\\
&B_{mn}w_n-\frac{\lambda_m^2}{2}L(\varphi_q)-\frac{2\lambda_m^2}{b}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\sin\mu_n\beta_i\sum_{q=1}^{\infty}\varphi_q\sin\mu_q\beta_i=0
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Здесь

$$
L(w_q)=\sum_{q=1}^{n}a_{n-q}\,w_q+\sum_{q=n}^{\infty}a_{q-n}\,w_q-\sum_{q=1}^{\infty}a_{q+n}\,w_q
$$

Частоты оболочки определяются из условия приравнивания нулю определителя системы (2.3). Относительно решения этой системы все, сказанное в п. 1, остается в силе.

Как частный пример, рассматривается двугранная складка с углом излома γ_1, находящимся на расстоянии b_1 от начала координат. Система (2.3) в данном случае принимает вид

$$
\begin{aligned}
&A_{mn}\varphi_n+\frac{2\gamma_1}{b}\lambda_m^2\sin\mu_n b_1\sum_{q=1}^{\infty}w_q\sin\mu_q b_1=0\\
&B_{mn}w_n-\frac{2\gamma_1}{b}\lambda_m^2\sin\mu_n b_1\sum_{q=1}^{\infty}\varphi_q\sin\mu_q b_1=0
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

Частотное уравнение получается из (2.4) путем исключения φ_n и w_n и имеет вид

$$
1+\frac{4Eh\gamma_1^2\lambda_m^4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\mu_n b_1}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\mu_n b_1}{D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2-\rho h\omega^2}=0 \qquad (2.5)
$$

В таблице приведены значения первых четырех безразмерных частот $\Omega_{mn}=\dfrac{\rho l^2\omega_{mn}^2}{E}$, вычисленных по (2.5) для складки с размерами $b/l=1$, $b/b_1=2$, $b/h=20$ $(m=1)$.

Таблица 1

n \ γ_1	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
1	0.0892	0.3332	0.5376	0.7064	0.8998
2	2.230	2.545	2.994	3.656	5.333
3	15.07	15.31	15.62	16.08	17.50
4	55.75	57.06	58.82	61.61	72.33

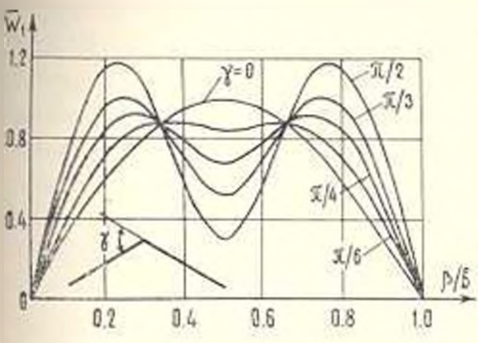
Сумма первого ряда (2.5) была вычислена с точностью до 10^{-8}, а из второго ряда были взяты десять членов.

Как видно из таблицы, угол излома оказывает наибольшее влияние на наименьшую частоту, и с повышением номера частоты влияние излома исчезает.

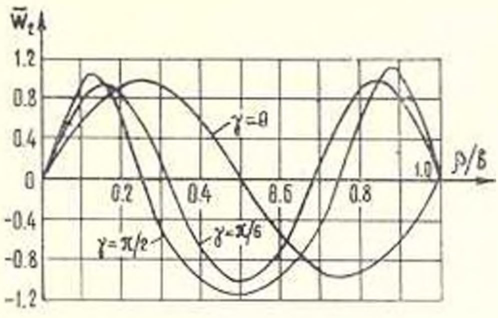
Частотам из (2.5) соответствуют следующие формы колебаний:

$$\overline{w}_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+s} \frac{B_{m,2n-1}(\omega_{mn})}{B_{m,2k+1}(\omega_{mn})} \sin \mu_{2k+1}\beta \tag{2.6}$$

На фиг. 1 и 2 представлены формы колебаний соответственно для первых двух частот при различных γ $(m = 1)$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Приношу благодарность В. А. Ширваняну, выполнившему на ЭВЦМ „Наири" основную часть вычислений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 III 1968

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԿԱՐԾՐԱՑՎԱԾ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է կամայական կտրվածքով գլանային թաղանթի ազատ տատանումների խնդիրը։ Թաղանթի միջին մակերևույթը ծնիչի երկարությամբ կարող է ունենալ նաև կոտրվածքներ (կոնտակտային խնդիր)։ Հետևելով Ա. Գ. Նազարովին մտցվում է ընդհանրացված կորություն։ Կամայական կտրվածքով փակ և եզրերով ազատ հենված գլանի սեփական հաճախականությունների գտնելը բերվում է (1.5) անվերջ սիստեմին համապատասխան անվերջ մատրիցայի սեփական արժեքները գտնելուն։ Ըստ որում, այդ մատրիցային համապատասխանում է նորմալ դետերմինանտ։

Բաց թաղանթի համար ստացվում է (2.3) սիստեմը։

Բերված է նրա առաջին չորս հաճախականությունների արժեքները կախված կորման անկյունից և տատանումների առաջին երկու ձևերը։

L. A. MOVSISIAN

VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS OF ARBITRARY CROSS SECTION

S u m m a r y

In the present paper the problem of free vibrations of cylindrical shells of arbitrary cross section is considered. In particular, the middle surface of the shell may have breaks along the generators. For contact problems the generalized functions of curvature (1. 2) is introduced [3]. The determination of frequencies of free supported shells is reduced to the finding of the eigenvalue of an infinite matrix.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М., 1949.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
3. *Назаров А. Г.* Некоторые контактные задачи теории оболочек. *Докл.* АН Арм. ССР, т. IX, № 2, 1948.
4. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения. *Докл.* АН АрмССР, т. XII, №1, 1950.
5. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета устойчивости тонкостенных стержней. *Докл.* АН АрмССР, т. 17, №1, 1953
6. *Ониашвили О. Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд. АН СССР, М., 1957.
7. *Тер-Исраелян В. А.* Расчет некоторых складчатых систем с помощью импульсивных функций. Автореферат диссертации, Ереван, 1952.
8. *Кукуджанов С. Н.* О наилучших начальных приближениях в проблеме собственных чисел в методах Ритца и Бубнова-Галеркина. Теория оболочек и пластин. Ереван, 1964.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

В. Н. МОСКАЛЕНКО

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОЛСТЫХ ПЛИТ

Дается решение задачи динамической теории упругости о собственных колебаниях полубесконечной плиты при произвольных граничных условиях на боковой грани. Решение строится в виде бесконечного ряда, каждый член которого удовлетворяет динамическим уравнениям теории упругости и условиям на верхней и нижней гранях плиты. При помощи предложенного В. В. Болотиным [1] асимптотического метода полученное решение используется для решения задачи о собственных колебаниях прямоугольных плит при произвольных условиях на боковых гранях. Полученные решения сравниваются с результатами применения классической и уточненных теорий пластин. Показывается, что решение по классической теории соответствует сохранению первых двух, а по уточненным — первых трех членов ряда. При этом уточненные теории дают удовлетворительное приближение всюду, кроме узкой пограничной зоны, имеющей порядок половины толщины плиты.

1. Пусть упругая изотропная полубесконечная плита толщины $h=2c\,(0\leqslant x_1<\infty,\ -\infty<x_2<\infty,\ -c\leqslant x_3\leqslant c)$ колеблется с частотой ω. Решение уравнений Ламе для амплитуд компонент перемещения

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k}+\mu\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}+\rho\omega^2 u_j=0 \tag{1.1}$$

ищем в следующем виде, удовлетворяющем условиям ограниченности при $x_1\to\infty$, $x_2\to\pm\infty$

$$u_1=F_1(x_1,x_3)\sin k_2x_2,\quad u_2=F_2(x_1,x_3)\cos k_2x_2,\quad u_3=F_3(x_1,x_3)\sin k_2x_2$$

Здесь λ, μ — упругие постоянные Ламе, ρ — плотность, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_k^2}=\Delta$ — оператор Лапласа, k_2 — волновое число. Функции F_j будем искать в виде ряда

$$F_j(x_1,x_3)=\sum_{n=0}^{\infty} f_{jn}(x_3)\exp(-q_n x_1) \tag{1.2}$$

причем $\operatorname{Re} q_n\geqslant 0$, а каждый член разложения вектора перемещения u_j удовлетворяет условиям свободной поверхности на гранях $x_3=z=\pm c$.

Из симметрии задачи относительно плоскости $z=0$ следует, что колебания плиты разбиваются на симметричные и антисимметричные. В дальнейшем нас будут интересовать только антисимметричные колебания, при которых f_{3n} — четная, а f_{1n} и f_{2n} — нечетные функции z.

Удовлетворяя уравнениям (1.1) и условиям на свободной поверхности, получаем для определения q характеристическое уравнение, распадающееся на два:

$$ch\, r_1 c = 0 \tag{1.3}$$

$$4\, r_1 r_3 (-q^2 + k_2^2)\, \mathrm{th}\, r_1 c = (k_2^2 - q^2 + r_1^2)^2\, \mathrm{th}\, r_3 c \tag{1.4}$$

Здесь

$$r_1 = \left[(-q^2 + k_2^2) - \frac{\rho \omega^2}{\mu} \right]^{1/2}, \quad r_3 = \left[(-q^2 + k_2^2) - \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2}$$

Корням уравнения (1.3) соответствуют следующие выражения для f_j:

$$f_1 = A\, k_2 \sin \frac{\pi (2m+1)}{2c} z, \quad f_2 = -A\, q \sin \frac{\pi (2m+1)}{2c} z, \; f_3 = 0$$

Выражения, соответствующие корням уравнения (1.4), имеют вид:

$$f_1(z) = -Bq\,[2\, r_1 r_3\, \mathrm{ch}\, r_3 c\, \mathrm{sh}\, r_1 z - (-q^2 + k_2^2 + r_1^2)\, \mathrm{ch}\, r_1 c\, \mathrm{sh}\, r_3 z]$$

$$f_2(z) = B k_2\, [2\, r_1 r_3\, \mathrm{ch}\, r_3 c\, \mathrm{sh}\, r_1 z - (-q^2 + k_2^2 + r_1^2)\, \mathrm{ch}\, r_1 c\, \mathrm{sh}\, r_3 z]$$

$$f_3(z) = B r_3\, [2(-q^2 + k_2^2)\, \mathrm{ch}\, r_3 c\, \mathrm{ch}\, r_1 z - (-q^2 + k_2^2 + r_1^2)\, \mathrm{ch}\, r_1 c\, \mathrm{ch}\, r_3 z]$$

Отметим, что q, r_1 и r_3 — вообще, комплексные величины, поэтому под B следует понимать комплексные постоянные.

2. Из требования ограниченности каждого члена разложения (1.2) вытекает требование $\mathrm{Re}\, q \geqslant 0$. Будем считать, что существует по крайней мере один чисто мнимый корень $q = i k_1$, то есть не рассматриваем колебания, полностью сконцентрированные у края плиты. Характеристическое уравнение приводит в этом случае к уравнениям частот для бесконечной плиты

$$\mathrm{ch}\, r_1 c = 0 \tag{2.1}$$

$$4\, r_1 r_3 (k_1^2 + k_2^2)\, \mathrm{th}\, r_1 c = (k_1^2 + k_2^2 + r_1^2)^2\, \mathrm{th}\, r_3 c \tag{2.2}$$

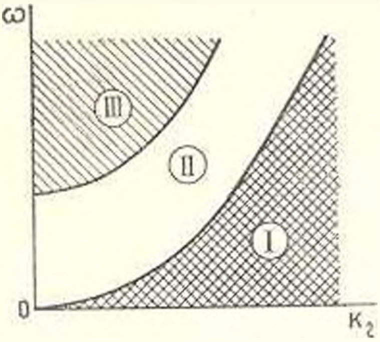
Здесь

$$r_1 = \left[(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\rho \omega^2}{\mu} \right]^{1/2}, \qquad r_3 = \left[(k_1^2 + k_2^2) - \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} \right]^{1/2}$$

Решение уравнений (2.1) и (2.2) при фиксированной толщине $h = 2c$ можно выразить в виде

$$\omega = \omega_l (k_1^2 + k_2^2)$$

причем ω_1 соответствует первому корню уравнения (2.2), а ω_2 является первым корнем уравнения (2.1). Нанесем в плоскости $Ok_2\omega$ кривые $\omega = \omega_1(k_2^2)$ и $\omega = \omega_2(k_2^2)$ (фиг. 1). Область I соответствует отсутствию действительных значений k_1; область II соответствует существованию только одного корня; для области III существуют два или больше действительных значений k_1.



Фиг. 1.

Рассмотрим корни, соответствующие области II. Пусть k_1 и k_2 малы, тогда разложение уравнения (1.4) дает в качестве первого приближения для первого корня выражение, совпадающее с результатом классической теории

$$q = (k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2} \tag{2.3}$$

Второе приближение дает значение, с которым согласуются результаты уточненных теорий

$$q = \left| (k_1^2 + 2k_2^2) - \frac{1}{3}(3 - 4\tau)c^2(k_1^2 + k_2^2)^2 \right|^{1/2}, \qquad \tau = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$$

Разложение по малому параметру $\xi = \rho\omega^2(2\mu R^2)^{-1}$, $R^2 = q^2 - k_1^2$, уравнения (1.4) дает в первом приближении уравнение для определения других корней

$$\sin 2Rc = 2Rc$$

Корни характеристического уравнения (1.3) могут быть записаны в явном виде

$$q_m = \left| k_2^2 - \frac{(m-1)^2\pi^2}{4c^2} - \frac{\rho\omega^2}{\mu} \right|^{1/2}, \qquad (m = 2, 4, 6, \ldots)$$

С наименьшим корнем $(m = 2)$ удовлетворительно согласуются [2] результаты применения уточненных теорий [3,4].

3. В задаче о собственных колебаниях прямоугольной толстой плиты применим асимптотический метод, предложенный В. В. Болотиным [1]. Этот метод основан на приближенном представлении формы собственных колебаний в виде суммы из соответствующего асимптотического выражения и набора корректирующих решений. Не удовлетворяющее, вообще, граничным условиям асимптотическое выражение определяет вид формы собственных колебаний и носит название порождающего решения. Удовлетворение граничным условиям осуществляется путем добавления набора корректирующих решений, обладающих свойствами краевого эффекта. По аналогии со статическим краевым эффектом отклонение от асимптотических форм колебаний, имеющее место вблизи искажения, носит название динамического краевого эффекта.

Порождающее решение будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
u_1 &= f_{10}(z)\cos k_1(x_1 - x_{10})\sin k_2(x_2 - x_{20}) \\
u_2 &= f_{20}(z)\sin k_1(x_1 - x_{10})\cos k_2(x_2 - x_{20}) \\
u_3 &= f_{30}(z)\sin k_1(x_1 - x_{10})\sin k_2(x_2 - x_{20})
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где k_1, k_2 — волновые числа, x_{10}, x_{20} — постоянные. Подставляя выражения (3.1) в уравнения (1.1) и удовлетворяя граничным условиям на свободной поверхности $z = \pm c$, получаем, что волновые числа k_1, k_2 должны быть связаны с частотой ω уравнением (2.1) или (2.2). Будем считать, что точка k_1, k_2, ω расположена на поверхности $\omega = \omega_1(k_1, k_2)$, то есть соответствует первому корню уравнения (2.2). В этом случае порождающее решение дается выражениями:

$$f_{10} = B_0 k_1 [2 r_1 r_3 \operatorname{ch} r_3 c \operatorname{sh} r_1 z - (k_1^2 + k_2^2 + r_1^2) \operatorname{ch} r_1 c \operatorname{sh} r_3 z]$$

$$f_{20} = B_0 k_2 [2 r_1 r_3 \operatorname{ch} r_3 c \operatorname{sh} r_1 z - (k_1^2 + k_2^2 - r_1^2) \operatorname{ch} r_1 c \operatorname{sh} r_3 z]$$

$$f_{30} = B_0 r_1 [2 (k_1^2 + k_2^2) \operatorname{ch} r_3 c \operatorname{ch} r_1 z - (k_1^2 + k_2^2 + r_1^2) \operatorname{ch} r_1 c \operatorname{ch} r_3 z]$$

Решение, выражающее динамический краевой эффект вдоль края $x_1 = 0$, имеет вид:

$$u_1 = F_1(x_1, z)\sin k_2(x_2 - x_{20}), \quad u_2 = F_2(x_1, z)\cos k_2(x_2 - x_{20})$$

$$u_3 = F_3(x_1, z)\sin k_2(x_2 - x_{20})$$

где

$$F_j(x_1, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n f_{jn}(z)\exp(-q_n x_1)$$

причем q_n пробегает значения всех корней уравнений (1.3), (1.4) с неотрицательной вещественной частью. Будем считать, что ни один из показателей q_n в выражениях (1.2) не является чисто мнимым, так что выполняются неравенства $\operatorname{Re} q_n > 0$. Это приводит к требованию, чтобы точка (k_1, k_2) лежала в области I (фиг. 1), то есть удовлетворяла неравенству

$$\omega_1(k_1^2 + k_2^2) < \omega_2(k_2^2) \tag{3.2}$$

Аналогичные рассуждения для края $x_2 = 0$ приводят к неравенству

$$\omega_1(k_1^2 + k_2^2) < \omega_2(k_1^2) \tag{3.3}$$

Условия (3.2) и (3.3) сводятся к требованию, чтобы точка (k_1, k_2) лежала в ограниченной области, близкой к квадрату $k_{1,2} \sim \pi/h$ (фиг. 2). Это означает, что длина l полуволны порождающего решения должна удовлетворять неравенству $l > l_0$, где $l_0 \sim h$. Аналогичную область для отсутствия вырождения динамического краевого эффекта дают также уточненные теории [2].

4. Рассмотрим собственные колебания заделанной по контуру прямоугольной толстой плиты со сторонами a_1, a_2. Введем ортого-

нальную систему функций $\{\gamma_m(z)\}$, полную на интервале $(-c, c)$. Тогда условия заделки будут эквивалентны бесконечной системе уравнений

$$
\begin{gathered}
B_0(f_{10}, \gamma_m)\cos k_1 x_{20} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(f_{m}, \gamma_m) = 0 \\
-B_0(f_{20}, \gamma_m)\sin k_1 x_{10} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(f_{2n}, \gamma_m) = 0 \\
-B_0(f_{30}, \gamma_m)\sin k_1 x_{10} + \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty} B_n(f_{3n}, \gamma_m) = 0
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{c}\varphi(z)\,\psi(z)\,dz$$

Характеристическое уравнение системы (4.1) имеет вид

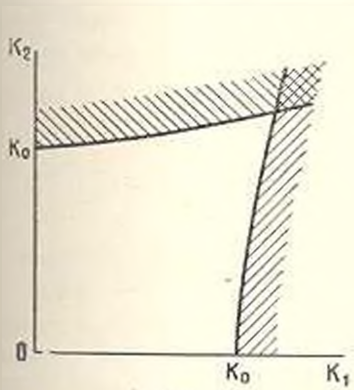
$$\Delta_{11}\cos k_1 x_{10} - \Delta_{21}\sin k_1 x_{10} = 0$$

Отсюда получаем

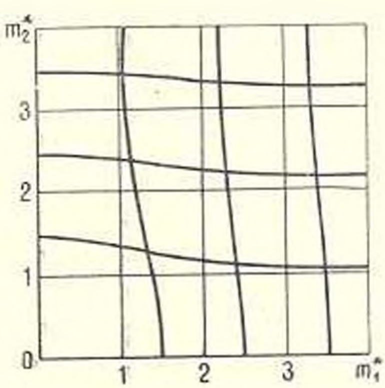
$$k_1 x_{10} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}}$$

Аналогичное решение справедливо вблизи края $x_1 = a_1$. Из условия, что порождающее решение должно совпадать в обеих системах, получаем уравнение для определения волнового числа k_1:

$$m_1^* = \frac{k_1 a_1}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Delta_{11}}{\Delta_{21}} + m_1, \ (m_1 = 1,\ 2\ldots) \tag{4.2}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Аналогичные рассуждения для граней $x_2 = 0,\ a_2$ приводят к уравнению

$$m_2^* \equiv \frac{k_2 a_2}{\pi} = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{22}} + m_2, \ (m_2 = 1,\ 2,\ldots) \tag{4.3}$$

Пересечения кривых (4.2) и (4.3) дают числа m_1^* и m_2^* (фиг. 3).

Рассмотрим первое приближение, полагая коэффициенты со второго равными нулю ($B_2 = B_3 = \ldots = 0$). Кроме того, будем считать, что χ_0 — четная, а χ_1 — нечетная функции z. Представляется естественным сохранить равенство нулю осредненного прогиба и осредненного поворота относительно касательной к контуру. Это даст выражение для m_1^*

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{f_{101} f_{310}}{f_{300} f_{111}} + m_1, \quad f_{jnm} = (f_{jn}, \chi_m) \tag{4.4}$$

Второе приближение дает

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{f_{101}(f_{221} f_{310} - f_{211} f_{320})}{f_{111}(f_{221} f_{300} - f_{211} f_{320}) - f_{121}(f_{211} f_{100} - f_{201} f_{110})} + m_1 \tag{4.5}$$

5. Классическая теория дает для m_1^* следующее значение [5], которое соответствует первому приближению (4.4)

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k_1}{(k_1^2 + 2k_2^2)^{1/2}} + m_1$$

Уточненные теории изгиба пластин [3,4] дают [2] для приведенных волновых чисел

$$m_1^* = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{k_1 q_2[(1-\nu)(q_2^2 - k_2^2) - 2(q_2^2 - k_2^2)]}{q_1 q_2[(1-\nu)(q_1^2 - k_2^2) + 2(k_1^2 + k_2^2)] - 2k_2^2(q_1^2 + k_2^2)} + m_1$$

$$q_1 = \left[(k_1^2 + 2k_2^2) - \frac{17 - 6\nu}{5E} \rho\omega^2\right]^{1/2}, \quad q_2 = \left[k_2^2 + \frac{10}{h^2} - \frac{2(1+\nu)}{E} \rho\omega^2\right]^{1/2}$$

Результаты уточненных теорий соответствуют второму приближению (4.5). При этом в уточненных теориях в случае учета искривления нормального элемента тенгенциальные условия заделки $u_{1,2} = 0$ заменяются интегральными условиями $(u_{1,2}, z) = 0$.

6. Выбирая в качестве функций χ_n функции

$$\chi_{2l} = \cos \frac{(2l+1)}{2c} \pi z, \quad \chi_{2l+1} = \sin \frac{(2l+1)}{2c} \pi z \quad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

рассмотрим колебания полубесконечной плиты с защемленным краем при коэффициенте Пуассона $\nu = 0.3$. Пусть $k_1 = k_2 = \pi/20h$, т. е. длина полуволны порождающего решения λ равна двадцати толщинам. Для $\operatorname{tg} k_1 x_{10}$ классическая теория дает значение 0.5774, уточненные теории дают 0.5644; первое приближение приводит к 0.5641, второе — к 0.5644; приближению с сохранением шести членов ряда соответствует 0.5646. Сравнение этих данных дает, что для определения m_1^*, m_2^* в случае колебаний прямоугольной защемленной по контуру плиты можно с удовлетворительной точностью использовать результаты, полученные по уточненным теориям [2]. Вычисления показывают также, что уточненные теории дают удовлетворительное приближение для медленно затухающей с удалением от края части поля смещений. Зона затухания быстро затухающей части решения определяется величиной наименьшего отбрасываемого корня $q = (7.5 + 2.7i)\,h^{-1}$. Полагая, что величиной $\exp(-3.75)$ можно пренебречь по сравнению с единицей, приходим к выводу, что уточненные теории дают удовлетворительное приближение всюду, кроме узкой краевой зоны порядка полутолщины плиты. Вычисления, проведенные для других длин полуволн ($\lambda = 10\,h$, $\lambda = 5h$) приводят к аналогичным результатам, причем с уменьшением длины полуволны наблюдается тенденция к некоторому увеличению погрешности результатов, даваемых уточненными теориями изгиба плит.

Московский энергетический
институт

Поступила 26 II 1968

Վ. Ն. ՄՈՍԿԱԼԵՆԿՈ

ՀԱՍՏ ՍԱԼԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրված է կիսաանվերջ սալի սեփական տատանումների խնդրի լուծումը անվերջ շարքի տեսքով։

Վ. Վ. Բոլոտինի կողմից առաջարկված ասիմպտոտիկ մեթոդի օգնությամբ, ստացված լուծումը օգտագործվում է ուղղանկյուն սալերի սեփական տատանումների խնդիրը լուծելու համար։ Ստացված լուծումները համեմատված են կլասիկ, Ռեյսների և Ս. Համբարձումյանի ճշգրտված տեսությունների հետ։ Համեմատումը ցույց է տալիս, որ ճշգրտված տեսությունները տալիս են բավարար արդյունք ամենուրեք, բացի բարակ սահմանային շերտից, որի կարգը հավասար է սալի հաստության կեսին։

V. N. MOSKALENKO

FREE VIBRATIONS OF THICK PLATES

S u m m a r y

The solution of free vibration problem is given in series for a semi-infinite plate. By means of V. V. Bolotin's asymptotic method this solution is used to solve the free vibration problem for rectangular plates. A comparison is made with the results of the three-dimensional theory and the classical theory as well as E. Reissner's and S. A. Ambartzumian's refined theories. The comparison shows a good agreement with the three-dimensional theory and the refined theories.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В. В.* Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, т. XXIV, вып. 5, 1960.
2. *Москаленко В. Н.* К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях. Инж. ж., т. I, вып. 3, 1961.
3. *Амбарцумян С. А.* К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек. ПММ, т. XXIV, вып. 2, 1960.
4. *Reissner E.* On the theory of bending of elastic plates. J. Math. Phys., v. 23, No. 4, 1944.
5. *Болотин В. В., Макаров Б. П., Мишенков Г. В., Швейко Ю. Ю.* Асимптотический метод исследования спектра собственных частот упругих пластинок. Сб. статей „Расчеты на прочность", вып. 6, 1960.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧИ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО РАСШИРЕНИЯ И ВЫВОРАЧИВАНИЯ НАИЗНАНКУ СОСТАВНОЙ ПОЛОЙ СФЕРЫ

В работе Грина и Шилда [1] и в книге [2] с помощью функции энергии деформации общего вида решается задача симметричного расширения однородной сферической оболочки из несжимаемого материала, когда на внешней и внутренней поверхностях оболочки действуют нормальные, равномерно распределенные нагрузки.

Армани [3] впервые рассмотрел задачу выворачивания наизнанку сферической оболочки. Он выбрал функцию энергии деформаций так, чтобы главные напряжения были линейными функциями от главных удлинений. Задача выворачивания наизнанку однородной сферической оболочки из несжимаемого материала в наиболее общей форме исследована в работе Эриксена [4].

Задача симметричного расширения и выворачивания наизнанку толстой сферической оболочки из сжимаемого материала решена Грином [5, 6].

В настоящей работе эти задачи рассматриваются для оболочки, составленной из нескольких надетых одна на другую и спаянных по сферическим поверхностям изотропных сферических оболочек из различных упругих материалов.

В работе Баргавы и Панде [7] исследуется задача симметричного расширения концентрических сферических оболочек из различных несжимаемых, упругих материалов.

1. Пусть толстая сферическая оболочка, состоящая из n однородных, изотропных и несжимаемых слоев, деформируется так, что точка оболочки, занимавшая первоначально положение (ρ, θ, φ) в системе сферических координат с началом в центре оболочки, переходит в точку (r, θ, φ). Тогда радиусы $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_{n+1}$ граничных сферических поверхностей недеформированной оболочки после деформации переходят в $r_1 > r_2 > \ldots > r_{n+1}$, если рассматривается задача симметричного расширения оболочки, и в $r_1 < r_2 < \ldots < r_{n+1}$, если рассматривается задача выворачивания оболочки.

Физические компоненты напряжения, возникающие в каждом слое деформированной оболочки, определяются соотношениями [1]

$$\sigma_{11}^{(k)} = \tau_{(k)}^{11} = Q^4 \Phi_{(k)} + 2 Q^2 \Psi_{(k)} + p_{(k)}$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)} = r^2 \tau_{(k)}^{22} = r^2 \tau_{(k)}^{33} \sin^2\theta = \frac{1}{Q^4}\Phi_{(k)} + \left(Q^2 + \frac{1}{Q^4}\right)\Psi_{(k)} + p_{(k)} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{31}^{(k)} = \sigma_{12}^{(k)} = 0$$

$$(k = 1,\ 2, \ldots n)$$

где

$$Q = \frac{\rho}{r}, \qquad \Phi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \qquad \Psi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2} \qquad (1.2)$$

$\tau_{(k)}^{ij}$ — компоненты контрвариантного тензора напряжений,

$p_{(k)}$ — скалярная инвариантная функция от инвариантов деформации I_1 и I_2,

$W_{(k)}$ — функция энергии деформации.

Из условия несжимаемости имеем

$$\rho^3 - r^3 = \rho_1^3 - r_1^3 = \rho_2^3 - r_2^3 = \cdots = \rho_{n+1}^3 - r_{n+1}^3$$

$$Q = \left(1 + \frac{\rho_1^3 + r_1^3}{r^3}\right)^{1/3}, \qquad \frac{dQ}{dr} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{Q^2} - Q\right) \qquad (1.3)$$

если рассматривается симметричное расширение оболочки, и

$$\rho^3 + r^3 = \rho_1^3 + r_1^3 = \rho_2^3 + r_2^3 = \cdots = \rho_{n+1}^3 + r_{n+1}^3$$

$$Q = \left(\frac{\rho_1^3 + r_1^3}{r^3} - 1\right)^{1/3}, \qquad \frac{dQ}{dr} = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{Q^2} + Q\right) \qquad (1.4)$$

если рассматривается выворачивание оболочки.

$p_{(k)}$ при симметричном расширении определяется [2]

$$p_{(k)} = -Q^2(Q^2\Phi_{(k)} + 2\Psi_{(k)}) + 2\int^{Q}\left[(Q^3+1)\Phi_{(k)} + \left(Q - \frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)}\right]dQ \quad (1.5)$$

Если рассматривается задача выворачивания оболочки, подставляя в уравнения равновесия при отсутствии объемных сил [2]

$$\tau_{(k),i}^{ij} + \Gamma_{ir}^{i}\tau_{(k)}^{rj} + \Gamma_{ir}^{j}\tau_{(k)}^{ir} = 0 \qquad (1.6)$$

значения символов Кристофеля Γ_r^{ij}, с помощью (1.1) и (1.4) получаем

$$\frac{dp_{(k)}}{dQ} + Q^4\frac{d\Phi_{(k)}}{dQ} + 2Q^2\frac{d\Psi_{(k)}}{dQ} + 2(Q^3+1)\Phi_{(k)} + 2\left(Q + \frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)} = 0$$

откуда

$$p_{(k)} = -Q^2(Q^2\Phi_{(k)} + 2\Psi_{(k)}) + 2\int^{Q}\left[(Q^3-1)\Phi_{(k)} + \left(Q - \frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)}\right]dQ \quad (1.7)$$

Таким образом, в общем случае $p_{(k)}$ определяется выражением

$$p_{(k)} = -Q^2(Q^2\Phi_{(k)} + 2\Psi_{(k)}) + L_{(k)}(r) + H_k \qquad (1.8)$$

где H_k — постоянные, а

$$L_{(k)}(r)=2\int\limits_{Q_k}^{Q}\left[(Q^3+1)\,\Phi_{(k)}+\left(Q+\frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)}\right]dQ \tag{1.9}$$

при симметричном расширении оболочки и

$$L_{(k)}(r)=2\int\limits_{Q_k}^{Q}\left[(Q^3-1)\,\Phi_{(k)}+\left(Q-\frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)}\right]dQ \tag{1.10}$$

при выворачивании оболочки.

Подставляя (1.8) в (1.1), получаем

$$\begin{gathered}\sigma_{11}^{(k)}=\sigma^{11}_{(k)}=L_{(k)}(r)+H_k\\ \sigma_{22}^{(k)}=\sigma_{33}^{(k)}=r^2\sigma^{22}_{(k)}=r^2\sigma^{33}_{(k)}\sin^2\theta=\\ =\sigma^{11}_{(k)}+\left(\frac{1}{Q^2}-Q^4\right)\Phi_{(k)}+\left(\frac{1}{Q^4}-Q^2\right)\Psi_{(k)}\\ \sigma_{23}^{(k)}=\sigma_{31}^{(k)}=\sigma_{12}^{(k)}=0\end{gathered} \tag{1.11}$$

Из условия сцепления

$$\sigma_{11}^{(k)}\Big|_{r=r_{k+1}}=\sigma_{11}^{(k+1)}\Big|_{r=r_{k+1}}\quad(k=1,2,\ldots,n-1) \tag{1.12}$$

и (1.11) получаем формулы для определения постоянных H_k

$$\begin{gathered}H_1=\sigma_{11}^{(k)}\Big|_{r=r_1}=R_1\\ H_{k+1}=H_k+L_{(k)}(r_{k+1})\\ H_n+L_{(n)}(r_{n+1})=\sigma_{11}^{(n)}\Big|_{r=r_{n+1}}=R_2\end{gathered} \tag{1.13}$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней поверхностях составной оболочки.

Задавая один из радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, из (1.13) и из условия несжимаемости можно определить постоянные H_k и одно соотношение между R_1 и R_2

$$R_1-R_2+\sum_{k=1}^{n}L_{(k)}(r_{k+1})=0 \tag{1.14}$$

Если же известны нормальные напряжения R_1 и R_2, то из (1.14) и из условия несжимаемости определяются радиусы $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, а затем постоянные H_k. В этом случае деформированное состояние оболочки определяется разностью R_1-R_2.

2. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку двухслойной сферической оболочки. Функции энергии дефор-

мации для материалов первого и второго слоя оболочки возьмем в виде выражения Муни-Ривлина

$$W_{(i)} = C_i(I_1 - 3) + D_i(I_2 - 3) \qquad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

где C_i и D_i — постоянные.

Физические компоненты напряжения будут

$$\sigma_{33}^{(i)} = L_{(i)}(r) + H_i$$

$$\sigma_{22}^{(i)} = \sigma_{33}^{(i)} = \sigma_{11}^{(i)} + \left(\frac{1}{Q^2} - Q^4\right)2C_i + \left(\frac{1}{Q^4} - Q^2\right)2D_i \tag{2.2}$$

$$\sigma_{23}^{(i)} = \sigma_{31}^{(i)} = \sigma_{12}^{(i)} = 0$$

где

$$L_{(i)}(r) = 4\int\limits_{Q_i}^{Q} \left[(Q^3 - 1)C_i + \left(Q - \frac{1}{Q^2}\right)D_i \right] dQ =$$

$$= (Q^4 - 4Q)C_i + 2\left(Q^2 + \frac{2}{Q}\right)D_i - (Q_i^4 - 4Q_i)C_i - 2\left(Q_i^2 + \frac{2}{Q_i}\right)D_i \tag{2.3}$$

где $$Q_i > Q > Q_{i-1}$$

Предположим, что деформированное тело остается в форме сферической оболочки при нулевых внутреннем и внешнем давлениях.

Тогда из (1.14) получаем

$$L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3) = 0 \tag{2.4}$$

Дальнейший ход решения задачи иллюстрируется на численном примере.

Пусть оболочка в недеформированном состоянии имеет размеры $\rho_1 = 20\,см$, $\rho_2 = 18\,см$, $\rho_3 = 15\,см$ и состоит из таких материалов, для которых можно принять

$$C_1 = 2\,кг/см^2,\ C_2 = 1\,кг/см^2,\ D_1 = D_2 = 0$$

Подставляя эти значения в (2.4), получаем

$$-2Q_1^4 + Q_2^4 + Q_3^4 + 8Q_1 - 4Q_2 - 4Q_3 = 0 \tag{2.5}$$

Из условия несжимаемости имеем

$$Q = \frac{\rho}{(\rho_1^3 + r_1^3 - \rho^3)^{1/3}} = \frac{Q_1\rho}{[(\rho_1^3 - \rho^3)Q_1^3 + \rho_1^3]^{1/3}}$$

откуда

$$Q_2 = \frac{18Q_1}{(2168Q_1^3 + 8000)^{1/3}}, \qquad Q_3 = \frac{15\,Q_1}{(4625Q_1^3 + 8000)^{1/3}}$$

Подставляя эти значения в (2.5), получаем

$$
-2Q_1^3 + \frac{104976\,Q_1^3}{(2168\,Q_1^3 + 8000)^{4/3}} + \frac{50625\,Q_1^3}{(4625\,Q_1^3 + 8000)^{4/3}} -
$$
$$
- \frac{72}{(2168\,Q_1^3 + 8000)^{1/3}} - \frac{60}{(4625\,Q_1^3 + 8000)^{1/3}} + 8 = 0 \tag{2.6}
$$

Отсюда, используя физически осмысленное решение (2.6), полученное на ЭВМ „Наири", находим

$$
Q_1 = 1.18036, \qquad Q_2 = 0.93951, \qquad Q_3 = 0.70850
$$
$$
r_1 = 16.9440\,см, \qquad r_2 = 19.1590\,см, \qquad r_3 = 21.1714\,см
$$

Из (1.13) определяем

$$
H_1 = R_1 = 0, \qquad H_2 = L_{(1)}(r_2)
$$

Физические компоненты напряжения будут

$$
\sigma_{11}^{(1)} = 2Q^4 - 8Q + 5.5606
$$
$$
\sigma_{22}^{(1)} = \frac{4}{Q^2} - 2Q^4 - 8Q + 5.5606 \tag{2.7}
$$

где

$$
1.18036 \geqslant Q \geqslant 0.93951
$$
$$
\sigma_{11}^{(2)} = Q^4 - 4Q + 2.5817
$$
$$
\sigma_{22}^{(2)} = \frac{2}{Q^2} - Q^4 - 4Q + 2.5817 \tag{2.8}
$$

где

$$
0.93951 \geqslant Q \geqslant 0.70850
$$

Как показывают вычисления, радиусы рассматриваемой составной сферической оболочки при выворачивании ее наизнанку увеличиваются.

Этот эффект имеет место для любой однородной несжимаемой сферической оболочки. Например, если взять однородную сферическую оболочку размерами $\rho_1 = 20\,см$, $\rho_2 = 15\,см$ из ново-гуковского материала, т. е. $W = C(I_1 - 3)$, то после выворачивания наизнанку получим

$$
r_1 = 16.972\,см, \qquad r_2 = 21.189\,см
$$

Для составной оболочки при определенном соотношении радиусов составляющих оболочек, когда материал внутренней оболочки сопротивляется упругим деформациям значительно больше, чем материал внешней оболочки, может иметь место и обратный эффект.

Например, если взять двухслойную оболочку размерами $\rho_1 = 20\,см$, $\rho_2 = 18\,см$, $\rho_3 = 15\,см$ и принять для функции энергии деформации выражения

$$
W_{(1)} = I_1 - 3, \qquad W_{(2)} = 2(I_1 - 3)
$$

то после выворачивания наизнанку получаем

$$
r_1 = 14.390\,см, \qquad r_2 = 17.267\,см, \qquad r_3 = 19.665\,см
$$

3. Рассмотрим случай, когда материалы сферической оболочки сжимаемы.

В этом случае точка оболочки (ρ, θ, φ) в интервале $\rho_k \geqslant \rho \geqslant \rho_{k-1}$ в выбранной системе сферических координат переходит в точку $(r_{(k)}, \theta, \varphi)$, где $r_{(k)}$ — функция от ρ.

Для компонентов контрвариантного тензора напряжения каждого слоя имеем [5]

$$
\begin{gathered}
\tau^{11}_{(k)} = r^2_{(k)\rho}\, \Phi_{(k)} + \frac{2\, r^2_{(k)\rho}\, r^2_{(k)}}{\rho^2} \Psi_{(k)} + p_{(k)} \\
\tau^{22}_{(k)} = \tau^{33}_{(k)} \sin^2\theta = \frac{1}{\rho^2} \Phi_{(k)} + \left(\frac{r^2_{(k)}}{\rho^4} + \frac{r^2_{(k)\rho}}{\rho^2}\right) \Psi_{(k)} + \frac{p_{(k)}}{r^2_{(k)}} \qquad (3.1) \\
\tau^{12}_{(k)} = \tau^{23}_{(k)} = \tau^{31}_{(k)} = 0
\end{gathered}
$$

где

$$
\Phi_{(k)} = \frac{2}{\sqrt{I_3^{(k)}}} \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1^{(k)}}, \quad \Psi_{(k)} = \frac{2}{\sqrt{I_3^{(k)}}} \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2}, \quad p_{(k)} = 2\sqrt{I_3^{(k)}} \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_3^{(k)}} \qquad (3.2)
$$

Уравнения равновесия сводятся к виду

$$
\frac{d}{dr} \left(r^2 \tau^{11}_{(k)}\right) = 2\, r^3_{(k)}\, \tau^{22}_{(k)}
$$

или

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{d\rho} \left[r^2_{(k)\rho}\, r^2_{(k)}\, \Phi_{(k)} + \frac{2\, r^2_{(k)\rho}\, r^4_{(k)}}{\rho^2} \Psi_{(k)} + r^2_{(k)}\, p_{(k)} \right] = \\
= \frac{2\, r_{(k)\rho}\, r^3_{(k)}}{\rho^2} \Phi_{(k)} + 2 \left(\frac{r_{(k)\rho}\, r^5_{(k)}}{\rho^4} + \frac{r^3_{(k)\rho}\, r^3_{(k)}}{\rho^2}\right) \Psi_{(k)} + 2\, r_{(k)\rho}\, r_{(k)}\, p_{(k)} \qquad (3.3)
\end{gathered}
$$

Эти уравнения представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка относительно функций $r_{(k)}(\rho)$.

На внешней и внутренней сферических поверхностях составной оболочки могут быть заданы два из следующих граничных условий:

$$
\begin{gathered}
\tau^{11}_{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = R_1, \qquad r_{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = r_1 \\
\tau^{11}_{(n)}\big|_{\rho=\rho_{n+1}} = R_2, \qquad r_{(n)}\big|_{\rho=\rho_{n+1}} = r_{n+1}
\end{gathered} \qquad (3.4)
$$

Условия (3.4) и условия сцепления

$$
\tau^{11}_{(k)}\big|_{\rho=\rho_{k+1}} = \tau^{11}_{(k+1)}\big|_{\rho=\rho_{k+1}} \qquad (3.5)
$$

являются краевыми условиями, которым должны удовлетворять решения дифференциальных уравнений (3.3). Если найдены $r_{(k)}$ и $r_{(k)\rho}$, которые определяют деформированное состояние оболочки, то из (3.1) нетрудно найти ее напряженное состояние.

Для нахождения $\tau^{11}_{(k)}$ можно применить другой способ. Для k-ого слоя имеем [6]

$$\frac{dW_{(k)}}{d\rho}=\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\left[(\rho\, r_{(k)\rho}-r_{(k)})\, r^2_{(k)}\, \tau^{11}_{(k)}\right] \tag{3.6}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\rho^3\,\frac{dW_{(1)}}{d\rho}\,d\rho=(\rho r_{(1)\rho}-r_{(1)})\, r^2_{(1)}\,\tau^{11}_{(1)}-\left[(\rho r_{(1)\rho}-r_{(1)})\, r^2_{(1)}\,\tau^{11}_{(1)}\right]_{\rho=\rho_1}$$

где

$$\rho_1\geqslant\rho\geqslant\rho_2$$

$$\int\limits_{\rho_2}^{\rho}\rho^3\,\frac{dW_{(2)}}{d\rho}\,d\rho=(\rho\, r_{(2)\rho}-r_{(2)})\, r^2_{(2)}\,\tau^{11}_{(2)}-\left[(\rho r_{(2)\rho}-r_{(2)})\, r^2_{(2)}\,\tau^{11}_{(2)}\right]_{\rho=\rho_2}$$

где

$$\rho_2\geqslant\rho\geqslant\rho_3 \tag{3.7}$$

. . . .

$$\int\limits_{\rho_n}^{\rho}\rho^3\,\frac{dW_{(n)}}{d\rho}\,d\rho=(\rho r_{(n)\rho}-r_{(n)})\, r^2_{(n)}\,\tau^{11}_{(n)}-\left[(\rho r_{(n)\rho}-r_{(n)})\, r^2_{(n)}\,\tau^{11}_{(n)}\right]_{\rho=\rho_n}$$

где

$$\rho_n\geqslant\rho\geqslant\rho_{n+1}$$

Из этих уравнений при помощи (3.5) определяются $\tau^{11}_{(k)}$ на граничных сферических поверхностях оболочки, а затем $\tau^{11}_{(k)}$ для каждого слоя.

4. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку двухслойной сферической оболочки из сжимаемых материалов.

Пусть оболочка нетолстая и деформации такие, что можно применять соотношения теории упругости второго порядка. Тогда функции энергии деформации материалов оболочки определяются выражением Мурнагана

$$W_{(i)}=A_1^{(i)}J_2^{(i)}+A_2^{(i)}J_1^{(i)2}+A_3^{(i)}J_1^{(i)}J_2^{(i)}+A_4^{(i)}J_1^{(i)3}+A_5^{(i)}J_3^{(i)}$$

$$(i=1,\ 2) \tag{4.1}$$

$$\text{где } J_1^{(i)}=I_1^{(i)}-3,\qquad J_2^{(i)}=I_2^{(i)}-2I_1^{(i)}+3$$

$$J_3^{(i)}=I_3^{(i)}-I_2^{(i)}+I_1^{(i)}-1 \tag{4.2}$$

Из (3.2), (4.1) и (4.2) получаем

$$\Phi_{(i)}=\frac{2}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left(3A_1^{(i)}I_1^{(i)2}+B_1^{(i)}I_1^{(i)}+A_3^{(i)}I_2^{(i)}+B_2^{(i)}\right)$$

$$\Psi_{(i)}=\frac{2}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left(A_3^{(i)}I_1^{(i)}+B_3^{(i)}\right),\qquad p_{(i)}=2\sqrt{I_3^{(i)}}\,A_5^{(i)} \tag{4.3}$$

где

$$B_1^{(i)} = 2A_2^{(i)} - 4A_3^{(i)} - 18A_4^{(i)}$$

$$B_2^{(i)} = -2A_1^{(i)} - 6A_2^{(i)} + 9A_3^{(i)} + 27A_4^{(i)} + A_5^{(i)} \qquad (4.4)$$

$$B_3^{(i)} = A_1^{(i)} - 3A_3^{(i)} - A_5^{(i)}$$

Подставляя значения $\Phi_{(i)}$ и $\Psi_{(i)}$ в (3.1), получим

$$\tau_{(i)}^{11} = \frac{2r^2_{(i)\rho}}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left(3A_4^{(i)} I_1^{(i)2} + B_1^{(i)} I_1^{(i)} + A_3^{(i)} I_2^{(i)} + \frac{2A_3^{(i)} r^2_{(i)}}{\rho^2} I_1^{(i)} + \frac{2B_3^{(i)} r^2_{(i)}}{\rho^2} + B_2^{(i)}\right) + 2A_5^{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}}$$

$$\tau_{(i)}^{22} = \frac{2}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(3A_4^{(i)} I_1^{(i)2} + B_1^{(i)} I_1^{(i)} + A_3^{(i)} I_2^{(i)} + B_2^{(i)}\right) + \left(\frac{r^2_{(i)}}{\rho^4} + \frac{r^2_{(i)\rho}}{\rho^2}\right)\left(A_3^{(i)} I_1^{(i)} + B_3^{(i)}\right)\right] + \frac{2A_5^{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}}}{r^2_{(i)}} \qquad (4.5)$$

где инварианты деформаций определяются выражениями

$$I_1^{(i)} = r^2_{(i)\rho} + \frac{2r^2_{(i)}}{\rho^2}, \qquad I_2 = \frac{r^4_{(i)}}{\rho^4} + \frac{2r^2_{(i)\rho} r^2_{(i)}}{\rho^2}, \qquad I_3 = \frac{r^2_{(i)\rho} r^4_{(i)}}{\rho^4} \qquad (4.6)$$

На основании (4.5) и (3.3) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{r^2_{(i)\rho} r^2_{(i)}}{\rho^2}\left(3A_4^{(i)} I_1^{(i)2} + B_1^{(i)} I_1^{(i)} + A_3^{(i)} I_2^{(i)} + \frac{2A_3^{(i)} r^2_{(i)}}{\rho^2} I_1^{(i)} + \frac{2B_3^{(i)} r^2_{(i)}}{\rho^2} + B_2^{(i)}\right) + A_5^{(i)} r^2_{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}}\right] = \frac{2r_{(i)\rho} r^3_{(i)}}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(3A_4^{(i)} I_1^{(i)2} + B_1^{(i)} I_1^{(i)} + A_3^{(i)} I_2^{(i)} + B_2^{(i)}\right) + \left(\frac{r^2_{(i)}}{\rho^4} + \frac{r^2_{(i)\rho}}{\rho^2}\right)\left(A_3^{(i)} I_1^{(i)} + B_3^{(i)}\right)\right] + 2A_5^{(i)} r_{(i)\rho} r_{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}} \qquad (4.7)$$

$$(i = 1, 2)$$

Пусть постоянные, входящие в $W_{(1)}$ и $W_{(2)}$, имеют следующие значения [8]:

$$A_1^{(1)} = -2.46 кг/см^2, \ A_2^{(1)} = 10.9 кг/см^2, \ A_3^{(1)} = 11 кг/см^2, \ A_4^{(1)} = 0$$

$$A_5^{(1)} = -2.76 кг/см^2$$

$$A_1^{(2)} = -5.76 кг/см^2, \ A_2^{(2)} = 22 кг/см^2, \ A_3^{(2)} = 24 кг/см^2$$

$$A_4^{(2)} = 0, \ A_5^{(2)} = -5.6 кг/см^2$$

Тогда на основании (4.5) и (4.7) получаем

$$\tau_{(1)}^{11} = 88 r^3_{(1)\rho} - 44.4\frac{r^3_{(1)\rho}\rho^2}{r^2_{(1)}} - 219.6 r_{(1)\rho} + 104.48\frac{r_{(1)\rho} r^2_{(1)}}{\rho^2} + 71.52\frac{r_{(1)\rho}\rho^2}{r^2}$$

$$\sigma^{22}_{(1)}=66\frac{r^3_{(1)}}{r_{(1)\rho}\,\rho^4}-109.8\frac{r_{(1)\rho}}{r^2_{(1)}}-\frac{154.2}{r_{(1)\rho}\,\rho^2}+104.48\frac{r_{(1)\rho}}{\rho^2}+\frac{71.52}{r_{(1)\rho}\,r^2_{(1)}}+$$

$$+22\frac{r^3_{(1)\rho}}{r^2_{(1)}}$$

где

$$\rho_1>\rho>\rho_2 \tag{4.8}$$

$$\sigma^{11}_{(2)}=192r^3_{(2)\rho}-104\frac{r^3_{(2)\rho}\,\rho^2}{r^2_{(2)}}-493\,r_{(2)\rho}+228.8\frac{r_{(2)\rho}\,r^2_{(2)}}{\rho^2}+176.8\frac{r_{(2)\rho}\,\rho^2}{r^2_{(2)}}$$

$$\sigma^{22}_{(2)}=144\frac{r^3_{(2)}}{r_{(2)\rho}\,\rho^4}-246.8\frac{r_{(2)\rho}}{r^2_{(2)}}-\frac{350.8}{r_{(2)\rho}\,\rho^2}+228.8\frac{r_{(2)\rho}}{\rho^2}+\frac{176.8}{r_{(2)\rho}\,r^2_{(2)}}+$$

$$+48\frac{r^3_{(2)\rho}}{r_{(2)}}$$

где

$$\rho_2>\rho>\rho_3 \tag{4.9}$$

$$r_{(1)\rho\rho}\left(-66.6r^2_{(1)\rho}\rho^2+132\,r^2_{(1)\rho}\,r^2_{(1)}-109.8\,r^2_{(1)}+52.24\frac{r^4_{(1)}}{\rho^2}+\right.$$

$$\left.+35.76\rho^2\right)-44.4\,r^3_{(1)\rho}\rho+66\,r^4_{(1)\rho}\,r_{(1)}-109.8\,r^2_{(1)\rho}r_{(1)}+104.48\,\frac{r^2_{(1)\rho}\,r^3_{(1)}}{\rho^2}-$$

$$-104.48\frac{r_{(1)\rho}\,r^4_{(1)}}{\rho^3}+71.52\,r_{(1)\rho}\,\rho+154.2\,\frac{r^3_{(1)}}{\rho^2}-66\frac{r^5_{(1)}}{\rho^4}-71.52\,r_{(1)}=0 \tag{4.10}$$

$$r_{(2)\rho\rho}\left(-156\,r^2_{(2)\rho}\,\rho^2+288\,r^2_{(2)\rho}\,r^2_{(2)}-246.8\,r^2_{(2)}+144.4\,\frac{r^4_{(2)}}{\rho^2}+88.4\rho^2\right)-$$

$$-104\,r^3_{(2)\rho}\rho+144\,r^4_{(2)\rho}\,r_{(2)}-246.8\,r^2_{(2)\rho}\,r_{(2)}+228.8\frac{r^2_{(2)\rho}\,r^3_{(2)}}{\rho^2}-$$

$$-228\frac{r_{(2)\rho}\,r^4_{(2)}}{\rho^3}+176.8\,r_{(2)\rho}\rho+350.8\frac{r^3_{(2)}}{\rho^2}-144\frac{r^5_{(2)}}{\rho^4}-176.8\,r_{(2)}=0 \tag{4.11}$$

Для решения дифференциальных уравнений (4.10) и (4.11) необходимы конкретные граничные условия.

Пусть сферическая оболочка размерами $\rho_1=20см$, $\rho_2=19см$, $\rho_3=18см$ из вышеподобранных материалов выворачивается наизнанку так, что внешняя и внутренняя поверхности после деформации остаются свободными от напряжений. Отсюда имеем следующие граничные условия:

а) $\sigma^{22}_{(1)}\big|_{\rho=\rho_1}=0$, или из (4.8)

$$r_{(1)\rho}=\sqrt{\left(-109.8\frac{r^2_1}{\rho^2_1}+52.24\frac{r^4_1}{\rho^4_1}+35.76\right)\Big/\left(22.2-44\frac{r^2_1}{\rho^2_1}\right)} \tag{4.12}$$

где знак перед корнем выбран из геометрических соображений;

б) $$r_{(1)}\Big|_{\rho=\rho_2} = r_{(2)}\Big|_{\rho=\rho_2} = r_2 \tag{4.13}$$

в) $$\tau^{11}_{(1)}\Big|_{\rho=\rho_2} = \tau^{11}_{(2)}\Big|_{\rho=\rho_2} \quad \text{или}$$

$$r^3_{(2)\rho}\left(96\frac{r_2^2}{\rho_2^2} - 52\right) + r_{(2)\rho}\left(114.4\frac{r_2^4}{\rho_2^4} - 246.8\frac{r_2^2}{\rho_2^2} + 88.4\right) -$$

$$- r^3_{(1)\rho}\left(44\frac{r_2^2}{\rho_2^2} - 22.2\right) - r_{(1)\rho}\left(52.24\frac{r_2^4}{\rho_2^4} - 109.8\frac{r_2^2}{\rho_2^2} + 35.76\right) = 0 \tag{4.14}$$

г) $$\tau^{11}_{(2)}\Big|_{\rho=\rho_3} = 0 \quad \text{или}$$

$$r_{(2)\rho} = \sqrt{\left(-246.8\frac{r_3^2}{\rho_3^2} + 114.4\frac{r_3^4}{\rho_3^4} + 88.4\right)\Bigg/\left(52 - 96\frac{r_3^2}{\rho_3^2}\right)} \tag{4.15}$$

Эти граничные условия достаточны для решения дифференциальных уравнений (4.10) и (4.11).

Задача решена с помощью вычислительной машины „Наири I". Программа составлена так, что, задаваясь r_1 и решая дифференциальные уравнения (4.10) и (4.11), добиваемся удовлетворения (4.13). При этом граничные условия дифференциального уравнения (4.11) определяются из (4.13) и (4.14) после решения (4.10). Подставляя полученные значения $r_{(1)}$, $r_{(1)\rho}$, $r_{(2)}$ и $r_{(2)\rho}$ в (4.8) и (4.9), получаем компоненты контрвариантного тензора напряжений.

Результаты численного решения с точностью до последнего знака приведены в табл. 1. Здесь же, с целью сопоставления, в скобках приводятся результаты соответствующих величин для выворачивания сферической оболочки из несжимаемых материалов, т. е. когда в (4.1) принимается $I_3^{(1)} = I_3^{(2)} = 1$.

Таблица 1

№ слоя	ρ в см	r в см	r_ρ	τ^{11} в кг/см²	$\tau^{22}=\tau^{33}$ в кг/см²
Первый слой	20.0	17.4685(17.6893)	1.2444	0.0000(0.0000)	−1.2484(−2.6382)
	19.8	17.7126(17.9389)	1.1969	−0.0407(−0.0747)	−1.6550(−2.6777)
	19.6	17.9476(18.1769)	1.1534	−0.0839(−0.1384)	−1.7017(−2.3191)
	19.4	18.1741(18.4042)	1.1126	−0.1221(−0.1854)	−1.5101(−1.7644)
	19.2	18.3927(18.6216)	1.0734	−0.1510(−0.2148)	−1.1556(−1.1347)
	19.0	18.6035(18.8297)	1.0352	−0.1686(−0.2280)	−0.6887(−0.4956)
Второй слой	19.0	18.6035(18.8297)	1.0362	−0.1686(−0.2280)	−1.2560(−0.7715)
	18.8	18.8070(19.0291)	0.9983	−0.1803(−0.2361)	−0.1394(0.4833)
	18.6	19.0029(19.2203)	0.9606	−0.1673(−0.1998)	1.0707(1.7173)
	18.4	19.1912(19.4038)	0.9225	−0.1310(−0.1524)	2.3232(3.1325)
	18.2	19.3718(19.5801)	0.8837	−0.0738(−0.0858)	3.5756(4.0988)
	18.0	19.5446(19.7496)	0.8438	0.0000(−0.0000)	4.7894(5.0671)

Из таблиц видно, что при выворачивании двухслойной сферической оболочки учет малой сжимаемости материалов (соответствующей коэффициенту поперечной деформации $\sigma = 0.47$ при переходе к линейной теории) значительно изменяет напряженное состояние.

Такой эффект имеет место и для однородной сферической оболочки.

В качестве примера рассмотрим выворачивание однородной сферической оболочки, которая изготовлена из материала первого слоя вышерассмотренной двухслойной оболочки.

Пусть оболочка имеет размеры $r_2 = 20$ *см* и $r_1 = 18$ *см*.

В табл. 2 приведены результаты численного решения задачи, когда внешняя поверхность переходит в свободную от напряжений внутреннюю поверхность ($r_1 = 18$ *см*).

Таблица 2

ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	σ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\sigma^{22}$ в *кг/см*^{2}
20	18.0000(18.0000)	1.1860	0.0000(0.0000)	−1.6537(−2.6634)
19.6	18.4577(18.4715)	1.1040	−0.0783(−0.1189)	−1.3969(−1.8849)
19.2	18.8839(18.9026)	1.0279	−0.1197(−0.1711)	−0.5374(−0.6371)
18.8	19.2801(19.2984)	0.9531	−0.1142(−0.1650)	0.6107(0.5951)
18.4	19.6462(19.6631)	0.8764	−0.0646(−0.1147)	1.8696(1.8542)
18.0	19.9806(20.0000)	0.7950	0.0203(−0.0236)	3.1204(3.4895)

Результаты численного решения задачи, когда после выворачивания внешняя и внутренняя поверхности свободны от напряжений, приведены в табл. 3.

Таблица 3

ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	σ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\sigma^{22}$ в *кг/см*^{2}
20.0	17.8997(18.0791)	1.1965	0.0000(0.0000)	−1.6251(−2.6273)
19.6	18.3612(18.5467)	1.1130	−0.0809(−0.1131)	−1.4779(−1.7650)
19.2	18.7910(18.9744)	1.0364	−0.1276(−0.1593)	−0.6645(−0.5112)
18.8	19.1909(19.3673)	0.9615	−0.1274(−0.1489)	0.4629(0.7138)
18.4	19.5600(19.7295)	0.8350	−0.0822(−0.0952)	1.7175(2.0857)
18.0	19.8930(20.0641)	0.8040	0.0000(0.0000)	2.9742(3.6730)

В этих таблицах сопоставляются полученные численные результаты с соответствующими результатами для сферической оболочки из несжимаемого материала.

Заметим, что радиусы внешней и внутренней поверхностей однородной сферической оболочки, изготовленной из сжимаемого материала, при выворачивании наизнанку могут уменьшаться, если поверхности после деформации остаются свободными от напряжений, что невозможно в случае несжимаемого материала.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 VI 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍՆԱՄԵՋ ԳՆԴԻ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԵՎ ՇՈՒՌ ՏՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա դիտարկված է տարբեր առաձգական նյութերից պատրաստված և գնդային թաղանթներ ներկայացնող շերտերից կազմված բաղադրյալ թաղանթի սիմետրիկ ընդարձակման և շուռ տրման խնդիրները։ Աշխատանքի առաջին կետում ընդունված է, որ գնդային թաղանթը կազմված է անսեղմելի նյութերից, իսկ երկրորդ կետում հաշվի է առնված նյութերի սեղմելիությունը։

Բերված են թվային օրինակներ, որոնցում ուսումնասիրված է սեղմելիության ազդեցությունը բաղադրյալ և համասեռ գնդային թաղանթների շուռ տրման ժամանակ։

R. E. MKRTCHIAN

PROBLEMS OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR SYMMETRICAL EXPANSION AND INVERSION OF COMPOSITE HOLLOW SPHERE

Summary

The solution of the problems of large elastic deformations for symmetrical expansion and inversion of a composite hollow sphere, composed of different elastic spherical shells are considered. Both cases of incompressible and compressible materials are investigated in this work.

In particular the solution of the problem of inversion of a hollow sphere composed of two layers is considered in detail (the cases of incompressible and compressible materials are investigated separetely).

The effect of compressiblity for the inversion of composite and homogeneous hollow spheres is investigated by the help of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green A. E.* and *Shield R. T.* Finite elastic deformation of incompressible isotropic bodies. Proc. Roy. Soc., A, 202, 1950, 407.
2. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. *Armanni G.* Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi, Il Nuovo Cimetro [6], 10, 1915, 424—427.
4. *Ericksen J. L.* Inversion of a perfectly elastic spherical shell. Z. angew. Math. Mech., 35, 1955, 382.
5. *Green A. E.* Finite elastic deformation of compressible isotropic bodies. Proc. Roy. Soc., A, 227, 1955, 271—278.
6. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965.
7. *Bhargava R. D.* and *Pande D.* Finite spherical inhomogeneities in concentric shells, Indian J. Phys., 39, No.9, 1965, 428—433.
8. *Мкртчян Р. Е.* Большие упругие деформации для растяжения, раздувания и кручения составной трубы из сжимаемого материала. Известия АН АрмССР, Механика, т. XXI, №3, 1968.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

А. М. БАРХУДАРЯН

ДВИЖЕНИЕ КРЫЛА КРУГОВОЙ В ПЛАНЕ ФОРМЫ ВБЛИЗИ ЭКРАНА

В летательных аппаратах часто применяется крыло круговой в плане формы. В работе Н. Е. Кочина [1] построена теория крыла конечного размаха круговой формы в плане. При построении этой теории автор рассматривает крыло тонким, а движение крыла—происходящим в безграничном пространстве жидкости. Однако, при разработке и конструировании летательных аппаратов необходимо учитывать влияние земли, особенно при посадке и взлете, когда это влияние имеет большое значение. Поэтому и задача об обтекании крыльев, помещенных вблизи твердой стенки, приобретает большую актуальность. Необходимо учитывать также толщину профиля крыла.

В настоящей статье рассматривается поступательное прямолинейное движение круглого, дискообразного и слабо изогнутого крыла вблизи экрана.

Как и в работе Н. Е. Кочина [1], при решении этой задачи учитывается распределение присоединенных вихрей вдоль поверхности крыла. Берется правая система прямолинейных прямоугольных координат x, y, z.

Пусть крыло движется поступательно вдоль оси x со скоростью c или, пользуясь принципом обратимости, крыло неподвижно и на него набегает поступательный поток по направлению оси x, скорость которого в бесконечности равна $-c$.

Проекция крыла на плоскость xy имеет форму круга радиуса a с центром в начале координат.

Проекция и разрез крыла показаны на фиг. 1. Здесь h—расстояние до экрана.

Фиг. 1.

Пусть $z_2 = \zeta_2(x, y)$ представляет уравнение верхней поверхности крыла, а $z_1 = \zeta_1(x, y)$—нижней. Первые производные от ζ_2 и ζ_1 по x

и y предполагаются [1] малыми величинами, так что можно принимать

$$\cos(n_1, x) = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \qquad \cos(n_2, x) = -\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}$$

Жидкость, как и в работе [1], предполагается несжимаемой, а движение — безвихревым, установившимся и происходящим при отсутствии внешних сил.

Скорость частиц на задней кромке крыла предполагается ограниченной, а на передней кромке — стремящейся к бесконечности [1].

На полосе $|y| < a$ $x < 0$ в плоскости xy функция $\varphi(x, y, z)$ — потенциал скорости терпит разрыв, а в остальной части полупространства потенциал скорости и его частные производные непрерывны.

Составляющие скорости частиц по соответствующим осям определяются следующими соотношениями:

$$u_x = -c + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Задача линеаризируется путем замены условия на поверхности крыла условием на поверхности круга, расположенного в плоскости xy. Тогда граничные условия будут иметь следующий вид:
условие на поверхности крыла —

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=+0} = -c\,\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}, \qquad (x^2 + y^2 < a^2) \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-0} = -c\,\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}, \qquad (x^2 + y^2 < a^2) \tag{2}$$

где c — скорость движения крыла.

Так как давление должно быть непрерывным при переходе через поверхность разрыва, получается условие:

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{z=-0}, \qquad (|y| < a,\ x^2 + y^2 > a^2,\ x < 0) \tag{3}$$

Кинематическое условие на поверхности разрыва будет

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{z=-0}$$

т. е. нормальная составляющая скорости должна оставаться непрерывной при переходе через поверхность разрыва. Однако, направление нормали поверхности разрыва мало отличается от направления оси z, поэтому условие непрерывности $\partial\varphi/\partial n$ можно заменить условием

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right|_{z=-0} \qquad (|y| < a,\ x^2 + y^2 > a^2,\ x < 0) \tag{4}$$

Условие на экране будет

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-h} = Q(x, y) \tag{5}$$

где $Q(x, y)$ — заданная функция для данного экрана.

При плоском экране, параллельном плоскости xy, $Q(x, y)=0$.

Условие на бесконечности будет

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\lim_{y\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\lim_{r\to\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0 \tag{6}$$

Таким образом, $\varphi(x, y, z)$ должна быть гармонической функцией, регулярной в области, получающейся из всего бесконечного полупространства вырезанием круга радиуса a и бесконечной полуполосы шириною $2a$. Эта функция должна удовлетворять намеченным граничным условиям.

Прежде чем построить функцию $\varphi(x, y, z)$, построим гармонические функции в цилиндрических координатах при $z>0$ $\Phi_2(r, \theta, z)$ и при $-h<z<0$ $\Phi_1(r, \theta, z)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=-h} = f_3(r, \theta) \qquad (0<r<\infty) \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = f_1(r, \theta) \qquad (0<r<a) \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = f_2(r, \theta) \qquad (0<r<a) \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} \qquad (a<r<\infty) \tag{10а}$$

$$\Phi_1\big|_{z=0} = \Phi_2\big|_{z=0} \qquad (a<r<\infty) \tag{10б}$$

Для удобства расчетов примем

$$y = r\cos\theta, \qquad x = -r\sin\theta$$

Как функции $f_1(r, \theta)$, $f_2(r, \theta)$ и $f_3(r, \theta)$, так и их первые производные по r и θ предполагаются непрерывными.

Уравнение неразрывности в цилиндрических координатах следующее:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0 \tag{11}$$

Можно найти бесчисленное множество частных интегралов, если воспользоваться приемом разделения переменных, что приводит к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения.

Для нахождения частного интеграла данного уравнения предполагается:

$$\Phi(r, \vartheta, z) = R(r)\Theta(\vartheta)Z(z) \tag{12}$$

где $R(r)$, $\Theta(\vartheta)$ и $Z(z)$ — некоторые функции r, ϑ и z соответственно.

Подставляя (12) в (11), получим

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} + \frac{Z''}{Z} = 0 \tag{13}$$

Первые три слагаемых не содержат z, потому и Z''/Z не должно ее содержать. Но с другой стороны, отношение Z''/Z не содержит r и ϑ, поэтому должно быть постоянным, т. е.

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda^2 \qquad \text{или} \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0$$

Общим решением этого уравнения является

$$Z = A_k(\lambda)e^{\lambda z} + B_k(\lambda)e^{-\lambda z} \tag{14}$$

В связи с тем, что при $z \to +\infty$ функция Φ и ее частные производные должны быть ограничены, для верхнего полупространства мы должны положить $A_k(\lambda) = 0$ и брать

$$Z = C_k(\lambda)e^{-\lambda z} \tag{14a}$$

Точно также отношение Θ''/Θ должно быть постоянной величиной.

Так как функция Θ должна быть периодической относительно ϑ, берется:

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -k^2$$

Этому уравнению удовлетворяют функции $\cos k\vartheta$ и $\sin k\vartheta$. Учитывая условие симметричности задачи относительно плоскости xoz, возьмем

$$\Theta = \sin k\vartheta \tag{15}$$

Тогда из (13) получим следующее уравнение:

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \left(\lambda^2 - \frac{k^2}{r^2}\right)R = 0$$

являющееся уравнением Бесселя.

Согласно краевым условиям, функция $R(r)$ ограничена при $0 < r < \infty$.

При этом решением данного уравнения является функция Бесселя порядка „k", т. е.

$$R = J_k(r\lambda) \tag{16}$$

Сопоставляя сказанное относительно функций $R(r)$, $\Theta(\theta)$ и $Z(z)$ и вспоминая равенство (12), для уравнения Лапласа (11) получаем интеграл

при $-h < z < 0$

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r)[A_k(\lambda) e^{\lambda z} + B_k(\lambda) e^{-\lambda z}] \, d\lambda \tag{17}$$

при $z > 0$

$$\Phi_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} J_k(\lambda r) \, C_k(\lambda) e^{-\lambda z} \, d\lambda \tag{18}$$

Разлагая далее правые части (7), (8) и (9) в промежутке $(0, \pi)$ в ряды по синусам, получим

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(r) \sin k\theta$$

где

$$g_k(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(r, \theta) \sin k\theta \, d\theta$$

Разлагая функцию $g_k(r)$ в свою очередь в ряд по собственным функциям, получим

$$g_k(r) = \int_0^{\infty} \lambda J_k(\lambda r) \, a_k(\lambda) \, d\lambda \tag{19}$$

где для $f_1(r, \theta)$ и $f_2(r, \theta)$

$$a_k(\lambda) = \int_0^{a} y J_k(y\lambda) \, g_k(y) \, dy \tag{20}$$

а для $f_3(r, \theta)$

$$a_k^{(3)}(\lambda) = \int_a^{\infty} y J_k(y\lambda) g_k^{(3)}(y) \, dy \tag{21}$$

Представляя заданные функции $f(r, \theta)$ в виде

$$f(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\theta \int_0^{\infty} \lambda J_k(\lambda r) \, a_k(\lambda) \, d\lambda \tag{22}$$

и используя условие (7), для определения коэффициентов получим следующее уравнение:

$$A_k(\lambda)e^{-\lambda h} - B_k(\lambda)e^{\lambda h} = a_k^{(1)}(\lambda) \tag{23}$$

Используя условие

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = \begin{cases} f_1(r,\ \vartheta) - f_2(r,\ \vartheta) & (0 < r < a) \\ 0 & (a < r < \infty) \end{cases}$$

и представляя $f_1(r,\ \vartheta) - f_2(r,\ \vartheta)$ в форме

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k\vartheta \int_0^{\infty} \lambda J_k(\lambda r)\, a_k^{(2)}(\lambda)\, d\lambda$$

где

$$a_k^{(2)}(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int_0^a y J_k(y\lambda) \int_0^{\pi} [f_1(r,\vartheta) - f_2(r,\vartheta)] \sin k\vartheta\, d\vartheta\, dy$$

получим еще одно уравнение для определения тех же коэффициентов

$$A_k(\lambda) - B_k(\lambda) + C_k(\lambda) = a_k^{(2)}(\lambda) \tag{24}$$

Из условий (8), (9) и (11) получается

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial\Phi_2}{\partial z}\right)_{z=0} = f_1(r,\ \vartheta) + f_2(r,\ \vartheta) \qquad (0 < r < a)$$

$$(\Phi_1 - \Phi_2)_{z=0} = 0 \qquad (a < r < \infty)$$

Разлагая $f_1 + f_2$ в интервале $(0,\ \pi)$ в ряд по синусам, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} \lambda J_k(\lambda r)[A_k(\lambda) - B_k(\lambda) - C_k(\lambda)]\,d\lambda = g_k^{(1)}(r) \quad \text{при } r < a \\ &\int_0^{\infty} J_k(\lambda r)[A_k(\lambda) + B_k(\lambda) - C_k(\lambda)]\,d\lambda = 0 \quad \text{при } r > a \end{aligned} \tag{25}$$

Путем некоторых преобразований эти уравнения можно привести к дуальным интегральным уравнениям, решение которых дано в работе [3].

Решение таких уравнений приводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$A_k(\lambda) + B_k(\lambda) - C_k(\lambda) = 2\lambda^{\frac{1}{2}} \int_0^a x J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^{\infty} t^{\frac{1}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(tx)\, B_k(t)\, dt\, dx +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} \int_0^a x^{\frac{1}{2}-k} J_{k-\frac{1}{2}}(\lambda x) \int_0^x g_k^{(1)}(\eta)\, \eta^{k+1} (x^2 - \eta^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\eta\, dx \quad (0 < r < a) \tag{26}$$

Теперь из уравнений (23), (24) и (26) для данной задачи определяются коэффициенты $A_k(\lambda)$, $B_k(\lambda)$ и $C_k(\lambda)$.

Легко доказать, что $\Phi_1(r, \theta, z)$ и $\Phi_2(r, \theta, z)$ остаются конечными, а $(\partial\Phi_1/\partial x)_{z=0}$ и $(\partial\Phi_2/\partial x)_{z=0}$ стремятся к бесконечности порядка $1/\sqrt{a^2 - r^2}$ при $r \to a$.

Учитывая уравнение (26), получим

$$\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial x}\right)_{z=0} = 0 \qquad \text{при } r > a.$$

Если теперь принять

$$f_1(r, \theta) = -c\,\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}, \qquad f_2(r, \theta) = -c\,\frac{\partial\zeta_2}{\partial x}$$

$$\text{и } f_3(r, \theta) = Q(r, \theta)$$

построенная функция $\Phi(r, \theta, z)$ будет удовлетворять уравнению Лапласа и всем граничным условиям поставленной задачи, кроме условия конечности скорости у задней кромки крыла.

Для получения решения поставленной задачи принимается

$$\varphi(r, \theta, z) = \Phi(r, \theta, z) + H(r, \theta, z)$$

так, чтобы функция $\varphi(r, \theta, z)$ удовлетворяла всем граничным условиям.

Граничные условия, налагаемые на функцию $H(r, \theta, z)$, а также построение этой функции будут даны в следующей статье.

Если рассмотреть движение диска в безграничном пространстве, заполненном жидкостью ($h \to \infty$), получим

$$B_k(\lambda) = 0$$

$$A_k(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty y J_k(y\lambda)\int_0^\pi [f_1(y, \theta) - f_2(y, \theta)]\sin k\theta\, d\theta\, dy + \right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^a x^{\frac{1}{2}-k} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x)\int_0^x g_k^{(1)}(\rho)\,\rho^{k+1}(x^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\rho\, dx\right\}$$

$$C_k(\lambda) = \frac{1}{2}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty y J_k(y\lambda)\int_0^\pi [f_2(y, \theta) - f_2(y, \theta)]\sin k\theta\, d\theta\, dy - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}\,\lambda^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\int_0^a x^{\frac{1}{2}-k} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x)\int_0^x g_k^{(1)}(\rho)\,\rho^{k+1}(x^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\rho\, dx\right\}$$

При рассмотрении движения тонкого крыла в безграничном пространстве жидкости получим

$$A_k(\lambda) = -C_k(\lambda) = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^a x^{\frac{1}{2}-k} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda x) \int\limits_0^x g_k^{(1)}(\rho)\, \rho^{k+1} (x^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} d\rho\, dx$$

В качестве примера рассматривается движение тонкого крыла в безграничном пространстве жидкости.

Если уравнение поверхности крыла имеет вид $z = \alpha x$, получим

$$f_1(r, \theta) = f_2(r, \theta) = -c\alpha$$

$$g_k^{(1)}(\rho) = -\frac{4c\alpha}{\pi}\, \frac{1-\cos k\pi}{k}$$

При этом

$$A_k(\lambda) = -C_k(\lambda) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} c\alpha\, \frac{1-\cos k\pi}{k}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} \lambda^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^a t^{\frac{3}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, dt$$

Подставляя полученные значения для $A_k(\lambda)$ и $C_k(\lambda)$ в (13) и (14), вычисляя значения $\Phi_1(r, \theta, 0)$ и $\Phi_2(r, \theta, 0)$, получим

$$\Phi_1(r, \theta, 0) = -\Phi_2(r, \theta, 0) =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{\pi} c\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\pi}{k}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} \int\limits_0^a t^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} J_k(\lambda r)\, J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, d\lambda\, dt$$

Учитывая, что

$$\int\limits_0^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} J_k(\lambda r)\, J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda t)\, d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad r > t \\ \dfrac{\sqrt{2}\,(t^2-r^2)^{-\frac{1}{2}} r^k}{\sqrt{\pi}\, t^{k+\frac{1}{2}}} & \text{при} \quad r < t \end{cases}$$

легко получим

$$\Phi_1(r, \theta, 0) = -\Phi_2(r, \theta, 0) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } r > a \\ -\dfrac{2c\alpha}{\pi^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\pi}{k}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} r^k \sin k\theta \int\limits_r^a t^{1-k} (t^2-r^2)^{-\frac{1}{2}} dt & \text{при } r < a \end{cases}$$

Рассматривая интеграл

$$\int\limits_r^a \frac{t\,dt}{t^k \sqrt{t^2-r^2}} = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^k} + k \int\limits_r^a \frac{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{t^{k+1}}\, dt$$

получим

$$\Phi_1(r, \theta, 0) = -\Phi_2(r, \theta, 0) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } r > a \\ -\dfrac{2c\alpha}{\pi^{\frac{3}{2}}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos k\pi}{k} \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} r^k \sin k\theta \left[\dfrac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^k} + \right. & \text{при } r < a \end{cases}$$

$$\left. + k \int_r^a \frac{dt}{t^{k+1}\sqrt{t^2-r^2}} \right]$$

Вычисляя $\partial\Phi_1/\partial r$ и $\partial\Phi_2/\partial r$ при $z=0$, а также учитывая, что при $r \to a$ величины

$$\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{a^k}, \quad \int_r^a \frac{(t^2-r^2)^{\frac{1}{2}}}{t^{k+1}} dt \quad \text{и} \quad \int_r^a \frac{dt}{t^{k+1}\sqrt{t^2-r^2}}$$

остаются конечными, получим при $r \to a$

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right|_{z=0} = -\left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right|_{z=0} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } r > a \\ \dfrac{2c\alpha a}{\pi^{\frac{3}{2}}} \dfrac{1}{\sqrt{a^2-r^2}} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1-\cos k\pi}{k} \dfrac{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)} \sin k\theta + 0(1) & \text{при } r < a \end{cases}$$

где $0(1)$ означает остальную часть, которая остается ограниченной.

Таким образом, при движении тонкого крыла в неограниченной среде жидкости, полученная функция $\Phi(r, \theta, z)$ симметрична относительно плоскости xy, что и следовало ожидать.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 8 I 1968

Ա. Մ. ԲԱՐԽՈՒԴԱՐՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՁԵՎ ԹԵՎԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ԵԶՐԻ ՄՈՏ

Ամփոփում

[illegible]

Հոդվածում դիտարկված է անսեղմելի հեղուկի միջավայրում պլանում շրջանաձև թևի շարժումը էկրանի մոտ։

Թևի հաստությունը հաշվի է առնվում, վերցնելով նրա վերին և ներքին մակերևույթների համար տարբեր հավասարումներ։

Շարժումը դիտվում է պոտենցիալային։

Տրվում է արագության պոտենցիալը ներկայացնող ֆունկցիային վերաբերող եզրային պայմանները։

Հոդվածում տրվում է գլանային կոորդինատային սիստեմում հարմոնիկ $\Phi(r, \theta, z)$ ֆունկցիայի կառուցումը, որը բավարարում է գրված (7), (8), (9), (10a) և (10б) եզրային պայմաններին։ Կատարվում է այդ ֆունկցիայի և նրա մասնակի ածանցյալների ուսումնասիրությունը։

Կառուցված $\Phi(r, \theta, z)$ ֆունկցիան բավարարում է $\varphi(x, y, z)$ ֆունկցիային վերագրված պայմաններին, բացի թևի հետևի եզրագծում արագության վերջավոր լինելու պայմանից։

Որպես մասնավոր դեպքեր դիտարկված են բարակ թևի շարժումը էկրանի մոտ, վերջավոր հաստություն ունեցող թևի շարժումը հեղուկի անսահման տարածության մեջ և բարակ թևի շարժումը հեղուկի անսահման տարածության մեջ։ Որպես օրինակ դիտարկված է $\Phi(r, \theta, z)$ ֆունկցիայի և նրա $(\partial\Phi/\partial x)_{z=0}$ ածանցյալի որոշումը անսեղմելի հեղուկի անսահման տարածության մեջ բարակ թևի շարժման դեպքում, երբ թևի մակերևույթի հավասարումը տրված է $z = \alpha x$ տեսքով։

A. M. BARKHOODARIAN

THE MOVEMENT OF A CIRCULAR WING NEAR THE SCREEN

Summary

In this paper the movement of a circular wing in the plane near the screen in the middle of an incompressible fluid is considered.

The thickness of the wing is studied by taking different equations for its upper and lower surfaces.

The movement is considered as a potential one. The potential of the velocity is desingnated by $\varphi(x, y, z)$. In the paper the construction of the function $\Phi(r, \theta, z)$ is given, which satisfies the boundary conditions of the function $\varphi(x, y, z)$, except the continuity condition of velocity at the back margin of the wing.

We consider a few particular cases of the posed question.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочин Н. Е.* Собрание сочинений, т. II. Изд. АН СССР, М.—Л., 1949.
2. *Кузьмин Р. О.* Бесселевы функции. Изд. ОНТИ, М.—Л., 1935.
3. *Noble B. B.* The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying—factor method. Cambridge philosophical society (Mathematical and physical sciences), vol. 59, part 2, 1963.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

А. Б. БАГДАСАРЯН

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ВЗРЫВА СОСРЕДОТОЧЕННОГО ЗАРЯДА В ХРУПКОЙ ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Пусть в пространстве, заполненном хрупкой, трещиноватой горной породой, имеется сферическая полость радиуса r_0. Среда находится в покое и сжата гидростатическим давлением P_h. Полость заполнена зарядом BB, превращающимся в газ с начальным давлением P_0. Под воздействием этого давления порода вблизи полости будет вовлечена в движение, в результате которого при достаточно больших P_0 часть породы будет разрушена, а на больших расстояниях от полости распространяются упругие волны.

Вопросы математической теории деформации и разрушения горных пород изложены в работе [1]. Здесь рассматривается специальный случай, когда прочностная постоянная неразрушенной породы (τ_*) и некоторая постоянная из условия пластичности (τ_{s1}) [1] для горной породы совпадают, критическое растягивающее напряжение среды $\sigma_* = 0$.

В этом случае для некоторых интервалов времени распространения взрывных волн удается решение строить аналитически.

Если учесть, что для горных пород σ_* и $\tau_* - \tau_{s1} \ll \rho c_0^2$ и τ_{s1}, а также то, что горные породы имеют естественную трещиноватость, становится ясным важность полученного аналитического решения для этого случая.

Рассмотрим каждую из областей породы, вовлеченной в движение, в которых порода либо разрушена по разным механизмам, либо не разрушена [1].

Неразрушенная область. Считается, что неразрушенный материал описывается линейно-упругой моделью. Тогда решение основных уравнений для этой области в случае центральной симметрии дается формулами:

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 \left\{ \frac{f''(\xi)}{x} + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \left[\frac{f'(\xi)}{x^2} + \frac{f(\xi)}{x^3} \right] \right\} - P_h$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = -\rho c_0^2 \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{f''(\xi)}{x} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[\frac{f'(\xi)}{x^2} + \frac{f(\xi)}{x^3} \right] \right\} - P_h \qquad (1)$$

$$v = c_0 \left[\frac{f''(\xi)}{x} + \frac{f'(\xi)}{x^2} \right], \qquad u = r_0 \left[\frac{f'(\xi)}{x} + \frac{f(\xi)}{x^2} \right], \qquad \xi = \tau - x$$

где $x = r/r_0$, $\tau = c_0 t/r_0$ — безразмерные координаты, c_0 — скорость звука в неразрушенном материале, t — время, r — лагранжева координата, ρ — начальная плотность, σ_r, σ_φ, σ_θ — напряжения на координатных площадках, v — скорость частиц в радиальном направлении, u — радиальное смещение, σ — коэффициент Пуассона, $f(\zeta)$ — произвольная функция.

Область разрушения путем отрыва. Считается, что материал разбит на упругие конические стержни, которые выдерживают только радиальное напряжение, а кольцевое напряжение во всей области равно нулю.

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 \lambda^2 \left[\frac{\dot f_1(\xi) - \dot f_2(\eta)}{x} + \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x^2} \right], \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = 0$$

$$v = \frac{c_0 \lambda}{x} [\dot f_1(\xi) + \dot f_2(\eta)], \quad u = \frac{r_0}{x} \left[f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x^2 \right] \qquad (2)$$

$$p_h = \frac{P_h}{\rho c_0^2}, \quad \xi = \lambda\tau - x, \quad \eta = \lambda\tau + x$$

$$\lambda = c_1/c_0 = \left[\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{1-\sigma} \right]^{1/2}, \quad c_1^2 \rho = E$$

где c_1 — скорость звука в материале, разрушенном трещинами отрыва, а $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции, E — модуль Юнга.

Область разрушения путем скола. Считается, что материал, разбитый трещинами скола, описывается законом Гука для объемной деформации и условием пластичности $\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_{*1}$ [1]

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 q^2 \frac{1}{x} [\dot F_1(\xi_1) + \dot F_2(\eta_1)] - 4\tau_{*1} \ln x - P_0$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma_r + 2\tau_{*1}, \quad v = c_0 q \left[\frac{\ddot F_1(\xi_1) - \ddot F_2(\eta_1)}{x} + \frac{\dot F_1(\xi_1) + \dot F_2(\eta_1)}{x^2} \right] \qquad (3)$$

$$u = r_0 \left[\frac{\dot F_1(\xi_1) - \dot F_2(\eta_1)}{x} + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x^2} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_{*1} x \ln x \right]$$

$$T_{*1} = \frac{\tau_{*1}}{\rho c_0^2}, \quad \xi_1 = q\tau - x, \quad \eta_1 = q\tau + x$$

$$q = c_2/c_0 = \left[\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \right]^{1/2}, \quad c_2^2 \rho (1-2\sigma) = E$$

где c_2 — скорость звука в материале, разрушенном трещинами скола, а $F_1(\xi_1)$ и $F_2(\eta_1)$ — произвольные функции.

Если $P_0 \geqslant 2\tau_*$, то разрушение может произойти путем отрыва и путем скола, а если $P_0 < 2\tau_*$, то разрушение происходит только путем отрыва. Рассмотрим случай взрыва при больших давлениях $P_0 \geqslant 2\tau_*$.

Распространение взрывных волн в этом случае происходит следующим образом. Если выполняется условие

$$P_0 < P_k + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\tau_* \tag{4}$$

то с начального момента взрыва до момента $\tau = \tau_1$, когда на каверне достигается условие

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_* \tag{5}$$

будут распространяться упругие волны, определяющиеся (1), где $f(\xi)$ будет определяться формулой

$$f(\xi) = \frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}(p_0 - p_k)\left\{1 - \sqrt{2(1-\nu)}\exp\left[\frac{2\nu-1}{1-\nu}(\xi+1)\right] \times \sin\left[\frac{\sqrt{1-2\nu}}{1-\nu}(\xi+1) + \arcsin\frac{1}{\sqrt{2(1-\nu)}}\right]\right\}, \quad p_0 = \frac{P_0}{\rho c_0^2} \tag{6}$$

После момента $\tau = \tau_1$ из каверны в глубь среды распространяется сферический фронт разрушения путем скола $x = x_1(\tau)$, из которого в неразрушенную область будут излучаться упругие волны. Если не выполняется условие (4), то фронт разрушения трещинами скола будет распространяться непосредственно в начальный момент взрыва. В случае $\nu > 1/3$ разрушение продолжится до тех пор, пока скачок радиальных напряжений на фронте $x = x_1(\tau)$ не обратится в нуль или кольцевое напряжение на фронте $x = x_1(\tau)$ со стороны неразрушенного материала не обратится в нуль. Если раньше σ_θ обратится в нуль, то разрушение путем скола останавливается и материал продолжает разрушаться путем отрыва $x = x_2(\tau)$. Фронт разрушения путем отрыва $x = x_2(\tau)$ будет распространяться то как сильный разрыв, то как слабый. Разрушение путем отрыва останавливается, когда фронт стремится к своему значению статического решения. Если же $\nu < 1/3$ (в этом случае скорость распространения малых возмущений в материале, разрушенном трещинами скола, меньше, чем в материале, разрушенном трещинами отрыва), то только разрушение путем скола продолжается опять до момента, когда σ_θ со стороны неразрушенного материала обратится в нуль, или скачок радиальных напряжений на фронте $x = x_1(\tau)$ обратится в нуль. Если раньше обратится в нуль σ_θ, то фронт разрушения раздваивается, вперед пойдет фронт разрушения путем отрыва $x = x_2(\tau)$, который материал разрушит радиальными трещинами, а за ним — фронт разрушения трещинами скола $x = x_1(\tau)$, повторно разрушающий материал на мелкие блоки. Если в какой-то момент времени скачок радиальных напряжений обратится в нуль, то после этого момента разрушение путем скола останавливается и его нужно рассматривать как контактный разрыв. Неизвестные функции $f(\xi)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, $F_1(\xi_1)$, $F_2(\xi_1)$, входящие в выражения (1)—(3), должны быть определены из граничных условий, которые формулируются на каверне и на фронтах разрушений $x = x_1(\tau)$, $x = x_2(\tau)$. Простейшим условием на каверне при достаточно больших τ_* (т. е.

при $u \ll 1$) является

$$\sigma_r\big|_{x=x_0} = -P_0 \tag{7}$$

а условия на фронтах состоят из обычных условий сильного разрыва и условия разрушения. Условия разрушения на фронте $x = x_1(\tau)$ со стороны неразрушенного материала суть

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_* \tag{8}$$

а на фронте $x = x_2(\tau)$ со стороны неразрушенного материала суть

$$\sigma_\theta = 0 \tag{9}$$

Радиальное напряжение впереди и за фронтом разрушения путем скола выражается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \rho c_0^2 q^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2u_1}{r}\right) - \frac{4}{3}\tau_* - P_h \\ \sigma_{r2} &= \rho c_0^2 q^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2u_2}{r}\right) - \frac{4}{3}\tau_{*1} - P_h \end{aligned} \tag{10}$$

где индексы 1 и 2 соответственно обозначают величины впереди фронта и за фронтом $x = x_1(\tau)$. Используя условие непрерывности смещения и теорему о количестве движения с учетом (10), получим

$$\left[c_2^2 - \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = \frac{4}{3\rho}(\tau_* - \tau_{*1}) \tag{11}$$

В случае $\tau_* = \tau_{*1}$ условие на фронте разрушения $x = x_1(\tau)$ (11) удовлетворяется, если

либо $$dr_1/dt = c_2 \tag{12}$$

либо $$\partial u_1/\partial r = \partial u_2/\partial r \tag{13}$$

Как показывают конкретные вычисления задачи в общем случае [2], в момент $\tau = \tau_1$ фронт разрушения путем скола, при $\tau_* \to \tau_{*1}$, распространяется с постоянной скоростью, т. е. удовлетворяется только условие (12).

Уравнения, описывающие разрушение и распространение взрывных волн в этой стадии ($\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$) с учетом (1), (3) и (12) и граничных условий (7), (8), сводятся к следующему:

$$\frac{\ddot f(\xi)}{x_1(\tau)} + 3\left[\frac{\dot f(\xi)}{x_1^2(\tau)} + \frac{f(\xi)}{x_1^3(\tau)}\right] = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}T_*$$

$$\dot F_1(\xi_1) - \dot F_2(\eta_1) + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x_1(\tau)} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma}T_0 x_1^2(\tau)\ln x_1(\tau) =$$

$$= \dot f(\xi) + \frac{f(\xi)}{x_1(\tau)}, \qquad x_1(\tau) = 1 + q(\tau - \tau_1) \tag{14}$$

$$F_1(\xi_1^0)+F_2(\eta_1^0) = \frac{1}{q^2}(p_0 - p_k), \quad \zeta = \tau - x_1(\tau), \quad \xi_1 = q\tau - x_1(\tau)$$

$$\eta_1 = q\tau + x_1(\tau), \quad \xi_1^0 = q\tau - 1, \quad \eta_1^0 = q\tau + 1$$

Из первого и третьего уравнений системы (14) определяем при $\varepsilon < 0.385$

$$\begin{gathered} f(\zeta) = A_{10}|x_1(\zeta)|^{\alpha_1}\sin\beta(\zeta) + A_{12}[x_1(\zeta)]^3 \\ x_1(\zeta) = a_0 + a_1\zeta, \qquad \beta(\zeta) = \alpha_2\ln x_1(\zeta) + A_{11} \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{2q}(4q-3), \quad \alpha_2 = \frac{1}{2q}\sqrt{3-4q^2}, \quad a_0 = \frac{1-q\tau_1}{1-q}$$

$$a_1 = q/(1-q), \quad A_{10} = |f_0 - A_{12}|\left\{1+\left|\frac{\dot f_0 - 3a_1A_{12}}{a_1(f_0 - A_{12})} - \alpha_1\right|^2\right\}^{1/2} \tag{16}$$

$$A_{11} = \arcsin\frac{f_0 - A_{12}}{A_{10}}, \quad A_{12} = \frac{2}{3}\,\frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon}\,\frac{(1-q)^2}{1+q}\,T_*$$

а f_0 и $\dot f_0$ — значения функций $f(\zeta)$ и $\dot f(\zeta)$ из решения (6) при $\zeta = \tau_1 - 1$. Если не выполняется условие (4), то из начального условия $u(x,0)=0$ следует $f_0(-1) = \dot f_0(-1) = 0$.

Учитывая, что можно определить не все функции в системе (14), а лишь их комбинации

$$\begin{gathered} F_1(\xi_1) - \dot F_2(\eta_1) + \dot F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1), \quad \dot F_1(\xi_1) + \ddot F_2(\eta_1) \\ \dot F_1(\xi_1) - F_2(\eta_1) + F_1(\xi_1) + \dot F_2(\eta_1) \end{gathered} \tag{17}$$

входящие в выражение (2), за начальные условия примем

$$\begin{gathered} F_1(\xi_0) = \dot F_1(\xi_0) = F_2(\eta_0) = 0, \quad \dot F_2(\eta_0) = f(\zeta_0) + \dot f(\zeta_0) \\ \xi_0 = q\tau_1 - 1, \quad \eta_0 = q\tau_1 + 1 \end{gathered} \tag{18}$$

Так как $F_1(\xi_1)$ на линии $x = x_1(\tau)$ постоянная, то во втором уравнении системы (14) с учетом начальных условий (18) можно положить

$$F_1(\xi_1) = \dot F_1(\xi_1) = 0, \text{ при } \xi = \xi_0 \tag{19}$$

Из второго уравнения системы (14) с учетом (18) и (19) определяем

$$\begin{gathered} F_2(\eta_1) = [x_1(\eta_1)]^{\alpha_1}[B_{11}\sin\beta(\zeta) + B_{12}\cos\beta(\zeta)] + \\ + B_{13}[x_1(\eta_1)]^3[1+\ln x_1(\eta_1)] + (B_{14}\eta_1 + B_{15})\,x_1^2(\eta_1) \end{gathered} \tag{20}$$

$$x_1(\eta_1) = \frac{1}{2}(1 - q\tau_1 + \eta_1)$$

где

$$B_{11}=\frac{2q}{1-q}\,\frac{A_{10}}{(\alpha_1-2)^2+\alpha_2^2}\,[(\alpha_1-2)\,\alpha_1 a_1+\alpha_1\alpha_2 a_1+\alpha_1-2]$$

$$B_{12}=\frac{2q}{1-q}\,\frac{A_{10}}{(\alpha_1-2)^2+\alpha_2^2}\,[(\alpha_2-2)\,\alpha_1 a_1-\alpha_1\alpha_2 a_1-\alpha_2] \tag{21}$$

$$B_{13}=-\frac{8(1-\sigma)}{1+\sigma}\,T_*,\qquad B_{14}=A_{10}[1+3\alpha_1 a_1^2 A_{10}]$$

а

$$B_{15}=f_0+f_0-B_{11}\sin A_{11}-B_{12}\cos A_{11}-B_{13}-B_{14}\eta_0$$

— постоянная интегрирования, определяемая из соответствующего начального условия (18).

Функция $F_1(\xi^0)$ определяется из четвертого уравнения системы (14)

$$F_1(\xi^0)=\frac{1}{2q^2}(p_0-p_h)(\xi^0)^2+D_{11}\xi^0+D_{12}-[\gamma(\eta_1^0)]^{\alpha_1-2}[B_{11}\sin\beta_1(\eta_1^0)+$$

$$+B_{12}\cos\beta_1(\eta_1^0)]-B_{13}[\gamma(\eta_1^0)]^3[1+\ln\beta_1(\eta_1^0)]-(B_{14}\eta_1^0+ \tag{22}$$

$$+B_{15})[\gamma(\eta_1^0)]^2,\quad \gamma(\eta_1^0)=\frac{1}{2}(1-q\tau_1+\eta_1^0),\quad \beta_1(\eta_1^0)=\alpha_2\ln\gamma(\eta_1^0)+A_{11}$$

$$\eta_1^0=\xi^0+2,\quad D_{11}=\frac{1}{q^2}(p_h-p_0)\,\xi_0^0,\quad D_{12}=f_0+f_0+\frac{1}{2q}(p_0-p_h)(\xi_0^0)^2$$

Решение системы (14) для случая $\sigma > 0.385$ выражается формулами

$$f(\xi)=A_{20}[x_1(\xi)]^{k_1}+A_{21}[x_1(\xi)]^{k_2}+A_{22}[x_1(\xi)]^3$$

$$F_2(\eta_1)=\frac{2q}{1-q}\,\frac{2k_1-1}{k_1-2}\,A_{20}[x_1(\xi)]^{k_1}+\frac{2q}{1-q}\,\frac{2k_2-1}{k_2-2}\,A_{21}[x_1(\eta_1)]^{k_2}+$$

$$+A_{22}(1+3a_1)\,\eta_1[x_1(\eta_1)]^2-\frac{8(1-\sigma)}{1+\sigma}\,T_*[x_1(\eta_1)]^3[1+ \tag{23}$$

$$+\ln x_1(\eta_1)]+A_{23}[x_1(\eta_1)]^2$$

$$F_1(\xi^0)=\frac{1}{2q}(p_0-p_h)(\xi^0)^2+D_{11}\xi^0+D_{12}-F_2(\eta_1^0)$$

$$x_1(\xi)=a_0+a_1\xi,\quad x_2(\eta_1)=\frac{1}{2}(1-q\tau_1+\eta_1)$$

где

$$A_{20}=\frac{1}{k_1-k_2}\left|\frac{\dot f_0}{a_1}-(f_0-A_{22})\,k_2-3A_{22}\right|$$

$$A_{21}=\frac{1}{k_2-k_1}\left|\frac{f_0}{a_1}-(f_0-A_{22})\,k_1-3A_{22}\right|,\quad A_{22}=A_{12} \tag{24}$$

$$A_{23} = f_0 + \dot{f}_0 - \frac{4q}{1-q}\left| A_{20}\frac{k_1-1}{k_1-2} + A_{21}\frac{k_2-1}{k_2-2} \right| - A_{22}\,\gamma_0 (1+3a_1) +$$

$$+\frac{8(1-\sigma)}{1+\sigma}T_*, \qquad k_{1,2} = \frac{1}{2a_1}\left(a_1 - 3 \pm \sqrt{a_1^2 - 6a_1 - 3}\right)$$

Решение системы (14) в случае $\sigma = 0.385$ выражается формулами

$$f(\zeta) = [x_1(\zeta)]^{-0.74}[A_{30}\ln x_1(\zeta) + A_{31}] + A_{32}[x_1(\zeta)]^3$$

$$F_2(\eta) = [x_1(\eta)]^{-0.74}[B_{30}\ln x_1(\eta) + B_{31}] + [x_1(\eta)]^2[B_{32}x_1(\eta) + B_{33}] \tag{25}$$

$$F_1(\xi^0) = \frac{1}{2q}(p_0 - p_h)(\xi^0)^2 + D_{30}\xi^0 + D_{31} - F_2(\eta^0)$$

$$x_1(\zeta) = 7.46 + 6.46(\zeta - \tau_1), \quad x_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - 0.86\,\tau_1 + \eta)$$

где

$$A_{30} = 0.157\,f_0 + 4.700\,\dot{f}_0 - 0.136\,T_*, \quad A_{31} = f_0 - 0.018\,T_*$$

$$A_{32} = 0.018\,T_*, \quad B_{30} = 3.065\,A_{30}, \quad B_{31} = 3.065\,A_{31} - 3.533\,A_{30}$$

$$B_{32} = 1.025\,T_*, \quad B_{33} = f_0 - \dot{f}_0 - 3.065\,A_{31} + \tag{26}$$

$$+ 3.533\,A_{30} - 1.025\,T_*, \quad D_{30} = -\frac{4}{3}(p_0 - p_h)\xi_0^0$$

$$D_{31} = f_0 + \dot{f}_0 + \frac{2}{3}(p_0 - p_h)(\xi_0^0)^2$$

Полученное решение совместно с (2) и (3) дают возможность построить поля напряжений, массовых скоростей и смещений в интервале $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Момент τ_2 определяется из соотношения

$$\left| a_1(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_1) - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}(1 + \alpha_1 a_1) \right| \sin\mu_2 + a_1 \left| a_1\alpha_2(2\alpha_1 - 1) - \right.$$

$$\left. - \frac{1-2\sigma}{\sigma}\alpha_2 \right| \cos\mu_2 - \frac{A_{12}}{A_{10}} \left| \sigma a_1^2 - \frac{1-2\sigma}{\sigma}(1 + 3a_1) + \right. \tag{27}$$

$$\left. + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{p_h}{A_{12}} \right| \mu_1^{3-\alpha_1} = 0, \quad \mu_1 = 1 + q(\tau_2 - \tau_1), \quad \mu_2 = \alpha_2\ln\mu_1 + A_{11}$$

После момента $\tau = \tau_2$ вперед в глубь среды распространяется фронт разрушения путем отрыва $x = x_2(\tau)$. Радиальное напряжение впереди и за фронтом $x = x_2(\tau)$ для $\tau_* = 0$ определяется формулами

$$\sigma_{r1} = E\frac{\partial u_1}{\partial r} - (1 - 2\sigma)P_h$$

$$\sigma_{r2} = E\frac{\partial u_2}{\partial r} - (1 - 2\sigma)P_h \tag{28}$$

С учетом (28), условия непрерывности смещений и теоремы количества движения на фронте $x = x_*(\tau)$ легко получить

$$\left[c_1^2 - \left(\frac{dr_2}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = 0 \tag{29}$$

Из (29) заключаем, что условие сопряжения на фронте $x = x_*(\tau)$ будет удовлетворено, если

$$dr_2/dt = c_1 \tag{30}$$

или

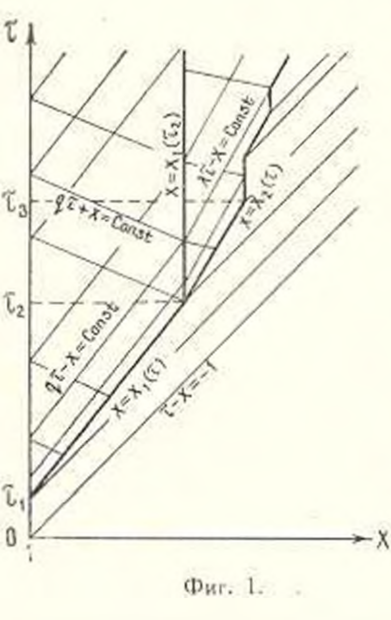
$$\partial u_1/\partial r = \partial u_2/\partial r \tag{31}$$

Как показывают вычисления задачи действия давления в полости горных пород с образованием разрушения путем отрыва, при $\sigma_* \to 0$ фронт распространяется с постоянной скоростью, равной c_1, до момента, когда нарушается условие раскрытия трещин, навязанное геометрией, сводящееся к следующему:

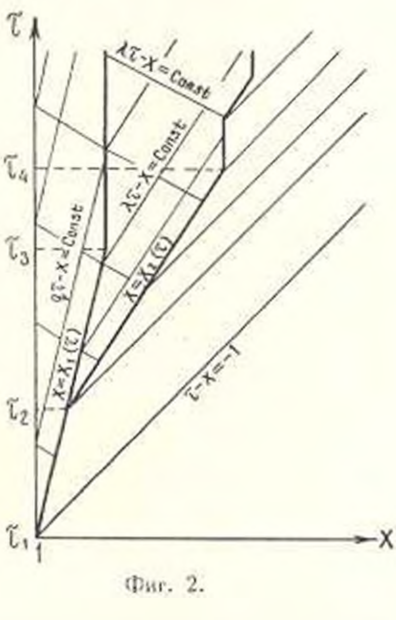
$$\frac{\rho_{ис}-\rho}{\rho} = -\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\frac{\sigma_{rr}}{\rho c_0^2} + 3p_k > \frac{\rho_{cp}-\rho}{\rho} = -\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2u_2}{r} \tag{32}$$

где $\rho_{ис}$ и ρ_{cp} — истинная и средняя плотность материала в области, разрушенной трещинами отрыва. Условие (32) с учетом (2) запишется в виде

$$\dot{f}_1(\xi) - \dot{f}_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{f_1(\xi)+f_2(\eta)}{x} \geqslant 0 \tag{33}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 1 и 2 схематически изображены картины распространения взрывных волн на плоскости x, τ в случае $\sigma > 1{,}3$, $P_0 > 2\sigma_*$

(фиг. 1) и $\sigma < 1/3$, $p_h < 2T_*$ (фиг. 2). Линия $x = x_1(\tau)$ изображает закон распространения фронта разрушения путем скола, $x = x_2(\tau)$ — фронт разрушения путем отрыва. Наклонные прямые — характеристики излучаемой упругой волны.

В интервале времени $\tau_2 < \tau < \tau_3$, где τ_3 — момент, когда впервые нарушается условие (33), уравнения, описывающие распространение взрывных волн и разрушение в среде при $\sigma < 1/3$, получаемые из граничных условий и из выражений (1)—(3), сводятся к следующему:

$$F_1(\xi^0) + F_2(\eta^0) = \frac{1}{q^2}(p_0 - p_h)$$

$$\dot f_1(\xi_2) - \dot f_2(\eta_2) + \frac{f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2)}{x_1(\tau)} = \frac{2}{\lambda^2} T_* x_1(\tau)$$

$$\dot F_1(\xi_1) - \dot F_2(\eta_1) + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x_1(\tau)} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_* x_1^2(\tau) \ln x_1(\tau) =$$

$$= f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x_1^2(\tau), \quad x_1(\tau) = 1 + q(\tau - \tau_1)$$

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\ddot f(\zeta)}{x_2(\tau)} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\left[\frac{\dot f(\zeta)}{x_2^2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_2^3(\tau)}\right] = -p_h \tag{34}$$

$$\dot f(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{x_2(\tau)} = f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x_2^2(\tau)$$

$$x_2(\tau) = 1 + q(\tau_2 - \tau_1) + \lambda(\tau - \tau_1)$$

где

$$\zeta = \tau - x_2(\tau), \quad \xi^0 = q\tau - 1, \quad \eta^0 = q\tau + 1$$

$$\xi = \lambda\tau - x_2(\tau), \quad \eta = \lambda\tau + x_2(\tau), \quad \xi_1 = q\tau - x_1(\tau) \tag{35}$$

$$\eta_1 = q\tau + x_1(\tau), \quad \xi_2 = \lambda\tau - x_1(\tau), \quad \eta_2 = \lambda\tau + x_1(\tau)$$

Начальные данные системы (34) определяются из решения предыдущей стадии для момента $\tau = \tau_2$ с учетом, что напряжения и смещения на характеристиках $\zeta = \tau - x = (1 - q)\tau_2 + q\tau_1 - 1$ и $\eta = q\tau + x = 1 + q(\tau_1 + 2\tau_2)$ непрерывны.

Неизвестную функцию $f(\zeta)$, определяющую распространение упругих волн в неразрушенной среде, находим из условия разрушения трещинами отрыва (пятое уравнение системы (34) на фронте разрушения $x = x_2(\tau)$ и седьмое уравнение системы (34)).

$$f(\zeta) = A_{10}[x_2(\zeta)]^{l_1} + A_{11}[x_2(\zeta)]^{l_2} + A_{12}[x_2(\zeta)]^3$$

$$x_2(\zeta) = b_0 - b_1\zeta \tag{36}$$

где

$$A_{10} = \frac{\dot f_0 x_1(\tau_2) - l_2 f_0 - A_{12} x_1^3(\tau_2)(3 - l_2)}{[x_1(\tau_2)]^{l_1}(l_1 - l_2)}$$

$$A_{41}=\frac{\dot{f}_0\,x_1(\tau_2)-l_1 f_0-A_{42}\,x_1^3(\tau_2)(3-l_1)}{[x_1(\tau_2)]^{l_2}(l_2-l_1)},\quad A_{42}=\frac{1-\sigma}{14\sigma-4}p_\lambda \tag{37}$$

$$b_0=\frac{1}{1-\lambda}[1-(q-\lambda)\tau_2-q\tau_1],\quad b_1=\frac{\lambda}{1-\lambda},\quad l_{1,2}=\frac{1}{2\sigma}(1-\sigma\pm$$

$$\pm\sqrt{1+2\sigma-9\sigma^2})$$

а f_0 и $\dot{f}_0$ — значения функций $f(\zeta)$ и $\dot{f}(\zeta)$ при $\zeta_0=\tau_2-x_1(\tau_2)$.

В шестом уравнении системы (34) $f_1(\xi)=\mathrm{const}$, поскольку $\xi=\mathrm{const}$. Так как в выражения (2) входит только сумма f_1+f_2, то за начальное значение $f_1(\xi)$ можно принять любое число, например, нуль. Тогда

$$f_2(\eta)=B_{40}[x_2(\eta)]^{l_1-1}+B_{41}[x_2(\eta)]^{l_2-1}+B_{42}[x_2(\eta)]^2$$

$$x_2(\eta)=\frac{1}{2}[\eta+1+q(\tau_2-\tau_1)-\lambda\tau_2] \tag{38}$$

где

$$B_{40}=A_{40}(1+l_1 b_1),\ B_{41}=A_{41}(1+l_2 b_1),\ B_{42}=A_{42}(1-3b_1)-\frac{1-\sigma}{1+\sigma}p_\lambda$$

Функция $f_1(\xi_2)$ определяется из второго уравнения системы (34)

$$f_1(\xi_2)=B_{13}[x_1(\xi_2)]^2+B_{14}\{B_{40}[x_2(\xi_2)]^{l_1-1}+B_{41}[x_2(\xi_2)]^{l_2-1}+$$

$$+B_{42}[x_2(\xi_2)]^2\}+B_{15}[x_1(\xi_2)]^{2/q-1}\int_{\xi_{20}}^{\xi_2}[x_1(\xi_2)]^{-1-2/q}\{B_{40}[x_1(\xi_2)]^{l_1-1}+$$

$$+B_{41}[x_1(\xi_2)]^{l_2-1}+B_{42}[x_1(\xi_2)]^2\}\,d\xi_2+B_{16}[x_1(\xi_2)]^{2/q-1} \tag{39}$$

$$x_1(\xi_2)=\frac{\lambda(q\tau_1-1)}{\lambda-q}+\frac{q}{\lambda-q}\xi_2,\quad x_2(\xi_2)=\frac{1}{2}\Big|1+(q-\lambda)\tau_2-q\tau_1+$$

$$+\frac{2\lambda}{\lambda-q}(2\tau_1-1)-\frac{2q}{q-1}\xi_2\Big|$$

где

$$B_{13}=\frac{2T_*q(\lambda-q)}{\lambda^2(3q-\lambda)},\quad B_{14}=\frac{\lambda-q}{\lambda+q},\quad B_{15}=1-\left(\frac{\lambda-q}{\lambda+q}\right)^2$$

а B_{16} — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $f_1(\xi_{20})=0$, $\xi_{20}=q\tau_2-x_1(\tau_2)$.

Из третьего уравнения системы (34) с учетом (19) функция

$$F_2(\eta_1)=\frac{2(1-\sigma)}{1+\sigma}\Big\{4T_*x_1^3(\eta_1)[\ln x_1(\eta_1)-1]+p_\lambda\ln x_1(\eta_1)+$$

$$+B_{47}x_1^2(\eta_1)+x_1(\eta_1)\int_{x_{10}}^{x_1}\frac{1}{x_1^2(\eta_1)}[f_1(\xi_2)+f_2(\eta_2)]\,dx_1 \tag{40}$$

$$x_1(\eta_1) = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1 - q\tau_1)$$

где B_{47} — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $F_2(\eta_{10}) = F_{20}$, $\eta_{10} = q\tau_2 + x_2(\tau_2)$, а F_{20} — значение функции $F_2(\eta_1)$ при $\eta_1 = \eta_{10}$ из решения предыдущей стадии.

Функция $F_1(\xi^0)$ определяется из первого уравнения системы (34)

$$F_1(\xi^0) = \frac{1}{2q^2}(p_0 - p_k)(\xi^0)^2 - \int\limits_{\xi_0^0}^{\xi^0} \frac{F_2(\xi^0 + 2)}{\alpha(\xi^0)}\, d\xi^0 + \int\limits_{\xi_0^0}^{\xi^0} [f_1(\xi^0) +$$

$$+ f_2(\eta^0)]\, d\xi^0 + \frac{8(1-\sigma)}{3(1+\sigma)} T_* \alpha(\xi^0) \left| \ln \alpha(\xi^0) - \frac{1}{3} \right| - \frac{2(1-\sigma)}{3(1+\sigma)} \alpha^3(\xi^0) + \qquad (41)$$

$$+ B_{48}\xi^0 + B_{49}, \quad \alpha(\xi^0) = \frac{1}{2}(\xi^0 + 3 - q\tau_1)$$

где B_{48} и B_{49} находим из начальных условий $F_1(\xi_0^0) = F_1(\xi_0^0) = 0$, $\xi_0^0 = q\tau_1 - 1$. Решения (36), (38), (39), (40), (41) совместно с (1), (2), (3) дают возможность построить поля напряжений, массовых скоростей и смещений в интервале $\tau_2 < \tau < \tau_3$. После момента $\tau = \tau_3$, когда впервые нарушится условие (33), ударный фронт разрушения путем отрыва превращается в слабый разрыв. Уравнения, описывающие разрушение и распространение взрывных волн в этой стадии совпадают с системой уравнений, приведенной в работе [3], и получаются из системы (34), если в них седьмое уравнение заменить уравнением (31), записанным в виде

$$\ddot f(\zeta) + \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma}\left[\frac{\dot f(\zeta)}{x_2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_2^2(\tau)}\right] + p_k x_2^2(\tau) =$$

$$= \lambda^2 \left[\dot f_1(\xi) - \dot f_2(\eta) + \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x_2(\tau)}\right] \qquad (42)$$

Решение полученной системы можно продолжать до момента, когда вновь на фронте $x = x_2(\tau)$ начнет выполняться условие (33), после чего решение продолжается при помощи системы (34). Нарушение условия (33) может повторяться и возобновляться многократно. Если в какой-то момент времени скачок радиальных напряжений на фронте $x = x_1(\tau)$ обратится в нуль, то после этого момента второе и четвертое уравнения системы (34) необходимо заменить уравнениями

$$x_1(\tau) = x_* = \text{const}, \quad \lambda^2\left[f_1(\xi_2) - f_2(\eta_2) + \frac{f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2)}{x_*}\right] =$$

$$= q^2[\ddot F_1(\xi_1) + \ddot F_2(\eta_1)] + 4T_* x_* \ln x_* \qquad (43)$$

Решение продолжается до тех пор, пока скачок радиальных напряжений на ударном фронте разрушения не обратится в нуль.

В случае, когда $P_0 < 2\tau_*$, разрушение происходит только путем отрыва. Как уже было отмечено, условия сопряжения на фронте разрушения путем отрыва $x = x_*(\tau)$ при $\tau_* \to 0$ удовлетворяются, если скорость фронта постоянна, равна c_1 (30) и если радиальное напряжение на фронте $x = x_*(\tau)$ непрерывно (31). Как показывают конкретные расчеты [2], в момент $\tau = \tau_1$ оба условия (30) и (31) удовлетворяются одновременно, а после момента $\tau = \tau_1$ удовлетворяется только условие (30).

Уравнения, описывающие разрушение, при котором удовлетворяются условия (30) и (33), сводятся к следующему:

$$\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\ddot f(\zeta)}{x_1(\tau)} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\left[\frac{\dot f(\zeta)}{x_1^2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_1^3(\tau)}\right] = -p_k$$

$$f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_k x_1^2(\tau) = \dot f(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{x_1(\tau)}$$

$$x_1(\tau) = 1 + \lambda(\tau - \tau_1), \quad \dot f_1(\xi^0) - \dot f_2(\eta^0) + f_1(\xi^0) + f_2(\eta^0) = \frac{p_0}{\lambda^2} \qquad (44)$$

$$\zeta = \tau - x_1(\tau), \quad \xi = \lambda\tau - x_1(\tau), \quad \eta = \lambda\tau + x_1(\tau)$$

$$\xi^0 = \lambda\tau - 1, \quad \eta^0 = \lambda\tau + 1$$

Решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$f(\zeta_0) = f_0, \quad \dot f(\zeta_0) = \dot f_0, \quad f_1(\xi_0) = 0, \quad f_2(\eta_0) = f_0 + \dot f_0 - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_k, \quad \zeta_0 = \tau_1 - 1, \quad \xi_0 = \lambda\tau_1 - 1, \quad \eta_0 = \lambda\tau_1 + 1 \qquad (45)$$

где f_0 и $\dot f_0$ — значения функций $f(\zeta)$ и $\dot f(\zeta)$ из решения (6) при $\zeta = \zeta_0$, имеет следующий вид:

$$f(\zeta) = M_0[x_1(\zeta)]^3 + M_1[x_1(\zeta)]^{n_1} + M_2[x_1(\zeta)]^{n_2}$$

$$x_1(\zeta) = m_0\zeta + m_1$$

$$f_2(\eta) = M_3 x_1^2(\eta) + M_4[x_1(\eta)]^{n_1-1} + M_5[x_1(\eta)]^{n_2-1}$$

$$x_1(\eta) = \frac{1}{2}(\eta + 1 - \lambda\tau_1), \quad f(\xi) = p_0/\lambda^2 + M_3\alpha_1^2(\xi) + M_3 e^{\xi}[\alpha_1^2(\xi) + \alpha_1(\xi) - 0.5] + M_4[\alpha_1(\xi)]^{n_1-1} + M_5[\alpha_1(\xi)]^{n_2-1} - \int_{\xi_0}^{\xi} e^{\xi}\{M_4[\alpha_1(\xi)]^{n_1-1} + M_5[\alpha_1(\xi)]^{n_2-1}\}\,d\xi + M_6 e^{\xi} \qquad (46)$$

$$\alpha_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 3 - \lambda\tau_1)$$

где

$$m_0 = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad m_1 = \frac{1-\lambda\tau_1}{1-\lambda}, \quad m_2 = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}, \quad m_3 = \frac{1-\sigma}{\sigma} p_h$$

$$n_{1,2} = \frac{m_1 - m_2}{2m_0} \pm \frac{1}{2m_0}\left[(m_1 - m_2)^2 - 4m_2\right]^{1/2}$$

$$M_0 = \frac{m_3}{6m_0^2 + 3m_0 m_1 + m_2}, \quad M_1 = \frac{\dot{f}_0 - 3M_0 m_0 - m_0 n_2 (M_0 - f_0)}{m_0 (n_1 - n_2)}$$

$$M_3 = M_0(1 + 3m_0) - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h, \quad M_4 = M_1(1 + m_0 n_1) \tag{47}$$

$$M_2 = \frac{3M_0 m_0 - \dot{f}_0 - m_0 n_1 (M_0 - f_0)}{m_0 (n_1 - n_2)}, \quad M_5 = M_2(1 + m_0 n_2)$$

$$M_6 = e^{-\xi_0}\{M_3 e^{\xi_0} \sigma(\xi_0) - M_3 - M_4 - M_5 - p_h \xi_0^3\}$$

$$\xi_0 = \lambda\tau_1 - 1$$

а f_0 и $\dot{f}_0$—значения функций $f(\xi)$ и $\dot{f}(\xi)$ при $\xi = \tau_1 - 1$ из решения (6). При выполнении условия (33) поля напряжений, массовых скоростей и смещений строятся при помощи формул (46), (1), (3). После момента, когда впервые нарушается выполнимость условия (33), необходимо в системе (44) третье уравнение (уравнение, полученное из (30)) заменить уравнением (31), которое с учетом (1) и (3) совпадает с уравнением (42). Полученную систему функциональных дифференциальных уравнений можно строить численно с использованием ЭВЦМ. Решая эту систему, можно определить распространение фронта разрушений $x = x_2(\tau)$, поля напряжений, массовых скоростей и смещений в интервале времени, где нарушено условие (33). После того, как возобновится выполнимость условия (33), решение необходимо продолжить при помощи системы (44) или его решением (46), только в нем нужно начальные условия (45) заменить новыми значениями из предыдущего решения. Затем снова, если нарушится условие (33), нужно заменить третье уравнение системы (44) уравнением (42) и т. д. Решение задачи при $P_0 < 2\tau_*$ должно, колеблясь, асимптотически стремиться к статическому решению

$$r_p = \left(\frac{P_0}{3P_h}\right)^{1/3}, \quad \sigma_{r1} = -\frac{\mathrm{const}_1}{x^3} - P_h, \quad \sigma_{\theta 1} = \frac{\mathrm{const}_1}{x^3} - P_h \tag{48}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{\mathrm{const}_2}{x^3}, \quad \sigma_{\theta 2} = 0$$

где r_p — радиус области раскрытия трещин, σ_{r1}, $\sigma_{\theta 1}$ — напряжения в неразрушенной области, σ_{r2}, $\sigma_{\theta 2}$ — напряжения в области раскрытия трещин.

На счетно-решающей машине вычислены некоторые варианты взрыва в трещиноватых породах при $P_0 < 2\tau_*$ в области $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, где τ_2 — момент, когда впервые нарушается условие (33).

В табл. 1 приведены результаты вычисления взрыва в трещиноватой гранитной среде ($\nu = 0.3$, $E = 2.22 \cdot 10^5$ *ат.*, $\tau_* = 750$ *кг/см²*) при $P_0 = 500$ *ат.*, $P_k = 0$. До момента $\tau = \tau_1 = 0.43$ из каверны распространяются упругие волны. При $\tau = 0.43$ от каверны отходит фронт разрушения радиальными трещинами $x = x_2(\tau)$, и решение построено с учетом разрушения. Счет прекращается в момент, когда скачок напряжения на ударном фронте $x = x_0(\tau)$ обратится в нуль. В последних графах табл. 1 приведены значения радиальных напряжений впереди и за фронтом разрушения. На фронте разрушения $\xi_0 = -0.612$, $\dot{f}_1(\xi_0) = 1.644 \cdot 10^{-3}$, $f_1(\xi_0) = 0$.

Таблица 1

ξ	τ	$f \cdot 10^3$	$f \cdot 10^3$	$f \cdot 10^3$	$f_2 \cdot 10^3$	$\dot{f}_2 \cdot 10^3$	σ_{r1} (*кг/см²*)	σ_{r2} (*кг/см²*)
−1.00	0	0	0	1.670	—	—	—	—
−0.76	0.24	0.044	0.347	1.225	—	—	—	—
−0.60	0.40	0.114	0.520	0.946	—	—	—	—
−0.57	0.43	0.127	0.548	0.880	0.675	0.067	−500.0	−500.0
−0.56	0.50	0.132	0.557	0.855	0.681	0.052	−446.7	−343.0
−0.55	0.57	0.138	0.565	0.815	0.688	0.052	−402.2	−323.4
−0.54	0.65	0.144	0.573	0.780	0.694	0.050	−364.3	−306.0
−0.53	0.72	0.150	0.581	0.747	0.700	0.049	−331.8	−290.0
−0.52	0.79	0.155	0.588	0.718	0.706	0.048	−303.6	−276.3
−0.51	0.86	0.161	0.595	0.691	0.712	0.047	−279.0	−263.5
−0.50	0.94	0.167	0.602	0.666	0.718	0.046	−257.4	−251.9
−0.49	1.01	0.173	0.608	0.644	0.724	0.045	−238.3	−241.3

Результаты вычисления разных конкретных примеров хорошо согласуются с представлениями, которые мы имеем из экспериментов по разрушению горных пород при взрыве.

Эти результаты были доложены на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, 1968 г.

Автор благодарит С. С. Григоряна за постоянное внимание к данной работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 14 III 1968

Ա. Բ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՓԽՐՈՒՆ ՊԻՆԴ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ԼԻՑՔԻ ՊԱՅԹՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ամփոփում

Դիտարկված է հատուկ դեպք, երբ լեռնային ապարի ձգման կրիտիկական լարումը $\sigma_* = 0$ և շոշափող լարման կրիտիկական արժեքը τ_* հավասար է մի հաստատունի՝ պլաստիկության պայմանից τ_{*1}, որը բնորոշում է շփումը բեկորային ճաքերի միջև։

Այդ դեպքում բեկորային և շառավղային ճաքեր առաջացնող հարվածային ալիքները տարածվում են հաստատուն արագությամբ և կարելի է ստանալ անալիտիկ լուծումներ։

Ստացված լուծումները վերաբերվում են ճաքճքված ապարներին, ինչպես նաև կարող են կիրառվել չճաքճքված ապարների համար, քանի որ σ_* և $\tau_* - \tau_{*1} \ll \rho c^2$ և τ_*.

A. B. BAGHDASARIAN

THE EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM ON THE ACTION OF A CONCENTRATED CHARGE EXPLOSION IN A BRITTLE RIGID MEDIUM

Summary

A special case, when the critical stress $\sigma_*=0$ in a brittle medium and the critical value of shearing stress, is considered.

In this case shock waves propagate with a constant velocity, and the analytical solution may be obtained. The obtained solutions are related to the cracked brittle medium, however they may be applied for noncracked medium because σ_* and $\tau_* - \tau_{*1} \ll \rho c_*^2$ and τ_*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
2. *Багдасарян А. Б., Григорян С. С.* О действии взрыва в органическом стекле. ПМТФ, №3, 1967.
3. *Корявов В. П.* О зоне и фронте трещин в упругом теле под действием давления. ПМТФ, №6, 1965.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

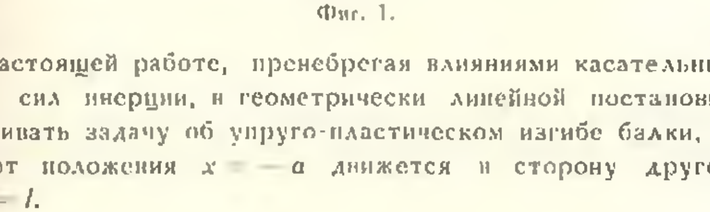
ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Задачи об упруго-пластических перемещениях балок при подвижных сосредоточенных силах рассматривались в работах Н. А. Чернова ([1] и др). Настоящая работа посвящается упруго-пластическому изгибу балок при подвижных равномерно распределенных нагрузках.

Выясняется поведение упруго-пластических областей во время движения нагрузки и с помощью уравнений задачи упруго-пластического изгиба балки при ее статическом нагружении получаются дифференциальные уравнения поставленной задачи, которые легко интегрируемы в квадратурах. Приведен численный пример.

1. Постановка задачи

Рассмотрим балку длиной l и прямоугольным поперечным сечением высоты $2h$, свободно лежащую на двух опорах. Пусть балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q с длиной участка распределения $a < l/2$, положение которой будем определять абсциссой левого края участка ее распределения x (фиг. 1).



Фиг. 1.

В настоящей работе, пренебрегая влияниями касательных напряжений и сил инерции, в геометрически линейной постановке будем рассматривать задачу об упруго-пластическом изгибе балки, когда нагрузка от положения $x = -a$ движется в сторону другой опоры балки $\eta = l$.

2. Изгиб балки под действием статически приложенной (неподвижной) нагрузки

Известно [2], что в рамках принятых допущений изгиб упруго-пластически деформируемого участка статически нагруженной балки можно описать зависимостью между кривизной оси и изгибающим моментом балки при ее чистом изгибе

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = f(M) \tag{2.1}$$

Здесь w — прогиб, M — изгибающий момент сечений балки.

Что касается изгиба упруго-деформируемой части балки, то для него имеем уравнение

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{M}{EJ} \tag{2.2}$$

где E — модуль Юнга материала, J — инерция поперечного сечения балки.

Очевидно, что решение задачи изгиба балки, имеющей одновременно упруго и упруго-пластически деформируемые части, сводится к интегрированию уравнений (2.1) и (2.2) в соответствующих промежутках с подходящим использованием формул изгибающих моментов

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \frac{aq}{2l}(2l - 2x - a)\,\eta, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant x \\
M_2 &= \frac{aq}{2l}(2l - 2x - a)\,\eta - \frac{q}{2}(\eta - x)^2, \qquad x \leqslant \eta \leqslant x + a \\
M_3 &= \frac{aq}{2l}(a + 2x)(l - \eta), \qquad x + a \leqslant \eta \leqslant l
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

граничных условий свободного опирания краев, а также условий неразрывности балки.

Так как наибольший изгибающий момент получится в срединном сечении пролета балки $\eta = l/2$ при симметричном расположении нагрузки $x = (l - a)/2$, то для возможности появления упруго-пластических деформаций необходимо по крайней мере потребовать, чтобы

$$aqh(2l - a) > 8EJ\varepsilon_s \tag{2.4}$$

Максимальный изгибающий момент при данном расположении нагрузки (при фиксированном x) действует в сечении η^*, находящемся под нагрузкой

$$\eta^* = x + \frac{a}{2l}(2l - 2x - a), \qquad (x < \eta^* < x + a) \tag{2.5}$$

и имеет значение

$$M_{\max}\big|_{x = \mathrm{const}} = \frac{aq(2l - a)}{8l^2}\left[a(2l - a) + 4x(l - a) - 4x^2\right] \tag{2.6}$$

Нетрудно убедиться в том, что в случае

$$a^2 qh(2l - a)^2 < 8EJ\varepsilon_s l^2 \tag{2.7}$$

при приложении нагрузки в непосредственной близости к опоре ($x = 0$) даже в сечении с максимальным изгибающим моментом $\eta^*|_{x=0}$ пластические деформации не образуются, а в противном случае образуется область упруго-пластических деформаций, включающая в себя сечение $\eta^*|_{x=x_0}$.

Очевидно, что при одновременном соблюдении условий (2.4) и (2.7) будет существовать некоторый участок

$$x_0 < x < l - x_0 \tag{2.8}$$

$$x_0 = \frac{l-a}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{1 - \frac{8EJ_z}{aqh(2l-a)}}, \quad \left(0 < x_0 < \frac{l-a}{2}\right) \tag{2.9}$$

симметричный относительно середины пролета $\eta = l/2$, приложение нагрузки вне пределов которого (т. е. при $0 < x < x_0$ и $l - a - x_0 < x < l$) нигде не образует пластических деформаций, а в его пределах (т. е. при $x_0 < x < l - a - x_0$) в некоторой части балки

$$\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2 \tag{2.10}$$

образует область упруго-пластических деформаций, включающую в себя соответствующие сечения максимальных моментов η^*. При этом возможны случаи, когда упруго-пластическая область или вообще не выходит, или местами частично выходит из-под участка распределения нагрузки $x \leqslant \eta \leqslant x + a$.

Имея в виду то обстоятельство, что изгибающий момент сечений $\eta = x$ и $\eta = x + a$ свое наибольшее значение получает при расположениях нагрузки $x = (2l - a)/4$ и $x = (2l - 3a)/4$ соответственно, легко заключить, что при

$$aqh\,(2l-a)^2 \leqslant 16\,EJ_z l \tag{2.11}$$

область упруго-пластических деформаций не выходит из-под нагрузки. В этом случае для граничных сечений η_1 и η_2 получим

$$\eta_{1,2} = x + \frac{a(2l-2x-a)}{2l} \mp \frac{1}{2qhl}\sqrt{aq^2h^2(2l-2x-a)(2x+a)(2l-a) - 8\,EJ_z qhl^2} \tag{2.12}$$

$$(x \leqslant \eta_1 < \eta_2 \leqslant x + a)$$

Сравнительно сложно выглядит картина для остальных случаев, когда область упруго-пластических деформаций может слева или справа или одновременно и слева и справа выходить из-под участка распределения нагрузки. Для простоты, в дальнейшем будем рассматривать случаи нагрузок, ограниченных снизу и сверху неравенствами (2.4) и (2.11)*.

---

* В случае $a < l/2$ условие (2.11) является более сильным ограничением для нагрузки сверху, чем условие (2.7).

3. Изгиб балки под действием движущейся нагрузки

Из выражений изгибающих моментов (2.3) следует, что существует некоторое сечение под нагрузкой

$$\eta_0 = \frac{lx}{l-a}, \quad (x \leqslant \eta_0 < x+a) \tag{3.1}$$

которое при движении нагрузки является границей раздела областей разгрузки и нагружения. Таким образом, в сечениях балки

$$0 \leqslant \eta < \frac{lx}{l-a} \tag{3.2}$$

происходит разгрузка, а в остальных сечениях

$$\frac{lx}{l-a} < \eta \leqslant l \tag{3.3}$$

— нагружение.

С движением нагрузки (с возрастанием x) граница раздела областей разгрузки и нагружения η_0 непрерывно перемещается в сторону движения нагрузки, в силу чего область разгрузки (3.2) односторонне распространяется, а область нагружения (3.3), наоборот, суживается.

Исследуя поведение изменения изгибающих моментов в произвольном фиксированном сечении балки η во время движения нагрузки, заключаем, что наибольший изгибающий момент в данном сечении

$$M_0 = M_{\max}|_{\eta=\mathrm{const}} = \frac{aq\eta(2l-a)}{2l^2}(l-\eta) \tag{3.4}$$

возникает при

$$x = \frac{l-a}{l}\eta, \quad \left(\eta = \frac{lx}{l-a}\right) \tag{3.5}$$

т. е. при таком расположении нагрузки, при котором рассмотренное сечение балки является границей раздела областей разгрузки и нагружения. Таким образом, как и следовало ожидать, граница раздела областей разгрузки и нагружения η_0 с собой несет максимальные для каждого сечения балки значения изгибающих моментов.

Сравнение значений абсцисс сечения максимальных моментов η^* и границы раздела областей разгрузки и нагружения η_0 приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \eta_0 &< \eta^* \quad \text{при } 0 \leqslant x < \frac{l-a}{2} \\ \eta_0 &> \eta^* \quad \text{при } \frac{l-a}{2} < x \leqslant l \end{aligned} \tag{3.6}$$

которые означают, что, пока нагрузка не приняла симметричного расположения относительно середины пролета балки $\eta = l/2$ (при $x < (l-a)/2$), сечение максимальных моментов η^* находится в области нагружения, после чего (при $x > (l-a)/2$), наоборот, оно находится в области разгрузки*.

Ясно, что предел упругих деформаций ε_s впервые достигается в крайних волокнах сечения максимального момента η^* при $x = x_0$. Но так как $x_0 < (l-a)/2$, из вышеизложенного следует, что при дальнейшем движении нагрузки в первичном упруго-пластическом сечении $\eta^*(x_0)$ некоторое время продолжится процесс *нагружения*. В результате этого вокруг сечения $\eta^*(x_0)$ образуется область упруго-пластических деформаций (2.10), которая с движением нагрузки распространяется налево, направо и в глубь балки. Очевидно, что такое трехстороннее распространение упруго-пластической области продолжится до тех пор, пока одностороннее распространяющаяся область разгрузки не доходит до нее.

Из условий

$$\eta_0 = \eta_{1,2} \tag{3.7}$$

с учетом (2.12) и (3.1) для положений нагрузки, при которых граница раздела областей разгрузки и нагружения совпадает соответственно с левым и правым краями упруго-пластической области, получаем

$$x_{1,2} = \frac{l-a}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{8EJ\varepsilon_s}{aqh(2l-a)}}\right] \tag{3.8}$$

Таким образом, область разгрузки при $x = x_1 > x_0$ в сечении $\eta_0(x_1)$ доходит до левого края упруго-пластической области, после чего, распространяясь дальше, она включает в себя все новые и новые сечения упруго-пластического деформирования. При $x = (l-a)/2$ в сечении $\eta = l/2$ область разгрузки догоняет, а потом переходит сечения максимальных моментов η^*. Когда $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, область разгрузки в сечении $\eta_0(x_2)$ догоняет и правый край упруго-пластического деформирования, тем самым прекращая дальнейшее ее распространение.

Очевидно, что каждое сечение η, находящееся в области разгрузки (3.2), разгружается от своего наибольшего значения изгибающего момента M_0 до того значения M, которое соответствует данному расположению нагрузки x.

Следовательно, размер разгрузки в сечениях $\eta < \eta_0$ будет

$$\Delta M_2 = M_0 - M_2 = \frac{q}{2l}\left[l(\eta - x)^2 + a\eta(2lx - 2l\eta + a\eta)\right] \tag{3.9}$$

$$\text{при } x < \eta < x + a$$

$$\Delta M_1 = M_0 - M_1 = \frac{aq}{2l}\left[2lx - \eta(2l-a)\right]\eta \quad \text{при } \eta < x \tag{3.10}$$

* Этот результат можно получить и из выражения максимальных моментов (2.6), откуда явно видно, что максимальный момент с движением нагрузки, пока $x < (l-a)/2$, возрастает, после чего начинает убывать.

Пользуясь вышеизложенным анализом поведений областей разгрузки и упруго-пластического деформирования во время движения нагрузки, перейдем к построению систем дифференциальных уравнений изгиба характерных участков балки при различных расположениях движущейся нагрузки.

Пусть нагрузка, удовлетворяющая условиям (2.4) и (2.11), из положения $x = -a$ движется в сторону другой опоры балки $\eta = l$. Ясно, что, пока $x < x_0$, балка будет изгибаться только упруго (причем, пока $x < 0$, она будет изгибаться под действием нагрузки с удлиняющимся участком распределения $a' = a + x$), в силу чего наблюдение за движением нагрузки имеет смысл лишь при $x > x_0$.

Так как при $x_0 < x < x_1$ упруго-пластически деформируемый участок балки (2.10) находится под нагрузкой и непрерывно нагружается, то изгиб этого участка опишется дифференциальным уравнением (2.1), где следует брать $M = M_2$.

Изгиб остальных, упруго-деформируемых, участков балки, для которых неважно в каких условиях (нагружения или разгрузки) они деформируются, опишется дифференциальным уравнением (2.2) с подходящим выбором формулы изгибающего момента. Следовательно, система дифференциальных уравнений задачи при расположении движущейся нагрузки $x_0 < x < x_1$ примет вид

$$(x_0 < x < x_1)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ} \qquad 0 < \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ} \qquad x < \eta < \eta_1$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_2) \qquad \eta_1 < \eta < \eta_2 \tag{3.11}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ} \qquad \eta_2 < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ} \qquad x + a < \eta \leqslant l$$

При расположениях нагрузки $x_1 < x < \dfrac{lx_2}{l-a}$ необходимо различать следующие два случая:

$$\frac{lx_1}{l-a} > x_2 \tag{3.12}$$

$$\frac{lx_1}{l-a} < x_2 \tag{3.13}$$

Для краткости рассмотрим только случай (3.12).

Тогда разгружаемая часть $\frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx}{l-a}$ упруго-пластически деформируемого участка балки при $x_1 < x < x_2$ целиком находится под нагрузкой и, следовательно, разгружается в размере ΔM_2. Имея в виду, что разгрузка является упругим процессом и то, что каждое упруго-пластическое сечение разгружается от значения кривизны $f(M_0)$, для этих сечений при $x_1 < x < x_2$ будем иметь

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_2}{EJ} \tag{3.14}$$

Ясно, что изгиб остальной нагружаемой части упруго-пластически деформируемого участка $\frac{lx}{l-a} < \eta < \eta_0$ опишется уравнением (2.1), а изгиб упруго деформируемых участков балки — уравнением (2.2). Следовательно, в случае (3.12), когда движущаяся нагрузка имеет расположение $x_1 < x < x_2$, система дифференциальных уравнений задачи будет

$$(x_1 < x < x_2)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, && 0 \leqslant \eta < x \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, && x < \eta < \frac{lx_1}{l-a} \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_2}{EJ}, && \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx}{l-a} \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_2), && \frac{lx}{l-a} < \eta < \eta_2 \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, && \eta_2 < \eta < x + a \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, && x + a < \eta \leqslant l
\end{aligned} \tag{3.15}$$

При $x_2 < x < \frac{lx_1}{l-a}$ упруго-пластический участок

$$\frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.16}$$

продолжает находиться под нагрузкой и *целиком* разгружается в размере ΔM_2. Имея в виду это обстоятельство, для системы дифференциальных уравнений задачи в данном случае получим

$$\left(x_2 < x < \frac{lx_1}{l-a} \right)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \qquad 0 \leqslant \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_0}{EJ}, \qquad x < \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_1}{EJ}, \qquad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.17}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \qquad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \qquad x + a < \eta \leqslant l$$

Далее возможны два случая

$$\frac{lx_2}{l-a} + a \leqslant l \tag{3.18}$$

$$\frac{lx_2}{l-a} + a > l \tag{3.19}$$

В случае (3.18) при $\frac{lx_1}{l-a} < x < \frac{lx_2}{l-a}$ нагрузка не доходит до правой опоры балки $\eta = l$. В случае же (3.19) она при $x = l - a < \frac{lx_2}{l-a}$ доходит до этой опоры и в дальнейшем на балку действует с укорачивающимся участком распределения

$$a' = a - x \tag{3.20}$$

Отметим, что сечения упруго-пластического участка балки $\frac{lx_1}{l-a} < \eta < x$, которые освобождаются от нагрузки, будут разгружаться на ΔM_1.

Приведем системы дифференциальных уравнений задачи только для случая (3.18)

$$\left(\frac{lx_1}{l-a} < x < \frac{lx_2}{l-a} \right)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \qquad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_1}{EJ}, \qquad \frac{lx_1}{EJ} < \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) - \frac{\Delta M_2}{EJ}, \qquad x < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \quad x + a < \eta \leqslant l$$

$$\left(\frac{lx_2}{l-a} < x < l - a\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_1}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x \tag{3.22}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad x < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \quad x + a < \eta \leqslant l$$

$$(l - a < x \leqslant l)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1'}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{M_0 - M_1}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.23}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1'}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2'}{EJ}, \quad x < \eta \leqslant l$$

Здесь штрихом обозначены значения изгибающих моментов балки от нагрузки с длиной участка распределения a'.

Полагая в (3.23) $x = l$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = 0, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{M_0}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta \leqslant l$$

соответствующую случаю, когда нагрузка выходит за пределы балки. Аналогичным путем можно составить дифференциальные уравнения для остальных случаев.

Наконец, отметим, что все рассмотренные дифференциальные уравнения легко интегрируемы в квадратурах, так как их правые части являются известными функциями ξ и x. Отметим также, что к краевым условиям свободного опирания концов балки в каждом конкретном случае следует присоединить еще условия ее неразрывности (непрерывности w и $dw/d\xi$) в сечениях, разделяющих характерные участки балки.

Естественно, что вышеприведенные системы дифференциальных уравнений упруго-пластического изгиба балки при $x > x_1$ отличаются от соответствующих систем изгиба балки под действием неподвижной (статически приложенной) нагрузки. Эта разница обусловлена *только* тем, что в случае движущейся нагрузки существуют участки разгрузки, в сечениях которых кривизна оси балки за счет остаточных пластических деформаций больше, чем в случае неподвижной нагрузки. Исходя из этих рассуждений и имея в виду неразрывность балки, можно заключить, что при $x > x_1$ прогибы неопорных сечений балки в случае движущейся нагрузки больше, чем в случае неподвижной нагрузки. Вопрос о том, как именно зависят прогибы балки от способа ее нагружения, можно выяснить после окончательного решения вышеприведенных систем дифференциальных уравнений, что, по-видимому, возможно лишь численным путем.

Численный пример

Пусть материал балки таков, что для него справедливы соотношения теории малых упруго-пластических деформаций с линейным упрочнением [2]

$$\begin{aligned} &\sigma = E\varepsilon && 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\ &\sigma = A + B\varepsilon && \varepsilon > \varepsilon_s \\ &d\sigma = E\,d\varepsilon && d\varepsilon < 0 \quad (\varepsilon > 0) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Здесь σ, ε — напряжение и деформация, ε_s — предел упругих деформаций, E — модуль Юнга, B и $A = (E - B)\varepsilon_s$ — характеристики материала за пределом упругости.

Тогда нетрудно убедиться в том, что зависимость между кривизной и изгибающим моментом оси балки при чистом упруго-пластическом ее изгибе (2.1) является отрицательным решением кубического уравнения

$$\left(\frac{d^2w}{d\xi^2}\right)^3 + \frac{3(M - Ah^2b)}{2Bh^3b}\left(\frac{d^2w}{d\xi^2}\right)^2 + \frac{A\varepsilon_s^3}{2Bh^3} = 0 \tag{4.2}$$

(b — ширина поперечного сечения).

Рассмотрим случай $x \geqslant l$, когда нагрузка выходит за пределы балки. Интегрируя уравнения (3.24) и удовлетворяя соответствующим условиям и при этом имея в виду симметричность функции

$$F(\eta) = f(M_0) + \frac{M_0}{EJ}$$

относительно середины пролета балки $\eta = l/2$, для прогибов получим

$$w = -\frac{C}{l\sqrt{1-\dfrac{8EJ\varkappa_*}{aqh(2l-a)}}}\,\eta, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{lx_1}{l-a}$$

$$w = -\frac{C}{l\sqrt{1-\dfrac{8EJ\varkappa_*}{aqh(2l-a)}}}\,\eta + R(\eta), \qquad \frac{lx_1}{l-a} \leqslant \eta \leqslant \frac{lx_2}{l-a}$$

$$w = -\frac{C}{l\sqrt{1-\dfrac{8EJ\varkappa_*}{aqh(2l-a)}}}\,(l-\eta), \qquad \frac{lx_2}{l-a} \leqslant \eta \leqslant l$$

где приняты обозначения

$$R(\eta) = \int\limits_{\frac{lx_1}{l-a}}^{\eta} \left(\int\limits_{\frac{lx_1}{l-a}}^{\eta_1} F(\eta)\, d\eta \right) d\eta_1, \qquad C = R(\eta)\Big|_{\eta = \frac{lx_2}{l-a}}$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий числовой пример:

$$E = 10^6\ кг/см^2, \quad A = 990\ кг/см^2, \quad B = 10^4\ кг/см^2,$$

$$\varepsilon_* = 10^{-2}, \quad b = 1\ см, \quad h = 5\ см, \quad l = 300\ см, \quad a = 50\ см,$$

$$q = 6\ кг/см, \quad (EJ\varkappa_* = 83333\ кг/см^2)$$

В нижеприведенной таблице представлены значения функции $R(\eta)$ для некоторых сечений промежутка $\frac{lx_1}{l-a} \leqslant \eta \leqslant l/2$.

$(C = -0.079 см)$

η см	84.28	90.41	94.39	98.33	102.25	106.19	110.19	114.30	118.60	123.23	128.42	134.81	150
$R(\eta)\cdot 10^{-4}$ см	0	0.021	0.14	0.50	1.31	2.84	5.45	9.63	16.10	26.04	41.67	68.62	86.25

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 I 1968

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՇԱՐԺՎՈՂ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏՆՎՈՂ ՀԵԾԱՆԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հեծանի առաձգա-պլաստիկական ծռման խնդիրը հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ, երբ բեռը դանդաղ շարժվում է հեծանի մի հենարանից դեպի մյուսը։ Պարզաբանվում է հեծանի առաձգա-պլաստիկական տիրույթների վարքը բեռի շարժման ժամանակ, գծայնորեն ամրացվող նյութի փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության [2] հիման վրա, ստացվում են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք հեշտ ինտեգրվելի են քառակուսացման միջոցով։ Դիտարկված է թվային օրինակ։

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE ELASTIC-PLASTIC BENDING OF A BEAM UNDER A MOVING LOAD

Summary

The problem of an elastic-plastic bending of a beam under the action of a uniformly distributed load is considered. The load moves slowly and unilaterally from one support of the beam to the other.

The behaviour of elastic-plastic regions of the beam at the time of motion of the load on the basis of the theory of some elastic-plastic deformations [2] of linear strengthening materials is considered. The differential equations of the problem are obtained, which is easily integrated by the quadrature. A numerical example is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернов Н. Л.* Об упруго-пластических перемещениях двутавровых балок при подвижных нагрузках. Прикл. механика, т. III, вып. 8, 1967.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.

ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

В. А. МАНЬКОВСКИЙ, М. И. РОЗОВСКИЙ

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

§ 1. При рабочих нагрузках, не превышающих $25 \div 30\%$ от разрушающих, будем рассматривать конструкционный тканевый стеклопластик как упруго-наследственный квазиоднородный ортотропный континуум с усредненными по толщине „размазанными" упругими и реономными свойствами. Волнистость армирующего агента, обусловленная текстильной переработкой стекловолокон, и наличие в стеклотекстолите высокополимерного связующего предопределяет учет как сдвигового в плоскости армирования 12, так и линейного последействия указанного материала в направлениях основы 11, утка 22 и по толщине (направление 33). Слоистость, структурная немонолитность и гетерогенность стеклотекстолита приводят к существенным сдвиговым податливостям и в плоскостях 13, 23, перпендикулярных к плоскости армирования, и, как следствие, к отказу от гипотезы недеформируемых нормалей в задачах изгиба. Таким образом, определение компонентов тензоров напряженного и деформированного состояний для конструктивных элементов из указанных сред в общем случае сводится к решению трехмерных задач наследственной теории упругости анизотропного тела зачастую при менее "жестких" рабочих предположениях, нежели классическая гипотеза Кирхгоффа-Лява*.

Ввиду сложности решения указанных задач в замкнутом виде, введем следующие предположения относительно работы материала во времени:

1. главные плоскости упругой симметрии среды 12, 13, 23 инвариантны по отношению ко времени, и материал обладает ортогональной анизотропией реономных свойств в произвольный момент времени;

2. реономные свойства среды не зависят от знака компонентов тензора напряжений;

3. главные** характеристики или главные меры линейной и сдвиговой ползучести подобны между собой.

Первая гипотеза не является принципиально новой [2] и находится, как и вторая, на уровне обычно принимаемых допущений.

---

* Например, гипотеза о прямолинейном элементе [1].

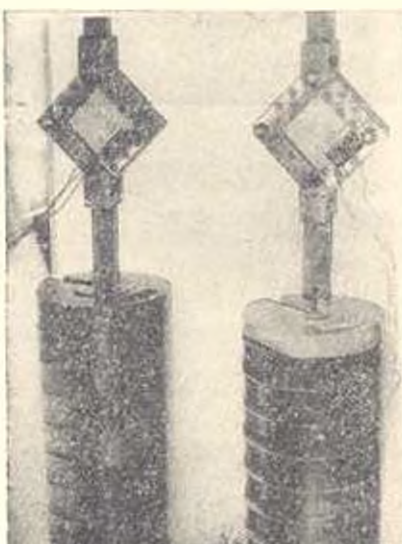
** То есть соответствующие главным направлениям и плоскостям упругой симметрии материала. Здесь и ниже процесс развития во времени высокоэластических линейных и сдвиговых деформаций под действием постоянной нагрузки традиционно называем ползучестью (простой).

Непосредственные экспериментальные данные относительно второй гипотезы отсутствуют. Однако, следует ожидать, что при умеренной интенсивности внешнего силового поля она справедлива [3], и усложнение теории в этом направлении не оправдано.

В рассматриваемом случае равновесных процессов деформирования априорное использование третьей гипотезы накладывает ограничения лишь на форму нестационарного участка кривых ползучести, как правило, мало интересного с практической точки зрения. Однако, эти ограничения менее жесткие, нежели в известной расчетной модели Брызгалина Г. И. [4], предполагающей постоянство во времени характеристик (мер) ползучести в направлениях армирования 11, 22.

Отметим, что третья гипотеза эквивалентна предположению о подобии кривых простой одномерной ползучести для образцов, произвольно ориентированных в плоскостях упругой симметрии. Указанное подобие в плоскости 12 наблюдалось для эпоксидного стеклопластика [5], а также при релаксации напряжений для полиэфирного стеклотекстолита [6].

Справедливость последних двух гипотез проверялась экспериментально для судостроительного стеклопластика холодного отвердения (гидрофобизированный стеклосатин 8·3 и полиэфирная смола ПН–3). Образцы стеклотекстолита размерами в свету 100x100x3, вырезанные из одного листа (плоскость 12), синхронно деформировались во времени (до $2{,}5 \cdot 10^3$ час) в шарнирных четырехзвенниках (фиг. 1). Напряженное



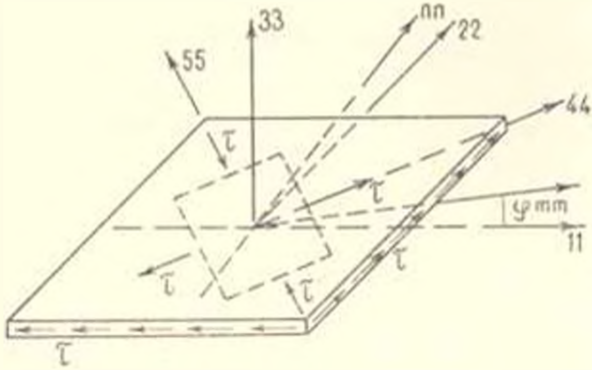
Фиг. 1. Установки для осуществления чистого сдвига.

состояние в центре образцов (фиг. 2) близко [3] к чистому сдвигу. Направление 11 основы материала составляло (фиг. 2) с диагональю растяжения 44 угол 45°. Деформации замерялись тензометрическим путем с регистрацией статическими измерителями с мостовыми схемами и отсчетом по зеркальным гальванометрам типа М—17. Средние по толщине касательные напряжения составляли 7.5% от разрушающих. На фиг. 3

представлены усредненные по данным двух идентичных установок (фиг. 1) экспериментальные характеристики λ_{ij} линейной ползучести при растяжении и сжатии вдоль соответствующих диагоналей 44 и 55 и сдвиговой ползучести в плоскости 12, причем

$$\lambda_{ij}(t) = \varkappa_{ij}(t)\, e_{ij}^{-1}, \quad i = j = 4,5, \quad i = 1,\ j = 2,$$

где $\varkappa_{ij}$, e_{ij} — высокоэластические и мгновенно-упругие деформации (линейные или сдвиговые).



Фиг. 2. Анализ напряженного состояния в центре пластины.

Учитывая обычный разброс экспериментальных точек при последействии стеклопластолитов, вызванный гетерогенностью их структуры и наличием нерегулярности в плане отдельных текстильных макроячеек стеклоткани, а также неизбежные субъективные погрешности при наклейке тензодатчиков, следует признать удовлетворительным результат сопоставления эксперимента с гипотезами. Локальную немонотонность опытных кривых можно объяснить „технологическими" причинами: ранее отмеченными искривлениями стеклянных прядей, незавершенностью процессов полимеризации и отверждения связующего, микродеструктивными процессами. Не усложняя рассуждений*, будем считать в дальнейшем, что исследуемый материал структурно стабилен во времени.

В заключение констатируем, ссылаясь на эксперимент, что установки (фиг. 1), рекомендуемые [3] для исследования плоского напряженного состояния при чистом сдвиге, неточны при определении упругих и недопустимы при определении реологических характеристик ортотропных материалов в тех случаях, когда угол между диагональю растяжения и основой материала отличен от $\varphi = \pm 45°$. В указанных случаях образец, отнесенный к относительно более жесткий контур четырехзвенника квадратной, а затем ромбической формы и деформирующийся по законам анизотропного тела общего случая (из-за наличия коэффициентов взаимного влияния полностью меняется геометрия образца [8]), испытывает „смещенную трансформацию".

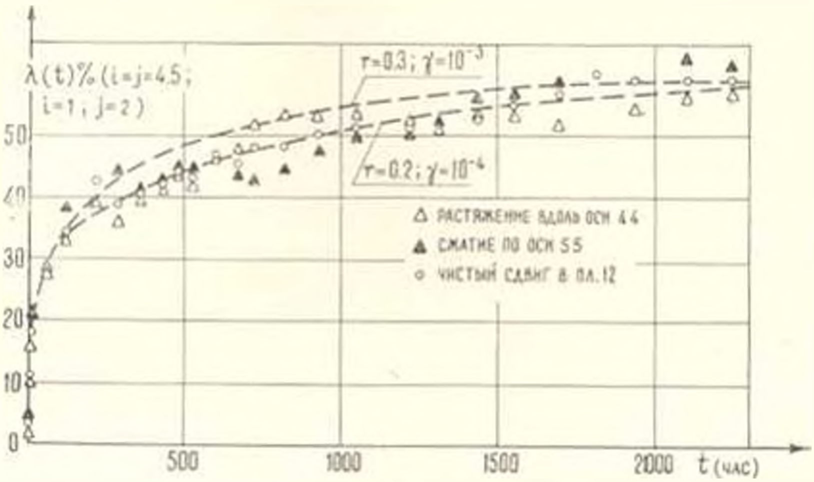
§ 2. Равновесные процессы простой ползучести с особенностью в момент загружения будем описывать с использованием слабо сингулярных наследственных функций влияния типа Ржаницына А. Р.:

$$R_{r-1}(-\gamma;\ T-\tau) = \exp\left[-\gamma(T-\tau)\right]\frac{(T-\tau)^{r-1}}{\Gamma(r)} \qquad (2.1)$$

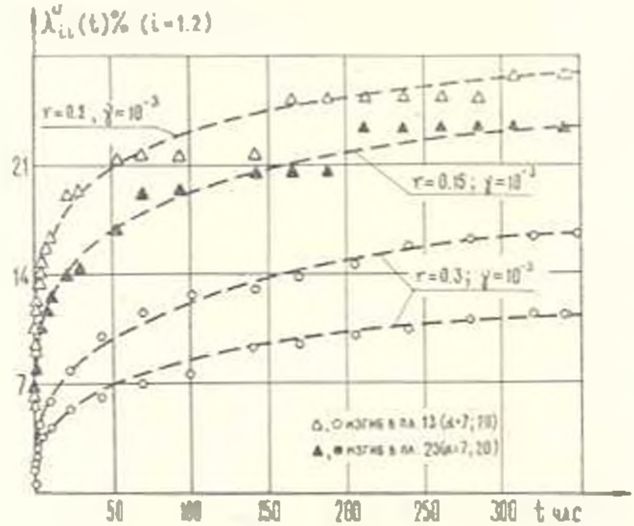
* Вопросы старения „в чистом виде" для нетканых стеклопластиков исследовались Марзиросяном М. М. [7]. Принципиально излагаемая теория распространяется и на случай анизотропного упруго-ползучего (стареющего) тела Маслова Г. Н. — Арутюняна Н. Х.

где r, γ — положительные реономные параметры; T, τ — безразмерные временные аргументы масштаба $t_0 = 1$ *час*; $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера.

На фиг. 3, 4 пунктиром показаны обработанные с помощью данного ядра характеристики ползучести при сдвиге в плоскости 12 и при изгибе в плоскостях 13, 23.



Фиг. 3. Характеристики ползучести при растяжении $\lambda_{44}(t)$, сжатии $\lambda_{55}(t)$ и чистом сдвиге $\lambda_{12}(t)$.



Фиг. 4. Характеристики ползучести при поперечном изгибе в плоскостях 13, 23 при различных соотношениях h/l^{-1}.

Выбор указанной функции влияния в качестве ядра ползучести обусловлен следующими обстоятельствами:

1. соответствующее ядру (2.1) уравнение связи вытекает из линеаризованного обобщенного уравнения Максвелла-Гуревича Г. И. [9],

наиболее полно описывающего поведение „сшитых“ полимеров и армоматериалов на их основе под нагрузкой;

2. замкнутость формы ядра (2.1) позволяет сравнительно просто определить его реономные параметры r, γ, так как характеристики ползучести в этом случае суть протабулированные [10] неполные гамма-функции, а в двойных логарифмических координатах их форма зависит только от параметра r (параметр γ предопределяет сдвиг кривой по оси $\lg T$);

3. указанные параметры r, γ позволяют точно описать форму кривых последействия. При достаточно малом γ процесс деформирования приближается к безразличному.

4. основные правила действия с обобщенными экспонентами дробного порядка (K-функциями), резольвентными по отношению к ядру (2.1), совпадают с аналогичными для Э-функций Работнова Ю. Н. [11], где

$$K_{r-1}(-\gamma;\ \varkappa;\ T-\tau)=\exp[-\gamma(T-\tau)]\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^{n-1}\frac{(T-\tau)^{nr-1}}{\Gamma(nr)} \tag{2.2}$$

где $\varkappa$ — опытный аргумент, причем $|\varkappa|<\gamma^{r}$.

§ 3. Упругие свойства рассматриваемой ортотропной среды однозначно описываются девятью апостериорными [1] константами: главными шестью мгновенно-упругими линейными и сдвиговыми податливостями Y_{ij} ($i=j=1, 2, 3$; $i=1, 2$; $j\neq i=2, 3$) и тремя (из шести) коэффициентами Пуассона ν_{ij} *), например, $i=1, 2$; $j\neq i=2, 3$. Используя здесь и далее операторный принцип Вольтерра В. – Работнова Ю. Н. [11], на основании гипотезы о подобии § 1 представим операторные аналоги упругих констант в виде:

$$\overline{Y}_{ij}=Y_{ij}[1+\varkappa_{ij}K^{*}(0)],\quad i=j=1,\ 2,\ 3;\quad i=1,\ 2;\quad j\neq i=2,\ 3 \tag{3.1}$$

$$\overline{\nu}_{ij}=\nu_{ij}[1+\mu_{ij}K^{*}(-\varkappa_{ij})],\quad i,\ j=1,\ 2,\ 3;\quad i\neq j \tag{3.2}$$

Данные функционалы, определяемые параметрами r, γ, $\varkappa$ наследственных K-операторов и равновесными параметрами $\varkappa_{ij}$, μ_{ij}, девять из которых линейно независимы, полностью характеризуют реономное поведение модели. Опытные параметры $\varkappa_{ij}$, связанные с соответствующими предельными характеристиками ползучести соотношением $\varkappa_{ij}=\gamma^{r}\lambda_{ij}(\infty)$, приведены для рассматриваемого стеклотекстолита в табл. 1, 2.

Линейные параметры $\varkappa_{ij}$ ($i=j=1, 2, 3$) определялись из обычных [3] испытаний на простую ползучесть при растяжении ($\varkappa_{11}$, $\varkappa_{22}$) или сжатии ($\varkappa_{33}$ **). Значение $\varkappa_{12}$ найдено из эксперимента, приведенного в § 1.

* Индексы i, j указывают соответственно на направления одномерного действия внешней силы и замера поперечной деформации.

** В этом случае деформации по толщине листа замерялись малобазисными (5 *мм*) тензодатчиками.

Реономные сдвиговые параметры $\varkappa_{13}$, $\varkappa_{23}$ рассматриваемого материала, описываемого моделью § 1, определялись из испытаний на длительный поперечный изгиб по схемам трехточечного загружения образцов-балочек размерами $l \times b \times \delta$, ориентированных в направлениях 11,22 и разнящихся отношением $\alpha = l\delta^{-1}$. На фиг. 4 показаны соответствующие экспериментальные характеристики ползучести $\bar{\lambda}_{ii}^{\alpha}$, λ_{ii}^{α} ($i = 1, 2$) при поперечном ($\alpha = 7$) и квазичистом ($\alpha > 20$) изгибах при „рабочих" нагрузках, не превышающих 15 – 20% от предельных. Пунктиром показаны теоретические кривые, соответствующие ядру (2.1). Исходя из параболического [1] закона распределения скалывающих напряжений по толщине δ, согласно функционалам (3.1) получаем ($i = 1, 2$)

$$\varkappa_{i3} = \eta_i^{-1}[\bar{\varkappa}_{ii}^{\alpha}(1 + \eta_i) - \varkappa_{ii}]; \qquad \eta_i = 1,2\alpha^{-2} Y_{i3} Y_{ii}^{-1} \tag{3.3}$$

Здесь $\bar{\varkappa}_{ii}^{\alpha}$ — опытный равновесный параметр при длительном поперечном изгибе с учетом сдвигов в плоскости $i3$ для образца, ориентированного в направлении ii.

Таблица 1

Главные линейные упругие и реономные* характеристики исследуемого стеклотекстолита

Главные оси	Y_{ii} [illegible] $\cdot 10^{10}$	$\varkappa_{ii} \cdot 10^2$
11	0.606	1.46
22	0.869	2.47
33	0.834	2.76

* Здесь и в табл. 2, 3 [illegible] $= 10^{-[illegible]}$, $r = 0.3$

Таблица 2

Главные сдвиговые упругие и реономные характеристики

Главные плоскости	$Y_{ij} H^{-1} M^2 \cdot 10^{10}$	$\varkappa_{ij} \cdot 10^2$
12	3.39	7.94
13	10.2	9.58
23	9.09	7.56

Отметим, что одномерные упругие и реономные характеристики Y_{ii}, $\varkappa_{ii}$ ($i = 1, 2$) в формуле (3.3) целесообразней определять из испытаний на чистый (квазичистый) изгиб. Это позволит нивелировать погрешности, вносимые второй гипотезой § 1 при рассмотрении неоднородного поля напряжений и деформаций при изгибе.

Оставшиеся реономные параметры ν_{ij} находим из следующей системы шести линейных операторных уравнений, расшифровывая первую гипотезу § 1 (уравнения 1 — 3) и учитывая, что высокоэластические деформации не вызывают изменения объема (уравнения 4 — 6):

$$\begin{aligned}
&\bar{Y}_{jj}\bar{Y}_{ii} = \bar{\nu}_{ij}\bar{\nu}_{ji}^{-1}, && \begin{matrix}1)\\2)\\3)\end{matrix} \quad i, j = \left|\begin{matrix}1,\ 2\\2,\ 3\\3,\ 1\end{matrix}\right. \\
&(1 - \bar{\nu}_{ij} - \bar{\nu}_{ik})\bar{Y}_{ii} = Y_{ii}(1 - \nu_{ij} - \nu_{ik}), && \begin{matrix}4)\\5)\\6)\end{matrix} \quad i, j, k = \left|\begin{matrix}1,\ 2,\ 3\\2,\ 1,\ 3\\3,\ 1,\ 2\end{matrix}\right.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь переменные индексы принимают соответственные значения: так для первого уравнения $i = 1$; $j = 2, \ldots$ для четвертого — $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ и т. д. Опуская громоздкие выкладки, получаем окончательно

$$\mu_{ij} = \frac{\varkappa_{ii}}{2\nu_{ij}}\left(1 + \frac{Y_{jj}}{Y_{ii}}\frac{\varkappa_{jj}}{\varkappa_{ii}} - \frac{Y_{kk}}{Y_{ii}}\frac{\varkappa_{kk}}{\varkappa_{ii}} - 2\nu_{ij}\right) \tag{3.5}$$

где i, j, k — циклично переставимые индексы дискретных значений 1, 2, 3, причем последнему переменному индексу приписывается знак минус.

В случае изотропного тела из равенства (3.5) следует известный результат Работнова Ю. Н. [11] (стр. 153), полученный в предположении отсутствия объемного последействия. Заметим, что для рассматриваемого ортотропного континуума оператор дилатации также постоянен во времени.

Таблица 3

Реономные параметры μ_{ij}, мгновенно-упругие ν_{ij} и длительные $\nu_{ij}(\infty)$ коэффициенты Пуассона

Индексы	ν_{ij}	$\nu_{ij}(\infty)$	μ_{ij}
12	0.144	0.171	0.218
21	0.101	0.112	0.136
13	0.510	0.519	0.017
31	0.371	0.345	−0.29
23	0.550	0.596	0.100
32	0.574	0.611	0.077

Соотношение (3.5) при $i = 1$, $j = 2$, $k = 3$ позволяет объяснить наблюдаемое рядом исследователей [4], [12] уменьшение во времени коэффициента ν_{31}. Это, по-видимому, имеет место для ориентированных нетканых слоистых стеклокомпаундов, податливость которых по толщине из-за наличия полимерных макропрослоек существенно выше податливости в направлениях армирования 11, 22. Для стеклотекстолитов (табл. 1) эта разница существенно сглаживается, и, как правило, μ_{31} (табл. 3). Естественно, возможен и граничный случай стабильности коэффициента Пуассона ν_{ij} во времени ($\mu_{ij} = 0$).

§ 4. Рассмотрим вопрос об определении линейных и сдвиговых реономных параметров модели для направлений и плоскостей, отличных от главных. Как и упругие, операторные коэффициенты деформаций рассматриваемой модели образуют в шестимерном пространстве симметричный тензор, компоненты которого в операторном виде преобразуются по известным [8] правилам тензорного анализа.

$$
\begin{matrix}
\overline{Y}_{11} & -\overline{\nu}_{12}\overline{Y}_{11} & -\overline{\nu}_{13}\overline{Y}_{11} & 0 & 0 & 0 \\
 & \overline{Y}_{22} & -\overline{\nu}_{23}\overline{Y}_{22} & 0 & 0 & 0 \\
 & & \overline{Y}_{33} & 0 & 0 & 0 \\
 & & & \overline{Y}_{23} & 0 & 0 \\
 & & & & \overline{Y}_{13} & 0 \\
 & & & & & \overline{Y}_{12}
\end{matrix} \qquad (4.1)
$$

Ограничиваясь лишь поворотом операторных компонентов тензора (4.1) в плоскости 12 на угол φ по отношению к основе 11 (фиг. 2), получаем окончательно операторные аналоги преобразованных упругих констант модели в виде ($i = m, n, 3$)

$$
\overline{Y}_{mi} = Y_{mi}[1 + \varkappa_{mi} K^*(0)]; \quad \overline{\nu}_{mn} = \nu_{mn}[1 + \mu_{mn} K^*(-\varkappa_{mm})] \qquad (4.2)
$$

где

$$
\varkappa_{mm} = \frac{\varkappa_{11} Y_{11}\cos^4\varphi + 0.25[\varkappa_{12} Y_{12} - 2\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12})]\sin^2 2\varphi + \varkappa_{22} Y_{22}\sin^4\varphi}{Y_{11}\cos^4\varphi + 0.25(Y_{12} - 2\nu_{12} Y_{11})\sin^2 2\varphi + Y_{22}\sin^4\varphi} \qquad (4.3)
$$

$$
\varkappa_{mn} = \frac{\varkappa_{12} Y_{12} + [\varkappa_{11} Y_{11} + \varkappa_{22} Y_{22} + 2\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12}) - \varkappa_{12} Y_{12}]\sin^2 2\varphi}{Y_{12} + [(1 + 2\nu_{12}) Y_{11} + Y_{22} - Y_{12}]\sin^2 2\varphi} \qquad (4.4)
$$

$$
\varkappa_{m3} = \frac{\varkappa_{23} Y_{23}\sin^2\varphi + \varkappa_{13} Y_{13}\cos^2\varphi}{Y_{23}\sin^2\varphi + Y_{13}\cos^2\varphi} \qquad (4.5)
$$

$$
\mu_{mn} = \frac{Y_{mm}^{-1}\{\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12}) - 0.25[\varkappa_{11} Y_{11} + \varkappa_{22} Y_{22} + 2\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12})]\sin^2 2\varphi\}}{[\nu_{12} Y_{11} - 0.25(Y_{mn} - Y_{12})]\, Y_{mm}^{-1}} - \varkappa_{mm} \qquad (4.6)
$$

Выражения в знаменателях формул (4.3) — (4.6) совпадают с известными [3], [8] „повернутыми“ упругими константами Y_{mm}, Y_{mn}, Y_{m3}, ν_{mn} (фиг. 2).

Анализ вышеприведенных формул показывает: если экстремальные упругие линейная Y_{mm} и сдвиговая Y_{mn} податливости исследуемой среды при $Y_{22} > Y_{11}$ имеют место при $\varphi > \pi/4$, то экстремум соответственных реономных параметров $\varkappa_{mm}$ и $\varkappa_{mn}$ наблюдается при $\varphi < \pi/4$. Для рассматриваемого стеклотекстолита (табл. 1, 2) указанные углы равны соответственно 48.3° и 44°. Отметим также практически полезную связь между реономным поведением модели при сдвиге в плоскости 12 и растяжением при $\varphi = \pi/4$ в направлении 44 (фиг. 2):

$$
\varkappa_{44} = \varkappa_{12} - 0.25\, Y_{44}^{-1}\{Y_{11}(\varkappa_{12} - \varkappa_{11}) - 2 Y_{22}[(\varkappa_{12} - \varkappa_{22})(1 - \nu_{21}) - \mu_{21}\nu_{21}]\}
$$

Данное равенство ($\varkappa_{44} \sim 0.06$) удовлетворительно подтверждается экспериментом § 1 (фиг. 3).

Днепропетровский горный институт
Севастопольское ВВМИУ

Поступила 23 XI 1967

Վ. Ա. ՄԱՆԿՈՎՍԿԻ, Մ. Ի. ՌՈԶՈՎՍԿԻ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԱՌԱՁԳԱ-ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ապակե տեքստոլիտի օրինակի վրա առաջարկված է օրթոտրոպ առաձգա-ժառանգական միջավայրի հաշվարկման սխեմա, ենթադրելով նյութի գծային և առանցքային սողքի գլխավոր չափերի համաչափությունը։ Որպես կորիզներ օգտագործված են Ռժանիցինի կորիզի ընդհանրացված էքսպոնենցիալ ֆունկցիաները։

V. A. MANKOVSKY, M. J. ROSOVSKY

ON THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY-HEREDITARY MEDIA

S u m m a r y

A calculating model of orthotropic elasticity-hereditary medium is suggested. Tissue glass reinforced plastics is taken as an example of this model.

A. R. Rzhanitsyn's kernel functions are used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Машиностроение, М., 1965.
2. *Кириносян Р. М.* О ползучести слоя стеклопластика при двухосном растяжении. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XVIII, 1, 1965.
3. *Смирнова М. К.* и др. Прочность корпуса судна из стеклопластика. Судостроение, Л., 1965.
4. *Брызгалин Г. И.* К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, 6, 1963.
5. *Кауе А.* Creep in an anisotropic medium. Brit. J. Appl. Phys., XV, 9, 1964.
6. *Колтунов М.А., Безухов В.Н.* Анализ ползучести ортотропного стеклопластика. Вестн. МГУ, мат.-мех., 6, 1963.
7. *Мартиросян М. М.* Описание ползучести стеклопластика СВАМ с помощью упруго-ползучего тела. Изв. АН АрмССР, механика, т. XIX, 6, 1966.
8. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
9. *Гуревич Г. И.* Об обобщении уравнения Максвелла на случай трех измерений с учетом малых деформаций упругого последействия. Тр. Ин-та Физики Земли АН СССР, 2(169), 1959.
10. *Слуцкий Е. Е.* Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятности χ^2. Изд. АН СССР, М.—Л., 1950.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Наука, М., 1966.
12. *Смотрин Н. Т., Чебанов В. М.* Ползучесть СВАМ (5:1)—Б по различным направлениям в плоскости листа при малых напряжениях. Механика полимеров, 1, 1967.