

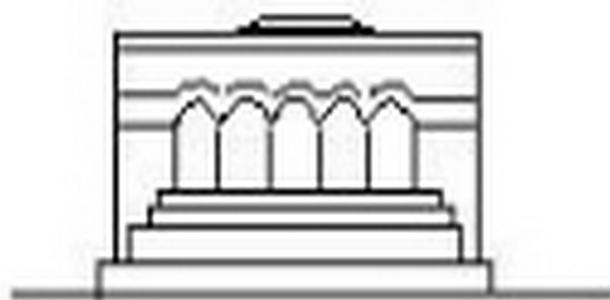
Մ Ե Ն Ա Ն Ի Կ Ա



МЕХАНИКА



MECHANICS



1967

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА

Рассматривается задача о сдавливании силой Q штампа с произвольным основанием и поверхность $\vartheta = \alpha$ упругого клина ($-\alpha < \vartheta < \alpha$, $0 < r < \infty$). Силы трения между штампом и поверхностью клина отсутствуют. Другая грань клина $\vartheta = -\alpha$ жестко заземлена.

Задача решается в рамках плоской теории упругости. Как обычно, главной целью ставится определение давления в области контакта ($a < r < b$) штампа с поверхностью клина.

Несколько автору известно, впервые данная задача для частного случая $\alpha = \pi/2$ рассматривалась в работе Тонояна В. С. [1], где она была сведена к решению системы двух интегральных уравнений.

В данной работе получено приближенное решение указанной задачи для всех значений $0 < \alpha < \pi$. Даны границы рационального практического использования найденных результатов.

Для определения приближенного решения производится специальная аппроксимация ядра интегрального уравнения задачи, после чего с помощью обобщенного интегрального преобразования Мелера-Фока уравнение решается в замкнутом виде.

Попутно в работе получено замкнутое решение задачи о плоском кручении упругого слоя штампом.

§1. Интегральное уравнение контактной задачи для клина

Применяя к уравнениям Ламе и граничным условиям рассматриваемой задачи, записанным в полярной системе координат, интегральное преобразование Меллина по переменной r , сведем задачу к решению следующего интегрального уравнения относительно контактного давления

$$\int_a^b q(\vartheta) K(\ln \vartheta, r) d\vartheta = \varepsilon \Delta \delta(r), \quad (a < r < b), \quad (1.1)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u, \alpha)}{u} \cos ut du, \quad \left(\Delta = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \right),$$

$$L(u, \alpha) = \frac{2u \sin 4\alpha - 2\alpha \operatorname{sh} 4u\alpha}{2\alpha \operatorname{ch} 4u\alpha + 2u^2 + \alpha^2 + 1 - 2u^2 \cos 4\alpha}, \quad (\alpha = 3 - 4\nu). \quad (1.2)$$

Преобразуем интегральное уравнение (1.1) введением новых переменных и обозначений по формулам

$$\xi = t \ln r/a - 1, \quad x = \lambda \ln r/a - 1, \quad \lambda = 2(\ln b/a)^{-1}, \quad (1.3)$$

$$\varphi(\xi) = \varphi(\xi), \quad \Delta \xi(r) = f(x).$$

Будем иметь

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x), \quad |x| < 1. \quad (1.4)$$

Отметим некоторые свойства функции $L(u, x)$ вида (1.2):

а) при $u \rightarrow \infty$ и всех x

$$L(u, x) \rightarrow 1 + O(e^{-iu^2}), \quad (1.5)$$

б) при $u \rightarrow 0$ и всех x

$$L(u, x) = A(x)u + O(u^2), \quad A(x) = 2(\sin 4x + 4xz)(x+1)^{-2}. \quad (1.6)$$

В соответствии с этими свойствами аппроксимируем функцию $L(u, x)$ выражением $\text{th } A(x)u$. Максимальные относительные ошибки этой аппроксимации для $\nu=1.8$ ($\mu=0.3$)

Таблица 1

x в град.	Ошибка в %	x в град.	Ошибка в %
45	8	115	1
55	4	125	1
65	1	135	1
75	2	145	1
85	2	155	1
95	2	165	1
105	1	175	1

и различных значений x даны в табл. 1.

С учетом указанной аппроксимации представим ядро $K(t)$ интегрального уравнения (1.4) в виде [2]

$$K(t) = -\ln \left| \text{th} \frac{\pi t}{4A(x)} \right|. \quad (1.7)$$

Решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) может быть получено в замкнутом виде (см. ниже) и,

очевидно, будет являться приближенным решением рассматриваемой контактной задачи для упругого клина.

Что касается точности такого приближенного решения, то можно доказать следующее: погрешность решения не превосходит погрешности используемой аппроксимации функции $L(u, x)$.

Произведем в интегральном уравнении (1.4) с ядром (1.7) замену переменных

$$\xi' = e^{-\pi/2A\xi}, \quad x' = e^{-\pi/2A x} \quad (1.8)$$

и введем обозначения

$$c = e^{-\pi/2A \lambda}, \quad d = e^{-\pi/2A \lambda}, \quad (1.9)$$

$$\varphi^*(\xi') = \varphi(\xi) e^{-\pi/2A \lambda}, \quad f^*(x') = \frac{\pi}{2A \lambda} f(x).$$

Получим

$$-\int_c^d \varphi'(t') \ln \left| \frac{\xi' - x'}{\xi' + x'} \right| d\xi' = \pi \Delta f'(x'), \quad (c \leq x' \leq d). \quad (1.10)$$

Как известно, уравнение (1.10) является интегральным уравнением антисимметричной задачи о вдавлении двух штампов в упругую полуплоскость [3]. Решение его может быть получено в замкнутом виде в форме, содержащей сингулярные интегралы [3], а также в форме, не содержащей сингулярных интегралов, методом работы [4].

Мы ниже получим решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) во второй форме, как более удобной для практических приложений, путем решения эквивалентного ему парного интегрального уравнения относительно трансформанты Фурье $\Phi(\beta)$ функции $\varphi(x)$, которое имеет вид

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \text{th} [A(\alpha) \beta \lambda] \beta^{-1} e^{-i\beta x} \Phi(\beta) d\beta = 2\pi f(x), & |x| < 1, \\ \int_{-1}^1 \Phi(\beta) e^{-i\beta x} d\beta = 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad (1.11)$$

здесь

$$\Phi(\beta) = \begin{cases} \int_{-1}^1 \varphi(\xi) e^{i\beta \xi} d\xi, & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \Phi(\beta) e^{-i\beta x} d\beta = \begin{cases} \varphi(x), & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \end{cases} \quad (1.12)$$

Заметим, что рассматриваемая задача может быть разбита на „четный“ и „нечетный“ варианты, соответствующие разложению функций $f(x)$, $\varphi(x)$ и $\Phi(\beta)$ на четные с „+“ и нечетные с „-“ слагаемые.

Для „четного“ варианта задачи формулы (1.11) и (1.12) представимы в форме

$$\begin{cases} \int_0^1 \Phi_+(\beta) \text{th} (A \beta \lambda) \cos \beta x \beta^{-1} d\beta = \pi f_+(x), & x \leq 1, \\ \int_0^1 \Phi_-(\beta) \cos \beta x d\beta = 0, & x > 1, \end{cases} \quad (1.13)$$

здесь

$$\Phi_+(\beta) = 2 \int_0^1 \varphi_+(\xi) \cos \beta \xi d\xi, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^1 \Phi_-(\beta) \cos \beta x d\beta = \begin{cases} \varphi_-(x), & x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

Будем в дальнейшем предполагать, что функция $f_+(x)$ имеет непрерывную первую производную. Тогда продифференцируем обе части первого уравнения (1.13) по x и введем следующие обозначения:

$$z = \frac{\pi}{A\lambda}, \quad x = \frac{Ayg}{\pi}, \quad b = \frac{\pi}{A\lambda}, \quad \Phi_+ \left(\frac{\gamma\pi}{A\lambda} \right) = \Psi(\gamma), \quad f_+ \left(\frac{Aiy}{\pi} \right) = g(y). \quad (1.15)$$

Будем иметь

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{A\lambda}} \Psi(\gamma) \operatorname{th} \pi \gamma \sin \gamma y d\gamma = -\pi g'(y), & y < b, \\ \int_0^{\frac{\pi}{A\lambda}} \Psi(\gamma) \cos \gamma y d\gamma = 0, & y > b. \end{cases} \quad (1.16)$$

Отметим, что парное интегральное уравнение (1.16), очевидно, эквивалентно сингулярному интегральному уравнению, которое получается дифференцированием по x обеих частей уравнения (1.4) с ядром (1.7) и правой частью $= f(x)$.

§ 2. Решение парного интегрального уравнения (1.16)

Ниже будет дано решение уравнения (1.16), основанное на использовании обобщенного преобразования Мелера-Фока. Отметим, что интегральное преобразование Мелера-Фока ранее использовалось при решении парных интегральных уравнений в работах [5, 6, 7], обобщенное преобразование Мелера-Фока — в работе [8].

Предварительно приведем перечень необходимых для дальнейшего формул.

1. Интегральные представления присоединенных функций конуса

$$\begin{aligned} P_{\nu, \nu+1}^{\pm}(ch t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh} t}{\Gamma(1/2 - \nu)} \int_0^t \frac{\cos \gamma y dy}{(cht - chy)^{-\nu}}, \quad (x > 0, \operatorname{Re} \nu < 1/2), \\ P_{-\nu, -\nu+1}^{\pm}(ch t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\operatorname{sh} t}{\Gamma(1/2 - \nu)} \int_0^t \frac{\cos \gamma y dy}{(chy - cht)^{-\nu}} + \\ &+ \cos \pi \nu \operatorname{cth} \pi t \int_0^t \frac{\sin \gamma y dy}{(chy - cht)^{-\nu}}, \quad (x > 0, |\operatorname{Re} \nu| < 1/2). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Первая из формул (2.1) имеется в [2], вторая получена автором.

2. Интегральные представления присоединенных функций конуса при $\nu = -1$. Полагая в (2.1) $\nu = -1$, получим

$$\begin{aligned} P_{-1, 0}^{\pm}(ch t) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{sh}^{-1} t \int_0^t \cos \gamma y (cht - chy)' dy, \\ P_{-1, -1}^{\pm}(ch t) &= -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{sh}^{-1} t \operatorname{cth} \pi t \int_0^t \sin \gamma y (chy - cht)' dy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что вторая формула (2.2) получена формально и может быть обоснована в рамках теории обобщенных функций.

На основании (2.2) найдем другие интегральные представления для $P_{-\gamma, \gamma}^{-1}(\operatorname{ch} t)$, которые и будут нами использованы в дальнейшем

$$P_{-\gamma, \gamma}^{-1}(\operatorname{ch} t) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\pi} (\gamma \operatorname{sh} t)^{-1} \int_0^t \frac{\sin \gamma y \operatorname{sh} y}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y}} dy, \quad (2.3)$$

$$P_{-\gamma, \gamma}^{-1}(\operatorname{ch} t) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} (\gamma \operatorname{sh} t)^{-1} \operatorname{cth} \pi \gamma \int_0^t \frac{\cos \gamma y \operatorname{sh} y}{1 - \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} t} dy.$$

Вторая формула (2.3) также носит формальный характер.

3. Обобщенное интегральное преобразование Мелера-Фока [8]

$$\psi(t) = \int_0^{\infty} \gamma \operatorname{th} \pi \gamma W(\gamma) P_{-\gamma, \gamma}^{-m}(\operatorname{ch} t) d\gamma, \quad (0 < t < \infty), \quad (2.4)$$

$$W(\gamma) = (-1)^m \int_0^{\infty} \psi(t) P_{\gamma, \gamma}^m(\operatorname{ch} t) \operatorname{sh} t dt, \quad (\gamma > 0).$$

4. Разрывные интегралы Мелера [5]

$$\int_0^t P_{-\gamma, \gamma}(\operatorname{ch} t) \cos \gamma y d\gamma = \begin{cases} [2(\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y)]^{-\gamma} & 0 < y < t, \\ 0 & 0 < t < y \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\int_0^{\infty} \gamma \operatorname{th} \pi \gamma P_{-\gamma, \gamma}(\operatorname{ch} t) \sin \gamma y d\gamma = \begin{cases} [2(\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} t)]^{-\gamma} & 0 < t < y, \\ 0 & 0 < y < t \end{cases}$$

5. Интегралы

$$\int_{-t}^t \frac{\ln \left| \operatorname{th} \frac{t-y}{4} \right| dy}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y}} = -\frac{1 - \sqrt{2}}{\operatorname{ch} t/2} K(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 t/2}), \quad (2.6)$$

$$\int_{-t}^t \frac{dy}{1 - \operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y} = \frac{2\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t/2} K(\operatorname{th} t/2).$$

Умножим теперь первое из соотношений (1.16) на $\operatorname{sh} y (\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y)^{-\gamma} dy$ и проинтегрируем по y от 0 до t , второе соотношение (1.16) умножим на $\operatorname{sh} y (\operatorname{ch} y - \operatorname{ch} t)^{-\gamma} dy$ и проинтегрируем по y от t до ∞ . Совершив затем перестановку интегралов в полученных выражениях и воспользовавшись формулами (2.3), получим следующее парное интегральное уравнение:

$$\begin{cases} \int_0^{\gamma} \Psi(\gamma) \operatorname{th} \pi_{\gamma} P_{-\nu, +\nu}^{-1}(\operatorname{ch} t) \gamma d_{\gamma} = \psi_*(t), & t \leq b, \\ \int_0^{\gamma} \Psi(\gamma) \operatorname{th} \pi_{\gamma} P_{-\nu, +\nu}^{-1}(\operatorname{ch} t) \gamma d_{\gamma} = 0, & t > b, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\left(\psi_*(t) = -\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh} t} \int_0^t \frac{\operatorname{sh} y g'(y)}{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} y} dy \right).$$

Применяя к (2.7) обобщенное интегральное преобразование Мелера-Фока (2.4) при $m = \Gamma$, найдем частное решение неоднородного парного интегрального уравнения (1.16) в виде

$$\Psi(\gamma) = -\int_0^b P_{-\nu, +\nu}^{-1}(\operatorname{ch} t) \psi_*(t) \operatorname{sh} t dt. \quad (2.8)$$

Посмотрим, имеет ли однородное уравнение (1.16) какое-либо решение. Полагая $g'(y) = 0$ и используя интегралы (2.5), без труда убедимся, что $\Psi(\gamma) = C P_{-\nu, +\nu}^{-1}(\operatorname{ch} b)$ дает нам решение однородного парного интегрального уравнения (1.16).

Общее решение уравнения (1.16) можно теперь представить в виде

$$\Psi(\gamma) = [C - \psi_*(b) \operatorname{sh} b] P_{-\nu, +\nu}^{-1}(\operatorname{ch} b) + \int_0^b [\psi_*(t) \operatorname{sh} t]' P_{-\nu, +\nu}^{-1}(\operatorname{ch} t) dt. \quad (2.9)$$

§ 3. Приближенное решение задачи

Возвращаясь в (2.9) к старым переменным по формулам (1.15) и учитывая еще соотношения

$$t = \frac{\pi \tau}{A\lambda}, \quad \psi_*(t) = \psi_+\left(\frac{A\lambda t}{\pi}\right), \quad (3.1)$$

будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi_+(\beta) &= \left[C - \psi_+(1) \operatorname{sh} \frac{\pi}{A\lambda} \right] P_{-\nu, +\nu}^{-1}(A\lambda\beta) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} \right) + \\ &+ \int_0^1 \left[\psi_+(\tau) \operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{A\lambda} \right]' P_{-\nu, +\nu}^{-1}(A\lambda\beta) \left(\operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{A\lambda} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\psi_+(\tau) = -\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sh} \frac{\pi \tau}{A\lambda}} \int_0^{\tau} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{A\lambda} f_+(x) dx}{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi \tau}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A\lambda}}}. \quad (3.3)$$

Заметим, что $\Phi_+(\xi)$ в виде (3.2), (3.3) удовлетворяет первому соотношению парного интегрального уравнения (1.13) лишь с точностью до постоянной, второму — полностью.

Найдем теперь по формуле (1.14) функцию $\varphi_-(x)$. Представляя (1.14) $\Phi_+(\xi)$ в виде (3.2) и используя первый из интегралов (2.5), будем иметь

$$\begin{aligned} \varphi_+(x) = & \frac{\left| C - \psi_+(1) \operatorname{sh} \frac{\pi}{A\lambda} \right|}{A\lambda \sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A\lambda} \right)}} + \\ & + \frac{1}{A\lambda} \int_x^1 \frac{\left| \psi_+(\tau) \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{A\lambda} \right| d\tau}{\sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A\lambda} \right)}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Функция $\varphi_-(x)$ в форме (3.4) удовлетворяет интегральному уравнению (1.4) с ядром (1.7) и правой частью $\pi f_-(x)$ с точностью до постоянной.

Чтобы функции $\Phi_+(\xi)$ и $\varphi_-(x)$ являлись точными решениями интегральных уравнений (1.13) и (1.4) с ядром (1.7), выберем соответствующим образом, остававшуюся до сих пор произвольной, постоянную C .

Используя второй интеграл (2.6) и формулу (3.4), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} P = 2 \int_0^1 \varphi_+(x) dx = & \frac{2}{\pi} C \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{2A\lambda} \right)^{-1} K \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2A\lambda} \right) - \\ & - \frac{2}{A\lambda} \int_0^1 \psi_+(\tau) \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2A\lambda} \left| E \left(\operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2A\lambda} \right) - K \left(\operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2A\lambda} \right) \right| d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим теперь частный случай $f_-(x) = 1$. Легко видеть, что тогда $\psi_+(\tau) = 0$ и формула (3.4) принимает вид

$$\varphi_+^*(x) = \frac{C}{A\lambda} \sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A\lambda} \right)}.$$

Подставляя $\varphi_+(x)$ в этой форме в левую часть интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) и учитывая, что интеграл, стоящий слева, есть некоторая постоянная при любом $x \in [-1, 1]$, в частности, при $x = -1$, будем иметь

$$-\frac{C}{A\lambda} \int_{-1}^1 \frac{\ln \left| \operatorname{th} \frac{\pi(1+t)}{4A\lambda} \right| d\tau}{\sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{A\lambda} \right)}} = \pi, \quad (3.6)$$

Вычисляя интеграл в (3.6) по первой формуле (2.6), найдем постоянную C для частного случая $f_-(x) = 1$ и представим $\varphi_-(x)$ в виде

$$\varphi_-(x) = \frac{\pi \operatorname{ch} \frac{\pi}{2A\lambda}}{A\lambda K \left(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{2A\lambda}} \right) \sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A\lambda} \right)}}. \quad (3.7)$$

На основании (3.7) и первой формулы (1.20) работы [9] получим другое представление для величины P

$$P = \frac{2\pi \operatorname{ch} \frac{\pi}{2A\lambda}}{A\lambda K \left(\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 \frac{\pi}{2A\lambda}} \right)} \int_0^1 \frac{f_-(x) dx}{\sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{A\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A\lambda} \right)}}. \quad (3.8)$$

Сравнивая формулы (3.5) и (3.8), получим выражение для постоянной C в общем случае функции $f_-(x)$.

Итак, формулы (3.3), (3.4), (3.5) и (3.8) дают замкнутое решение интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) для „четного“ варианта задачи¹.

Переходя в формулах (3.3)–(3.5) и (3.8) к старым обозначениям и переменным и соответствия с (1.3) и учитывая еще, что

$$Q = \int_0^a q(r) dr = \frac{2}{\lambda} \int_0^1 f_-(x) dx = \frac{P}{\lambda}, \quad (3.9)$$

получим приближенное решение „четного варианта“ рассматриваемой контактной задачи для упругого клина. В целях сокращения приведем лишь окончательную форму этого приближенного решения для част-

¹ Отметим, что к интегральному уравнению (1.4) с ядром (1.7) сводится также задача о кручении упругого слоя, жестко соединенного с недеформируемым основанием, бесконечным полосовым штампом. Между поверхностью штампа и слоем предполагается наличие полного сцепления. К штампу приложена сила T , отнесенная к единице его длины и направленная по его образующей. Замечая, что функция $f(x)$ будет равна $G\varepsilon$, где G — модуль сдвига материала слоя, ε — перемещение штампа в направлении его образующей, вызванное действием силы T , на основании формул (3.3)–(3.5) и (3.8) получим замкнутое решение этой смешанной задачи в виде (A-1)

$$\varphi(x) = \frac{\pi G \varepsilon \operatorname{ch} \frac{\pi}{2\lambda}}{h K' \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2\lambda} \right) \sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi}{\lambda} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{\lambda} \right)}}, \quad |x| \leq 1,$$

$$T = 2G \varepsilon K \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2\lambda} \right) \left[K' \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2\lambda} \right) \right]^{-1}.$$

Здесь $\varepsilon(x)$ — контактные касательные напряжения между штампом и слоем, $\varepsilon = h/a$, h — толщина слоя, a — полуширина полосового штампа.

ного случая штампа с плоским основанием и при условии его поступательного перемещения под действием силы Q на величину δ .

Для этого случая $f(x) = \Delta \delta$, и мы получаем

$$q(r) = \frac{\pi \Delta \delta}{rAK' \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2A_1} \right) \left(1 + \operatorname{th} \frac{\pi}{2A_1} \right) \sqrt{\left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{2A} \right] \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^{2A} \right]}}, \quad (3.10)$$

$$Q = 2\Delta \delta K \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2A_1} \right) \left| K' \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2A_1} \right) \right|^{-1}, \quad (3.11)$$

здесь $K'(k) = K(\sqrt{1-k^2})$.

Приведем еще формулу для расстояния H от вершины клина, на котором должна быть приложена к штампу сила Q , чтобы он перемещался поступательно. Это расстояние, очевидно, может быть найдено из следующего условия статики

$$M = QH = \int_a^b q(r) r dr. \quad (3.12)$$

Подставляя в (3.12) функцию $q(r)$ в виде (3.10), (3.11), после преобразований и вычисления интеграла [2] получим

$$H = \frac{1}{2K \left(\operatorname{th} \frac{\pi}{2A_1} \right)} \frac{ab \operatorname{ch} \frac{\pi}{2A_1}}{P} \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{A_1} \right). \quad (3.13)$$

здесь $P(x)$ — функция Лежандра.

Перейдем теперь к определению замкнутого решения интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7) для „нечетного“ варианта ($f(x) = -f(-x)$).

Предварительно докажем, что оно может быть получено дифференцированием по x определенным образом построенного решения для некоторого „четного“ случая.

Пусть $\varphi_+(x)$ есть решение интегрального уравнения (1.4) с правой частью вида

$$f_+(x) = \int_a^b f_-(x) dx + D. \quad (3.14)$$

Выберем постоянную D таким образом, чтобы $\varphi_+(1) = 0$.

Продифференцируем теперь обе части интегрального уравнения (1.4) для случая (3.14) по x . Произведя затем в левой части интегрирование по частям, без труда убедимся, что

$$\varphi_+'(x) = \varphi_-'(x). \quad (3.15)$$

В соответствии с изложенным найдем обращающееся в нуль при $x = -1$ решение „четного“ варианта интегрального уравнения (1.4) с ядром (1.7). На основании формулы (3.4) без труда получим

$$\varphi_+(x) = \frac{1}{A_l} \int_x^1 \frac{\left| \varphi_+(\tau) \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{A_l} \right|'}{\sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{A_l} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A_l} \right)}} d\tau, \quad (3.16)$$

Решение (3.16) имеет место при выполнении условия

$$C - D (1) \operatorname{sh} \frac{\pi}{A_l} = 0, \quad (3.17)$$

которое накладывает ограничение на функцию $f_+(x)$. В случае (3.14) условие (3.17) служит для определения постоянной D .

Теперь решение для „нечетного“ варианта в соответствии с (3.15) представим в виде

$$\varphi_-(x) = \frac{1}{A_l} \frac{d}{dx} \int_x^1 \frac{\varphi_-(\tau) \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{A_l}}{\sqrt{2 \left(\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{A_l} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A_l} \right)}} d\tau, \quad (3.18)$$

где

$$\varphi_-(\tau) = \left(\operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{A_l} \right)^{-1} \left| \varphi_-(\tau) \operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{A_l} \right|' = - \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi\tau}{A_l}} \frac{d}{d\tau} \int_x^1 \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi x}{A_l} f_-(x)}{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{A_l} - \operatorname{ch} \frac{\pi x}{A_l}}} dx. \quad (3.19)$$

Переходя в формулах (3.18), (3.19) к старым обозначениям и переменным в соответствии с (1.3), получим приближенное решение „нечетного варианта“ рассматриваемой контактной задачи для упругого клина. Учитывая, что указанные преобразования производятся достаточно просто, в целях сокращения окончательные формулы не приводим.

В заключение работы приведем таблицу зависимости величины A от угла α при $\nu = 1.8$ ($\mu = 0.3$). Эта таблица облегчает использование полученных выше приближенных решений.

Отметим, что приближенные решения интегрального уравнения (1.4), к которому была сведена рассмотренная

контактная задача для упругого клина, также могли бы быть получены

Таблица 2

α в град.	$2A(\alpha)$	α в град.	$2A(\alpha)$
45	2.885	112.5	7.468
52.5	3.238	120	7.915
60	3.626	127.5	8.302
67.5	4.073	135	8.655
75	4.588	142.5	9.009
82.5	5.162	150	9.396
90	5.770	157.5	9.843
97.5	6.379	165	10.358
105	6.953	172.5	10.932

методом „больших λ “, изложенным в работе [9], и методом „малых λ “ [10]. Вместе они обеспечивают перекрытие всего диапазона изменения параметра λ простыми и надежными формулами.

Ростовский государственный
университет

Поступила 25 VI 1966

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ

ԱՆՈՒՉՊՈՒԿԱՆ ԻՆՊՐ ԵՐ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՈՒՄԻ ԻՐԱՄԵ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Իրաարկիված է առաձգական սեպի մակերևութի մեջ շտամպի ներս-
քրման հարթ խնդիրը, երբ սեպի մի կողմը կոշտ ամրակցված է: Էնթալպի-
զում է, որ կոնտակտի գծի վրա շփման ուժերը բացակայում են:

Խնդիրը հանգեցված է ինտեգրալ հավասարման, որը լուծվում է փակ
տեսքով, մտցնելով կորիզի հատուկ ապրոկրիմացիոն: Հավասարման լուծման
համար օգտագործվում է Մեյլեր-Ֆոկի ընդհանրացրած ինտեգրալ ձևափոխու-
թյան ապարատը:

Տրված են ստացված արդյունքների ստացման օգտագործման սահ-
մանները:

V M ALEXANDROV

ON THE CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC WEDGE

S u m m a r y

A plane problem is examined on the pressing of a punch into the side of an elastic wedge when its other side is clamped. The forces of friction on the contact line are supposed to be absent.

The problem is reduced to an integral equation which is solved in a closed form after the introduction of a special approximation of the kernel. The generalized integral transformation of Mehler-Fock is used to solve the equation.

The boundaries of applicability of the obtained results are given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимоян В. С. Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН Арм.ССР, т. 37, № 5, 1963.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.
3. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехтеориздат, 1949.
4. Ростовцев Н. А. О некоторых случаях контактной задачи. УМЖ, т. 6, № 3, 1954.

5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. *Ивл.-физ. ж.*, т. 6, № 10, 1963.
6. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. *ПМ АН УССР*, т. 1, вып. 10, 1965.
7. *Бабляни А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. *ПММ*, т. 28, вып. 6, 1964.
8. *Руховиц А. Н., Уфлянд Я. С.* Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. *ПММ*, т. 30, вып. 2, 1966.
9. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. *ПММ*, т. 26, вып. 5, 1962.
10. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. *ПММ*, т. 27, вып. 5, 1963.

М. А. ЗАДНЯН

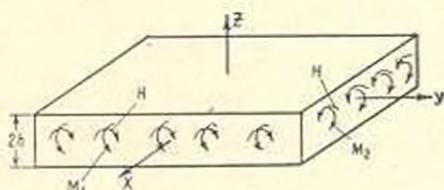
О ПОЛЗУЧЕСТИ ТОЛСТЫХ ПЛИТ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ И ИЗГИБЕ

В данной статье, не пользуясь приближенными допущениями классической теории плит, даны решения задач об установившейся и неустановившейся ползучести [1, 2] прямоугольной и круглой плиты при совместном растяжении и изгибе. Рассмотрены также совместный изгиб, кручение и растяжение прямоугольной плиты. В этих случаях задача приводится к нелинейным уравнениям, требующим применения приближенных способов решения.

§ 1. Установившаяся ползучесть прямоугольной плиты при совместном изгибе и кручении. Рассмотрим ползучесть прямоугольной плиты, на торцах которой приложены изгибающие моменты M_1 , M_2 и крутящий момент H (фиг. 1).

Приведем общие уравнения установившейся ползучести [1]:
 уравнения равновесия —

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$



Фиг. 1.

соотношения между компонентами напряжений и деформаций —

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \sigma &= f(\xi_t) \xi_x, & \tau_{xy} &= f(\xi_t) \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma &= f(\xi_t) \xi_y, & \tau_{yz} &= f(\xi_t) \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma &= f(\xi_t) \xi_z, & \tau_{xz} &= f(\xi_t) \gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_t = f(\xi_t) \xi_t, \quad (1.3)$$

где интенсивность напряжений и интенсивность скоростей деформаций определяются выражениями

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)}, \\ \xi_t &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + (\xi_y - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_x)^2 + 6(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2)}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

а компоненты скоростей деформаций связаны с компонентами скоростей зависимостями

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \xi_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \xi_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\chi_{x,y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, & 2\chi_{y,z} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, & 2\chi_{x,z} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Приведем сначала решения уравнений (1.1)–(1.5), когда скорости деформаций не зависят от x и y .

Полуобратным способом, примененным в [3], скорости ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= 2 \int \chi_{x,z} dz + A_1 xz + C_1 yz + A_0 x + D_0 y + G_0 z + E_0, \\ v &= 2 \int \chi_{y,z} dz + C_1 xz + B_1 yz + (2C_{11} - D_0) x + B_0 y + H_0 z + F_0, \\ w &= -\frac{A_1}{2} x^2 - \frac{B_1}{2} y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2} z^2 - C_1 xy - G_0 x - H_0 y - (A_0 + B_0)z - Q_0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\chi_{x,z}$ и $\chi_{y,z}$ — неизвестные функции от z , а A_1, B_1, \dots — произвольные постоянные. Согласно (1.5) имеем

$$\xi_x = A_0 + A_1 z, \quad \xi_y = B_0 + B_1 z, \quad \chi_{x,y} = C_0 + C_1 z. \quad (1.7)$$

Представляя некоторые компоненты напряжения в виде

$$\tau_{xx} = \tau_x + (2\xi_x + \xi_y) f(\xi_t), \quad \tau_{yy} = \tau_y + (\xi_x + 2\xi_y) f(\xi_t), \quad \tau_{xy} = \chi_{xy} f(\xi_t), \quad (1.8)$$

подставляя в уравнения равновесия (1.1) и интегрируя, аналогично [3] получим

$$\tau_x = -a_1 x - b_1 y - c_0, \quad \tau_y = a_1 z + a_0, \quad \tau_{xy} = b_1 z + b_0, \quad (1.9)$$

где a_1, b_1, \dots — новые произвольные постоянные.

Вводя обозначения

$$S = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_x \xi_y + \xi_y^2 + \chi_{xy}^2}, \quad T = \sqrt{\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2}, \quad (1.10)$$

будем иметь

$$\tau_x = -\sqrt{S^2 f^2 + T^2}, \quad \xi_t = \sqrt{S^2 + \frac{T^2}{f^2}}. \quad (1.11)$$

При степенном упрочнении

$$\tau_x = k \xi_t^m, \quad f = k \xi_t^{m-1}. \quad (1.12)$$

Тогда при помощи соотношений (1.11)–(1.12) приходим к степенному уравнению относительно f

$$S^2 f^{\frac{2m}{m-1}} + T^2 f^{\frac{2}{m-1}} = k^{\frac{2m}{m-1}}. \quad (1.13)$$

Определяя из этого уравнения f , получим явные выражения компо-

нентов напряжений и скоростей через координаты и произвольные постоянные.

Для рассматриваемой задачи (фиг. 1) компоненты скорости ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= A_1 xz + C_1 yz, & v &= C_1 xz + B_1 yz, \\ w &= -\frac{A_1}{2} x^2 - \frac{B_1}{2} y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2} z^2 - C_1 xy. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Тогда

$$\varepsilon_x = A_1 z, \quad \varepsilon_y = B_1 z, \quad \gamma_{xy} = C_1 z, \quad (1.15)$$

$$\bar{\varepsilon}_i = \gamma |z|, \quad \gamma = \sqrt{A_1^2 + A_1 B_1 + B_1^2 + C_1^2}. \quad (1.16)$$

Компоненты напряжений возьмем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2A_1 + B_1) z f(\gamma |z|), & \sigma_y &= (A_1 + 2B_1) z f(\gamma |z|), \\ \tau_{xy} &= C_1 z f(\gamma |z|), & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Подставляя (1.17) в статические условия

$$\int_{-h}^h \sigma_x z dz = M_1, \quad \int_{-h}^h \sigma_y z dz = M_2, \quad \int_{-h}^h \tau_{xy} z dz = H, \quad (1.18)$$

получим

$$A_1 = \frac{2M_1 - M_2}{6J}, \quad B_1 = \frac{2M_2 - M_1}{6J}, \quad C_1 = \frac{H}{2J}, \quad (1.19)$$

где

$$J = \int_{-h}^h f(\gamma |z|) z^2 dz. \quad (1.20)$$

Подставляя (1.19) в (1.16), получим

$$\gamma = \frac{M_1}{2\sqrt{3}J}, \quad M_1 = \sqrt{M_1^2 - M_1 M_2 + M_2^2 + 3H^2}. \quad (1.21)$$

При степенном упрочнении (1.13)

$$J = \frac{k^{\frac{1}{m}}}{(m+2)^{\frac{1}{m}}} M_1^{1-\frac{1}{m}} h^{1-\frac{2}{m}}. \quad (1.22)$$

Подставляя значения A_1 , B_1 и C_1 в (1.14), получим

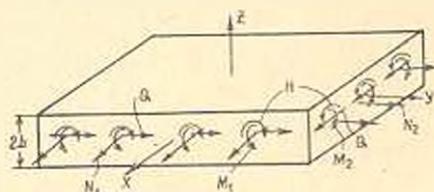
$$\begin{aligned} u &= \frac{2M_1 - M_2}{6J} xz + \frac{H}{2J} yz, & v &= \frac{2M_2 - M_1}{6J} yz + \frac{H}{2J} xz, \\ w &= -\frac{2M_1 - M_2}{12J} x^2 - \frac{2M_2 - M_1}{12J} y^2 - \frac{M_1 + M_2}{12J} z^2 - \frac{H}{2J} xy. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Компоненты напряжения (1.17) в случае (1.12) примут вид ($z > 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_1}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_y &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_2}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, \\ \tau_{xy} &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{H}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

В частном случае, когда плита подвергается чистому изгибу, $H = 0$.

Когда, кроме изгибающих M_1 , M_2 и крутящих H моментов, на торцах плиты приложены также растягивающие силы N_1 , N_2 и сдвигающая сила Q (фиг. 2), компоненты скорости будем искать в виде



Фиг. 2.

$$\begin{aligned} u &= A_1 xz + C_1 yz + A_0 x, \\ v &= C_2 xz + B_1 yz + B_0 y. \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$w = -\frac{A_1}{2} x^2 - \frac{B_1}{2} y^2 - \frac{A_1 + B_1}{2} z^2 - C_1 xy - (A_0 + B_0) z,$$

а компоненты напряжения — в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= [2A_0 + B_0 + (2A_1 + B_1)z] f(\xi_1), & \sigma_y &= [A_0 + 2B_0 + (A_1 + 2B_1)z] f(\xi_1), \\ \tau_{xy} &= (C_0 + C_1 z) f(\xi_1), & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{a^2 + \beta^2 z + \gamma^2 z^2}, & a^2 &= A_0^2 + A_0 B_0 + B_0^2 + C_0^2, \\ \beta^2 &= A_0 B_1 + 2A_0 A_1 + 2B_0 B_1 + B_0 A_1, & \gamma^2 &= A_1^2 + A_1 B_1 + B_1^2 + C_1^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Кроме (1.18), имеем также статические условия

$$\int_{-b}^b \sigma_x dz = N_1, \quad \int_{-b}^b \sigma_y dz = N_2, \quad \int_{-b}^b \tau_{xy} dz = Q. \quad (1.28)$$

Подставляя (1.26) и (1.18) и (1.28), находим

$$N_1 = (2A_0 + B_0) J_0 + (2A_1 + B_1) J_1, \quad N_2 = (A_0 + 2B_0) J_0 + (A_1 + 2B_1) J_1, \quad (1.29)$$

$$M_1 = (2A_0 + B_0) J_1 + (2A_1 + B_1) J_2, \quad M_2 = (A_0 + 2B_0) J_1 + (A_1 + 2B_1) J_2, \quad (1.30)$$

$$Q = C_0 J_0 + C_1 J_1, \quad H = C_0 J_1 + C_1 J_2, \quad (1.31)$$

где обозначено

$$J_n = \int_{-b}^b f(\sqrt{a^2 + \beta^2 z + \gamma^2 z^2}) z^n dz = (-1)^n \int_0^b f(\sqrt{a^2 + \beta^2 z + \gamma^2 z^2}) z^n dz \quad (1.32)$$

$$n = 0, 1, 2.$$

Когда заданы деформации, постоянные A_0, B_0, \dots становятся известными и тогда можно легко определить напряжения и внешние силы из (1.26) и (1.29)–(1.32). В случае заданных внешних сил (1.29)–(1.31) представляет систему шести уравнений с шестью неизвестными A_0, A_1, B_0, B_1, C_0 и C_1 , решение которой можно получить только при помощи приближенных приемов.

Аналогичная задача совместного изгиба, кручения и растяжения прямоугольной плиты для идеально-пластического материала рассмотрена в [4].

§ 2. Неустановившаяся ползучесть прямоугольной плиты при совместном изгибе и кручении. Рассмотрим задачу ползучести и релаксации прямоугольной плиты, материал которой подчиняется соотношениям наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2], а торцы нагружены изгибающими моментами $M_1(t), M_2(t)$ и крутищими моментами $H(t)$.

Наряду с уравнениями равновесия (1.1) имеем соотношения между компонентами напряжения и деформации

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_x, & \tau_{xy} &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \gamma_{xy}, \\ \sigma_y - \sigma &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_y, & \tau_{yz} &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \gamma_{yz}, \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \varepsilon_z, & \tau_{xz} &= \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} \gamma_{xz}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\varphi(\varepsilon_i) = \sigma_i + \int_0^{\varepsilon_i} \sigma_i K(t, \tau) d\tau, \quad (2.2)$$

где σ_l и ε_l определяются по выражениям (1.4), а зависимость между перемещениями и деформациями—по (1.5), где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$ заменяем через $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$. Выведем решение системы приведенных уравнений ползучести, когда компоненты деформации зависят только от z и t . Аналогично § 1 положим

$$\begin{aligned} u &= 2 \int \gamma_{xz}(z, t) dz + A_1(t) xz + C_1(t) yz + A_0(t) x + \\ &\quad + D_0(t) y + G_0(t) z + E_0(t), \\ v &= 2 \int \gamma_{yz}(z, t) dz + C_1(t) xz + B_1(t) yz + [2C_0(t) - D_0(t)] x + \\ &\quad + B_0(t) y + H_0(t) z + F_0(t), \\ w &= -\frac{A_1(t)}{2} x^2 - \frac{B_1(t)}{2} y^2 - \\ &\quad - \frac{A_1(t) + B_1(t)}{2} x^2 - C_1(t) xy - G_0(t)x - H_0(t)y - [A_0(t) + B_0(t)]z - Q(t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где γ_{xz} и γ_{xy} — неизвестные функции от z и t , а $A_1(t), \dots$ — произвольные функции от t .

Для деформации имеем

$$\varepsilon_x = A_0(t) + A_1(t)z, \quad \varepsilon_y = B_0(t) + B_1(t)z, \quad \gamma_{xy} = C_0(t) + C_1(t)z. \quad (2.4)$$

Решая (2.2) относительно σ_i и вводя обозначения

$$f_*(\varepsilon_i) = \frac{1}{\varepsilon_i} \left[\varphi(\varepsilon_i) + \int_0^{\varepsilon_i} \varphi(\varepsilon_i) R(t, \varepsilon) d\varepsilon \right], \quad (2.5)$$

где $R(t, \varepsilon)$ — резольвента ядра $-K(t, \varepsilon)$, компоненты напряжений представим в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x + (2\varepsilon_x + \varepsilon_y) f_*(\varepsilon_i), & \tau_{xy} &= \gamma_{xy} f_*(\varepsilon_i), \\ \sigma_y &= \sigma_y + (\varepsilon_x + 2\varepsilon_y) f_*(\varepsilon_i). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в уравнения равновесия (1.1) и интегрируя, аналогично [3] получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -a_1(t)x - b_1(t)y - C_0(t), \\ \tau_{xz} &= a_1(t)z + \alpha_0(t), \quad \tau_{yz} = b_1(t)z + b_0(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $a_1(t), \dots$ — также произвольные функции от t .

Используя обозначения, аналогичные (1.10)–(1.11), получим нелинейное интегральное уравнение Вольтерра относительно f_*

$$V \sqrt{S^2 f_*^2 + T^2} = \varphi \left(\sqrt{S^2 - \frac{T^2}{f_*^2}} \right) + \int_0^{\varepsilon_i} \varphi \left(\sqrt{S^2 + \frac{T^2}{f_*^2}} \right) R(t, \varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.8)$$

Для нашей задачи, аналогично § 1, перемещения ищем в виде

$$\begin{aligned} u &= A_1(t)xz + C_1(t)yz, & v &= C_1(t)xz + B_1(t)yz, \\ w &= -\frac{A_1(t)}{2}x^2 - \frac{B_1(t)}{2}y^2 - \frac{A_1(t) + B_1(t)}{2}z^2 - C_1(t)xy. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= A_1(t)z, & \varepsilon_y &= B_1(t)z, & \gamma_{xy} &= C_1(t)z, \\ \sigma_x &= S = \gamma |z|, & \gamma &= \sqrt{A_1^2(t) + A_1(t)B_1(t) + B_1^2(t) + C_1^2(t)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Компоненты напряжения представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2A_1 + B_1)z f_*(\gamma |z|), & \tau_{xy} &= C_1 z f_*(\gamma |z|), \\ \sigma_y &= (A_1 + 2B_1)z f_*(\gamma |z|), & \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Причем аргумент t иногда для простоты опускается. Из условий статки (1.18) будем иметь

$$M_1 = 2(2A_1 + B_1)J_z, \quad M_2 = 2(A_1 + 2B_1)J_z, \quad H = 2C_1J_z, \quad (2.12)$$

где

$$J_* = \int_0^h f_*(\gamma z) z^2 dz. \quad (2.13)$$

В случае релаксационной задачи, т. е. когда заданы деформации, A_1 , B_1 и C_1 будут известными, и по формулам (2.11) и (2.12) легко определить характер изменения напряжений и внешних моментов во времени. В частности, когда деформации во времени не меняются, то A_1 , B_1 и C_1 будут постоянными. Тогда

$$f_*(\gamma|z|) = \frac{\varphi(\gamma|z|)}{\gamma|z|} \chi(t), \quad \chi(t) = 1 + \int_0^t R(t, \tau) d\tau. \quad (2.14)$$

Следовательно, напряжения (2.11) и моменты (2.12) во времени меняются по закону $\chi(t)$. Для реальных материалов χ — убывающая функция по t .

В случае ползучести, когда заданы внешние моменты, разрешая систему уравнений (2.12) относительно A_1 , B_1 и C_1 , получим

$$A_1(t) = \frac{2M_1(t) - M_2(t)}{6J_*(t)}, \quad B_1(t) = \frac{2M_3(t) - M_1(t)}{6J_*(t)}, \quad C_1(t) = \frac{H(t)}{2J_*(t)}. \quad (2.15)$$

Легко заметить, что

$$\gamma J_* - M_1 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{M_1^2 - M_1 M_3 + M_3^2 + 3H^2}. \quad (2.16)$$

Принимая для φ степенной закон $\varphi = k\varepsilon^m$, получим

$$\left(\frac{M_1}{J_*}\right)^m + \int_0^t \left(\frac{M_1}{J_*}\right)^m R(t, \tau) d\tau = \frac{m+2}{kh^{m+2}} M_1. \quad (2.17)$$

Отсюда

$$J_* = J_0 \frac{M_1(t)}{M_1(0)} \chi_*^{-\frac{1}{m}}(t), \quad J_0 = \frac{k^{\frac{1}{m}}}{(m+2)^{\frac{1}{m}}} M_1^{1-\frac{1}{m}}(0) h^{1+\frac{2}{m}}, \quad (2.18)$$

$$\chi_*(t) = \frac{M_1(t)}{M_1(0)} + \int_0^t \frac{M_1(\tau)}{M_1(0)} K(t, \tau) d\tau. \quad (2.19)$$

Полагая в (2.11) $\varphi = k\varepsilon^m$ и учитывая полученные выше соотношения, для напряжения находим ($z > 0$)

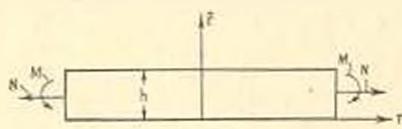
$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_1(t)}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_y &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{M_2(t)}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, \\ \tau_{xy} &= \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{H(t)}{h^2} \left(\frac{z}{h}\right)^m, & \sigma_z &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Имея значения $J_{*}(t)$, по формулам (2.9) и (2.15) легко определить компоненты перемещения. Общий множитель $\chi_{*}(t)$ характеризует закон возрастания деформаций во времени с учетом ползучести материала. При постоянных внешних моментах имеем $\frac{M_i(t)}{M_i(0)} = 1$ и

$$\chi_{*}(t) = 1 + \int_0^t K(t, \tau) d\tau. \quad (2.21)$$

Когда, кроме моментов, на торцах плиты приложены растягивающие силы $N_1(t)$, $N_2(t)$ и сдвигающая сила $Q(t)$, компоненты перемещения, напряжения и внешние силы будут иметь аналогичный (1.25) — (1.32) вид с тем отличием, что A_0, B_0, \dots будут функциями от t , а вместо $f(z_i)$ будем иметь $f_{*}(z_i)$. В случае релаксационной задачи A_0, A_1, \dots будут известными, и по вышеуказанным соотношениям легко определить изменение во времени напряжений и внешних сил. При постоянных деформациях напряжения и внешние силы будут убывать во времени как функция $\chi(t)$.

§ 3. Установившаяся ползучесть круглой плиты при совместном изгибе и растяжении. Положим, что на боковой поверхности круглой плиты приложены равномерно распределенные изгибающие моменты и растягивающие силы N (фиг. 3). Уравнения равновесия осесимметричной задачи имеют вид



Фиг. 3.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Соотношения установившейся ползучести следующие:

$$\begin{aligned} \sigma_r - \sigma &= f(\xi_i) \xi_r, & \sigma_z - \sigma &= f(\xi_i) \xi_z, \\ \sigma_\theta - \sigma &= f(\xi_i) \xi_\theta, & \tau_{rz} &= f(\xi_i) \tau_{rz}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\sigma_i = f(\xi_i) \xi_i, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \xi_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}, \\ \xi_i &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\xi_r - \xi_\theta)^2 + (\xi_\theta - \xi_z)^2 + (\xi_z - \xi_r)^2 + 6\tau_{rz}^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Компоненты скорости деформаций и скорости связаны зависимостями

$$\dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \dot{\epsilon}_\theta = \frac{u}{r}, \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad 2\dot{\gamma}_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (3.5)$$

Предполагая, что скорости деформаций не зависят от r , полуобратным способом для нашей задачи получим

$$u = (A_0 + A_1 z) r, \quad w = C - \frac{A_1}{2} r^2 - A_1 z^2 - 2A_1 z, \quad (3.6)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{\varepsilon}_\theta = A_0 + A_1 z, \quad \bar{\varepsilon}_z = -2A_0 - 2A_1 z, \quad \eta_{rz} = 0,$$

где A_0, A_1, C — произвольные постоянные.

Принимая

$$\tau_r = \tau_\theta = 3\bar{\varepsilon}_r f(|\sqrt{3}|\bar{\varepsilon}_r|), \quad \tau_z = \tau_{rz} = 0, \quad (3.7)$$

удовлетворяем уравнениям равновесия (3.1).

Подставляя

$$\tau_r = 3(A_0 + A_1 z) f(|\sqrt{3}|\bar{\varepsilon}_r|) \quad (3.8)$$

в условия статики

$$\int_0^h \tau_r dz = N, \quad \int_0^h \tau_z dz = M \quad (3.9)$$

и полагая $\bar{\varepsilon}_r > 0$ по всей толщине плиты, получим

$$N = \frac{1}{A_1} \int_{\sqrt{3}A_0}^{\sqrt{3}(A_0 + A_1 h)} f(x) x dx, \quad M = \frac{1}{A_1^2} \int_{\sqrt{3}A_0}^{\sqrt{3}(A_0 + A_1 h)} f(x) x^2 dx - \frac{A_0}{A_1} N. \quad (3.10)$$

Для степенного упрочнения (1.12) имеем

$$\tau_r = \tau_\theta = 3 \frac{m+1}{2} (A_0 + A_1 z)^m, \quad (3.11)$$

$$N = \frac{3 \frac{m-1}{2} k}{(1+m) A_1} [(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}], \quad (3.12)$$

$$M = \frac{3 \frac{m-1}{2} k}{(2+m) A_1^2} [(A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}] - \frac{A_0}{A_1} N. \quad (3.13)$$

В случае, когда $\bar{\varepsilon}_r$ меняет знак, т. е. когда $\bar{\varepsilon}_r < 0$ при $0 < z < z_0$ ($z_0 = -\frac{A_0}{A_1}$) и $\bar{\varepsilon}_r > 0$ при $z_0 < z < h$, будем иметь

$$N = \frac{1}{A_1} \int_{-1\sqrt{3}A_0}^{1\sqrt{3}(A_0 - A_1 h)} f(x) x dx,$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{3} A_1^2} \int_{1\sqrt{3}(A_0 - A_1 h)}^{\sqrt{3}(A_0 + A_1 h)} f(x) x^2 dx + \frac{1}{1\sqrt{3} A_1^2} \int_{-1\sqrt{3}A_0}^{\sqrt{3}A_0} f(x) x^2 dx - \frac{A_0}{A_1} N. \quad (3.14)$$

Для степенного закона f имеем

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 3 \frac{m+1}{2} (A_0 + A_1 z) |A_0 + A_1 z|^{m-1}, \quad (3.15)$$

$$N = \frac{3 \frac{m+1}{2} k}{(1+m) A_1} [(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}], \quad (3.16)$$

$$M = \frac{3 \frac{m+1}{2} k}{(2+m) A_1} [(A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}] - \frac{A_0}{A_1} N. \quad (3.17)$$

В случае чистого изгиба $N = 0$, $z_0 = \frac{1}{2} h$. Из (3.16)–(3.17) находим

$$A_0 = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{M^{\frac{1}{1+m}}}{3^{\frac{1}{2m}} k^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{2}{h}\right)^{\frac{2}{m}}, \quad A_1 = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{M^{\frac{1}{1+m}}}{3^{\frac{1}{2m}} k^{\frac{1}{m}}} \left(\frac{2}{h}\right)^{1+\frac{2}{m}}. \quad (3.18)$$

Подставляя A_0 и A_1 в (3.15), получим

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{4M}{V 3 h^2} \left(\frac{2z}{h} - 1\right) \left|\frac{2z}{h} - 1\right|^{m-1}. \quad (3.19)$$

Закрепляя какую-нибудь точку плиты, например, принимая $w(0, 0) = 0$, получим $C = 0$. Тогда

$$u = A_1 \left(z - \frac{h}{2}\right) r, \quad w = A_1 \left(hz - \frac{r^2}{2} - z^2\right). \quad (3.20)$$

§ 4. Неустановившаяся ползучесть круглой плиты при совместном изгибе и растяжении. Рассмотрим совместный изгиб и растяжение круглой плиты (фиг. 3), материал которой подчиняется наследственной теории ползучести Ю. Н. Работнова [2]

$$\sigma_r - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_r, \quad \sigma_z - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_z, \quad (4.1)$$

$$\sigma_\theta - \sigma = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \varepsilon_\theta, \quad \tau_{rz} = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \gamma_{rz},$$

$$\varphi(\varepsilon_i) = \sigma_i + \int_0^t \sigma_i K(t, \tau) d\tau, \quad (4.2)$$

где σ_i и ε_i определяются по (3.4), а зависимость между напряжениями и деформациями — по (3.5), где $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \dots$ заменяем через $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \dots$.

Компоненты перемещения и деформаций примем в виде

$$u = [A_0(t) + A_1(t)z]r, \quad w = C(t) - 2A_0(t)z - \frac{A_1(t)}{2}r^2 - A_1(t)z^2, \quad (4.3)$$

$\varepsilon_r - \varepsilon_\theta = A_0(t) + A_1(t)z, \quad \varepsilon_z = -2A_0(t) - 2A_1(t)z, \quad \gamma_{rz} = 0,$
где A_0, A_1, C — произвольные функции от t .

Компоненты напряжения будем искать в виде

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 3(A_0 + A_1 z) f_3(t) \quad (1 - 3|A_0 + A_1 z|), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{rz} = 0. \quad (4.4)$$

Выражения (4.3)–(4.4) удовлетворяют всем уравнениям принятой теории ползучести.

Подставляя ε_r из (4.4) в интегралы (3.9), принимая для φ степенной закон $\varphi = k\varepsilon^m$, при $\varepsilon_r > 0$, $0 \leq z < h$ получим

$$N(t) = \frac{3^{-\frac{m-1}{2}} k}{1+m} \left| \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1} + \int_0^t \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1} R(t, \tau) d\tau \right|, \quad (4.5)$$

$$M(t) = \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{2+m} \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{A_1^2} - \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{1+m} A_0 \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1^2} + \int_0^t \left| \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{2+m} \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{A_1^2} - \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{1+m} A_0 \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{A_1^2} \right| R(t, \tau) d\tau. \quad (4.6)$$

Когда ε , меняет знак, т. е. $\varepsilon_r < 0$ при $0 \leq z \leq z_0$ и $\varepsilon_r > 0$ при $z_0 < z < h$, будем иметь

$$N(t) = \frac{3^{-\frac{m+1}{2}} k}{1+m} \left| \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{A_1} + \int_0^t \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{A_1} R(t, \tau) d\tau \right|, \quad (4.7)$$

$$M(t) = \frac{3^{-\frac{m-1}{2}} k}{2+m} \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}}{A_1^2} - \frac{3^{-\frac{m-1}{2}} k}{1+m} A_0 \frac{(A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{A_1^2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^{z_1} \left\{ \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k A_0 (A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1^2} \right\} R(t, z) dz. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

В случае релаксационной задачи, когда деформации не меняются во времени, A_0 и A_1 будут также постоянными во времени, и тогда

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r = \varepsilon_0 = \varepsilon_r^0(t) = \varepsilon_0^0(t), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{z2} = 0, \\
 N(t) = N_0^0(t), \quad M(t) = M_0^0(t), \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r^0 = \varepsilon_0^0 = 3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 z)^m, \\
 N_0 = \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1}, \quad (4.10) \\
 M_0 = \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \frac{A_0}{A_1} N_0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} z_r \geq 0 \\ 0 \leq z \leq h, \end{matrix} \\
 \varepsilon_r^0 = \varepsilon_0^0 = 3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 z) |A_0 + A_1 z|^{m-1}, \\
 N_0 = \frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+1} - (-A_0)^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1}, \quad (4.11) \\
 M_0 = \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_0)^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \frac{A_0}{A_1} N_0.
 \end{aligned}$$

при $z_r \leq 0$, $0 \leq z \leq z_1$, $z_r > 0$, $z_0 \leq z \leq h$.

Когда заданными являются $M(t)$ и $N(t)$, из (4.5)–(4.8) будем иметь

$$\frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1} = N(t) + \int_0^t N(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} - A_0^{m+2}}{2+m} \frac{1}{A_1^2} - \\
 & - \frac{3^{\frac{m-1}{2}} k A_0 (A_0 + A_1 h)^{m+1} - A_0^{m+1}}{1+m} \frac{1}{A_1^2} = M(t) + \int_0^t M(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

при $z_r \geq 0$, $0 \leq z \leq h$;

$$\frac{3^{\frac{m-1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m-1} - (-A_0)^{m+1}}{1+m} = N(t) + \int_0^z N(\tau) K(t, \tau) d\tau, \quad (4.14)$$

$$\frac{3^{\frac{m+1}{2}} k (A_0 + A_1 h)^{m+2} + (-A_1)^{m+2}}{2+m} =$$

$$\frac{3^{\frac{m+1}{2}} k A_1 (A_0 + A_1 h)^{m-1} - (-A_0)^{m+1}}{1-m} = M(t) + \int_0^z M(\tau) K(t, \tau) d\tau \quad (4.15)$$

при $z_1 < 0, 0 < z < z_0, z_1 > 0, z_0 < z < h$.

Рассмотрим теперь частный случай чистого изгиба. Принимая $N(t) = 0$, из (4.14)–(4.15) получим

$$A_0(t) = -A_1(t) \frac{h}{2}, \quad A_1(t) = \left(1 + \frac{m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \frac{M^{\frac{1}{m}}(0)}{3^{\frac{1}{2m}} k^{\frac{1}{m}}} \gamma_{\frac{1}{m}}(t), \quad (4.16)$$

$$\gamma_{\frac{1}{m}}(t) = \frac{M(t)}{M(0)} = \int_0^z \frac{M(\tau)}{M(0)} K(t, \tau) d\tau. \quad (4.17)$$

Компоненты напряжения и перемещения в этом случае будут

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \left(1 + \frac{m}{2}\right) \frac{4M(t)}{h^2} \left(\frac{2z}{h} - 1\right) \left|\frac{2z}{h} - 1\right|^{m-1},$$

$$u = A_1(t) \left(z - \frac{h}{2}\right) r, \quad w = A_1(t) \left(hz - z^2 - \frac{r^2}{2}\right).$$

Таким образом, напряжения меняются во времени по закону $M(t)$, а перемещения — по $\gamma_{\frac{1}{m}}(t)$ (4.17).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 12 V 1966

Մ Ա ՋԱՊՈՏԱՆ

ՀԱՄԱՏՈՂ ԶԿՐԱՆ ԵՎ ՄՈՒՐԱՆ ԳԵՊԵՈՒՄ ՀԱՍՏ ՈՍԱԿԻ
ՈՐՂԵՐ ՄԱՍԻՆ

Ո Վ Փ Ո Փ Ո Վ

ներկա հոդվածում, առանց դատման տեսությունների և նմադրամիտությունների պատկերման արվում են ուղղանկյուն և կլոր սալիների մաքուր ծոման խնդիրների լուծումը կալույնացված սոլդի դեպքում:

Այդ խնդիրները լուծելիս օգտագործվում է կրտսճակադարձ եղանակը: Տեղափոխումների արտահայտություն մեջ պարունակվում է z^2 անդամ, որը մտցնում է ուղղամ մոտափոր լուծման մեջ:

M. A. ZADOYAN

ON THE CREEP OF THICK PLATES UNDER COMBINED EXTENSION AND FLEXURE

S u m m a r y

In the present article, without using the assumptions of classical theories the solutions of the combined extension and flexure of rectangle and circular plates in the cases of stable and unstable creeps [1, 2] are given.

In solving these problems, the semireversal method is used.

The non-linear equations of these problems are to be solved by numerical methods approximately.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. Работнов Ю. И. Некоторые вопросы теории ползучести. Вестник МГУ, № 10, 1948.
3. Задоян М. А. Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. Докл. АН СССР, т. 156, № 1.
4. Задоян М. А. О двух задачах теории идеальной пластичности. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964.

А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ИЗГИБЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК,
 ЛЕЖАЩИХ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Исходя из уточненной теории анизотропных пластинок, изложенной в работе [1], дается решение задачи изгиба прямоугольной трансверсально-изотропной пластинки, лежащей на упругом винклеровом основании, под действием произвольной поперечной нагрузки в случае, когда два противоположных края пластинки свободно оперты, а два других могут быть закреплены различным образом.

В частности, решена задача изгиба прямоугольных пластинок, свободно опертых по всему контуру, под действием равномерно-распределенной нагрузки.

§ 1. Задача об изгибе трансверсально-изотропных пластинок по уточненной теории С. А. Амбарцумяна [1], учитывающей влияние поперечных сдвигов и нормальных напряжений в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки, приводится к следующей системе двух независимых уравнений относительно прогиба w и некоторой функции Φ [2]:

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w - Z - \omega\Delta Z, \\ \Delta\Phi - \delta^2\Phi = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через функции w и Φ следующим образом:

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{2D}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Delta w + \frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \omega\left(Z - \frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{2D}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta w - \frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \omega\left(Z - \frac{2}{\delta^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right), \\ H &= -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} - \frac{2D}{\delta^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Delta w - \frac{2\omega}{\delta^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial x\partial y} - \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$N_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\Delta w - \omega\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y},$$

$$N_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\Delta w - \omega\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

где

$$\delta^2 = \frac{10G'}{Gh^2}, \quad \omega = \frac{h^2}{10(1-\nu)}\left(2\frac{1G}{G'} - \nu\frac{E}{E'}\right), \tag{1.3}$$

Δ — оператор Лапласа; h , D — толщина и изгибная жесткость пластинки; E , G , ν — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии, параллельной срединной плоскости пластинки; E' , G' , ν' — модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона в плоскостях, перпендикулярных плоскости изотропии; Z — интенсивность распределенной поперечной нагрузки.

Уравнения изгиба пластинки, лежащей на сплошном упругом пинклеровом основании, а также все необходимые расчетные величины получим из приведенных выше формул, если в них положить

$$Z = q(x, y) - kw, \quad (1.4)$$

где k — коэффициент постели, $q(x, y)$ — интенсивность активной нагрузки.

§ 2. Рассмотрим задачу об изгибе прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании, под действием произвольной активной поперечной нагрузки $q(x, y)$.

Пусть пластинка изготовлена из трансверсально-изотропного материала, плоскость изотропии которого параллельна срединной плоскости пластинки.

Подставив (1.4) в (1.1), для задачи изгиба пластинки, лежащей на упругом основании, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} D\Delta\Delta w + k(w - \nu\Delta w) &= q - \nu\Delta q, \\ \Delta\Phi - \nu^2\Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть пластинка свободно опирается по двум противоположным краям $x=0$ и $x=a$ (фиг. 1). Условия свободного опирания по этим краям, согласно [1], запишутся в виде



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} w &= 0 \\ M_x &= 0 \\ \psi = \frac{12}{h^2} N_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{при } \begin{aligned} x &= 0 \\ x &= a. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Решения уравнений (2.1), тождественно удовлетворяющие граничным условиям (2.2), ищем в виде

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} W_n(y) \sin \lambda_n x, \\ \Phi(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(y) \cos \lambda_n x \quad \left(\lambda_n = \frac{\pi n}{a} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставив (2.3) в уравнения (2.1) и представив внешнюю активную нагрузку q в виде ряда

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(y) \sin \lambda_n x, \quad (2.4)$$

где

$$P_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \lambda_n x dx, \quad (2.5)$$

получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения относительно $W_n(y)$ и $\Phi_n(y)$:

$$W_n^{IV} - 2(\gamma_n^2 - \delta_n^2) W_n'' + (\delta_n^2 + \gamma_n^2) W_n = \frac{1 + \lambda_n^2 m}{D} P_n(y) - \frac{m}{D} P_n'(y), \quad (2.6)$$

$$\Phi_n'' - (\lambda_n^2 + \delta_n^2) \Phi_n = 0, \quad (2.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_n^2 \\ \delta_n^2 \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\lambda_n^2 + \frac{k}{D} (1 + \lambda_n^2 m)} \pm \left(\lambda_n^2 + \frac{k m}{2D} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Общее решение каждого из уравнения (2.6) и (2.7) соответственно запишется в виде

$$\begin{aligned} W_n(y) = & A_n \operatorname{ch} \gamma_n y \cos \delta_n y + B_n \operatorname{sh} \gamma_n y \sin \delta_n y + \\ & + C_n \operatorname{sh} \gamma_n y \cos \delta_n y + D_n \operatorname{ch} \gamma_n y \sin \delta_n y + W_n^*(y), \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\Phi_n(y) = F_n \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_n^2 + \delta_n^2} y + H_n \operatorname{ch} \sqrt{\lambda_n^2 + \delta_n^2} y. \quad (2.10)$$

Здесь W_n^* представляет собой частное решение неоднородного уравнения (2.6) и определяется формулой

$$\begin{aligned} W_n^*(y) = & \frac{1}{2D\gamma_n\delta_n(\gamma_n^2 + \delta_n^2)} \int_0^y [mP_n(\xi) - (1 + \lambda_n^2 m)P_n'(\xi)] \times \\ & \times [\gamma_n \sin \delta_n(\gamma_n - y) \operatorname{ch} \gamma_n(\gamma_n - y) - \delta_n \cos \delta_n(\gamma_n - y) \operatorname{sh} \gamma_n(\gamma_n - y)] d\xi, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где под введенным обозначением (y) над знаком интеграла будем понимать, что после выполнения интегрирования следует ξ заменить через y .

Постоянные интегрирования $A_n, B_n, C_n, D_n, F_n, H_n$, входящие в (2.9) и (2.10), определяются из граничных условий пластинки по краям $y = \pm \frac{b}{2}$.

Таким образом, решение каждой конкретной задачи сводится к нахождению постоянных интегрирования, входящих в выражения (2.9), (2.10), после чего по вышеприведенным формулам могут быть определены все необходимые расчетные величины.

§ 3. В качестве примера рассмотрим задачу изгиба прямоугольной пластинки, лежащей на упругом основании, под действием равномерно распределенной нагрузки $q_0 = \text{const}$ в случае, когда пластинка свободно оперта по всему контуру. Для равномерно распределенной нагрузки выражение (2.5) примет вид

$$P_n = \frac{4q_0}{\pi D} \quad (n=1, 3, 5, \dots). \quad (3.1)$$

В этом случае изогнутая поверхность пластинки симметрична относительно оси x (фиг. 1). В силу указанной симметрии очевидно, что в выражениях (2.9) и (2.10) $\Phi_n(y)$ будет нечетной, а $W_n(y)$ — четной функциями. Поэтому для рассматриваемой здесь задачи в выражениях (2.9) и (2.10) следует положить

$$C_n = D_n = H_n = 0. \quad (3.2)$$

С учетом (3.1) и (3.2) из (2.9) и (2.10) получим

$$W_n(y) = A_n \operatorname{ch} \gamma_n y \cos \beta_n y + B_n \operatorname{sh} \gamma_n y \sin \beta_n y + \frac{4q_0(1 + \lambda_n^2 \omega)}{\pi D n (\gamma_n^2 + \beta_n^2)}, \quad (3.3)$$

$$\Phi_n(y) = F_n \operatorname{sh} \sqrt{\gamma_n^2 + \beta_n^2} y.$$

Неизвестные постоянные A_n, B_n, F_n , в силу симметрии, могут быть определены из условий свободного опирания пластинки по одному из краев $y = \pm \frac{b}{2}$.

Условия свободного опирания по краю $y = \frac{b}{2}$ имеют вид [1]

$$w = 0, \quad M_x = 0, \quad \varphi = \frac{12}{h^3} N_x = 0. \quad (3.4)$$

Учитывая (1.2) и (2.3), граничные условия (3.4) можно привести к виду

$$W_n\left(\frac{b}{2}\right) = 0,$$

$$W_n'\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{\omega}{D} P_n\left(\frac{b}{2}\right) - \frac{1}{D \lambda_n} \Phi_n'\left(\frac{b}{2}\right) = 0, \quad (3.5)$$

$$W_n''\left(\frac{b}{2}\right) + \frac{\omega}{D} P_n''\left(\frac{b}{2}\right) = 0.$$

Подставив значения $W_n(y), \Phi_n(y)$ и $P_n(y)$ из (3.1) и (3.3) в (3.5), получим систему трех линейных алгебраических уравнений относительно A_n, B_n, F_n , решая которую, найдем

$$A_n = \frac{2q_0}{\pi D n \gamma_n \beta_n} \left\{ \left[\omega - (1 + \lambda_n^2 \omega) \frac{\gamma_n^2 - \beta_n^2}{(\gamma_n^2 + \beta_n^2)^2} \right] \operatorname{sh} \alpha_n \sin \beta_n - \right.$$

$$\left. - \frac{2 \gamma_n \beta_n (1 + \lambda_n^2 \omega)}{(\gamma_n^2 + \beta_n^2)^2} \operatorname{ch} \alpha_n \cos \beta_n \right\}, \quad (3.6)$$

$$B_n = - \frac{2q_0}{\pi D n \gamma_n \beta_n} \left\{ \left[\omega - (1 + \lambda_n^2 \omega) \frac{\gamma_n^2 - \beta_n^2}{(\gamma_n^2 + \beta_n^2)^2} \right] \operatorname{ch} \alpha_n \cos \beta_n + \right.$$

$$+ \frac{2 \gamma_n \delta_n (1 + i_n^2 \omega)}{(\gamma_n^2 - \delta_n^2)^2} \operatorname{sh} \alpha_n \sin^2 \beta_n \Big\}, \quad F_n = 0$$

где

$$\alpha_n = \frac{\gamma_n b}{2}, \quad \beta_n = \frac{\delta_n b}{2}$$

$$f_{n1}(y) = \operatorname{ch} \alpha_n \operatorname{ch} \gamma_n y \cos \beta_n \cos \delta_n y + \operatorname{sh} \alpha_n \operatorname{sh} \gamma_n y \sin \beta_n \sin \delta_n y,$$

$$f_{n2}(y) = \operatorname{ch} \alpha_n \operatorname{sh} \gamma_n y \cos \beta_n \sin \delta_n y - \operatorname{sh} \alpha_n \operatorname{ch} \gamma_n y \sin \beta_n \cos \delta_n y.$$

После определения коэффициентов, пользуясь (2.3) и (3.3), для искомых функций $w(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ окончательно получим

$$w(x, y) = \frac{4q_0}{\pi D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n(\gamma_n^2 - \delta_n^2)} \left\{ (1 + i_n^2 \omega) + \frac{1}{2 \gamma_n \delta_n f_{n1}\left(\frac{b}{2}\right)} \left[[\delta_n^2 - (1 + i_n^2 \omega)(\gamma_n^2 - \delta_n^2 - i_n^2)] f_{n2}(y) - 2 \gamma_n \delta_n (1 + i_n^2 \omega) f_{n1}(y) \right] \right\} \sin \delta_n x, \quad (3.7)$$

$$\Phi(x, y) \equiv 0.$$

Имея выражения w и Φ , легко найти все необходимые расчетные величины, на чем останавливаться не будем. Приведем лишь выражение максимального прогиба, имеющего место при $x = \frac{a}{2}, y = 0$

$$w_{\max} = \frac{4q_0}{\pi D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\gamma_n^2 - \delta_n^2)} \left\{ (1 + i_n^2 \omega) - \frac{\operatorname{ch} \alpha_n \cos \beta_n}{2 \gamma_n \delta_n (\operatorname{sh}^2 \alpha_n + \cos^2 \beta_n)} \left[2(1 + i_n^2 \omega) \gamma_n \delta_n + [\delta_n^2 - (1 + i_n^2 \omega)(\gamma_n^2 - \delta_n^2 - i_n^2)] \operatorname{th} \alpha_n \operatorname{tg} \beta_n \right] \right\}. \quad (3.8)$$

Из (3.7), как частный случай, легко получить:

а) выражение прогиба w^0 , соответствующее решению рассматриваемой задачи по классической теории изгиба пластинок. Действительно, полагая в (3.7) $\omega = 0$, получим

$$w^0(x, y) = \frac{4q_0}{\pi D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n(\gamma_n^2 + \frac{k}{D})} \left\{ 1 + \frac{1}{f_{n1}\left(\frac{b}{2}\right)} \left[\frac{i_n^2}{\sqrt{\frac{k}{D}}} f_{n2}(y) - f_{n1}(y) \right] \right\} \sin \delta_n x, \quad (3.9)$$

максимальное значение которого будет

$$w_{\max}^0 = \frac{4q_0}{\pi D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n(\gamma_n^2 + \frac{k}{D})} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_n \cos \beta_n}{\operatorname{sh}^2 \alpha_n + \cos^2 \beta_n} \left[1 + \frac{i_n^2}{\sqrt{\frac{k}{D}}} \operatorname{th} \alpha_n \operatorname{tg} \beta_n \right] \right\}; \quad (3.9^*)$$

б) выражение \bar{w} при отсутствии упругого основания, соответствующее задаче изгиба пластинки по теории [1], учитывающей деформации поперечных сдвигов и нормальных напряжений, действующих в плоскостях, параллельных срединной плоскости пластинки. Для этого в (3.7), выполняя предельный переход при $k \rightarrow 0$, получим

$$\bar{w} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ \left| 1 - \frac{\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + 2}{2} \operatorname{ch} \lambda_n y + \frac{\lambda_n}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} y \operatorname{sh} \lambda_n y \right| + \right. \\ \left. + \omega \lambda_n^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \alpha_n} \right) \right\} \sin \lambda_n x, \quad (3.10)$$

$$\bar{w}_{\max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \left\{ \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \left| 1 - \frac{\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} \right| + \right. \\ \left. + \omega \frac{[\pi^2]}{a^2} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha_n} \right) \right\}.$$

Отметим, что этот результат был получен в работе [4], лишь с той разницей, что там учитывалось влияние только поперечных сдвигов;

в) выражение w^* при отсутствии упругого основания, соответствующее классической теории изгиба пластинок [3]

$$w^* = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \left\{ \left| 1 - \frac{\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} \operatorname{ch} \lambda_n y + \frac{\lambda_n}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} y \operatorname{sh} \lambda_n y \right| \sin \lambda_n y, \right. \\ \left. \right\} \quad (3.11)$$

$$w_{\max}^* = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^5} \left| 1 - \frac{\alpha_n \operatorname{th} \alpha_n + 2}{2 \operatorname{ch} \alpha_n} \right|.$$

В качестве численного примера приведем значения максимального прогиба для квадратной пластинки при отсутствии упругого основания, вычисленные по теории [1].

Выполняя вычисления с учетом $b = a$ и подставив значение ω по формуле (1.3) в (3.10), получим

$$\bar{w}_{\max} = w_{\max}^* \left\{ 1 + \frac{1.8145}{1 - \mu^2} \left[\frac{E}{G} - \mu (1 + \mu) \frac{E}{E'} \right] \frac{h^2}{a^2} \right\}, \quad (3.12)$$

где w_{\max}^* — максимальный прогиб квадратной пластинки, вычисленный по классической теории пластинок, определяемый формулой [3]

$$w_{\max}^* = 0.00406 \frac{q_0 a^4}{D}. \quad (3.13)$$

В табл. 1 приводятся значения отношения максимального прогиба

(3.12) квадратной пластинки к соответствующей величине, вычисленной по классической теории пластинок (3.13) для различных значений отношений $\frac{E}{G}$, $\frac{E}{E'}$ и $\frac{h}{a}$ при $\nu = \nu' = 0,25$.

Таблица 1

Значения отношения $\frac{w_{max}}{w_{max}^0}$

		$\frac{E}{E'}$	$\frac{E}{G}$			
			0	2.5	5	10
$\frac{h}{a} = \frac{1}{10}$	0	1	1.0484	1.0968	1.1935	
	1	—	1.0423	—	—	
	2	—	—	1.0847	1.1814	
	5	—	—	1.0665	1.1633	
$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}$	0	1	1.1935	1.3871	1.7742	
	1	—	1.1694	—	—	
	2	—	—	1.3387	1.7258	
	5	—	—	1.2661	1.6532	

В табл. 2 приведены результаты вычислений отношения $\frac{w_{max}}{w_{max}^0}$ по формулам (3.8) и (3.9) для квадратной пластинки $a=b=100$ см, изготовленной из изотропного материала с $\nu = 0,25$, при различных соотношениях $\frac{k}{E}$ и $\frac{h}{a}$.

Таблица 2

$\frac{k}{E}$	$\frac{h}{a}$	
	1,10	1,5
10^{-1}	1.0351	1.1853
$5 \cdot 10^{-1}$	1.0110	1.1537

Результаты вычислений показывают, что учет поперечных сдвигов естественно приводит к увеличению прогибов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 21 X 1965

ՄԵԼՐՈՆՅԱՆ Ա. Պ.

ԱՌՈՋՁԻՍԱԿԵՆ ՇՐՋԵՐ ԿՐԱՆ ԿՏՆԵԼՈՂ ՏՐԿՆԹԵՐՈՒԱԼ-ԻՋՈՏՐՈՊ
ՍԱԼԵՐԻ ՇՐՋՐԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ն. Վ.

Ելնելով [1] աշխատության մեջ բերված անիզոտրոպ սալերի ճշգրտափած տեսությունից, լուծված է առածցական հիմքի վրա գտնվող կամայական բևեռավորված ուղղանկյուն սալի ծոման խնդիրը, այն զեպքում, երբ սալի երկու հանդիպակադ եզրերը սղատ հենված են, իսկ մյուս երկուսը՝ ամրացված են տարբեր ձևերով:

Մասնավոր զեպքում լուծված է ամբողջ կոնտուրով աղատ հենված ուղղանկյուն սալի ծոման խնդիրը՝ համասարաչափ բաշխված բևեռի ապեկցության տակ:

A. P. MELKONIAN

ON THE BENDING OF THE TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES,
LYING ON THE ELASTIC FOUNDATION

S u m m a r y

Proceeding from the more precise theory of anisotropic plates, proposed by S. A. Ambartzumian, which takes into account the influence of transversal displacements and normal strains at the planes parallel to the middle plane of the plate the problem of bending of a rectangular transversal isotropic plate lying on the elastic Vincler's foundation under the action of arbitrary transversal load in the case, when two opposite sides of the plate are freely supported, and the other two can be fastened arbitrarily is solved.

Particularly the problem of bending of rectangular plates, freely supported over the whole contour under the action of uniformly distributed load is solved. The results of calculations for some values of the ratio of elastic constants and relative thickness of plate are compared with the results of the classic theory of plates.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об устойчивости прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Прикл. механ., т. 2, вып. 2, 1966.
3. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки. Гостехиздат, М., 1948.
4. Мелконян А. П., Хачатрян А. А. Об изгибе прямоугольных трансверсально-изотропных пластинок. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 1, 1965.

А. М. СИМОНЯН

О РЕШЕНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ПОЛЗУЧЕСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Осесимметричная контактная задача теории упругости решена в работах [1—5] путем сведения ее к парным интегральным уравнениям. Для решения осесимметричной контактной задачи известны также метод сведения к задаче теории потенциала [6—8] и метод сведения к решению парных рядов [9]. В работе [10] решение осесимметричной контактной задачи теории упругости сведено к одному интегральному уравнению Фредгольма 1 рода.

В настоящей работе используется идея сведения поставленной задачи к решению методом М. Г. Крейна [11] одного интегрального уравнения со специальным ядром. Для определения границ контакта здесь используется метод последовательных уточнений [12], который использовался и при решении плоской контактной задачи [13].

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим равновесие двух прижимаемых друг к другу ортогональных тел вращения, находящихся в осесимметричном температурном поле. Будем полагать, что сопротивление материалов этих тел описывается формулами линейной наследственности [14]

$$\sigma_{ij}(t) = (1 - Q^*) \left[\nu_{ij} \frac{\sigma_j(t)}{E_j} - \nu_{ij} \frac{\sigma_i(t)}{E_i} - \nu_{ij} \frac{\sigma_k(t)}{E_k} \right] + \epsilon^0_{ij}(t), \quad (x, y, z) \quad (1.1)$$

$$\tau_{ij}(t) = (1 - Q^*) \frac{\tau_{ij}(t)}{G_{ij}}, \quad (x, y, z) \quad (1.2)$$

где

$$Q^* v(t) = \int_0^t v(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad (1.3)$$

$$\delta(t, \tau) = E_i C_i(t, \tau) = G_{ij} \omega_{ij}(t, \tau). \quad (1.4)$$

Здесь C_i и ω_{ij} — меры ползучести соответственно при осевом нагружении и при сдвиге, а τ^{ij} — вынужденные деформации.

Учитывая, что зависимость между напряжениями и перемещениями линейная, сведем поставленную задачу к двум задачам — к температурной задаче свободного от нагрузок полупространства и к кон-

тактичной задаче с учетом перемещений, соответствующих решению температурной задачи.

Примем следующее предложение: „Если объемные силы отсутствуют, то перемещения точек ортотропного тела со свободными от нагрузок поверхностями не зависят от факта ползучести“. Доказательство этого предложения аналогично приведенному в [14].

Используя это предложение, температурную задачу для полупространства будем решать в предположении упругой работы материала.

§ 2. О температурной задаче для упругого трансверсально-изотропного полупространства

Уравнения равновесия в перемещениях для трансверсально-изотропного тела запишем в виде

$$\frac{\sigma^2 u}{\partial r^2} - a_1 \frac{\sigma^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + a_2 \frac{\sigma^2 w}{\partial r \partial z} - a_3 \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\sigma^2 u}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} - b_1 \frac{\sigma^2 w}{\partial r^2} - b_2 \frac{\sigma^2 w}{\partial z^2} + b_1 \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = b_3 \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2.2)$$

где принято

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{G_{rz}}{E_r} \frac{1 - \nu_{rz}^2 - 2\nu_{rz}\nu_{zz} - 2\nu_{rz}\nu_{zz}\nu_{zz}}{1 - \nu_{rz}\nu_{zz}}, \\ a_2 &= \frac{\nu_{zz} + \nu_{rz}^2}{1 - \nu_{rz}\nu_{zz}} - a_1, \quad a_3 = \frac{1 + \nu_{rz} + \nu_{zz} + \nu_{rz}\nu_{zz}}{1 - \nu_{rz}\nu_{zz}}, \\ b_1 &= \frac{1}{1 + \frac{E_z}{G_{rz}} \frac{\nu_{rz}(1 - \nu_{rz})}{1 - \nu_{rz}^2 - 2\nu_{rz}\nu_{zz} - 2\nu_{rz}\nu_{zz}\nu_{zz}}}, \\ b_2 &= \frac{1 - \nu_{rz}^2}{\frac{G_z}{E_r} (1 - \nu_{rz}^2 - 2\nu_{rz}\nu_{zz} - 2\nu_{rz}\nu_{zz}\nu_{zz}) - \nu_{rz}(1 + \nu_{rz})}, \\ b_3 &= \left(1 + \frac{\nu_{rz}}{1 - \nu_{rz}}\right) b_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь ν — коэффициент температурного расширения, принятый одинаковым по всем направлениям, а $T = 0$ соответствует отсутствию напряжений при отсутствии внешних сил.

Применим к уравнениям (2.1) и (2.2) преобразования Ханкеля [15] в виде

$$u(r, z) = \int_0^\infty \tilde{u}(\tilde{r}, z) J_1(\tilde{r}) \tilde{r} d\tilde{r}, \quad (2.4)$$

$$w(r, z) = \int_0^{\infty} \xi \varphi(\xi, z) f_0(r\xi) d\xi, \quad (2.5)$$

$$T(r, z) = \int_0^{\infty} \xi f(\xi, z) f_0(r\xi) d\xi, \quad (2.6)$$

где $f(\xi, z) = \int_0^{\infty} r T(r, z) f_0(r\xi) dr$, а f — бesselева функция 1 рода индекса ν .

Используя свойства бesselевых функций, из (2.1) и (2.2) получим

$$b_2 \frac{\partial^2 \varphi(\xi, z)}{\partial z^2} + \xi \frac{\partial \varphi(\xi, z)}{\partial z} - b_1 \xi^2 \varphi(\xi, z) = b_3 \alpha \frac{\partial f(\xi, z)}{\partial z}, \quad (2.7)$$

$$a_1 \frac{\partial^2 \varphi(\xi, z)}{\partial z^2} - \xi a_2 \frac{\partial \varphi(\xi, z)}{\partial z} - \xi^2 \varphi(\xi, z) = -\alpha_3 \alpha f(\xi, z). \quad (2.8)$$

Учитывая ограниченность напряжений при $z \rightarrow \infty$, найдем

$$\varphi(\xi, z) = C_1(\xi) e^{-x_1 z} + C_2(\xi) e^{-x_2 z} + \sum_{i=1}^k A_i e^{-\lambda_i z} \int_0^z e^{-\lambda_i \xi \zeta} F(\xi, \zeta) d\zeta, \quad (2.9)$$

$$\psi(\xi, z) = \left(\frac{\alpha_3}{a_2} - b_2 \right) \frac{\alpha}{b_1 \xi^2} \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{a_1 b_2}{a_2 b_1 \xi^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \left(1 - \frac{b_2}{a_1} \right) \frac{1}{b_1 \xi} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (2.10)$$

где

$$F(\xi, \zeta) = \frac{(a_2 b_3 - a_1 b_2) \frac{\partial^2 f(\xi, \zeta)}{\partial \zeta^2} + a_1 b_1 \xi^2 f(\xi, \zeta)}{a_1 b_2} \xi.$$

Здесь x_i — корни уравнения ($\text{Re } x_1 > 0$; $\text{Re } x_2 > 0$)

$$\Phi(x) = x^4 + \frac{a_2 - b_1 - b_2}{a_1 b_1} x^2 + \frac{b_1}{a_1 b_2} = 0,$$

а A_i — коэффициенты разложения

$$\frac{1}{\Phi(D)} = \sum_{i=1}^k \frac{A_i}{D - x_i}.$$

Используя краевые условия $\varphi_2|_{z=0} = 0$, $\varphi_{r,z}|_{z=0} = 0$, для определения $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ получим уравнения

$$\begin{aligned} a_1 [x_1^2 C_1(\xi) + x_2^2 C_2(\xi)] - \left(1 - \frac{\alpha_2 \nu_{r,z}}{1 - \nu_{r,z}} \right) [C_1(\xi) + C_2(\xi)] = \\ = a_2 \left(1 - \frac{\alpha_3}{a_1} + \frac{2\nu_{r,z}}{1 - \nu_{r,z}} \right) \frac{\alpha}{\xi} f(\xi, z)|_{z=0}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$[x_1 C_1(\xi) + x_2 C_2(\xi)](b_2 - a_2 b_1 - a_2) - \\ - a_1 b_2 [x_1^2 C_1(\xi) - x_2^2 C_2(\xi)] - (a_2 b_1 - a_2) \frac{z}{\xi^2} \frac{df(\xi, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (2.12)$$

Если между упругими постоянными трансверсально-изотропного тела имеют место следующие связи

$$\frac{E_r}{E_z} = 1 - \nu_{rz}^2 + \nu_{rz}^2 \nu_{\theta z} \quad (2.13)$$

$$\nu_{r\theta} = \frac{\nu_{rz}(1 - \nu_{rz})}{E_r - \nu_{rz} E_z} \quad (2.14)$$

которые тождественно удовлетворяются для изотропного тела, то частные решения уравнений (2.1) и (2.2) можно выразить посредством одной функции Π , называемой для изотропного тела термоупругим потенциалом перемещений [16]

$$u = \frac{\partial \Pi}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial \Pi}{\partial z} \quad (2.15)$$

При этом для функции $\Pi(r, z, t)$ получим уравнение Пуассона

$$\zeta^2 \Pi = \Omega T, \quad (2.16)$$

где

$$\Omega = z \frac{1 + \nu_{rz} + \nu_{\theta z} + \nu_{rz}\nu_{\theta z}}{1 - \nu_{rz}\nu_{\theta z}} \quad (2.17)$$

Вслед за этим определяем напряжения на границе полупространства и решаем задачу для полупространства, находящегося под действием нагрузок, равных и противоположно направленных полученным напряжениям, при отсутствии воздействия температуры. Наложение этих двух решений дает искомое решение задачи.

§ 3. Зависимость перемещения границы полупространства от осесимметричной нормальной нагрузки

В работе [13] было показано, что при отсутствии заданных и вынужденных деформаций напряженное состояние анизотропного тела не зависит от факта ползучести. Поэтому напряжения от действия сосредоточенной силы $p(\xi, t) ds$ будут распределяться по упругому закону [17]:

$$\sigma_r(r, z) = \frac{p(\xi, t) ds}{2\pi} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 + (r_1 - r_2)^2}} \left[\frac{r_1^2}{(R^2 - r_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{r_2^2}{(R^2 + r_2^2 z^2)^{3/2}} \right] + \right. \\ \left. + \frac{1 - \nu_{rz}}{\sqrt{z^2 + (r_1 - r_2)^2}} \frac{z}{R^2} \left[\frac{r_1^2(1 - h^2 r_1^2)}{(R^2 + r_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{r_2^2(1 - h^2 r_2^2)}{(R^2 - r_2^2 z^2)^{3/2}} \right] - \frac{(1 - \nu_{rz})(h + \sqrt{h^2 + 1})}{\mu R^2} \right\} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \tau_z(r, z) = & - \frac{p(\xi, t) ds}{2\mu} \left| \frac{\sqrt{\mu}}{hc - \mu} \frac{z}{\nu_1 - \nu_2} \right| \frac{\nu_1^2 (\lambda - h\nu_1^2) (1 - h\nu_1^2)}{(R^2 + \nu_1^2 z^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{\nu_1^2 (\lambda - h\nu_1^2) (1 - h\nu_1^2)}{(R^2 + \nu_1^2 z^2)^{3/2}} \left| - \frac{1 - \nu_{rz}}{\sqrt{\mu} (\nu_1 - \nu_2) R^2} \frac{z}{(R^2 + \nu_1^2 z^2)^{3/2}} - \right. \\ & \left. - \frac{\nu_2^2 (1 - h\nu_1^2)}{(R^2 - \nu_2^2 z^2)^{3/2}} \right| - \frac{(1 - \nu_{rz}) (h + \sqrt{\mu})}{\mu R^2}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\tau_r(r, z) = \frac{p(\xi, t) ds}{2\mu} \frac{z}{\nu_1 - \nu_2} \left| \frac{1}{(R^2 + \nu_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(R^2 - \nu_2^2 z^2)^{3/2}} \right|, \quad (3.3)$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \frac{R}{z} \tau_z(r, z), \quad (3.4)$$

где приняты обозначения

$$h = - \frac{\nu_{rz} (1 + \nu_{rz})}{1 - \nu_{rz} \nu_{rz}}, \quad \lambda = \frac{\nu_{rz} + \nu_{rz} E_r \left(\frac{\nu_{rz}}{E_z} - \frac{1}{G_{rz}} \right)}{1 - \nu_{rz} \nu_{rz}}, \quad (3.5)$$

$$c = \frac{\frac{E_z}{G_{rz}} - \nu_{rz} (1 + \nu_{rz})}{1 - \nu_{rz} \nu_{rz}}, \quad \mu = \frac{E_z}{E_r} \frac{1 - \nu_{rz}^2}{1 - \nu_{rz} \nu_{rz}}$$

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{\frac{h+c+\sqrt{(h+c)^2-4\mu}}{2\mu}}, \\ \nu_2 &= \sqrt{\frac{h+c-\sqrt{(h+c)^2-4\mu}}{2\mu}}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

а $R = |\bar{r} - \bar{\xi}|$ — расстояние между точкой приложения силы $p(\xi, t) ds$ и точкой $(r, z, 0)$.

Пользуясь уравнениями (1.1) и геометрическими соотношениями, определим отсюда вертикальные перемещения точек границы полупространства, вызванные силой $p(\xi, t) ds$

$$w(r, 0, t) = \frac{\mu}{R} (1 - Q^2) p(\xi, t) dS + \text{const}, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2\sqrt{\mu} \nu_1^2 (\nu_1 - \nu_2)} \left[\frac{\nu_1^4 - \nu_2^4}{E_r} + \right. \\ & \left. + \frac{\nu_1^2 (\lambda - h\nu_1^2) (1 - h\nu_1^2) - \nu_2^2 (\lambda - h\nu_1^2) (1 - h\nu_1^2)}{hc - \mu} - \frac{\nu_1^2 - \nu_2^2}{E_r} \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

При действии давления $p(\xi, t)$ в области контакта S перемещение границы полупространства определяется по формуле

$$w(r, 0, t) = \omega(1 - Q^*) \int \frac{p(\xi, t)}{R} dS + \text{const.} \quad (3.9)$$

В качестве элементов площади S будем рассматривать кольца радиуса ξ элементарной толщины. Тогда из (3.9) получим

$$w(r, 0, t) = \omega(1 - Q^*) \int_0^{a(t)} \xi p(\xi, t) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{| \xi^2 + r^2 - 2r\xi \cos \theta |} d\xi = \\ = \frac{4}{r} (1 - Q^*) \int_0^{a(t)} p(\xi, t) K\left(\sqrt{\frac{\xi}{r}}\right) \xi d\xi, \quad (3.10)$$

где K — полный эллиптический интеграл 1 рода.

Формула (3.10) дает зависимость вертикального перемещения точек на границе полупространства, вызванного давлением $p(r, t)$.

§ 4. Осесимметричная контактная задача

Как известно [1], в области контакта имеет место соотношение

$$w_1(r, t) + w_2(r, t) = L_0(t) - f_1(r) - f_2(r), \quad (4.1)$$

где w_1 и w_2 — перемещения границ соответственно двух сжимаемых тел, вызванные суммарным действием температуры и напряжений, f_1 и f_2 — уравнения поверхностей этих тел, а $L_0(t)$ — произвольная функция времени.

Из (3.10) и (4.1) получим

$$\frac{4}{r} \int_0^{a(t)} p(\xi, t) K\left(\sqrt{\frac{\xi}{r}}\right) \xi d\xi = q(r, t), \quad (4.2)$$

$$(\omega_1 - \omega_2 - \omega_1 Q_1 - \omega_2 Q_2) q(r, t) = L_0(t) - f_1(r) - f_2(r) - \\ - w_{17}(r, t) - w_{27}(r, t), \quad (4.3)$$

где w_{17} — вызванные действием температуры при отсутствии давления перемещения, которые рассмотрены в § 2.

Уравнение (4.3) сводится к определению резольвенты интегрального ядра

$$H(t, \tau) = \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} \frac{\partial \tilde{h}_1(t, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \frac{\partial \tilde{h}_2(t, \tau)}{\partial \tau}. \quad (4.4)$$

В некоторых частных случаях решение (4.3) дается в виде квадратур ([13], [18]).

При решении уравнения (4.2) воспользуемся методом Крейна, согласно которому функция $p(\xi, t)$ определяется через решение $g(\xi, a)$ уравнения (4.2) при правой части, равной 1 [11]

$$p(z, t) = \frac{1}{M'(a)} \left| \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{a(t)} g^*(s, a) q(s, t) ds \right| g(z, a) - \\ - \int_0^{a(t)} g(z, u) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{M'(u)} \frac{\partial}{\partial u} \int_0^u g^*(s, u) q(s, t) ds \right) du, \quad (4.5)$$

где $g^*(s, a)$ — функция, в которую превращается $g(s, a)$ при замене ядра уравнения (4.2) транспонированным ядром $\frac{r}{z} K\left(\sqrt{\frac{r}{z}}\right)$, а

$$M(a) = \int_0^{a(t)} g(s, a) ds. \quad (4.6)$$

Условием использования формулы (4.5) является $M'(a) \neq 0$. В данной задаче это условие не выполняется. Однако, в интегральных уравнениях I рода, коим является (4.2), в качестве неизвестной функции можно рассматривать произведение искомой функции на некоторую, вообще говоря, произвольную функцию $\psi(s)$. При этом будем иметь новое ядро уравнения. Отметим, что это новое ядро не должно зависеть от параметра a , так как при этом формула (4.5) будет неверной. Вслед за этим можно пользоваться формулой (4.5), заменяя в ней $p(z, t)$ на $\psi(z)p(z, t)$, $g(s, a)$ и $g^*(s, a)$ на соответственные решения для нового ядра $g_{11}(s, a)$ и $g_{11}^*(s, a)$, $M(a)$ — на $N(a)$,

$$\text{где} \quad N(a) = \int_0^{a(t)} g(s, a) \psi(s) ds. \quad (4.7)$$

Лучше всего подобрать такую функцию $\psi(s)$, при которой $N'(a) = 1$. В таком случае вышеуказанный прием не только позволит использовать метод Крейна, но и упростит формулу (4.5).

Решением уравнения

$$4 \int_0^{a(t)} g(z, a) \frac{z}{r} K\left(\sqrt{\frac{z}{r}}\right) dz = 1 \quad (4.8)$$

будет

$$g(s, a) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{a^2 - s^2}. \quad (4.9)$$

Условие $N'(a) = 1$ будет удовлетворено при

$$\psi(s) = \pi^2 s. \quad (4.10)$$

Из выражения (3.10) видно, что при условии (4.10)

$$g_{11}(s, a) = g_{11}^*(s, a).$$

Используя формулу (4.5), с помощью вышеуказанного приема после очевидных преобразований получим

$$p(r, t) = \frac{\gamma(t)}{\sqrt{a^2(t) - r^2}} + \frac{1}{\pi^2} \int_0^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{u^2 - r^2}} \int_0^u \frac{1}{\sqrt{u^2 - s^2}} \frac{\partial}{\partial s} \left[s \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \right] ds du, \quad (4.11)$$

где $\gamma(t)$ — некоторая произвольная функция времени.

Функция $F(r, t)$ определяется по формуле

$$F(r, t) = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} (1 + K^2) [f_1(r) + f_2(r) + w_{1j}(r, t) + w_{2j}(r, t)], \quad (4.12)$$

где $K(t, \tau)$ — резольвента ядра $H(t, \tau)$ из (4.4).

В случае, когда поверхности соприкасаемых тел достаточно гладки, то есть $f_1(r)$ и $f_2(r)$ непрерывны вместе со своими первыми и вторыми производными, мы принимаем $\gamma(t) = 0$ из условия ограниченности давлений в крайних точках контакта. Для определения радиуса контакта $a(t)$ воспользуемся условием равновесия

$$P(t) = \int_0^{a(t)} p(r, t) ds = 2\pi \int_0^{a(t)} r p(r, t) dr, \quad (4.13)$$

($P(t)$ — сжимающая сила), откуда после очевидных преобразований получим

$$\int_0^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{a^2(t) - s^2}} \varphi(s, t) ds = f_0(t), \quad (4.14)$$

где

$$\varphi(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \left[s \frac{\partial}{\partial s} F(s, t) \right], \quad (4.15)$$

$$f_0(t) = \frac{\pi}{2} (\omega_1 + \omega_2) (1 - H^2) P(t). \quad (4.16)$$

Уравнение (4.14) относительно $a(t)$ решаем методом последовательных уточнений [12], согласно которому

$$a(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n(f_{u_n}), \quad (4.17)$$

где

$$f_{u_{n+1}} = f_0 - f_{u_n} - B(f_{u_n}), \quad f_{u_0} = f_0, \quad (4.18)$$

$$B(f_{u_n}) = \int_0^{a(f_{u_n})} \frac{1}{\sqrt{\tau_n^2(f_{u_n}) - s^2}} \varphi(s, t) ds. \quad (4.19)$$

Достаточным условием, предъявляемым к функции $\varphi(f)$ для сходимости вышеуказанного решения, является условие

$$0 < B'(f) < 2. \quad (4.20)$$

Вследствие гладкости поверхностей контакта, функция $\varphi(s, t)$ непрерывна. Для случая $\varphi(s, t) > 0$, представляющего наибольший практический интерес, можно указать выражение для функции $\gamma(f)$, удовлетворяющей (4.20). Здесь можно положить

$$\varphi(s, t) < \Phi, \quad (4.21)$$

где Φ — некоторая положительная постоянная.

Неравенство (4.20) можно записать в виде

$$0 < \frac{1}{2} \int_0^{f(t)} \frac{[\gamma'(f)]^2}{\sqrt{\gamma^2(f) - s^2}} \varphi(s, t) ds < 2. \quad (4.22)$$

Подставляя сюда (4.21), получим

$$\gamma(f) = c \sqrt{f}, \quad (4.23)$$

где

$$c < \sqrt{\frac{8}{\pi\Phi}}.$$

Учитывая, что сходимость метода будет наилучшей при близости $B'(f)$ к единице, для функции $\gamma(f)$ в практических случаях можно рекомендовать значение

$$\gamma(f) = \frac{2}{\sqrt{\pi\Phi}} \sqrt{f}. \quad (4.24)$$

В таком случае формулы (4.17) и (4.18) будут иметь вид

$$\alpha(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{\pi\Phi}} \sqrt{f_{u_a}}, \quad (4.25)$$

где

$$f_{u_a} = \frac{\pi}{2} (u_1 + u_2) P(t) + f_{u_2} - \int_0^{f_{u_2}} \frac{2}{\sqrt{\pi\Phi}} \sqrt{f_{u_2}} \sqrt{\frac{4f_{u_2}}{\pi\Phi} - s^2} \varphi(s, t) ds.$$

В случае, когда границы контакта постоянны, для функции $\gamma(t)$, определяемой из условия (4.13), получим выражение

$$\gamma(t) = \frac{u_1 + u_2}{2\pi a} P(t) - \frac{1}{\pi a} \int_0^a \sqrt{a^2 - s^2} \varphi(s, t) ds.$$

Ա. Մ. ՍԻՄՈՆԻԱՆ,

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԵԶՈՏՐՈՊ ԲԱՐՄԵՆՆԵՐԻ ԽՈՂԷՐԻ ԱՌՈՆՅԲԱՐՈՒԹԵՏՐԻՊ
ԶԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԻ ԼՈՒՐԵՄԱՆ ԽՈՍԻՊԻ

Ա Վ Փ Ո Փ Ա Ր Ա

Գծային մոտանգականության տեսության շրջանակներում դիտարկվում է արանավերսուլ-իզոտրոպ երկու մարմինների կոնտակտային խնդիրը, երբ վերջիններս դանվում են շերտային հոսքի աղղկության տակ:

Զերմային խնդիրը լուծելիս օգտագործվում է Խանկելի ձևափոխությունը: Կոնտակտային խնդիրը բերվում է Ֆրեդհոլմի ստացված սեփ ինտեգրալ հավասարման, որը լուծվում է Մ. Գ. Կրեյնի մեթոդով:

Կոնտակտի սահմանների որոշման համար ստացված հավասարումը լուծվում է հաջորդական մոտափորոթյունների եղանակով:

A. M. SIMONIAN

THE SOLUTION OF ASYMMETRIC TEMPERATURE CONTACT
PROBLEMS ON THE CREEP OF TRANSVERSAL
ISOTROPIC BODIES

S u m m a r y

In the paper investigations are made of pressure in the field of the contact of two compressed transversal isotropic asymmetrical bodies in the temperature flow.

It is assumed that the material of these bodies are resisted by the law of linear heredity.

Henkel's transformation is used in solving temperature problems.

Krein's method of solving Fredholm integral equations of the first kind is used in solving the principal equations of contact problems.

To determine the boundaries of contact an equation is obtained, solved by the method of sequent correction proposed by the author.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Штирман И. Я. Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
2. Бородачев Н. М. О решении контактной задачи термоупругости в случае осевой симметрии. Изв. АН СССР, ОТН, 1962, № 5.
3. George D. L., Sneddon J. N. The axisymmetric Boussinesq problem for a heated punch. J. Math. and Mech., 11, № 5, 1962.
4. Гривлицкий Д. В., Кизыма Я. М. Осесимметричная контактная задача для трансверсально-изотропного слоя, покоящегося на жестком основании. Изв. АН СССР, ОТН, 1962, № 3.
5. Рубцов В. М., Смолвиц И. И. Решение некоторых задач о деформации упругого полупространства в цилиндрических координатах. Труды Сибирского металлургического института, 1957.

6. Галин А. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1953.
7. Payne L. E. On axially symmetric crack and punch problems for a medium with transverse isotropy. Proc. Cambridge Philos. Soc., 50, № 3, 1954.
8. Довгиронич В. И. Пространственная контактная задача о жестком штампе с поверхностью вращения, изображаемой полиномом относительно декартовых координат. ПММ, т. 21, вып. 2, 1957.
9. Арутюкин Н. Х., Абрамян Б. А., Баблоян А. А. О сжатии упругой сферы с жесткой кольцевой облойкой. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, 17, № 3, 1964.
10. Попов Г. Я. Об одном способе решения осесимметричной контактной задачи теории упругости. ПММ, т. 25, вып. 1, 1961.
11. Крейн М. Г. Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, № 3, 1955.
12. Симонян А. М. Температурная задача цилиндрических труб и условиях пластической наследственности. Изв. АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 1, 1965.
13. Симонян А. М. О плоской контактной задаче анизотропных тел с учетом ползучести. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 19, № 4, 1966.
14. Симонян А. М. О плоской температурной задаче контакта ортотропных тел с учетом ползучести. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 19, № 6, 1966.
15. Снеддон И. Преобразование Фурье. Изд-во иностран. лит., М., 1955.
16. Паркус Г. Неустойчившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1963.
17. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.
18. Прокопович И. Е. О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, вып. 6, 1956.

Ս. Բ. ՄԵՏՉՅԱՆ, Զ. Մ. ՄԱՐԿԱՐՅԱՆ

К ВОПРОСУ ОТЖАТИЯ ПОРОВОЙ ВОДЫ И УПЛОТНЕНИЯ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ВО ВРЕМЕНИ

Сжимаемость полностью водонасыщенных грунтов (грунтовых масс [1]), фазами которых являются минеральные частицы и газонесодержащая вода, в основном, обусловлена уменьшением их пористости. Поскольку сжимаемость минеральных частиц и газонесодержащей воды при встречаемых на практике нагрузках пренебрежимо мала, уплотнение указанных грунтов возможно только при отжатии поровой воды. Однако, если в порах содержится некоторое количество газа (воздуха), грунты могут уплотняться и без удаления из них поровой воды.

Известно, что в общем случае процесс уплотнения водонасыщенного грунта обусловлен двумя основными факторами — фильтрацией и ползучестью скелета. Поэтому в первом случае для решения задач надо пользоваться теорией уплотнения пористой ползучей водонасыщенной среды, а во втором — решением смешанной задачи теории ползучести и фильтрации. Если в порах грунта содержится некоторое количество газа, в указанную теорию надо внести соответствующую поправку.

Теоретические исследования показывают, что при уменьшении степени влажности S от 1.0 до 0.85—0.90 поровое давление, определенное по теории фильтрационной консолидации, уменьшается в 5—10 раз [3]. Установлено также, что при учете ползучести скелета наличие даже весьма небольшого количества газа ($2^{\text{н}}$) в порах грунта оказывает существенное влияние как на величину, так и на характер изменчивости порового давления во времени [4].

Из изложенного следует, что, в зависимости от количества содержащегося в порах грунта газа и способности его скелета уплотняться в пределах заданных нагрузок, для решения задач надо пользоваться той или иной расчетной моделью — той или иной теорией. При этом ясно, что, если в процессе уплотнения влажность остается неизменной, движение воды в порах грунта имеет местный характер, и поэтому оно не влияет на указанный процесс. Следовательно, изменчивость влажности может служить показателем участия, а неизменчивость — показателем неучастия фактора фильтрации в процессе уплотнения трехфазного грунта.

Поскольку в природе многие глинистые грунты содержат некоторое количество газа (воздуха) в свободном состоянии или в виде пузырьков [5, 6], исследование вопроса отжатия воды из пор, по изложенным выше соображениям, представляет известный интерес.

Именно поэтому нами была предпринята попытка исследовать вопрос отжатия поровой воды из двух глинистых грунтов при различных условиях их водонасыщенности.

Исследованы разданская (Армянская ССР) и часоваярская глины (табл. 1) нарушенной структуры. Исследования проводились на образцах, изготовленных из пасты и подвергнутых предварительному уплотнению нагрузками $\varepsilon_n = 1.0, 2.25, 4.0$ и 8.0 кг/см^2 от 41 до 60 дней. Для определения изменчивости влажности грунтов в указанных четырех состояниях (под состоянием понимается плотность-влажность и структурная прочность грунта, приобретенные вследствие предварительного уплотнения [7]) образцы подвергались последующему дополнительному уплотнению при $\varepsilon = 1 \text{ кг/см}^2$ в течение 12–35 дней.

Таблица 1

№ грунта	Наименование	Удельный вес $\gamma \text{ г/см}^3$	Влаж. пасты, %	Пределы пластичности, %		
				предела текучести	предела пластичности	число пластичности
9-63	Разданская глина	2.68	42.4	42.4	24.4	18
6-57	Часоваярская глина	2.65	63.5	59.1	21.2	37.9

При каждом ε_n предварительно уплотнялись по четыре образца, из которых два использовались для определения основных физических показателей грунта (влажность w , пористость I , степени влажности G) после предварительного уплотнения, а остальные два образца подвергались дополнительному уплотнению для определения изменчивости влажности под действием $\varepsilon = 1 \text{ кг/см}^2$.

Опыты проводились в компрессионных приборах [8] в условиях возможности двухстороннего отжатия поровой воды. Размеры образцов: высота—20 мм, диаметр—70 мм.

Эксперименты показывают, что, независимо от состояния к началу испытания, после уплотнения при $\varepsilon = 1 \text{ кг/см}^2$ степень влажности разданской глины $G < 1$, а уплотнение протекает без изменения влажности — без отжатия воды из пор грунта (табл. 2). Очевидно, что, поскольку вода не отжимается из пор грунта, фактор фильтрации не участвует в процессе уплотнения, а длительность этого процесса (независимо от мощности сжимаемой толщи) обусловлена ползучестью скелета. Ясно, что после удаления, растворения газа и поровой воде и достижения условия полной водонасыщенности ($G = 1$) в процессе уплотнения включается фактор фильтрации, и, начиная с этого момента, этот процесс будет обусловлен совместным действием ползучести скелета и фильтрации.

Влияние фактора фильтрации на процесс уплотнения будет зависеть от водонасыщенности грунта и ползучести скелета и момент начала удаления воды из пор. Но, учитывая, что в рассмотренных ус-

лониях вследствие уплотнения роль ползучести скелета сильно возрастает, а величина порового давления обычно бывает небольшой, во многих случаях влиянием фактора фильтрации можно пренебречь и задачу уплотнения рассмотреть как задачу теории ползучести.

Таблица 2

№ и наименование грунта	$\sigma_{\text{пл}} \text{ кг/см}^2$	Влажность, %		Коэффициент пористости		Степень влажности	
		до опыта	после опыта	до опыта	после опыта	до опыта	после опыта
№ 9—63, разданская глина	1.0	34.8	35.0	1.03	0.935	0.906	0.92
	2.25	31.7	31.4	1.01	0.904	0.93	0.93
	4.0	30.5	30.8	0.915	0.903	0.88	0.92
	8.0	27.8	27.3	0.83	0.85	0.90	0.86
№ 6—57, часовярская глина	1.0	48.5	43.3	1.39	1.18	0.92	0.97
	2.25	42.9	41.1	1.18	1.11	0.97	0.96
	4.0	39.9	37.1	1.13	1.01	0.93	0.98
	8.0	35.4	32.2	0.98	0.86	0.95	0.99

Точность измерения влажности в опытах не превышает 0.15% .

Несколько иная, чем в рассмотренном случае, картина наблюдается при испытании часовярской глины, обладающей в начале испытания сравнительно высокой пористостью, влажностью и степенью влажности ($G = 0.92 - 0.97$). Несмотря на то, что, как в рассмотренном выше случае, после уплотнения степень влажности образцов всех четырех состояний $G < 1$, процесс их уплотнения сопровождается уменьшением влажности и пределах $5.2 - 1.8\%$ — отжатием некоторого количества поровой жидкости. В этом случае, кроме ползучести скелета, длительность процесса уплотнения обусловлена также фактором фильтрации. Поэтому для решения задачи уплотнения надо воспользоваться решением смешанной задачи теории ползучести и фильтрации с учетом сжимаемости свободных или заземленных в поровой воде пузырьков газа [2, 4].

Совершенно ясно, что отжатие поровой воды при испытании часовярской глины обусловлено присутствием слабым грунтам высокой пористостью влажностью и большой скоростью деформируемости. Здесь, благодаря большим деформациям, возникает более высокое поровое давление, чем при испытании разданской глины, способствующей отжатию некоторого количества поровой воды из зон, примыкающих к горизонтальным поверхностям образца. Надо полагать, что в этих зонах $G < 1$, хотя для всего образца в целом среднее значение степени влажности колеблется в пределах $G_w = 0.96 - 0.99 < 1$.

Таким образом, из изложенного следует, что испытанием образцов грунта на изменение влажности весьма просто можно установить,

участвует ли фактор фильтрации в процессе уплотнения и определить границы применимости к полностью водонасыщенным грунтам теории ползучести.

Если же уплотнение сопровождается отжатием поровой воды, очевидно, что влияние фактора фильтрации на этот процесс зависит как от фильтрационных свойств грунта, ползучести его скелета, так и скорости загрузки. При этом, скорость загрузки имеет первостепенное значение, поскольку уменьшением и увеличением скорости загрузки можно добиться уменьшения и увеличения роли фактора фильтрации в процессе уплотнения [9].

Приведенные выше результаты опытов и соображения о процессе уплотнения непорочно водонасыщенных грунтов дают нам возможность считать, что, за исключением слабых, все остальные глинистые грунты, в порах которых содержание газа превышает $10-15\%$, при обычно встречаемых на практике нагрузках ($1-5 \text{ кг/см}^2$) и скоростях их приложения всецело будут зависеть от ползучести скелета.

Поэтому вопрос уплотнения таких грунтов вообще, а в особенности маловлажных грунтов, на которых обычно воздвигаются земляные сооружения (насыпи, ядра плотин), должен быть предметом рассмотрения теории ползучести.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 II 1966

Ս. Ի. ՄԵՍՅԱՆ, Ի. Մ. ԱՄԻՐՅԱՆ

ԿԱՎՈՅԻՆ ԲՆԱՀՈՎԵՐԻ ԾԱԿՈՏԿԵՆԱՅԻՆ ՋՐԻ ԳՈՐԸ ԸՐՈՄԱՆ
ԵՎ ԺԱՄԱՆԱԿԻ ԸՆԹԱՅՔՈՒՐ ԽՏԱՅՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա. մ. Վ. Ն. Վ. Ս. Վ.

Հոդվածում դիտարկվում է ջրով ոչ լրիվ հստակացված, խառնարկում կապուցված ունեցող երկու կավային բնահողերից ծակոտկենային ջրի գուրս հրման հարցը՝ միայնակ խտացման պայմաններում:

Փորձերի հիման վրա պարզված է, որ Հրապանի կավի (պլաստիկության թիվը -18 , $G = 0.88 : 0.93$, $\varepsilon = 0.83 : 1.03$) խտացումը ընթանում է առանց ծակոտկենային ջրի գուրս հրման, իսկ շաստվյարչան կավինը՝ (պլաստիկության թիվը -37.9 , $G = 0.92 : 0.97$, $\varepsilon = 0.98 : 1.39$) ծակոտկենային ջրի գուրս հրմամբ:

Հեղինակները գտնում են, որ ծակոտկենային ջրի գուրս հրմամբ կարելի է դատել կավային բնահողի խտացման վրա ազդող գործոնների մասին և քննարկ նրա հաշվարկային մոդելը:

S. R. MESCHIAN, E. M. MARKARIAN

ON THE QUESTION OF EXTRACTION OF VOID WATER
AND THE COMPACTION OF CLAY GROUNDS IN TIME

S u m m a r y

In the paper the question of void water extraction of two clay grounds of structural damage in conditions of one dimensional consolidation at various degrees of their water saturation has been observed.

It has been experimentally established that compaction of Hrazdan clay (the plasticity index—18; $G = 0.88 \div 0.93$; $E = 0.83 \div 1.03$) takes place without extraction while the compaction of the Chasovyar clay (the plasticity index—37,9; $G = 0.92 \div 0.97$; $E = 0.98 \div 1.39$) with extraction of void water.

The authors consider that depending on the extraction of void water it is possible to judge on the factors effecting the process of composition of clay grounds and to choose their theoretical model.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. Строиниздат, М., 1937.
2. Флорин В. А. Одномерная задача уплотнения сжимаемой пористой полужидкой земной среды. Изв. АН СССР, ОТИ, № 6, 1953.
3. Малышев М. В. Расчет порового давления в период строительства в насыпях из грунта, содержащего в порах воду и воздух. Основания, фундаменты и механика грунтов, № 5, 1964.
4. Тер-Миртиросян Э. Г., Цытович Н. А. О вторичной консолидации глин. Оспования, фундаменты и механика грунтов, № 5, 1965.
5. Флорин В. А. Основы механики грунтов, т. II. Госстройиздат, М., 1961.
6. Булычев В. Г. Теория газонасыщенных грунтов. Стройвоенмориздат, М., 1948.
7. Месчян С. Р. Экспериментальное изучение закономерностей деформации ползучести глинистого грунта. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, № 1, 1963.
8. Месчян С. Р. Ползучесть материалов (на арм. ямке). Айпетрат, Ереван, 1963.
9. Ахнажарян Н. Г., Месчян С. Р. Об одном факторе, влияющем на уплотнение глинистого грунта. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 15, № 3, 1962.

Т. Т. АРАКЕЛЯН

О ПРОЧНОСТИ И ПЛАСТИЧНОСТИ ТЕКСТОЛИТА

Текстолит является одним из распространенных анизотропных пластических материалов. Экспериментальному изучению прочности текстолита в сложно-напряженном состоянии посвящены работы [1, 2]. Однако пластичность текстолита недостаточно изучена.

В настоящей работе приведены некоторые результаты лабораторных исследований прочности и пластичности текстолита на бязевой основе (ТУ МХП—М 613—55, партии 118, 122, выпуска Ленинградского завода слоистых пластиков, 25.XI, 1963 г.). При этом нити основы расположены в кольцевом направлении.

Обычными способами из опыта найдены следующие характеристики:

Вид характеристики	Обозначение	Численное значение в кг/см ²
Пределы прочности при сжатии		
Перпендикулярно слоям	$\sigma_{ср}$	2905
Параллельно слоям	σ_{μ}	1685
В тангенциальном направлении	σ_{ρ}	1453
Пределы прочности при растяжении		
Перпендикулярно слоям	$\sigma_{ср}$	112
Параллельно слоям	σ_{μ}	607
В тангенциальном направлении	σ_{ρ}	403
Модуль упругости вдоль оси анизотропии	E_2	62000
Модуль упругости по тангенциальному направлению	E_1	77000
Козф. Пуассона вдоль оси анизотропии	$\mu_2 = 0.296$	
Козф. Пуассона по тангенциальному направлению	$\mu_0 = 0.236$	

Окончательные форма и размеры испытуемых образцов получались после механической обработки текстолитовых труб по наружному диаметру (фиг. 1).

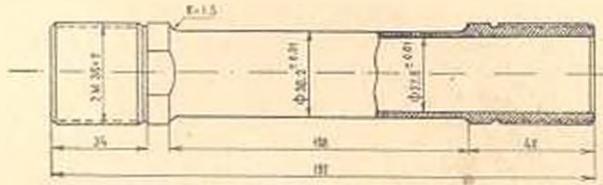
Исследуемый образец рассматривался как ортотропное тело с цилиндрической анизотропией.

Образцы доводились до разрушения при простом нагружении, т. е. сохранялись ориентации осей тензора напряжений, для различ-

ных значений отношения продольного и тангенциального напряжений

$$\left(k = \frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}\right).$$

Указанные напряжения в образцах создавались на универсальной машине типа ЦДМУ-30 т. При этом были пристроены более точные силоизмерители для растягивающей силы и крутящего момента. Для измерения деформации не применялись проволоочные датчики, ибо пластические деформации испытуемых образцов превышали 2%.



Фиг. 1

Радиальные деформации измерялись специальным устройством небольшого веса, состоящим из двух микроиндикаторов производства Ленинградского инструментального завода (фиг. 2). Измерения вдоль оси анизотропии также проводились двумя микроиндикаторами. При установлении предела прочности сжатия σ_{z2} во избежание потери продольной устойчивости образца применялись более короткие и толстостенные образцы.

Характерно отметить, что с самого начала нагружения образцов текстолита при одноосном и двухосном напряжении упругие деформации сопровождаются незначительными пластическими деформациями. Так, если при одноосном растяжении, соответствующем пределу упругости, деформация упругости составляет $\epsilon_{uz} = 0.37\%$, то с самого начала нагружения появляется пластическая деформация $\epsilon_{uz} = 0.02\%$.

На фиг. 3 приведены кривые напряжение—деформация для образцов, испытанных при различных значениях k . За результаты экспериментальных исследований, при незначительном исключении, было принято среднее арифметическое результатов трех и более опытов.

Из фиг. 3 следует, что исследуемый трубчатый текстолит является сильно анизотропным материалом с различными прочностными и деформативными параметрами. При этом по мере повышения напряжений текстолит заметно упрочняется.

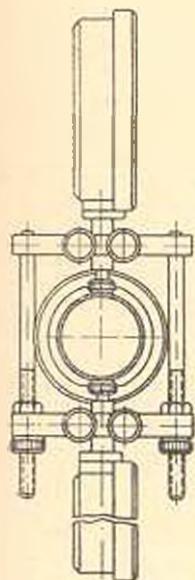
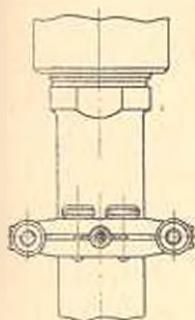
На фиг. 4 представлены зависимости нормальных модулей упругости E_z и E_θ от k .

Из фиг. 4 видно, что величины E_z и E_θ существенно зависят от отношения $\frac{\sigma_z}{\sigma_\theta}$.

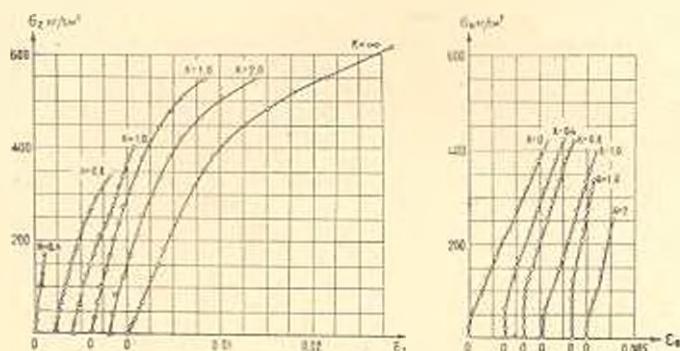
Таким образом, степень анизотропии материала с начальной анизотропией заметно зависит также от напряженного состояния образца.

При этом, E_1 получает минимальное значение при $k = 0.666$, а E_2 — при $k = \infty$.

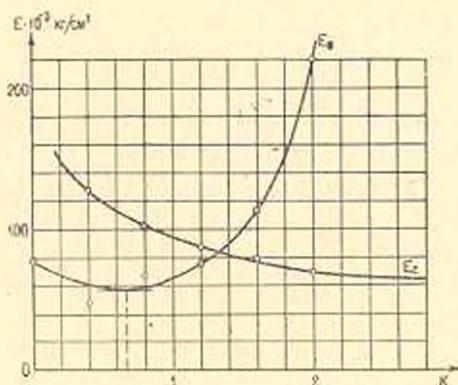
Для исследования прочностных свойства все испытываемые образцы доводились до разрушения. Установление области равнопрочных напряженных состояний производилось при помощи существующих теорий прочности анизотропных материалов [1, 3, 4] применительно к плоскому напряженному состоянию. Этим самым становится возможным предсказать поведение материала в общем случае сложных напряженных состояний.



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Таким образом, для рассматриваемого случая, согласно [1, 5], будем иметь следующие критерии прочности:

$$\sigma_1^2 + \frac{\sigma_{p2} \sigma_{c2}}{\sigma_{p3} \sigma_{c3}} \sigma_2^2 = \left[1 + \frac{\sigma_{p2} \sigma_{c2}}{\sigma_{p3} \sigma_{c3}} + \frac{\sigma_{c2} - \sigma_{p2}}{\sigma_{c3}} - \frac{\sigma_{p2} \sigma_{c2} (\sigma_{c3} - \sigma_{p3})}{\sigma_{p3} \sigma_{c3} \sigma_{c3}} \right] \sigma_2^2 + (\sigma_{c2} - \sigma_{p2}) \sigma_2 = \frac{\sigma_{p2} \sigma_{c2}}{\sigma_{p3} \sigma_{c3}} (\sigma_{c3} - \sigma_{p3}) \sigma_3 - \sigma_{p2} \sigma_{c2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{p2}} - \frac{1}{\sigma_{c2}} \right) \sigma_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma_{p3}} - \frac{1}{\sigma_{c3}} \right) \sigma_3 +$$

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_{pz}} + \frac{1}{\sigma_{cz}} \right)^2 \sigma_z^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_{pb}} + \frac{1}{\sigma_{cb}} \right)^2 \sigma_0^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{1}{\sigma_{pz}} + \frac{1}{\sigma_{cz}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sigma_{pb}} + \frac{1}{\sigma_{cb}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\tau_{c45+}} + \frac{1}{\tau_{c45-}} \right)^2 \right] \sigma_z \sigma_0 \left. \right\}^2 - 1 = 0, \quad (2) \\
 & \frac{1}{\sigma_{pz}} \quad \frac{1}{\sigma_{pb}} \quad \frac{1}{\sigma_{cz}} \quad \frac{1}{\tau_{c45+}} \quad \frac{1}{\tau_{c45-}}.
 \end{aligned}$$

В этих соотношениях σ_{pz} , τ_{pb} , σ_{cz} , σ_{cb} — пределы прочности при одноосном растяжении и сжатии в соответствующих направлениях;

τ_{c45} — сопротивление сдвигу для элемента, грани которого составляют с направлениями σ_z и σ_0 45°, а τ_{c45+} и τ_{c45-} — различные пределы прочности на сдвиг по площадкам, наклонным также под углом 45° к направлениям σ_z и σ_0 .

Внося в соотношения (1) и (2) экспериментальные данные

$$\sigma_{pz} = 607 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{pz} = 1685 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \tau_{pb} = 521 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$$

$$\sigma_{pb} = 423 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \tau_{pb} = 1453 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

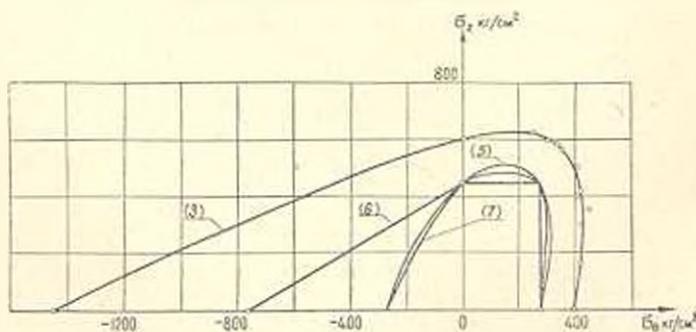
$$\sigma_{pz} = 423 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{cz} = 521 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

получим

$$\sigma_z^2 + 1.74 \sigma_0^2 - 3.91 \sigma_z \sigma_0 + 1078 \sigma_z + 1837 \sigma_0 - 1022950 = 0, \quad (3)$$

$$\sigma_z + 1.74 \sigma_0^2 - 2.46 \sigma_z \sigma_0 + 1078 \sigma_z + 1838 \sigma_0 - 1024500 = 0. \quad (4)$$

Соотношения (3) и (4) мало отличаются друг от друга. На фиг. 5 построен график функции (3), где результаты испытания нанесены в виде кружков. При этом заметно, что опытные данные удовлетворительно совпадают с теоретической кривой (3).



Фиг. 5.

В работе [4] для сильно анизотропных материалов рекомендуется условие прочности при плоском напряженном состоянии в виде поли-

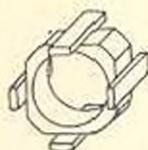
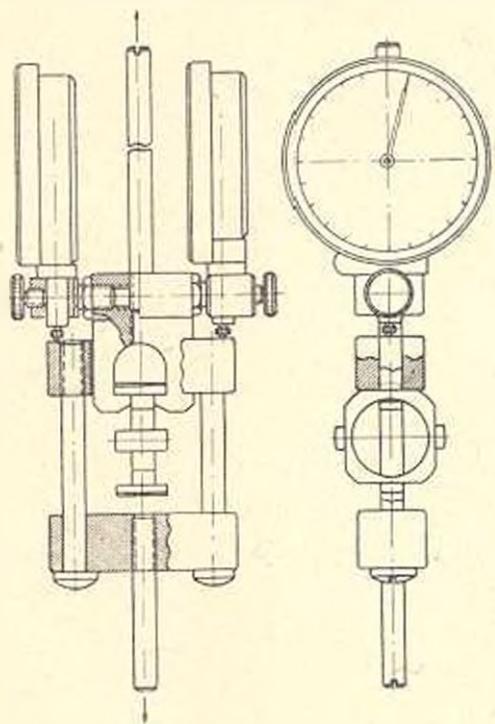
нома четвертой степени, который по сравнению с (1) и (2) является сложным и поэтому здесь не приводится.

Изучались изменения условий пластичности текстолита при развитии пластического течения. Как известно, момент наступления пластического состояния довольно условен и его можно определить по-разному. При этом, исходя из физической сущности пластического состояния испытуемого анизотропного материала, предполагалось, что в начале наступления пластического состояния резко увеличивается скорость пластической деформации.

Для выявления предела текучести текстолита проводились одноосные нагружения (растяжение и сжатие) мелкими ступенями и с последующими кратковременными остановками (30 сек). При этом в течение указанного промежутка времени сохранилось постоянное значение нагрузки каждой ступени, т. е. отсутствовала разгрузка. В начале и конце этих промежутков времени измерялись соответствующие значения деформации. Они являются положительными пластическими деформациями, ибо за указанные промежутки времени возрастали по направлению приложенной нагрузки. По этим данным вычислялись средние величины скорости пластической деформации, наступающие после каждой ступени нагружения. Нагрузка, после приложения которой имеет место резкое увеличение скорости деформации, будет соответствовать пределу текучести. Затем по этой нагрузке вычислялись соответствующие пределы текучести.

Пределы прочности и текучести в направлении, перпендикулярном к слоям (в радиальном направлении), определялись с помощью прибора и специального образца, изображенных на фиг. 6.

Таким образом, по главным направлениям анизотропии установились следующие пределы текучести:



Фиг. 6.

$$\sigma_{sz} = 450 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{s\theta} = 760 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \text{ (при сжатии),}$$

$$\sigma_{s\theta} = 275 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \sigma_{s\tau} = 65 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \tau_{s\theta} = 400 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}.$$

Заметим, что условие пластичности анизотропного тела Губера—Мизеса—Хилла в данном случае не пригодно, ибо в текстолите анизотропия усиливается в пластической области деформации (фиг. 4), а также существенно различаются пределы текучести сжатия и растяжения.

Для исследуемого случая пользуемся так называемыми модифицированными условиями пластичности, приведенными в работе [6], где по критерию формоизменения Мизеса, максимального касательного напряжения Сен-Венана и по критерию Прагера, учитывающему эффект упрочнения при сложно-напряженном состоянии, имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{sz}} \right)^2 - \frac{\sigma_z \sigma_\theta}{\sigma_{sz} \sigma_{s\theta}} + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} \right)^2 &= 1, \\ \frac{\sigma_z}{\sigma_{sz}} &= \pm 1, \quad \sigma_z > \sigma_\theta > 0, \\ \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} &= \pm 1, \quad \sigma_\theta > \sigma_z > 0, \\ \frac{\sigma_z}{\sigma_{sz}} - \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} &= \pm 1, \quad \sigma_z > 0 < \sigma_\theta, \\ \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{sz}} \right)^2 - \frac{\sigma_z \sigma_\theta}{\sigma_{sz} \sigma_{s\theta}} + \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} \right)^2 \right]^3 &- \\ - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{sz}} + \frac{\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_z}{\sigma_{sz}} - \frac{2\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} \right)^2 \left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma_{s\theta}} - \frac{2\sigma_z}{\sigma_{sz}} \right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

Внося в эти условия пластичности указанные значения пределов текучести, получим

$$\sigma_z^2 - 1.64 \sigma_z \sigma_\theta + 2.68 \sigma_\theta^2 - 202420 = 0, \quad (5)$$

$$\sigma_z = 450, \quad \sigma_\theta = 275, \quad \frac{\sigma_z}{450} - \frac{\sigma_\theta}{760} = 1, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left[\left(\frac{\sigma_z}{450} \right)^2 - \frac{\sigma_z \sigma_\theta}{123750} + \left(\frac{\sigma_\theta}{275} \right)^2 \right]^3 &- \\ - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma_z}{450} + \frac{\sigma_\theta}{275} \right)^2 \left(\frac{\sigma_z}{450} - \frac{2\sigma_\theta}{275} \right)^2 \left(\frac{\sigma_\theta}{275} - \frac{2\sigma_z}{450} \right)^2 &= 1. \quad (7) \end{aligned}$$

Соотношения (5), (6) и (7) представляют линии пересечения поверхности текучести с плоскостью $\sigma_x = 0$ и являются условиями пла-

стичности для плоских напряженных состояний. На фиг. 5 представлены графики соотношений (5), (6) и (7).

Из фиг. 3 следует, что при простом нагружении текстолита за пределом текучести свойства материала изменяются, при этом меняются также начальные условия пластичности.

Таким образом, при простом нагружении текстолита происходит анизотропное расширение поверхности текучести до достижения предельной поверхности прочности. Однако, в квадранте положительных главных напряжений обнаруживается изотропное расширение кривой пластичности по всем рассматриваемым теориям пластичности анизотропного тела (фиг. 5) от начального положения до предельного состояния разрушения, при этом она остается геометрически подобной кривой прочности.

На основе исследований двухосного напряженного состояния текстолита можно прийти к следующим заключениям.

1. Результаты экспериментов показали подтверждение как частной теории [1], так и общей теории прочности [3] анизотропных материалов (текстолит).

2. Из рассмотренных условий пластичности модифицированное условие Сен-Венана лучше остальных соответствует результатам эксперимента.

3. Если в случае простого нагружения в любом сложно-напряженном состоянии изотропного тела все теории пластичности тождественно совпадают [7], то при простом нагружении анизотропного тела (текстолита) рассматриваемые теории пластичности совпадают только в случае двухосного растяжения по главным направлениям анизотропии (фиг. 5).

В проведении экспериментов и в обработке результатов принимала участие И. А. Домбаева.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступила 18 V 1966

Ք. Տ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՏԻՔԵՍՏՈՒԹՅԱՆ ԱՐԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՊԼԱՍՏԻՈՒԹՅԱՆ ԴՐՈՒՄ

Ա. Վ. Վ. Վ. Վ. Վ.

Ստուգանքային է տեքստիլի տարածումը և պլաստիկությանը
երկառանցք լարման և սարք թեթևաթանի գեպրում:

Տեղի է տրվում, որ ալի գեպրում տեղի ունի Սեն-Վենանի մոդիֆի-
կացիան պլաստիկության տեսությունը: Տեքստիլի սարք թեթևաթանի
ենթարկվող միայն անդամայինի գլխավոր ուղղություններով երկառանցք
ձգման գեպրում, դիտարկվում բոլոր պլաստիկության տեսությունները համ-
ընկում են:

T. T. ARAKELIAN

ON STRENGTH AND PLASTICITY OF LAMINATED FABRIC

S u m m a r y

Strength and plasticity of laminated fabric for biaxial stresses and simple loading was investigated. It is shown that Sen-Venan's modified condition of plasticity takes place.

All examined theories of plasticity coincide for biaxial strain of laminated fabric in the principal direction of anisotropy.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Захаров К. В. Критерий прочности для слоистых пластмасс. Пластические массы, 1961, № 8.
2. Смотрич Н. Т., Чебанов В. М. Замечания о прочности и разрушении при сложном напряженном состоянии в случае простого нагружения. Исследования по упругости и пластичности, сб. № 2. Изд. Ленингр. ун-та, 1963.
3. Гольдгенблаит И. И., Копнов В. А. Прочность стеклопластиков при сложном напряженном состоянии. Механика полимеров, 1965, № 2.
4. Ашкенази Е. К. Вопросы анизотропии прочности. Механика полимеров, 1965, № 2.
5. Протасов В. Д., Копнов В. А. Исследование прочности стеклопластиков при плоском напряженном состоянии. Механика полимеров, 1965, № 5.
6. Ху и Мерин. Анизотропные функции нагружения для сложных напряженных состояний в пластической области. Механика. Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы, 1956, № 2 (36).
7. Ильюшин А. А. Теория пластичности при простом нагружении тел, материал которых обладает упрочнением. ПММ, т. 11, вып. 2, 1947.