

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՅԴԵՄԻԱԿԱՆ ԳԵՂԵՎԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2015

УДК 539.3

**НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ КОМПОЗИТА В ВИДЕ ПАКЕТА ИЗ
ПРОИЗВОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЧИСЛА КОНЕЧНЫХ ИЛИ
ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ УПРУГИХ СЛОЁВ ПРИ АНТИПЛОСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ**

Гаспарян А.В.

Ключевые слова: композит, теория упругости, конечно-разностные уравнения.

Keywords: composite, theory of elasticity, equations of finite differences.

Բանալի բառեր` կոմպոզիտ, առաձգականության տեսություն, վերջավոր տարբերության հավասարումներ:

Գաապարյան Ա.Վ.

Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով վերջավոր կամ կիսաանվերջ առաձգական շերտերից բաղկացած փաթեթի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակը

Տուրյեի վերջավոր և անվերջ սինուս- և կոսինուս-ձևափոխությունների օգնությամբ դիտարկվում է չորս փոխկապակցված խնդիր հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով վերջավոր կամ կիսաանվերջ տարասեռ առաձգական շերտերից բաղկացած երկու տարբեր կոմպոզիտների լարվածային վիճակի վերաբերյալ՝ ինչպես կոշտ ամրակցված, այնպես էլ լարումներից ազատ կողմնային հարթությունների դեպքում:

Gasparyan A.V.

Stressed State of a Composite in a Form of Package Composed of an Arbitrary Finite Number of Finite or Semi-Infinite Elastic Layers under Anti-plane Deformation

With the application of Fourier finite and infinite sine-and cosine-transforms four interrelated problems on a stressed state of two different composites under anti-plane deformation are considered. The composites have a form of package composed of an arbitrary finite number of finite or semi-infinite heterogeneous elastic layers with the lateral surfaces either rigidly fastened or free of strains.

При помощи конечных и бесконечных синус- и косинус-преобразований Фурье рассматриваются четыре взаимосвязанные задачи о напряжённом состоянии двух разных композитов, состоящих из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих разнородных слоёв при антиплоской деформации как при жёстко защемлённых, так и при свободных от напряжений боковых плоскостях.

Введение. Исследование напряжённо-деформированного состояния кусочно-однородных композитов в виде пакета из произвольного конечного числа упругих тел канонических форм имеет теоретическое и практическое значение. В этом направлении укажем на работы [1-3].

В настоящей работе рассматриваются четыре взаимосвязанные задачи о напряжённом состоянии двух разных композитов, представляющих собой кусочно-однородное тело в виде пакета из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих слоёв с различными упругими и геометрическими характеристиками при антиплоской деформации как при нагружённых, так и при свободных от напряжений боковых плоскостях.

Такие задачи для кусочно-однородных композитов, состоящих из произвольного конечного числа упругих бесконечных слоёв, конечных цилиндров и клиньев с произвольным углом раствора при антиплоской деформации рассмотрены в [4-6].

1.1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений. Пусть композит, отнесённый к правой прямоугольной системе координат $Oxyz$, представляет собой пакет из произвольного конечного числа n упругих слоёв-прямоугольников (фиг.1.):

$$\Omega_k = \{0 \leq x \leq l, \quad h_{k-1} \leq y \leq h_k, \quad -\infty < z < \infty\} \quad (k = \overline{1, N})$$

с модулями сдвига G_k . К нижней и верхней граням композита $y = h_0$ и $y = h_n$ приложены касательные силы интенсивностей $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$, соответственно, обеспечивающие состояние антиплоской деформации с базовой плоскостью Oxy и

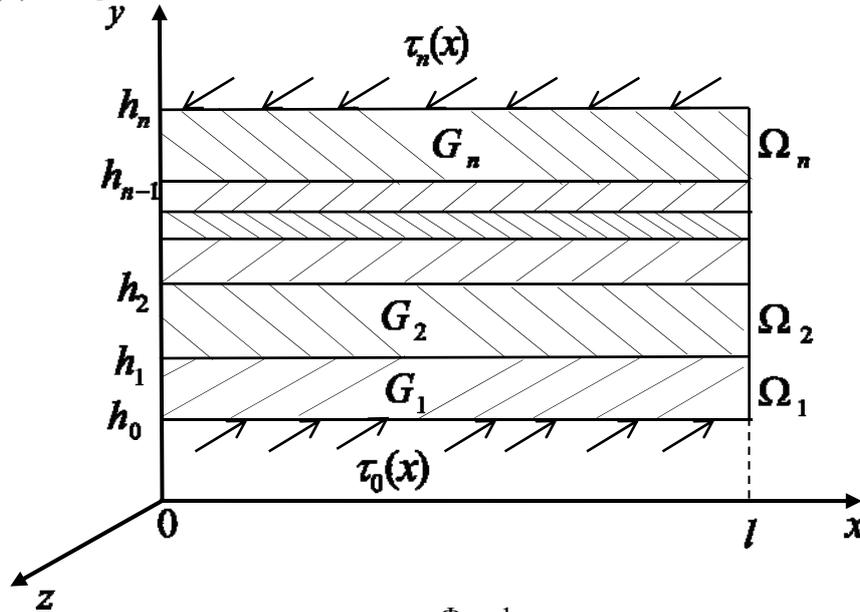
удовлетворяющие условию композита $\int_0^l \tau_0(x) dx = \int_0^l \tau_n(x) dx$, а вертикальные

кромки прямоугольников $x = 0$ и $x = l$ свободны от напряжений, т.е.

$$\tau_{yz} \Big|_{y=h_0} = \tau_0(x), \quad \tau_{yz} \Big|_{y=h_n} = \tau_n(x) \quad (0 \leq x < l)$$

$$\tau_{xz} \Big|_{x=0} = \tau_{xz} \Big|_{x=l} = 0, \quad (k = \overline{1, N})$$

Здесь τ_{yz} – компонента касательных напряжений, а $w_k = w_k(x, y)$ – единственная отличная от нуля компонента смещений в направлении оси Oz . Требуется определить компоненты напряжений и смещений в композите, когда функции напряжения $\tau_0(x)$ и $\tau_n(x)$ наперёд заданы.



Фиг. 1

Отметим, что решение аналогичной задачи для кусочно-однородного композита из произвольного конечного числа бесконечных упругих слоёв подробно описано в [4].

Для вывода определяющих уравнений задачи обозначим неизвестные касательные контактные напряжения на гранях $y = h_{k-1}$ и $y = h_k$ ($k = \overline{1, N}$) слоя

Ω_k через $\tau_{k-1}(x)$ и $\tau_k(x)$, соответственно. Тогда, используя закон Гука, для слоя Ω_k получим следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} = 0 & (0 < x < l, h_{k-1} < y < h_k) \\ \tau_{xz}|_{x=0} = \tau_{xz}|_{x=l} = 0 \\ \tau_{yz}|_{y=h_{k-1}} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_{k-1}} = \tau_{k-1}(x), \quad \tau_{yz}|_{y=h_k} = G_k \frac{\partial w_k}{\partial y} \Big|_{y=h_k} = \tau_k(x) & (0 < x < l, k = \overline{1, N}). \end{cases} \quad (1.1)$$

Для решения граничной задачи (1.1) рассмотрим конечное косинус-преобразование Фурье [9]

$$\left\{ \bar{\tau}_k(m); \bar{w}_k(m, y) \right\} = \int_0^l \left\{ \tau_k(x); w_k(x, y) \right\} \cos(\pi mx/l) dx \quad (m = 0; 1; 2 \dots),$$

и формулы обращения

$$w_k(x, y) = \frac{1}{l} \bar{w}_k(0, y) + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{w}_k(m, y) \cos(\pi mx/l)$$

$$\tau_k(x) = \frac{1}{l} \bar{\tau}_k(0) + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\tau}_k(m) \cos(\pi mx/l).$$

Тогда придём к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{w}_k}{dy^2} - \frac{\pi^2 m^2}{l^2} \bar{w}_k = 0 & (h_{k-1} < y < h_k, k = \overline{1, N}) \\ G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_{k-1}} = \bar{\tau}_{k-1}(m), \quad G_k \frac{d \bar{w}_k}{dy} \Big|_{y=h_k} = \bar{\tau}_k(m). \end{cases} \quad (1.2)$$

Далее, способом, описанным в [4], решение задачи (1.2) сводится к решению системы конечно-разностных уравнений второго порядка:

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

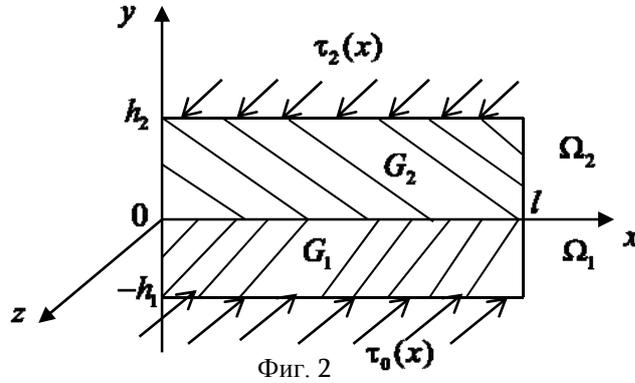
$$a_k = \frac{1}{G_k \operatorname{sh}\left(\frac{\pi m d_k}{l}\right)}, \quad b_k = \frac{\operatorname{cth}\left(\frac{\pi m d_k}{l}\right)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, N}). \quad (1.3)$$

Здесь d_k ($k = \overline{1, N}$) – высота k -ого слоя Ω_k .

Решение (1.3) опять подробно описано в [4]. Далее, при помощи формулы обращения определяются функции $w_k(x, y)$ ($k = \overline{1, N}$), а затем – напряжения в любой точке композита.

Отметим, что условие равновесия композита приводит к соотношению $\bar{\tau}_0(0) \equiv \bar{\tau}_n(0)$. В дальнейшем для простоты будем считать, что это соотношение удовлетворяется тождественно, т.е. примем $\tau_0(x) \equiv \tau_n(x)$ ($0 \leq x \leq l$).

1.2. Частные случаи и числовые результаты. Рассмотрим частный случай двухслойного композита (фиг.2)



Из (1.3) находим

$$\bar{\tau}_1(m) = \frac{\mu \bar{\tau}_0 \text{sh}(\pi m h_2/l) + \bar{\tau}_2 \text{sh}(\pi m h_1/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}, \quad \mu = G_2/G_1$$

Применяя формулу обращения

$$\tau_1(x) = \frac{1}{l} \bar{\tau}_1(0) + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\tau}_1(m) \cos(\pi m x/l),$$

получим

$$\tau_1(x) = \frac{2\mu}{l} \int_0^l \tau_0(t) \left[\frac{1}{2} + K(x,t) \right] dt + \frac{2}{l} \int_0^l \tau_2(t) \left[\frac{1}{2} + L(x,t) \right] dt,$$

где

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/l) \cos(\pi m t/l) \text{sh}(\pi m h_2/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}$$

$$L(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/l) \cos(\pi m t/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)} \quad (0 < x < l).$$

При $\tau_0(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $h_1 = h_2 = h$ получим

$$\tau_1(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi m x/l) \cos(\pi m t/l)}{\text{ch}(\pi m h/l)} \right] dt \quad (0 < x < l)$$

а) Если $\tau_0(x) = \tau_2(x) = T \delta(x - l/2)$, $(0 < x < l)$,

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, то учитывая, что

$$\int_0^l \tau_r(t) \cos \frac{\pi m t}{l} dt = \begin{cases} 0, & m = 2k - 1 \\ (-1)^k, & m = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\int_0^l \tau_r(t) dt = 1 \quad (r = 0; 2),$$

находим

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{l} \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos(2\pi m x/l) [\mu \operatorname{sh}(2\pi m h_2/l) + \operatorname{sh}(2\pi m h_1/l)]}{\mu \operatorname{ch}(2\pi m h_1/l) \operatorname{sh}(2\pi m h_2/l) + \operatorname{ch}(2\pi m h_2/l) \operatorname{sh}(2\pi m h_1/l)} \right]$$

или

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos[2\pi m \xi] \{ \mu \operatorname{sh}[2\pi m \lambda] + \operatorname{sh}[2\pi m \lambda \delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[2\pi m \lambda \delta] \operatorname{sh}[2\pi m \lambda] + \operatorname{ch}[2\pi m \lambda] \operatorname{sh}[2\pi m \lambda \delta]},$$

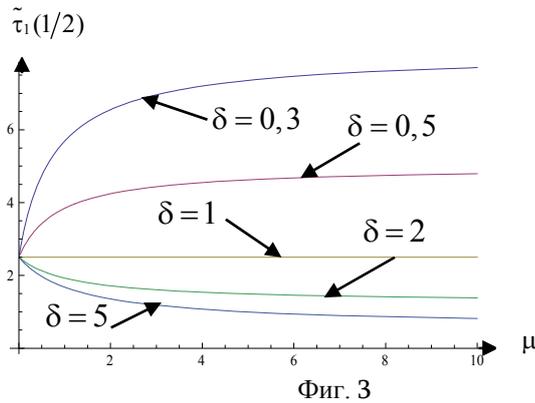
где

$$\xi = x/l; \lambda = h_2/l; \delta = h_1/h_2; \tilde{\tau}_1(\xi) = l\tau_1(\xi l)/2T.$$

Исследуем поведение функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$. В результате будем иметь:

$$\tilde{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\{ \mu \operatorname{sh}[2\pi m \lambda] + \operatorname{sh}[2\pi m \lambda \delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[2\pi m \lambda \delta] \operatorname{sh}[2\pi m \lambda] + \operatorname{ch}[2\pi m \lambda] \operatorname{sh}[2\pi m \lambda \delta]}.$$

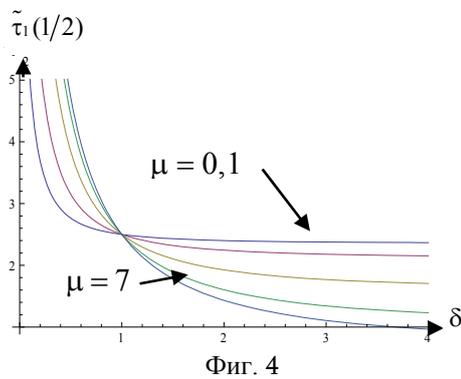
1. На фиг.3 приведены графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра μ для $\lambda = h_2/l = 0,1$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,3; 0,5; 1; 2; 5$. Из графиков видно, что $\tilde{\tau}_1(1/2)$ возрастает при $h_1/h_2 < 1$, убывает при $h_1/h_2 > 1$, а при $h_1/h_2 = 1$ остаётся постоянным, т.е. не зависит от μ .



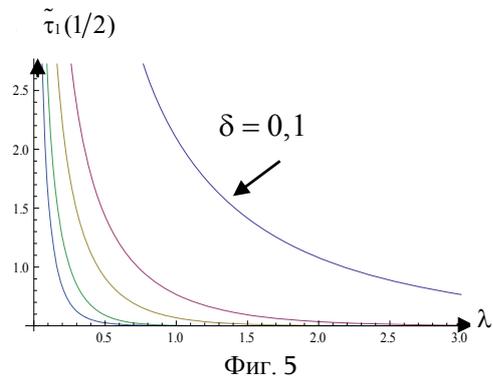
Фиг. 3

2. На фиг.4 показаны графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\delta = h_1/h_2$ для $\lambda = h_2/l = 0,1$ при $\mu = 0,1; 0,3; 1; 3; 7$. Напряжение $\tilde{\tau}_1(1/2)$ убывает для всех значений μ , а при увеличении δ приближается к нулю.

3. На фиг.5 приведены графики изменения функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\lambda = h_2/l$ для $\mu = 3$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,1; 0,3; 0,5; 1; 2$. Графики показывают, что $\tilde{\tau}_1(1/2)$ опять убывает для всех значений δ , а при увеличении λ приближается к нулю. Видно также, что при больших значениях δ графики мало отличаются друг от друга.



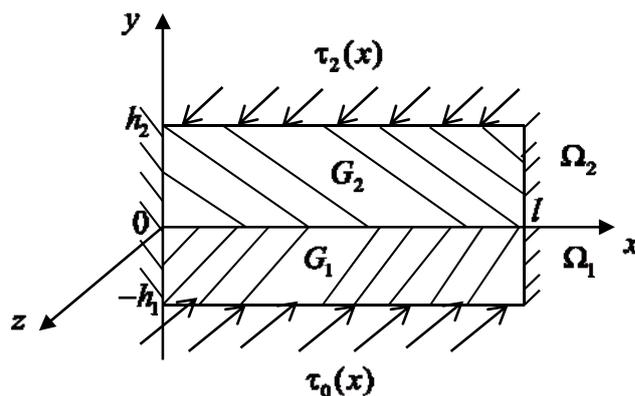
Фиг. 4



Фиг. 5

б) Очевидно, что если антиплоская деформация двухслойного композита вызвана одинаковыми постоянными силами, приложенными на верхней и нижней гранях композита, т.е. $\tau_0(x) = \tau_2(x) = P = \text{const}$, ($0 < x < l$), то $\tau_1(x) = P$.

2.1. Частный случай двухслойного композита при жёстко защемлённых вертикальных плоскостях и числовые результаты. Решение аналогичной задачи при жёстко защемлённых вертикальных плоскостях композита подробно приведено в [7]. Здесь остановимся на частном случае двухслойного композита.



Фиг. 6

Из формул, представленных в [7], при $n = 2$ находим

$$\bar{\tau}_1(m) = \frac{\mu \bar{\tau}_0 \text{sh}(\pi m h_2/l) + \bar{\tau}_2 \text{sh}(\pi m h_1/l)}{\mu \text{ch}(\pi m h_1/l) \text{sh}(\pi m h_2/l) + \text{ch}(\pi m h_2/l) \text{sh}(\pi m h_1/l)}, \quad \mu = \frac{G_2}{G_1} \quad (2.1)$$

$$\bar{w}_1(x, y) = \frac{l}{\pi m G_1} \frac{\bar{\tau}_2 \text{ch} \pi m(h_1 + y)/l - \bar{\tau}_0 \text{ch} \pi m y/l}{\text{sh} \pi m h_1/l} \quad (-h_1 \leq y \leq 0); \quad (2.2)$$

$$\bar{w}_2(x, y) = \frac{l}{\pi m G_2} \frac{\bar{\tau}_2 \text{ch} \pi m y/l - \bar{\tau}_1 \text{ch} \pi m(h_2 - y)/l}{\text{sh} \pi m h_2/l} \quad (0 \leq y \leq h_2). \quad (2.3)$$

Применяя формулу обращения

$$\tau_1(x) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \bar{\tau}_1(m) \sin(\pi m x/l),$$

из (2.1) получим

$$\tau_1(x) = \frac{2\mu}{l} \int_0^l \tau_0(t) K(x,t) dt + \frac{2}{l} \int_0^l \tau_2(t) L(x,t) dt, \quad (2.4)$$

где

$$K(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mx/l) \sin(\pi mt/l) \operatorname{sh}(\pi mh_2/l)}{\mu \operatorname{ch}(\pi mh_1/l) \operatorname{sh}(\pi mh_2/l) + \operatorname{ch}(\pi mh_2/l) \operatorname{sh}(\pi mh_1/l)}$$

$$L(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mx/l) \sin(\pi mt/l) \operatorname{sh}(\pi mh_1/l)}{\mu \operatorname{ch}(\pi mh_1/l) \operatorname{sh}(\pi mh_2/l) + \operatorname{ch}(\pi mh_2/l) \operatorname{sh}(\pi mh_1/l)} \quad (0 < x < l).$$

Легко заметить, что если антиплоская деформация двухслойного композита вызвана касательными силами одинаковых интенсивностей, приложенных на верхнюю и нижнюю грани композита, то при равных толщинах слоёв композита напряжение на плоскости контакта слоёв не зависит от отношения их модулей сдвига. Действительно, при $\tau_0(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$ и $h_1 = h_2 = h$ из (2.4) получим:

$$\tau_1(x) = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(t) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi mx/l) \sin(\pi mt/l)}{\operatorname{ch}(\pi mh/l)} dt \quad (0 < x < l).$$

а) Рассмотрим частный случай антиплоской деформации двухслойного композита при $\tau_0(x) = \tau_2(x) = T\delta(x-l/2)$, $(0 < x < l)$,

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака. Учитывая, что

$$\int_0^l \tau_r(t) \sin \frac{\pi mt}{l} dt = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ (-1)^k, & m = 2k+1, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (r = 0; 2),$$

из (2.4) получим

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{l} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(\pi(2m+1)x/l) [\mu \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)]}{\mu \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_1/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_2/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)}. \quad (2.5)$$

При $h_1 = h_2 = h$ находим:

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{l} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin \pi(2m+1)x/l}{\operatorname{ch} 2\pi(2m+1)h/l}.$$

После введения безразмерных величин

$$\xi = x/l; \lambda = h_2/l; \delta = h_1/h_2; \tilde{\tau}_1(\xi) = l\tau_1(\xi l)/2T$$

формула (2.5) примет вид:

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin[\pi(2m+1)\xi] \{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]}$$

Исследуем закономерности изменения касательного безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_1(\xi)$

в фиксированной точке $\xi = 1/2$

$$\tilde{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]}.$$

Последовательно приводим результаты численного анализа этой формулы.

1. На фиг.7 приведены графики напряжений $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра μ для $\lambda = h_2/l = 0,5$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,3; 0,5; 1; 2; 5$.

На этих графиках напряжения возрастают при $h_1/h_2 < 1$ и убывают при $h_1/h_2 > 1$, а при $h_1/h_2 = 1$ остаются постоянными, т.е. не зависят от μ .

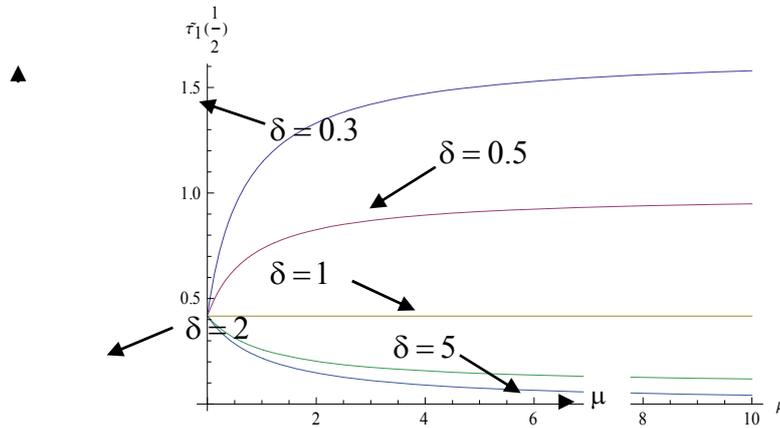
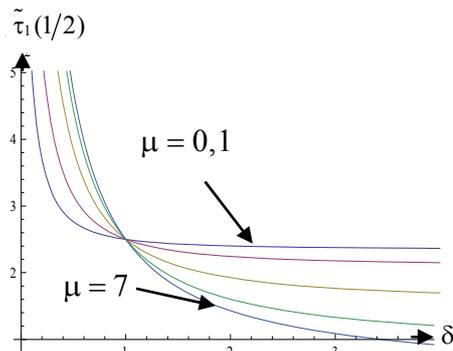


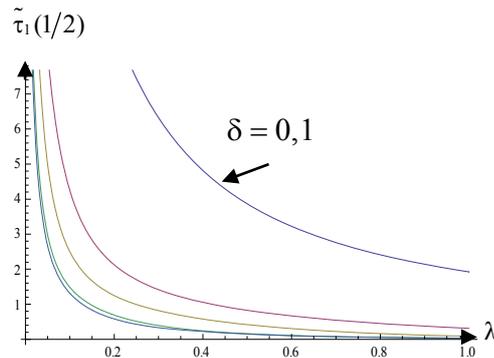
Рис. 7

2. На фиг.8 показаны графики изменения функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\delta = h_1/h_2$ для $\lambda = h_2/l = 0,1$ и при $\mu = 0,1; 0,3; 1; 3; 7$. Напряжения убывают для всех значений μ , а при увеличении δ приближаются к нулю.

3. На фиг.9 приведены графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\lambda = h_2/l$ и для $\mu = 2$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,1; 0,5; 1; 3; 5$. Графики опять снижаются для всех значений δ , а при увеличении λ приближаются к горизонтальной оси. Видно также, что при больших значениях δ графики мало отличаются друг от друга.



Фиг. 8



Фиг. 9

б) Рассмотрим другой частный случай, когда антиплоская деформация двухслойного композита вызвана одинаковыми постоянными силами, приложенными на верхней и нижней гранях композита:

$$\tau_0(x) = \tau_2(x) = P = \text{const}, \quad (0 < x < l).$$

Учитывая, что

$$\int_0^l \tau_r(t) \sin \frac{\pi m t}{l} dt = \begin{cases} 0, & m = 2k \\ \frac{2Pl}{\pi m}, & m = 2k+1, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (r = 0; 2),$$

из (2.4) получим

$$\tau_1(x) = \frac{2P}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{\sin(\pi(2m+1)x/l) [\mu \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)]}{\mu \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_1/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_2/l) + \operatorname{ch}(\pi(2m+1)h_2/l) \operatorname{sh}(\pi(2m+1)h_1/l)}$$

или в безразмерных величинах

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \frac{\sin[\pi(2m+1)\xi] \{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]},$$

$$\xi = x/l; \lambda = h_2/l; \delta = h_1/h_2; \tilde{\tau}_1(\xi) = \tau_1(\xi l)/P.$$

При $h_1 = h_2 = h$ получим

$$\tau_1(x) = \frac{2P}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \frac{\sin \pi(2m+1)x/l}{\operatorname{ch} 2\pi(2m+1)h/l}.$$

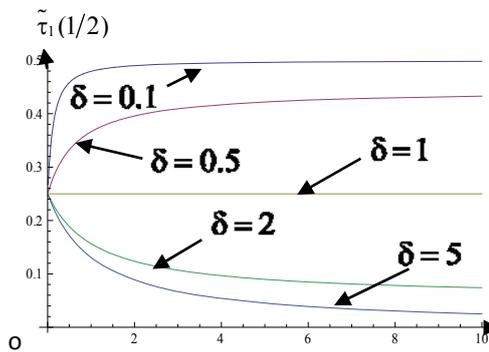
В точке $\xi = 1/2$

$$\tilde{\tau}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} \frac{\{ \mu \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \}}{\mu \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda\delta] \operatorname{sh}[\pi(2m+1)\lambda] + \operatorname{ch}[\pi(2m+1)\lambda] \operatorname{sh}[(2m+1)\lambda\delta]}.$$

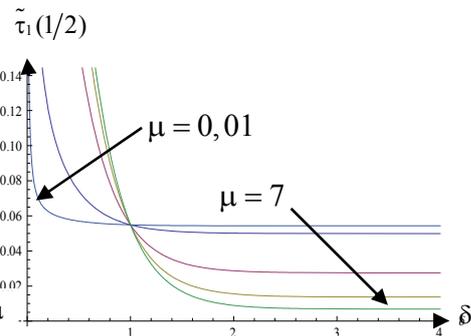
Рассмотрим различные комбинации характерных параметров.

1. На фиг.10 приведены графики изменения функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра μ для $\lambda = h_2/l = 0,5$ при $\delta = h_1/h_2 = 0,1; 0,5; 1; 2; 5$. Напряжения возрастают при $h_1/h_2 < 1$ и убывают при $h_1/h_2 > 1$, а при $h_1/h_2 = 1$ не зависят от μ .

2. На фиг.11 приведены графики функции $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = 1/2$ в зависимости от параметра $\delta = h_1/h_2$ для $\lambda = h_2/l = 1$ при $\mu = 0,01; 0,1; 1; 3; 7$. Все эти графики заметно снижаются и при больших значениях μ мало отличаются друг от друга.



Фиг. 10



Фиг. 11

3.1. Постановка задач для композита из полубесконечных слоёв. Далее рассмотрим вышеуказанные задачи для композита, представляющего собой пакет из произвольного конечного числа упругих полубесконечных слоёв (фиг. 12 и 13).

$$\Omega_k = \{0 \leq x < \infty, h_{k-1} \leq y \leq h_k, -\infty < z < \infty\} \quad (k = \overline{1, N})$$

В первой задаче, когда грань композита $x = 0$ свободна от напряжений, т.е.

$$\tau_{xz} \Big|_{x=0} = \frac{G_k \partial w_k(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad (k = \overline{1, N-1}),$$

применяются косинус-преобразования Фурье

$$\{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} = \int_0^\infty \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} \cos(\lambda x) dx \quad (k = \overline{0, N}) \quad (3.1)$$

и формулы обращения

$$\{\tau_k(x); w_k(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} \cos(\lambda x) d\lambda \quad (k = \overline{0, N}), \quad (3.2)$$

где λ – спектральный параметр Фурье.

Во второй же задаче, когда грань композита $x = 0$ жёстко закреплена, т.е.

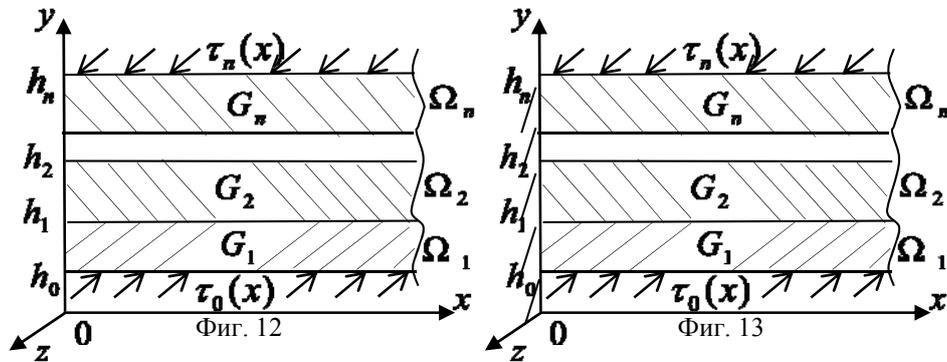
$$w_k(x, y) \Big|_{x=0} = 0 \quad (k = \overline{1, N}),$$

применяются синус-преобразования Фурье

$$\{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} = \int_0^\infty \{\tau_k(x); w_k(x, y)\} \sin(\lambda x) dx \quad (k = \overline{0, N}) \quad (3.3)$$

и формулы обращения

$$\{\tau_k(x); w_k(x, y)\} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \{\bar{\tau}_k(\lambda); \bar{w}_k(\lambda, y)\} \sin(\lambda x) d\lambda \quad (k = \overline{0, N}). \quad (3.4)$$



Тогда, с учётом условий

$$\lim_{x \rightarrow \infty} w_k(x, y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial w_k(x, y)}{\partial x} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

решение обеих задач сводится к конечно-разностным уравнениям [4]

$$a_k \bar{\tau}_{k-1} - (b_k + b_{k+1}) \bar{\tau}_k + a_{k+1} \bar{\tau}_{k+1} = 0 \quad (k = \overline{1, N-1})$$

$$a_k = \frac{1}{G_k \text{sh}(\lambda d_k)}, \quad b_k = \frac{\text{cth}(\lambda d_k)}{G_k}, \quad d_k = h_k - h_{k-1} \quad (k = \overline{1, N}). \quad (3.5)$$

При этом,

$$\bar{\tau}_k(\lambda) = \frac{G_{k+1} \bar{\tau}_{k-1} \text{sh}(\lambda d_{k+1}) + G_k \bar{\tau}_{k+1} \text{sh}(\lambda d_k)}{G_{k+1} \text{ch}(\lambda d_k) \text{sh}(\lambda d_{k+1}) + \text{ch}(\lambda d_{k+1}) \text{sh}(\lambda d_k)}, \quad (k = \overline{1, N-1}). \quad (3.6)$$

3.2. Частные случаи, числовые результаты. В частном случае двухслойного композита из (3.6) при $n = 2$ получим

$$\bar{\tau}_1(\lambda) = \frac{\mu \bar{\tau}_0 \text{sh}(\lambda d_2) + \bar{\tau}_2 \text{sh}(\lambda d_1)}{\mu \text{ch}(\lambda d) \text{sh}(\lambda d_2) + \text{ch}(\lambda d_2) \text{sh}(\lambda d)}, \quad \mu = G_2/G_1 \quad (3.7)$$

Тогда, после применения формул (3.1) и (3.2) в первой задаче и формул (3.3) и (3.4) во второй задаче, для обеих задач получим:

$$\tau_1(x) = \frac{2\mu}{\pi} \int_0^\infty \tau_0(t) K(x, t) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \tau_2(t) L(x, t) dt, \quad (3.8)$$

где, соответственно,

$$K(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_2) \cos(\lambda x) \cos(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda \quad (3.9)$$

$$L(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_1) \cos(\lambda x) \cos(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda$$

– для первой задачи и

$$K(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_2) \sin(\lambda x) \sin(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda \quad (3.10)$$

$$L(x, t) = \int_0^\infty \frac{\text{sh}(\lambda d_1) \sin(\lambda x) \sin(\lambda t)}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda$$

– для второй задачи.

Теперь примем $\tau_0(x) = \tau_2(x) = T\delta(x - x_0)$, ($x_0 > 0$), где $\delta(x)$ – функция Дирака. Тогда, из (3.8)-(3.10) для первой и второй задач, соответственно, получим:

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x) \cos(\lambda x_0) [\mu \text{sh}(\lambda d_2) + \text{sh}(\lambda d_1)]}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda \quad (3.11)$$

$$\tau_1(x) = \frac{2T}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\lambda x) \sin(\lambda x_0) [\mu \text{sh}(\lambda d_2) + \text{sh}(\lambda d_1)]}{\mu \text{sh}(\lambda d_2) \text{ch}(\lambda d_1) + \text{sh}(\lambda d_1) \text{ch}(\lambda d_2)} d\lambda$$

Легко заметить, что при равных высотах слоёв ($d_1 = d_2$) напряжение $\tau_1(x)$ не зависит от отношения модулей сдвига слоёв μ .

Введя безразмерные величины

$$\alpha = \lambda d_1; \quad \xi = x/d_1; \quad \eta = x_0/d_1; \quad \delta = d_2/d_1; \quad \tilde{\tau}_1(\xi) = d_1 \tau_1(\xi d_1)/2T,$$

из (3.11), соответственно, получим:

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos(\alpha \xi) \cos(\alpha \eta) [\mu \text{sh}(\alpha \delta) + \text{sh} \alpha]}{\mu \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} d\lambda$$

$$\tilde{\tau}_1(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha \xi) \sin(\alpha \eta) [\mu \text{sh}(\alpha \delta) + \text{sh} \alpha]}{\mu \text{sh}(\alpha \delta) \text{ch} \alpha + \text{sh} \alpha \text{ch}(\alpha \delta)} d\lambda$$

В табл.1 и 2 приведены значения безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = \xi_0 = 1$ для различных значений параметров δ и μ для первой задачи.

Таблица 1

$\delta \backslash \mu$	0.2	0.5	1	2	3
0.001	1.2496	0.5016	0.2715	0.1749	0.1356
0.01	1.2426	0.4998	0.2715	0.176	0.1374
0.05	1.2142	0.4902	0.2715	0.1805	0.1448
0.1	1.1811	0.4829	0.2715	0.1760	0.1529
0.5	0.9844	0.4309	0.2715	0.2116	0.1922
1	0.8353	0.3936	0.2715	0.2279	0.21504
3	0.5827	0.3348	0.2715	0.2506	0.2450
5	0.4875	0.3142	0.2715	0.2577	0.2542
10	0.3943	0.2951	0.2715	0.2641	0.2622
20	0.3376	0.2840	0.2715	0.2676	0.2667

Таблица 2

$\mu \backslash \delta$	0.01	0.03	1	5
0.01	25.1336	21.1797	15.9181	7.4660
0.1	2.4844	2.1198	1.6142	0.8228
0.5	0.4998	0.4532	0.3936	0.3142
1	0.2715	0.2715	0.2715	0.2715
3	0.1374	0.1767	0.2150	0.2542
5	0.0948	0.1532	0.2034	0.2512

В табл.3 приведены значения безразмерного напряжения $\tilde{\tau}_1(\xi)$ в точке $\xi = \xi_0 = 1$ для различных значений параметров δ и μ для второй задачи.

Таблица 3

$\delta \backslash \mu$	0.2	0.5	1	2	3
0.001	1.2492	0.4979	0.2284	0.0754	0.0315
0.01	1.2426	0.4959	0.2284	0.0769	0.0336
0.05	1.2140	0.4873	0.2284	0.0835	0.0425
0.1	1.1808	0.4773	0.2284	0.0910	0.0525
0.5	0.9824	0.4190	0.2284	0.1310	0.1051
1	0.8310	0.3761	0.2284	0.1590	0.1385
3	0.5693	0.3064	0.2284	0.1937	0.1851
5	0.4680	0.2815	0.2284	0.2055	0.1999
10	0.3666	0.2579	0.2284	0.2160	0.2130
20	0.3035	0.2441	0.2284	0.2219	0.2204

Из приведённых в таблицах данных видно, что в обеих задачах безразмерное контактное напряжение проявляет то же поведение, что и в первых двух задачах, т.е.:

а) возрастает при $d_2/d_1 > 1$ и убывает при $d_2/d_1 < 1$ в зависимости от μ , а при $d_2/d_1 = 1$ остаётся постоянным, т.е. не зависит от μ ;

б) убывает в зависимости от δ для всех значений μ .

Заключение. Построено эффективное решение задач о напряжённом состоянии двух композитов, состоящих из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих разнородных слоёв при антиплоской деформации, как при нагруженных, так и при свободных от напряжений боковых плоскостях.

При помощи численного анализа для двухслойных композитов показано, что безразмерные контактные напряжения на плоскости контакта слоёв:

а) не зависит от отношения модулей сдвига слоёв, если слои имеют одинаковые толщины;

б) при возрастании параметра μ возрастает, если верхний слой толще нижнего и убывает, если нижний слой толще верхнего.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491с.
2. Власов В.З. Метод начальных функций в задачах теории упругости.// Изв. АН СССР. ОТН. 1955. № 7. С.49–69.
3. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах равновесия толстых многослойных плит.// Изв. АН СССР. ОТН. 1958. № 7. С.40–48.
4. Гаспарян А.В., Мхитарян С.М. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв при антиплоской деформации. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. № 2. С.10–20.
5. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих круговых цилиндров при антиплоской деформации. //В сб. научных трудов Международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 4–8 октября, 2010, Дилижан, Армения, т.1, с.167-171.
6. Гаспарян А.В., Давтян З.А. О напряжённом состоянии кусочно-однородного композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих клиньев при антиплоской деформации. //Изв.НАН Армении. Механика. 2014. Т.67. №2. С.5-13.
7. Гаспарян А.В., Давтян З.А., Григорян М.С. Напряжённое состояние композита в виде пакета из произвольного конечного числа упругих слоёв-прямоугольников при антиплоской деформации. // В сб. трудов VIII Международной конференции: «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред», 22–26 сентября, 2014, Горис-Степанакерт, с.133-137.
8. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. М: Наука, 1967. 375с.
9. Снеддон И. Преобразование Фурье. М.: Госиноиздат, 1955. 667с.

Сведения об авторе:

Гаспарян Ануш Вараздатовна,

К.ф.-м.н., научный сотрудник, Институт механики НАН Армении

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2

Тел.: (+37410) 52-48-90; **E-mail:** anush@mechins.sci.am

Поступила в редакцию 11.12.2014

УДК 539.3

STABILITY OF A BEAM WITH PERIODIC SUPPORTS

Avetisyan A.S. , Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B.

Kew words: Floquet theory, inhomogeneous beam, stability, periodic supports

Ключевые слова: Теория Флоке, неоднородная балка, устойчивость, периодические опоры.

Բանալի բառեր. Ֆլոկեի տեսություն, անհամասեռ հեծան, կայունություն, պարբերական հենարաններ:

Ավետիսյան Ա.Ս., Բելուբեկյան Մ.Վ., Ղազարյան Կ.Բ.

Պարբերական հենարաններով հեծանի կայունությունը:

Ֆլոկեի տեսության շրջանակներում դիտարկված է պարբերական հենարաններով, սեղմված անհամասեռ հեծանի կայունության խնդիրը: Մասնավոր դեպքում քննարկված է համասեռ նյութից հեծան, հավասարահեռ տեղաբաշխված հենարաններով: Սեղմված հեծանի կայունության տիրույթները որոշված են անալիտիկ:

Аветисян А.С., Белубекян М.В., Казарян К.Б.

Устойчивость балки с периодическими опорами

В рамках теории Флоке рассмотрена задача устойчивости сжатого неоднородного стержня с периодическими опорами. Частный случай однородного стержня с равномерно распределёнными опорами изучен; области устойчивости сжатой балки определены аналитически.

In terms of the Floquet theory the stability problem is considered for a compressed inhomogeneous beam with periodic supports. The special case of homogeneous beam with periodic supports of the uniform span is studied, the stability and instability regions of the compressed force values are determined analytically.

Introduction. Problems of vibrations and stability of beams (plates, shells) and beam structures are very similar. Mathematically, in many cases they lead to the same eigenvalue boundary problems. However, there are cases where the analogy breaks down. A great number of papers is devoted to the analysis of wave propagation in periodic structures that consist of a number of elastic structural different elements (commonly with large contrast in elastic properties and densities) joined together in periodic manner to form the whole structure. [1–9]. Interest to these problems is due to the existence of complete elastic band gaps within which all vibrations are forbidden.

The gap band structure of flexural bending wave in the periodic beam and beam on elastic foundation are studied in [5-7]. Propagation of bending waves in a homogeneous beam with periodically interfaces of incomplete elastic contacts is considered in [8,9]. What is an analogy with the stability problems of such beams and what is the difference? It is clear that the problem of stability of an infinitely long, non-uniform beam does not

make sense. The problem of stability of a beam with periodically inhomogeneous periodic structure of supports should be similar to the vibration problem of the same beam.

1.Statement of the problem. We consider an infinite one-dimensional periodically composed beam with the unit cell of a period $d = l_1 + l_2$ consisting of two piecewise-homogeneous parts having different bending rigidities. The joints between beam different parts are simply supported ones. (Fig 1.) The beam is compressed by the axial force P applied at beam infinity edges.

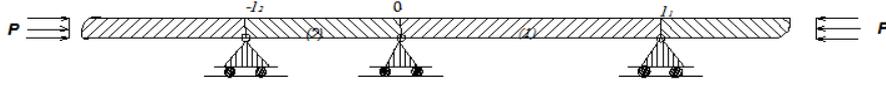


Fig.1. Piecewise compressed beam with periodic supports

The beam stability equations can be written as [10,11]

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} + \alpha_i^2 \frac{d^2 w_i}{dx^2} = 0, \quad \alpha_i^2 = \frac{P}{E_i J_i} \quad (1.1)$$

where superscripts $i=1, i=2$ show that the functions belong to beam unit parts $0 < x \leq l_1$ and $-l_2 \leq x < 0$, respectively, $w_i(x)$ are the transverse displacements, P is the axial compressive force applied at the infinity edges of the compound beam structure, $E_i J_i$ – are the bending rigidities of unit beam piecewise-homogeneous parts.

The following contact conditions at point $x = 0$ should be satisfied

$$w_1 = w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \beta^2 \frac{d^2 w_2}{dx^2}, \quad (1.2)$$

Here $\beta = \sqrt{(E_2 J_2)/(E_1 J_1)}$.

By analogy with the vibration problems of a periodic inhomogeneous beam the Floquet boundary conditions of quasi-periodicity can be taken as

$$w_1(l_1) = 0, \quad w_2(-l_2) = 0, \\ \lambda \frac{dw_1}{dx} \Big|_{x=l_1} = \frac{dw_2}{dx} \Big|_{x=-l_2}, \quad \lambda \frac{d^2 w_1}{dx^2} \Big|_{x=l_1} = \beta^2 \frac{d^2 w_2}{dx^2} \Big|_{x=-l_2} \quad (1.3)$$

$\lambda = \exp[ik(l_1 + l_2)]$, k is the Floquet number.

2. Solution of the problem. Solution of eq.(1.1) has the form

$$w_i(x) = A_i + B_i x + C_i \sin(\alpha_i x) + D_i \cos(\alpha_i x); \quad i = 1; 2 \quad (2.1)$$

where A_i, B_i, C_i, D_i are arbitrary constants,

Substituting these solutions into the contact conditions (1.2) and Floquet quasi-periodicity boundary conditions (1.3) a simultaneous set of equations with respect to the arbitrary A_i, B_i, C_i, D_i are obtained. Equating the determinant of the simultaneous set of equations to zero will produce the equation

$$F(P) \cos[k(l_1 + l_2)] - S(P) = 0, \quad (2.2)$$

where

$$\begin{aligned} S(P) = & l_1 l_2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 \beta^2 \cos(l_1 \alpha_1) \cos(l_2 \alpha_2) + l_1 \alpha_1^3 \sin(l_1 \alpha_1) + l_2 \alpha_2^3 \beta^4 \sin(l_2 \alpha_2) - \\ & - (l_1 \alpha_1^2 + l_2 \alpha_2^2 \beta^2) [\alpha_1 \cos(l_2 \alpha_2) \sin[l_1 \alpha_1] + \alpha_2 \beta^2 \cos(l_1 \alpha_1) \sin(l_2 \alpha_2)] + \\ & + \alpha_1 \alpha_2 \left(\beta^2 - \frac{l_1 l_2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \beta^4)}{2} \right) \sin(l_1 \alpha_1) \sin(l_2 \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$F(P) = \alpha_1 \alpha_2 \beta^2 [l_1 \alpha_1 - \sin(l_1 \alpha_1)] [l_2 \alpha_2 - \sin(l_2 \alpha_2)]$$

For given values of the axial force P Eq. (2.2) determines the Floquet number k . The regions of P where

$|\cos[k(l_1 + l_2)]| > 1$ (values of k are complex) correspond to beam stability regions.

The regions of P where $|\cos[k(l_1 + l_2)]| \leq 1$ (values of k are real) correspond to beam instability regions.

3. Special cases of a beam and supports structure. Let us now consider the homogeneous beam of the uniform span of periodic supports

$$l_1 = l_2 = l, \quad E_1 J_1 = E_2 J_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad (3.1)$$

In this case instead of eq. (2.2) we have

$$\cos(2kl) = \frac{[1 - (1 - 2\alpha^2 l^2) \cos(2\alpha l) + 4\alpha l \cdot \sin(\alpha l) - 4\alpha l \cdot \sin(2\alpha l)]}{2(\sin(\alpha l) - \alpha l)^2} \quad (3.2)$$

which can be transformed to the following equation

$$\begin{aligned} \cos^2(kl) &= F^2(\alpha l) \\ F(\alpha l) &= \frac{\alpha l \cdot \cos(\alpha l) - \sin(\alpha l)}{\alpha l - \sin(\alpha l)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Since for any values of αl the function $F(\alpha l) \leq 1$ and $F(0) = -2$, the regions of αl where $F(\alpha l) < -1$ ($F^2(\alpha l) > 1$) will correspond to beam stability regions, for all values of αl outside of these regions the beam becomes unstable.

The boundaries of stability and instability regions are determined from equation

$$F(\alpha l) = -1 \quad (3.4)$$

Equation (3.4) can be transformed into

$$\cos(\alpha l/2) \cdot (\alpha l \cdot \cos(\alpha l/2) - 2 \cdot \sin(\alpha l/2)) = 0 \quad (3.5)$$

from which follows the simultaneous set of equations

$$\cos(\alpha l/2) = 0, \quad \text{tg}(\alpha l/2) = \alpha l/2 \quad (3.6)$$

The roots of the equations (3.6)

$$\begin{aligned} (\alpha l)_n^{(1)} &= (2n-1)\pi; \\ (\alpha l)_0^{(2)} &= 0, (\alpha l)_n^{(2)} = (2n+1)\pi - \varepsilon_n \quad n = 1; 2; \dots \end{aligned} \quad (3.7)$$

define the boundaries of beam stability (instability) regions.

In (3.7) $\varepsilon_n \ll \pi$, $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\varepsilon_1 = 0.4417$

Thus, the stability intervals of axial force $P(\alpha l)$ can be found as

$$\alpha l \in (0, \pi) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} ((2n+1)\pi - \varepsilon_n, (2n+1)\pi), \quad (3.8)$$

In these intervals equation (3.3) has no roots corresponding to real Floquet number k .

It is worth to note that the lengths of second and consequent intervals are very small, practically reach to zero for $n \geq 5$.

The values of αl which do not belong to (3.8) intervals correspond to critical values of axial force P under which the beam structure is unstable.

Let us now consider the beam structure when the rigidities of materials of periodic parts are significantly different. When the beam parts with index $i = 2$ are substantially rigid as compared with other parts with index $i = 1$ $\alpha_2 l_2 \ll 1$, taking in (2.3) $\sin(l_2 \alpha_2) \approx l_2 \alpha_2$, $\cos(l_2 \alpha_2) \approx 1$ we come to the equation which does not depend from Floquet number k

$$2(\cos(\alpha_1 l_1) - 1) + \alpha_1 l_1 \cdot \sin(\alpha_1 l_1) = 0 \quad (3.9)$$

The equation (3.9) is convenient to transform to the following form

$$\sin(\alpha_1 l_1 / 2) [\alpha_1 l_1 \cos(\alpha_1 l_1 / 2) - 2\alpha_1 l_1 \cdot \sin(\alpha_1 l_1 / 2)] = 0 \quad (3.10)$$

From (3.10) it follows that minimal critical value $(\alpha_1 l_1)^*$ is the first root of the equation

$$\begin{aligned} \text{tang}\left(\frac{\alpha_1 l_1}{2}\right) &= \frac{2}{\alpha_1 l_1}; \\ (\alpha_1 l_1)^* &= 1.721 \end{aligned} \quad (3.11)$$

4. Conclusion

In the framework of the Floquet theory the analog set between stability and vibration problems of inhomogeneous elastic beam periodic structure. The infinite compressed beam is considered consisting with periodic piecewise-homogeneous parts of different bending rigidities. The periodic joints between beam different parts are simply supported ones. The equation relate to Floquet number and compressed force is obtained which enables to define the stability and instability regions of the compressed force values. The special case of homogeneous compressed beam with periodic supports of uniform span is discussed in detail. The beam stability and instability regions of the compressed force are determined analytically. The minimal value of critical force is defined for beam when the rigidities of materials of periodic parts are significantly different.

Acknowledgment

This research was supported by State Committee of Science of Armenia Grant No. SCS 13-2C005.

References

1. E.H. Lee, A survey of variational methods for elastic wave propagation analysis in composites with periodic structures, in Dynamics of Composite Materials, E.H. Lee, ed., ASME, New York, 1972, pp. 122–138.
2. E.H. Lee and W. H. Yang, On waves in composite materials with periodic structure. //SIAM Journal on Applied Mathematics., 25 (1973), pp. 492–499.
3. Mingrong Shen , Wenwu Cao, Acoustic bandgap formation in a periodic structure with multilayer unit cells. //Journal Phys. D: Appl. Phys.33, (2000), p.1150–1154.
4. A.Velo, E. Bruder, N. Rodriguez, G. Gazonas, E. Bruder, Recursive Dispersion Relations in One-Dimensional Periodic Elastic Media. //SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol.69, No.3, pp.670 –689, (2008).
5. V.G. Papanicolaou. The Floquet Theory of the Periodic Euler Bernoulli Equation, journal of differential equations 150, 24-41 (1998),
6. V.G. Papanicolaou, The Spectral Theory of the Vibrating Periodic Beam, Comm. Math.Phys. 170 (1995), 359-373.
7. S. Adams, R. Craster, S. Guenneau , Bloch waves in periodic multi-layered acoustic waveguides, Proceedings Royal Society London A 464 (2008), p.2669-2692.
8. Казарян К.Б., Казарян Р.А. Изгибные волны Флоке в пластинке-полосе с периодической структурой интерфейсов. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред //Труды VII Международной конференции, Горис-Степанакерт. 2011. С.194-199.
9. Белубекян М.В., Казарян К.Б., Казарян Р.А. Изгибные волны Флоке в балке периодической структуры неполного упругого контакта. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. // Труды VIII Международной конференции, Горис-Степанакерт, 2014. С.93-97.
10. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 336с.
11. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ара Сергеевич – Чл.-корр. НАН Армении, доктор физ.-мат.наук, Институт механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2, **тел.:** (+37493)00-44-55.

E-mail: ara.serg.avetisyan@gmail.com

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ.-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА, Ереван, Армения. **Тел.:** (+374 10) 52-15-03; (+374 10) 58-00-96

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Казарян Карен Багратович – доктор физ.-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА. **Тел.:** (374 10) 22 73 95, (374 955) 22 73 95.

E-mail: ghkarren@gmail.com

Поступила в редакцию 15.05.2015

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С
ДВУМЯ ПРОТИВОПОЛОЖНЫМИ ШАРНИРНО-
ЗАКРЕПЛЁННЫМИ КРАЯМИ

Мартиросян К.Л., Дарбинян А.З.

Ключевые слова: полубесконечная пластинка, шарнирное закрепление, изгиб, перерезывающие силы, момент, прогиб.

Key words: semi-infinite plate, simply supported, bending, crosscutting forces, moment, deflection.

Բանալի բառեր. Շիսասանվերջ սալ, հոդակապորեն ամրակցում, ծռում, կտրող ուժեր, մոմենտ, ճկվածք:

Մարտիրոսյան Կ.Լ., Դարբինյան Ա.Զ.

Հոդակապորեն ամրակցված երկու հանդիպակաց կողմերով կիսասանվերջ սալի ծռման խնդրի մասին շեղակցում է լայնական սահքերի ազդեցությունը՝ սալի հանդիպակաց կողմերի հոդակապորեն ամրակցման պայմանի դեպքում կիսասանվերջ սալ-շերտի ծռման խնդրում: Խնդիրը դիտարկվում է դասական տեսության [1], առաջին կարգի ճշտագրված տեսության և բարձր կարգի ճշտագրված տեսության հիման վրա: Բերված է սալի ճկվածքների, կտրող ուժերի, մոմենտների համեմատումը՝ Ռեյսներ-Գենկի-Մինդլինի տեսությամբ Վասիլևի վարիանտով [2] և Համբարցումյանի տեսությամբ [3]:

Martirosyan K.L., Darbinyan A.Z.

The problem of bending semi-infinite plates with simply supported boundary conditions at two opposite edges

In this article is investigated the action the transversal shears the problem of plate bending semi-infinite plates when two opposite edges are simply supported boundary conditions. The problem of bending of a plate the action of tangential loads is considered on the base of classical theory[1], on the base of refined theory of first order, on the base of refined theory of high order. The comparisons between deflections, crosscutting forces and moments by theory of Reissner-Genki-Mindlin by Vasilyev variant [2], and the theory of Ambartsumyan [3].

В настоящей работе исследуется влияние поперечных сдвигов при изгибе полубесконечной пластины-полосы при условии шарнирного закрепления противоположных сторон. Задача рассматривается на основе классической теории [1], уточнённой теории первого порядка и уточнённой теории высокого порядка. Приведены сравнения для прогиба пластинки для перерезывающих сил, моментов по теории Рейснера-Генки-Миндлина по варианту Васильева [2] и по теории С.А.Амбарцумяна [3].

Введение. В настоящее время в различных областях техники в качестве рациональных конструктивных элементов широко применяются пластинки. Требование обеспечения прочности элементов тонкостенных конструкций приводит к необходимости анализа возможных состояний этих конструкций. В этом аспекте вопросы исследования напряжённо-деформированного состояния пластинок при приложении нагрузки представляют большой интерес. Широкий интерес к уточнённым теориям оболочек и пластин имеет вполне естественное объяснение. Классическая теория, построенная на основании гипотезы недеформируемых нормалей, не отражает указанные выше явления, связанные с учётом поперечных деформаций и напряжений, и даёт существенные погрешности при рассмотрении задач оболочек и пластин из современных композиционных материалов. Более того, классическая теория изгиба пластин описывается уравнением четвёртого порядка, и в связи с этим, в частности, для удовлетворения граничным условиям свободного края приходится искусственным образом понизить число граничных условий и ввести обобщённое поперечное усилие. В угловых точках граничного контура обобщённое поперечное

усилие может иметь особенность, которая часто интерпретируется как сосредоточенная поперечная сила, реально действующая в угловой точке или фиктивная [2]. А в уточнённых теориях учёт поперечных сдвигов приводит к повышению порядка уравнений изгиба пластин [3] и появляется возможность более точного удовлетворения граничным условиям на кромке пластинки. Здесь исчезает необходимость введения обобщённого усилия Кирхгофа, а наличие угловых точек не вызывает появления особенностей.

1. Постановка задачи. Рассматривается полубесконечная пластинка толщиной $2h$, на лицевых поверхностях которой заданы касательные нагрузки. Прямоугольная декартова система координат (x, y, z) выбрана так, что срединная плоскость пластинки совпадает с плоскостью (Oxy) . Предполагается, что на лицевых поверхностях заданы касательные нагрузки:

$$z = h : \sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = X^+(x, y), \sigma_{32} = 0 \quad (1.1)$$

$$z = -h : \sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = -X^-(x, y), \sigma_{32} = 0$$

Относительно перемещений, по теориям (К), (R) и (A), соответственно, принимаются следующие допущения [4]:

$$U_1 = U - z \frac{\partial W}{\partial x}, \quad U_2 = V - z \frac{\partial W}{\partial y}, \quad U_3 = W \quad (1.2)$$

$$U_1 = U - z\theta_1, \quad U_2 = V - z\theta_2, \quad U_3 = W \quad (1.3)$$

$$U_1 = U - z \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{z}{2G} \left(X_1 + \frac{z}{2h} X_2 \right) + \frac{1}{G} g(z) \varphi_1, \quad (1.4)$$

$$U_2 = V - z \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{1}{G} g(z) \varphi_2, \quad U_3 = W$$

Перемещения срединной плоскости U, V , прогиб пластинки W и функции $\varphi_1, \varphi_2, \theta_1, \theta_2$ не зависят от координаты z ; G – модуль сдвига, $X_1 = X^+ - X^-$, $X_2 = X^+ + X^-$, $g(z) = z(1 - z^2/3h^2)$.

Уравнения напряжённого деформированного состояния пластинки по теориям (К) и (R) определяются соотношениями:

$$\begin{cases} \Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{2X_2}{C(1-\nu)} \\ \Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0, \end{cases} \quad \theta = \frac{1+\nu}{1-\nu} \quad (1.5)$$

по теории (A)

$$\begin{cases} \Delta U + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right) = -\frac{2X_2}{C(1-\nu)} - \frac{\theta h}{3E} \left(\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2} \right) \\ \Delta V + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x} \right) = -\frac{\theta h}{12G} \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (1.6)$$

Уравнения изгиба пластинки получаются по теориям (К), (R), (A):

$$\Delta^2 W = \frac{h}{D} \frac{\partial X_1}{\partial x} \quad (1.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta W - \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 \\ D \left[\Delta \theta_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4Gh}{1-\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \theta_1 \right) = \frac{2h}{1-\nu} X_1 \\ D \left[\Delta \theta_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) \right] + \frac{4Gh}{1-\nu} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \theta_2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = -\frac{3}{4} \frac{\partial X_1}{\partial x}, \\ D \frac{\partial}{\partial x} \Delta W - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_1 + \theta \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_1 = \frac{2h^3}{3(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} \right), \\ D \frac{\partial}{\partial y} \Delta W - \frac{8h^3}{15} \left[\Delta \varphi_2 + \theta \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) \right] + \frac{4h}{3} \varphi_2 = \frac{h^3 \theta}{3} \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (1.9)$$

2. Решение задачи. Пусть прямоугольная пластина занимает область $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Приложенная нагрузка задана в виде $X_1 = \tau_0 \sin \lambda y$, $X_2 = 0$, где $\lambda = \pi/b$.

Края пластины $y = 0, b$ шарнирно закреплены по теориям (К), (R) и (A), соответственно:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \quad (2.2)$$

$$W = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b; \quad (2.3)$$

$$W = 0, \quad \varphi_1 = -\frac{5}{8} X_1, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{4}{5G} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0, b, \quad (2.4)$$

а на лицевых поверхностях приложены только касательные нагрузки (1.1). Следует отметить, что в случае $X_2 = 0$ обобщённое плоско-напряжённое состояние имеет нулевое решение.

Решения уравнений изгиба в двумерном случае по теориям (К), (R) и (A) при граничных условиях (2.2), (2.3), (2.4), по аналогии с задачей Надаи [1], при $x \rightarrow \infty$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0 \quad (2.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_1 = -\frac{\tau_0}{2G(\eta^2 + 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \theta_2 = 0 \quad (2.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} W = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_1 = -\frac{5\lambda^2}{8\chi^2} \tau_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi_2 = 0. \quad (2.7)$$

где $\eta = h\lambda/\sqrt{3}$, $\chi = h^{-1} \sqrt{5(1 + \xi^2)}/2$, $\xi = \sqrt{2/5} \lambda h$.

Эти условия следуют из решений уравнений изгиба (1.7), (1.8), (1.9) в одномерном случае.

Решение систем уравнений, удовлетворяющее граничным условиям (2.2), (2.3) и (2.4), соответственно, представляется в виде:

по теориям (К), (R) и (А)

$$W = W_1(x) \sin \lambda y, \quad (2.8)$$

по теории (R)

$$\theta_1 = \theta_{11}(x) \sin \lambda y, \quad \theta_2 = \theta_{21}(x) \cos \lambda y, \quad (2.9)$$

по теории (А)

$$\varphi_1 = \varphi_{11}(x) \sin \lambda y, \quad \varphi_2 = \varphi_{21}(x) \cos \lambda y. \quad (2.10)$$

Условия свободного опирания по теории (К) имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0. \quad (2.11)$$

Здесь из трёх условий для функции прогиба W берутся только первые два, и тогда задача изгиба с граничными условиями (2.11) совпадает с задачей шарнирного закрепления. Здесь, как и в случае стеснённого скользящего контакта, применение уточнённой теории необходимо [5], [6], [7].

По теориям (R) и (А) условия свободного опирания имеют вид:

$$W = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = 0, \quad (2.12)$$

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{4}{5G} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) = \frac{1}{2G} \frac{\partial X_1}{\partial x}, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{2}{5G} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{4G} \frac{\partial X_1}{\partial y}.$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.12) и (2.13), получим систему алгебраических уравнений по теориям (R) и (А), откуда выражения для прогибов будут, соответственно:

$$W = \left(\sqrt{3} e^{-\lambda x} x \eta (4\eta^3 - 4\eta^2 \rho + (\nu - 1)\rho) \tau_0 \sin \lambda y / 4G\rho (\sqrt{3}\rho - 2\sqrt{3}\eta^3(1+\theta) + 2\eta^2\sqrt{3}\rho(1+\theta)) (1 + 4\eta^2\rho^2 - 4\eta^3\rho - (1-\nu)\eta\rho) \right) \quad (2.14)$$

$$W = \frac{\xi(-1+\nu)x e^{-\lambda x} \tau_0 \sin \lambda y}{4G\gamma((1+2\xi^2)^2 - \xi\gamma(1-\nu)(1+\beta))}, \quad (2.15)$$

$$\text{где } \rho = \sqrt{1+\eta^2}, \quad \gamma = \sqrt{1+\xi^2}.$$

Из соотношений (2.14) и (2.15), очевидно, следует, что при $h\lambda \ll 1$ отношение величины прогиба, подсчитанного по теории (R), к величине прогиба, подсчитанного по теории (А), равно $\sqrt{5/6}$.

Заключение. Расчётные величины для момента $M_1(0, y)$ по теориям (R) и (А) совпадают и тождественно равны нулю. А расчётные величины перерезывающих сил, соответственно, по теориям (R) и (А) определяются выражениями, при сравнении которых очевидно, следует, что при $h^2\lambda^2 \ll 1$ перерезывающие силы $N_1(0, y)$ совпадают по теориям (R) и (А), соответственно

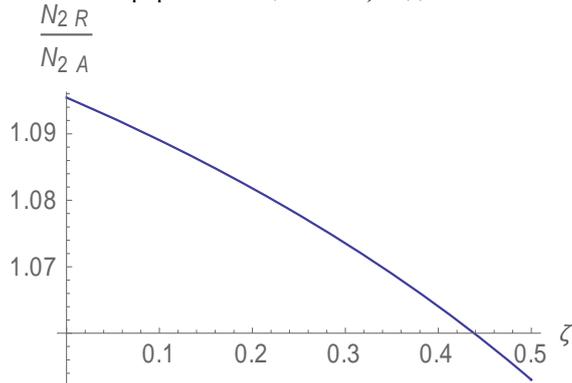
$$N_1(0, y) = h\tau_0 \sin \lambda y. \quad (2.16)$$

а перерезывающие силы $N_2(x, 0)$ по теориям (R) и (А) имеют вид:

$$N_2(x,0) = \frac{h\eta\tau_0}{1-\eta(1-\nu)} \left(e^{\frac{-x\alpha}{h}} - 2\eta^2 e^{-\lambda x} \right); \quad (2.17)$$

$$N_2(x,0) = \frac{5h\xi\tau_0}{6(1-\xi(1-\nu))} (e^{-x\lambda} - 2\xi^2 e^{-\lambda x}), \quad (2.18)$$

откуда нетрудно показать, что при $h\lambda \ll 1$ в угловой точке $x = 0, y = 0$ получаем, что отношение величины перерезывающей силы, подсчитанного по теории (R), к величине перерезывающей силы, подсчитанного по теории (A),



где $\zeta = (1-\nu)h\lambda$, равно $\sqrt{6/5}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 635с.
2. Васильев В.В. Классическая теория пластин – история и современный анализ. // Изв. РАН. МТТ. 1998. №3. С.45-58.
3. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
4. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». 2002. С.67-88.
5. Белубекян М.В. Об одном парадоксе граничных условий теории Кирхгофа. // В сб.: «Исследование современных научных проблем в ВУЗах». Ереван: Изд.-во «Айастан». 2000. Т.2. С.134-138.
6. Белубекян М.В., Мартиросян К.Л. К задаче изгиба пластинки по форме цилиндрической поверхности при наличии касательных нагрузок на лицевых поверхностях. // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №2. С.41-46.
7. Martirosyan K.L. The Effect of the Tangential Loads on the Bending of Elastic Plate. Euromech Colloquium 527. Shell-like structures- nonclassical theories and applications, 22–26 August 2011, Leucon, Lutherstadt Wittenberg, Germany, pp.75-82.

Сведения об авторах:

Мартиросян Кристине Леоновна – к.ф.м.н., научный сотрудник Института механики НАН Армении. Адрес: РА, 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна, 24/2. Тел.: (374 93) 83-10-18. E-mail: kristine.martirosyan@gmail.com

Дарбинян Артавазд Завенович – канд. физ.-мат. наук, преподаватель Мурманского государственного гуманитарного университета. E-mail: arto1954@mail.ru

Поступила в редакцию 04.11.2014

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
МАГНИТОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ
ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ (НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ) ТОНКИХ
БАЛОК С НЕЗАВИСИМЫМИ ПОЛЯМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И
ВРАЩЕНИЙ**

Саркисян Л. С., Саркисян С. О.

Ключевые слова: микрополярный, электропроводящий, магнитоупругость, модель, тонкий, балка

Key words: micropolar, electrically conductive, magnetoelasticity, model, thin, bar

Բանալի բառեր. Միկրոպոլյար, էլեկտրահաղորդիչ, մագնիսաառաձգականություն, մոդել, բարակ, հեծան

Սարգսյան Լ. Ս., Սարգսյան Ս. Ն.

Էլեկտրահաղորդիչ (ոչ ֆերոմագնիսական) տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծոման դեֆորմացիայի մագնիսաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելը

Աշխատանքում բերվում են բարակ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի մագնիսաառաձգականության հարթ լարվածային վիճակի հիմնական հավասարումները, եզրային և նախնական պայմանները: Ենթադրելով այնուհետև, որ ուղանկյուն զուգահեռանիստի միջին հարթությունը արտահայտող ուղղանկյան բարձրությունը շատ անգամ փոքր է նրա երկարությունից, ուղղանկյուն զուգահեռանիստը վերափոխվում է բարակ հեծանի մոդելի: Ընդունելով ասիմպտոտիկ հիմնավորում ունեցող վարկածներ, կառուցվում է միկրոպոլյար առաձգական էլեկտրահաղորդիչ բարակ հեծանի մագնիսաառաձգականության կիրառական միաչափ մոդելը: Այս մոդելի համար արտաձվում է էներգիայի հաշվեկշռի հավասարումը, արդյունքում ապացուցվելով, որ բարակ հեծանի մագնիսաառաձգականության եզրային-նախնական խնդիրը ունի միակ լուծում:

Sargsyan L. S., Sargsyan S. H.

Mathematical model of bending deformation of magnetoelasticity of micropolar electrically conductive (non ferromagnetic) thin bars with free fields of displacements and rotations

In the present paper equations, boundary and initial conditions of magnetoelasticity are introduced for stress strain state of thin rectangular parallelepiped. Further, accepting that the height of the rectangle, which introduces the middle plane of the parallelepiped, is smaller compared with its length, rectangular parallelepiped is converted to the model of thin bar. Accepting asymptotically confirmed hypotheses, applied one-dimensional model of magnetoelasticity of micropolar thin bars is constructed. Energy balance equation is obtained for this model and, as a result, it is proved that the initial-boundary value problem of magnetoelasticity of micropolar thin bar has a unique solution.

В работе приведены основные уравнения, граничные и начальные условия магнитоупругости для плоского напряжённого состояния тонкого прямоугольного параллелепипеда. Далее, допуская, что высота прямоугольника, который представляет собой срединную плоскость параллелепипеда, намного меньше его длины, прямоугольный параллелепипед преобразуется в модели тонкой балки. Принимая гипотезы, которые имеют асимптотическую почву, построена прикладная одномерная модель магнитоупругости микрополярных тонких балок. Для этой модели выводится уравнение баланса энергии, в результате, доказывая, что начально-краевая задача магнитоупругости микрополярной тонкой балки имеет единственное решение.

Введение. В деле построения общей прикладной теории магнитоупругости тонких пластин и оболочек на основе классической теории упругости основополагающими были гипотезы магнитоупругости тонких тел [1-4]. В работе [5] асимптотическим методом, как полагается, подробно изучена сингулярно-возмущённая с малым

геометрическим параметром начально-краевая задача (в классической постановке) трёхмерной линейной теории магнитоупругости для тонкой оболочки, и построена асимптотическая теория магнитоупругости тонких оболочек. Далее, в работе [5], на основе асимптотического подхода выявлены основные качественные характеристики поведения решения трёхмерной задачи магнитоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы адекватные гипотезы, обобщающие гипотезы магнитоупругости тонких пластин и оболочек работ [1-4] и, таким образом, построена асимптотически обоснованная прикладная теория магнитоупругости тонких пластин и оболочек.

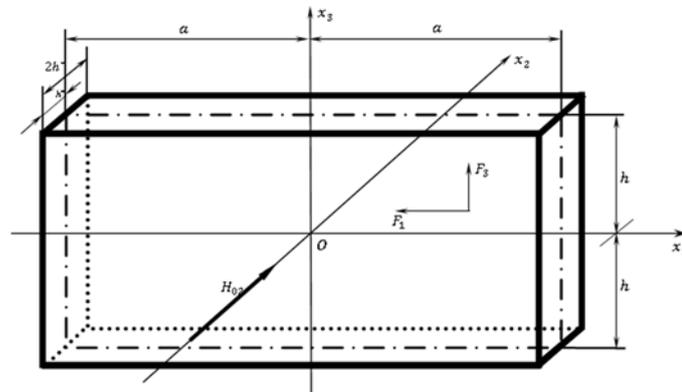
В работах [6-9], на основе аналогичного подхода построены асимптотически обоснованные прикладные теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В работах [10, 11] формулированы трёхмерные задачи магнитоупругости микрополярных тел с независимыми полями перемещений и вращений. В работах [12, 13] изучено асимптотическое поведение решения начально-краевой задачи микрополярной магнитоупругости в тонкой области оболочки, сформулированы адекватные гипотезы и построена прикладная теория магнитоупругости микрополярных тонких оболочек.

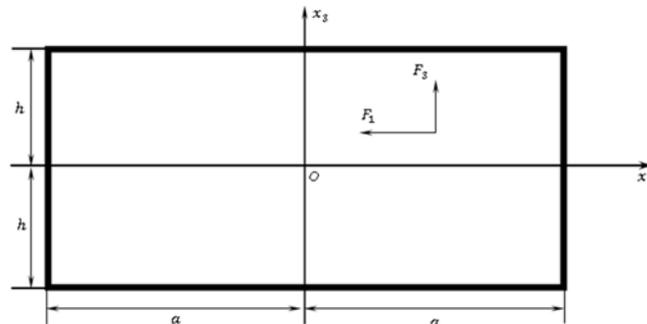
В данной работе формулируются гипотезы, имеющие асимптотическую почву, на основе которых построена математическая модель изгибной деформации магнитоупругости микрополярных тонких балок.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу магнитоупругости изгибной деформации изотропного микрополярного электропроводящего прямоугольного параллелепипеда постоянной высоты $2h$, длины $2a$ и толщины $2h^*$, находящегося в начальном постоянном магнитном поле напряжённости $\vec{H}_0 = \{0, H_{02}, 0\}$ (фиг.1).

а)



б)



Фиг.1

Координатная плоскость x_1x_3 помещена в срединной плоскости параллелепипеда, ось x_3 направлена по высоте, а ось x_1 – по длине параллелепипеда. Предположим, что параллелепипед тонкий ($2h^* \ll 2a$, $2h^* \ll 2h$) и в нём осуществлено плоское напряжённое магнитоупругое состояние в направлении оси x_2 [11]. В этом случае задачу магнитоупругости можем рассматривать в срединной плоскости пластинки параллелепипеда x_1x_3 (рис. 1б).

Основные группы уравнений плоской задачи микрополярной магнитоупругости с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [11]:

I. Уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости с учётом сил электромагнитного происхождения:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + F_1 &= \rho \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}, & \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + F_3 &= \rho \frac{\partial^2 U_3}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial x_3} - (\sigma_{13} - \sigma_{31}) &= J \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь $\sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{31}, \sigma_{13}$ – силовые напряжения; μ_{12}, μ_{32} – моментные напряжения; U_1, U_3 – перемещения, ω_2 – свободный поворот точек прямоугольника; ρ – плотность, J – мера инерции при вращении микрополярного материала; F_1 и F_3 – проекции силы электромагнитного происхождения ($\vec{F} = \frac{1}{c} \vec{H}_0 \cdot \vec{j}$) на оси x_1 и x_3 , которые выражаются так:

$$F_1 = -\frac{1}{c} H_{02} \cdot j_3, \quad F_3 = \frac{1}{c} H_{02} \cdot j_1, \quad (1.2)$$

где j_1, j_3 – проекции на оси x_1 и x_3 вектора плотности электрического тока проводимости $\vec{j} = \{j_1, j_2, j_3\}$, возбуждённого в параллелепипеде, c – скорость света в пустоте. Для вектора \vec{j} имеем:

$$\vec{j} = \sigma \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right], \quad (1.3)$$

здесь \vec{E} – вектор напряжённости электрического поля, возбуждённого в параллелепипеде; σ – электропроводимость материала параллелепипеда. Компоненты вектора \vec{j} выражаются так:

$$j_1 = \sigma \left[E_1 - \frac{1}{c} H_{02} \frac{\partial U_3}{\partial t} \right], \quad j_2 = \sigma E_2, \quad j_3 = \sigma \left[E_1 + \frac{1}{c} H_{02} \frac{\partial U_3}{\partial t} \right]; \quad (1.4)$$

Физико-геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{33}), & \gamma_{13} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31}, \\ \gamma_{33} &= \frac{\partial U_3}{\partial x_3} = \frac{1}{E} (\sigma_{33} - \nu \sigma_{11}), & \gamma_{31} &= \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2 = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{31} - \frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha} \sigma_{13}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} = \frac{1}{B} \mu_{12}, \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} = \frac{1}{B} \mu_{32}.$$

где $\gamma_{11}, \gamma_{33}, \gamma_{13}, \gamma_{31}$ – деформации; χ_{12}, χ_{32} – изгибы-кручения;

$E, \nu, \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \alpha, B$ – упругие постоянные микрополярного материала.

II. Уравнения квазистационарной электродинамики во внутренней области параллелепипеда (эти уравнения приведены в рационализованной системе единиц СГС):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{1}{c} \vec{j}, & \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{h} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E} &= \rho_e. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь \vec{h} – вектор напряжённости магнитного поля, возбуждённого в параллелепипеде; ρ_e – объёмная плотность электрического заряда в параллелепипеде.

В основе написанной системы уравнений Максвелла (1.6) (уравнения квазистационарной электродинамики) лежит пренебрежение током смещения при изучении явления механического поведения упругого параллелепипеда [14-16].

Отметим, что для электропроводящих тел [14-16] величины диэлектрической проницаемости ϵ и магнитной проницаемости μ не будут отличаться от их значений для вакуума, т.е. $\epsilon = 1, \mu = 1$ и, этим самым, векторы напряжённости и индукций \vec{E} и \vec{d}, \vec{h} и \vec{b} (\vec{d} – вектор электрической индукции, а \vec{b} – вектор магнитной индукции) не будут различаться.

Отметим также, что из системы уравнений квазистатической электродинамики (1.6) следует следующее векторное уравнение:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0. \quad (1.7)$$

III. Уравнения квазистационарной электродинамики для вакуума (в бесконечной области трёхмерного пространства, окружающей параллелепипед):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h}^{(e)} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E}^{(e)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{h}^{(e)} &= 0, & \operatorname{div} \vec{E}^{(e)} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $h^{(e)}, E^{(e)}$ – векторы напряжённости магнитной и электрической полей, возбуждённых в вакууме.

При изучении задачи магнитоупругого изгиба микрополярного прямоугольника в плоскости $x_1 x_3$, следует иметь в виду, что $U_3, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \omega_2, \mu_{12}, E_1, E_2, h_3, \rho_e, j_1$ – чётные по x_3 функции, а $U_1, \sigma_{11}, \sigma_{33}, \mu_{32}, h_1, h_2, E_3, j_3$ – нечётные по x_3 функции.

К уравнениям микрополярной магнитоупругости (1.1)-(1.8) следует присоединить граничные и начальные условия.

Как механические граничные условия, будем считать, что на лицевых линиях прямоугольника $x_3 = \pm h$ заданы силовые и моментные напряжения. Эти граничные условия имеют тот же вид, что и имели место в задаче теории упругости без участия

электромагнитного поля [16], это потому, что принимая условия $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, этим самым, на границе раздела сред (в данном случае упругого электропроводящего тела и вакуума) разность тензоров напряжений Максвелла равна нулю.

Таким образом, на лицевых линиях прямоугольника для задачи изгиба механические граничные условия имеют вид:

$$\sigma_{31} = \frac{1}{2} q_1, \quad \sigma_{33} = \pm \frac{1}{2} q_3, \quad \mu_{32} = \pm \frac{1}{2} m_2 \quad \text{при } x_3 = \pm h. \quad (1.9)$$

На торцевых граничных линиях прямоугольника $x_1 = \pm a$ могут быть заданы как силовые и моментные напряжения, так и перемещения и поворот, либо смешанный их вариант.

На граничных плоскостях раздела параллелепипеда и вакуума должны выполняться граничные условия электродинамики [17] с учётом условий $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Согласно этим граничным условиям, имеем, что тангенциальные компоненты вектора \vec{E} и все три компоненты вектора \vec{h} на плоскостях раздела двух сред непрерывны, нормальная же компонента вектора \vec{E} будет претерпевать разрыв (это означает, что на плоскостях раздела сред будут проявляться поверхностные распределённые электрические заряды).

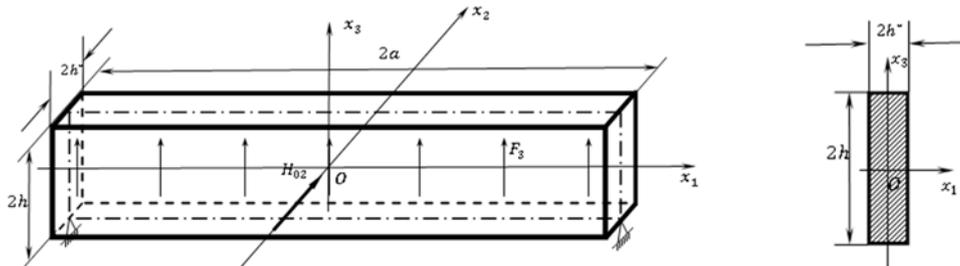
Кроме этого, для компонент вектора плотности электрического тока имеют место следующие естественные граничные условия:

$$j_1|_{x_1=\pm a} = 0, \quad j_3|_{x_3=\pm h} = 0. \quad (1.10)$$

Начальные условия будут характеризовать движение тела и изменения возбуждённого электромагнитного поля (как в теле, так и в вакууме) в начальный момент времени $t = 0$.

Отметим следующее. Механические величины: $U_1, U_3, \omega_2, \sigma_{11}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{31}, \mu_{32}, \mu_{12}$ – функции от x_1, x_3, t , U_2 – функция от x_1, x_2, x_3, t [18]. Что касается величин электромагнитного поля (как во внутренней, так и во внешней задачах), то можем констатировать, что j_1, j_3, E_1, E_3 и ρ_e – функции от x_1, x_3, t (ниже убедимся, что h_2 – тоже функция от x_1, x_3, t), а остальные характеристики электромагнитного поля h_1, h_3, E_2 – функции от x_1, x_2, x_3, t .

2. Основные гипотезы построения модели магнитоупругости микрополярных тонких балок. Допустим теперь, что одновременно с неравенствами $2h^* \ll 2h$, $2h^* \ll 2a$, имеет место также неравенство $2h \ll 2a$. В этом случае получим, что два поперечных размера параллелепипеда $2h^*$ и $2h$ одновременно намного меньше его размера по длине $2a$. Это означает, что при таких условиях параллелепипед переходит в качестве тонкого стержня (в нашем случае – тонкой балки, т.к. изучаем задачу изгиба (фиг. 2)).



Фиг.2

В классической теории упругости, используя либо метод многочленов и принцип Сен-Венана [19], либо асимптотический метод [20], из двумерных уравнений плоского напряжённого состояния возможен переход к прикладной модели упругой балки. В работе [21] из двумерных уравнений микрополярной упругости асимптотическим методом (а в работе [6] формулированием адекватных гипотез) осуществлён переход к прикладной модели микрополярных балок.

Основными предпосылками для построения прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок будут представлять сформулированные ниже гипотезы, которые адекватно выражают свойства асимптотического решения начально-краевой задачи плоской микрополярной магнитоупругости (1.1)-(1.9) в тонком прямоугольнике (т.е. когда $2h \ll 2a$ или $\delta = \frac{h}{a} \ll 1$, который представляет собой малый геометрический параметр задачи).

Принятые ниже гипотезы можем разделить на две группы:

а) кинематические и статические гипотезы построения динамической теории изгибной деформации микрополярной балки [6, 22];

б) обобщённые гипотезы магнитоупругости тонких тел [5].

Теперь сформулируем указанные гипотезы более обстоятельно.

1) Кинематическая гипотеза [6,22]. Будем считать, что нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника Ox_1 , остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, примем, что свободный поворот ω_2 – постоянная по координате x_3 функция.

Вследствие этого имеем следующий закон изменения перемещений U_1, U_3 и свободного поворота ω_2 по координате x_3 :

$$U_3 = w(x_1, t), \quad U_1 = x_3 \cdot \Psi_1(x_1, t), \quad (2.1)$$

$$\omega_2 = \Omega_2(x_1, t), \quad (2.2)$$

где w – прогиб балки; Ω_2 – угол свободного поворота нормального элемента, а Ψ_1 – полный угол поворота нормального элемента.

Гипотеза (2.1) для перемещений – это известная классическая кинематическая гипотеза Тимошенко [23] для построения модели изгибной деформации динамики упругой тонкой балки с учётом поперечного сдвига. Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2) в целом, как в работе [6-9, 22], назовём гипотезой Тимошенко, обобщённой на микрополярный случай;

2) Статические гипотезы [6, 22]: а) В законе Гука (1.5), в формуле для деформаций γ_{11} , силовым напряжением σ_{33} будем пренебрегать относительно силового напряжения σ_{11} ; б) при определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения σ_{31} сначала примем

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}^0(x_1, t). \quad (2.3)$$

После полного определения указанных выше величин, значение σ_{31} окончательно определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения движения из (1.1) с требованием условия, что усреднённая по высоте прямоугольника (по координате x_3) величина, полученная после указанного интегрирования, была равна нулю.

3) Гипотезы электромагнитного поля в целом [1-4, 5]: а) Предположим, что тангенциальные компоненты вектора напряжённости возбуждённого электрического

поля и нормальная компонента возбуждённого магнитного поля во внутренней задаче квазистатической электродинамики – постоянные по координате x_3 функции, т.е.

$$E_1 = E_{10}(x_1, t), \quad E_2 = E_{20}(x_1, x_2, t), \quad h_3 = h_{30}(x_1, x_2, t); \quad (2.4)$$

б) компонентой j_3 вектора плотности электрического тока проводимости \vec{j} можем пренебрегать;

в) при рассмотрении электромагнитного поля во внешней задаче (в вакууме), внешнюю область можем считать как всю двумерную плоскость с разрезом по средней линии прямоугольника и считать, что по линии этого разреза течёт электрический ток, который представляет собой усреднённый ток по высоте прямоугольника, т.е. величина:

$$j_{10} = \int_{-h}^h j_1 dx_3. \quad (2.5)$$

3. Определение расчётных величин напряжённо-деформированного состояния и электромагнитного поля.

На основе принятых гипотез ((2.1),(2.4)) и первой формулы из (1.4) для объёмной плотности электрического тока j_1 будем иметь:

$$j_1 = j_1(x_1, t) = \sigma \left(E_{10}(x_1, t) - \frac{1}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} \right). \quad (3.1)$$

Как видно из формулы (3.1), ток j_1 по высоте прямоугольника (т.е по координате x_3) распределён равномерно, следовательно, осреднённое значение этого тока по высоте прямоугольника (т.е. величина (2.5)) примет вид:

$$j_{10} = j_{10}(x_1, t) = 2\sigma h \left(E_{10}(x_1, t) - \frac{1}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t} \right). \quad (3.2)$$

Для проекций F_1 и F_3 силы электромагнитного происхождения с учётом формулы (3.2) и гипотезы 3б) получим:

$$F_1 = 0, \quad F_3 = \frac{1}{2hc} H_{02} \cdot j_{10}(x_1, t). \quad (3.3)$$

Используя кинематическую гипотезу ((2.1), (2.2)), из уравнений (1.3) для деформаций, изгибов-кручений будем иметь:

$$\gamma_{11} = x_3 \cdot K_{11}, \quad \gamma_{33} = 0, \\ \gamma_{13} = \Gamma_{13}, \quad \gamma_{31} = \Gamma_{31}, \quad (3.4)$$

$$\chi_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, \quad \chi_{32} = 0,$$

где приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \quad (3.5)$$

$$\Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \quad k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}.$$

Имея в виду формулы кинематической гипотезы ((2.1), (2.2)), формулы (3.4) и статические гипотезы, для силовых и моментных напряжений получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= x_3 \cdot E \cdot K_{11}, & \sigma_{13} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{13} + (\mu - \alpha)\Gamma_{31}, \\
\sigma_{31} &= (\mu + \alpha)\Gamma_{31} + (\mu - \alpha)\Gamma_{13}, & \sigma_{33} &= -x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{2hc} H_{02} \cdot j_{10} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right), \\
\mu_{12} &= B \cdot k_{12}, & \mu_{32} &= x_3 \left[-\frac{\partial \mu_{12}}{\partial x_1} + (\sigma_{13} - \sigma_{31}) + J \cdot \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} \right], \\
\sigma_{31} &= \sigma_{31}^0(x_1, t) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - \rho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} \right),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$\sigma_{11}^1 = E \cdot K_{11}. \tag{3.7}$$

Если использовать следующее физико-геометрическое уравнение плоского напряжённого состояния [18]

$$\gamma_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{33}),$$

которое с учётом статической гипотезы 2а) примет вид

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{11},$$

имея в виду формулу для σ_{11} из (3.6), для перемещения U_2 будем иметь:

$$U_2 = -x_2 x_3 \nu K_{11} = -x_2 x_3 \nu \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial x_1}. \tag{3.8}$$

Теперь об определении величин электромагнитного поля во внутренней задаче.

Из первого скалярного уравнения векторного уравнения $\text{rot} \vec{h} = \frac{1}{c} \vec{j}$

(см. формулы (1.6)), для h_2 получим:

$$h_2(x_1, x_3, t) = x_3 \cdot h_2^1(x_1, t), \tag{3.9}$$

$$\text{где } h_2^1 = -\frac{1}{2hc} j_{10}(x_1, t). \tag{3.10}$$

Отметим, что при получении формулы (3.9), относительно $j_1(x_1, t)$ было пренебрежено величинами $\frac{\partial h_3}{\partial x_2}$ [5].

На основе кинематической гипотезы для перемещений, гипотезы 3б), а также принимая в виду вторую из (1.4) формулу, для E_3 будем иметь:

$$E_3 = -x_3 \frac{1}{c} H_{02} \frac{\partial \psi_1(x_1, t)}{\partial t}. \tag{3.11}$$

Рассмотрев третье скалярное уравнение векторного уравнения $\text{rot}\vec{h} = \frac{1}{c}\vec{j}$ (т.е. уравнение: $\frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0$), имея в виду формулу (3.9) для h_2 (а также формулу (3.10)),

для h_1 получим:

$$h_1 = -x_2 x_3 \frac{1}{2hc} \frac{\partial j_{10}(x_1, t)}{\partial x_1}. \quad (3.12)$$

Для определения величин h_3, E_2 имеем следующие уравнения:

$$\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} = \frac{1}{c} j_2, \quad \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial h_3}{\partial t}, \quad (3.13)$$

$$j_2 = \sigma E_2.$$

Отметим, что первая из (3.13) формул представляет собой второе скалярное уравнение векторного уравнения $\text{rot}\vec{h} = \frac{1}{c}\vec{j}$; второе уравнение из (3.13) – третье

скалярное уравнение из векторного уравнения $\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$ (см. (1.6)); третье уравнение из (3.13) – это последнее из (1.4) уравнение.

Систему уравнений (3.13) можем привести к уравнению относительно h_3 следующего вида:

$$\frac{\partial^2 h_3}{\partial x_1^2} = \frac{\sigma}{c^2} \frac{\partial h_3}{\partial t} - x_2 \frac{1}{2hc} \frac{\partial^2 j_{10}(x_1, t)}{\partial x_1^2}. \quad (3.14)$$

После решения этого уравнения E_2 определяется по формуле:

$$E_2 = \frac{c}{\sigma} \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right), \quad (3.15)$$

в котором h_1 определяется формулой (3.12).

Зная $E_1 = E_{10}(x_1, t)$, $E_2 = E_{20}(x_1, x_2, t)$ и $E_3 = E_{30}(x_1, x_3, t)$, величину ρ_e определим из четвёртого уравнения системы (1.6).

Забегая вперёд, отметим, что те величины, которые одновременно функции и от x_2 (это $U_2, h_1, h_3, E_2, \rho_e$), они не будут входить в систему разрешающих уравнений прикладной модели микрополяриной магнитоупругости тонких балок. Они все будут определены после решения основной начально-граничной задачи указанной прикладной модели.

Перейдём теперь к определению характеристик электромагнитного поля во внешней задаче (в вакууме).

Основываясь на гипотезе 3б), систему уравнений (1.8) внешней задачи электромагнитного поля можем представить так:

$$\text{rot}\vec{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \delta(x_3) \theta(-a \leq x_1 \leq a) \vec{j}, \quad \text{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

$$\text{div}\vec{h}^{(e)} = 0, \quad \text{div}\vec{E}^{(e)} = 0,$$

где $\delta(x_3)$ – дельта-функция Дирака, а $\theta(-a \leq x_1 \leq a)$ – функция Хевисайда, а вектор \vec{j} имеет вид:

$$\vec{j} = \begin{Bmatrix} j_{10} \\ j_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.17)$$

j_{10} выражается формулой (3.2), а j_2 – последней формулой из системы (3.13).

Если из обеих частей векторного уравнения $\text{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}$ взять оператор rot , используя первое векторное уравнение из системы (3.16), получим:

$$\text{rotrot}\vec{E}^{(e)} = -\delta(x_3)\theta(-a \leq x_1 \leq a) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right). \quad (3.18)$$

Далее, используя известное векторное тождество [17]

$$\text{rotrot}\vec{E}^{(e)} = \text{graddiv}\vec{E}^{(e)} - \Delta\vec{E}^{(e)}$$

где $\Delta(\cdot)$ – оператор Лапласа, имея в виду последнее из (3.16) уравнение, вместо (3.18) получим следующее уравнение:

$$\Delta\vec{E}^{(e)} = \delta(x_3)\theta(-a \leq x_1 \leq a) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right). \quad (3.19)$$

Так как координатная система x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова, следовательно, векторное уравнение (3.19) расщепляется на три отдельные скалярные уравнения относительно $E_1^{(e)}, E_2^{(e)}, E_3^{(e)}$, при этом, при вычислении правых частей этих уравнений необходимо учесть формулу (3.17).

Следует считать, что $E_1^{(e)}$, как и его внутренний аналог E_1 , не зависит от x_2 , т.е. это функция от x_1, x_3 и t , тогда, первое скалярное уравнение, вытекающее из векторного уравнения (3.19), примет вид:

$$\frac{\partial^2 E_1^{(e)}(x_1, x_3, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 E_1^{(e)}(x_1, x_3, t)}{\partial x_3^2} = \delta(x_3)\theta(-a \leq x_1 \leq a) \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right), \quad (3.20)$$

где точки (x_1, x_3) принадлежат всей двумерной евклидовой плоскости. На бесконечности имеем условия затухания [17].

Имея в виду, что для уравнения Лапласа в двумерном случае функция Грина выражается формулой [24]

$$\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_1'}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{a} \right)^2}, \quad (3.21)$$

решение уравнения (3.20) можем представить так:

$$E_1^{(e)}(x_1, x_3, t) = \frac{1}{c^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \ln \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_1'}{a} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{a} \right)^2} \cdot \frac{\partial j_{10}}{\partial t} dx_1', \quad (3.22)$$

где $(x_1, x_3) \in R^{(2)}$ ($R^{(2)}$ – вся евклидова плоскость).

Отметим, что для вычисления величин $E_2^{(e)}, E_3^{(e)}$ и $h_k^{(e)} (k=1,2,3)$ можем получить соответствующие интегральные формулы.

4. Построение прикладной модели магнитоупругости динамической изгибной деформации микрополярных тонких балок. С целью приведения двумерной задачи магнитоупругости для микрополярного тонкого прямоугольника к одномерной, что уже выполнено для перемещений, поворота, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, а также, для величин, характеризующих электромагнитное поле, в модели тонких балок вместо компонентов тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики [6]: усилия N_{13}, N_{31} и моменты M_{11}, L_{12} , которые выражаются следующими формулами:

$$N_{13} = \int_{-h}^h \sigma_{13} dx_3, \quad N_{31} = \int_{-h}^h \sigma_{31} dx_3, \quad M_{11} = \int_{-h}^h x_3 \cdot \sigma_{11} dx_3, \quad L_{12} = \int_{-h}^h \mu_{12} dx_3. \quad (4.1)$$

Используя формулы для $\sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{11}, \mu_{12}$ ((3.6)), при помощи формул (4.1) получим физические соотношения упругости для микрополярной балки:

$$\begin{aligned} N_{13} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{13} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{31}, \\ N_{31} &= 2h(\mu + \alpha)\Gamma_{31} + 2h(\mu - \alpha)\Gamma_{13}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} \cdot K_{11}, \quad L_{12} = 2Bh \cdot k_{12}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Отметим, что формулы (3.5) будут представлять собой геометрические соотношения изгибной деформации микрополярной тонкой балки.

Если использовать формулы для $\sigma_{33}, \sigma_{31}, \mu_{32}$ (см. (3.6)), тогда удовлетворяя граничным условиям (1.9) на лицевых линиях прямоугольника, приходим к следующим уравнениям движения микрополярной балки с учётом сил электромагнитного происхождения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{c} H_{02} \cdot j_{10} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_3, \\ N_{31} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= q_1 \cdot h, \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + N_{31} - N_{13} &= 2Jh \cdot \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - m_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Отметим, что в первом уравнении движения из системы (4.3) величина $j_{10}(x_1, t)$ – неизвестная функция (которая представляет собой усреднённую по высоте тонкого прямоугольника плотность электрического тока электропроводности), поэтому для придания замкнутости систем уравнений (4.3), (4.2) и (3.5), необходимо отдельное уравнение для определения величины $j_{10}(x_1, t)$. Для этого обращаемся к выражению (3.22).

Подставляя в этой формуле $x_3 = 0$ и изменяя x_1 от $-a$ до a , используя при этом, что $E_1^{(e)}(x_1, 0, t) \Big|_{x_1 \in [-a, a]} = E_{10}(x_1, t)$, приходим к следующему уравнению:

$$E_{10}(x_1, t) = \frac{1}{2\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1', \quad a \leq x_1 \leq a. \quad (4.4)$$

Теперь используя формулу (3.2), выражая E_{10} через j_{10} , вместо уравнения (4.4) приходим к следующему интегродифференциальному (дифференцирование по времени) уравнению относительно функции $j_{10}(x_1, t)$:

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \quad (4.5)$$

$$-a \leq x \leq a.$$

Для $j_{10}(x_1, t)$ на границах отрезка $[-a, a]$ имеем естественные граничные условия (которые фактически выражают граничные условия (1.10) для j_1):

$$j_1(x_1, t)|_{x_1=-a} = 0, \quad j_1(x_1, t)|_{x_1=a} = 0. \quad (4.6)$$

Для механической части задачи граничные условия (напр., при $x_1 = a$) выражаются так [6]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } \Psi_1 = \Psi_1^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \Omega_2 = \Omega_2^*. \quad (4.7)$$

Необходимо задавать также начальные условия при $t = 0$ для величин

$$\Psi_1, \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_2, \frac{\partial \Omega_2}{\partial t}, j_{10}.$$

Уравнения движения (4.3), соотношения упругости (4.2), геометрические соотношения (3.5), интегродифференциальное уравнение (4.5), граничные условия (4.7), (4.6) и начальные условия определяют прикладную модель магнитоупругости микрополярных электропроводящих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. В этой модели полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Если подставить (3.5) в (4.2) и полученное – в уравнения движения (4.3), получим разрешающую систему уравнений магнитоупругости тонких балок, в которой определяемые функции будут $w(x_1, t)$, $\Psi_1(x_1, t)$, $\Omega_2(x_1, t)$ и $j_{10}(x_1, t)$:

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + (\mu - \alpha) \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} + 2\alpha \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} + \frac{1}{c} \cdot \frac{H_{02}}{2h} j_{10} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q_3}{2h}, \\ (\mu - \alpha) \frac{\partial w}{\partial x_1} + (\mu + \alpha) \Psi_1 - 2\alpha \Omega_2 - \frac{Eh^2}{3} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} + \frac{q_1}{2}, \\ B \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial x_1^2} - 2\alpha \frac{\partial w}{\partial x_1} + 2\alpha \Psi_1 - 4\alpha \Omega_2 &= J \frac{\partial^2 \Omega_2}{\partial t^2} - \frac{m_2}{2h}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \quad -a \leq x_1 \leq a.$$

К системе уравнений (4.8) необходимо присоединить граничные условия (4.7), (4.6) и начальные условия.

Когда край балки (напр., $x_1 = a$) жёстко закреплён или шарнирно опёрт, граничные условия выразятся так:

$$w = 0, \quad \Psi_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = a; \quad (4.9)$$

б) шарнирное опирание:

$$w = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = a. \quad (4.10)$$

Если в модели (4.3), (4.2), (3.5), (4.9), (4.7), (4.6) магнитоупругости микрополярных тонких балок считать, что

$$\Psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad (4.11)$$

то, во-первых, вместо обобщённой кинематической гипотезы Тимошенко (2.1), (2.2), получим обобщённый на микрополярный случай кинематическую гипотезу Бернулли и, во-вторых, сохраняя при этом статические гипотезы 2), гипотезы электромагнитного поля 3), получим модель магнитоупругости микрополярных тонких балок на основе обобщённой кинематической гипотезы Бернулли.

Если в физических соотношениях микрополярной упругости (4.2) подставить $\alpha = 0$, то из системы (4.2), (4.3), (3.5) и граничных условий (4.7), (4.6) будет отделяться следующая подсистема уравнений и граничных условий:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{N}_{13}}{\partial x_1} + \frac{1}{c} H_{02} \cdot j_{10} - 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -q_3, \\ \tilde{N}_{13} - \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{2\rho h^3}{3} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2} &= q_1 \cdot h, \end{aligned} \quad (4.12)$$

Физические соотношения упругости

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{13} &= N_{13} = N_{31} = 2h\mu(\Gamma_{13} + \Gamma_{31}) = 2h\mu\tilde{\Gamma}_{13}, \\ M_{11} &= \frac{2Eh^3}{3} \cdot K_{11}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

Геометрические соотношения

$$\tilde{\Gamma}_{13} = \Psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1}, \quad K_{11} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}. \quad (4.14)$$

К уравнениям (4.12), (4.13) следует присоединить интегродифференциальное уравнение (4.5) для линейной плотности электрического тока проводимости:

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \quad (4.15)$$

$$-a \leq x_1 \leq a.$$

Граничные условия (напр., при $x_1 = a$)

$$M_{11} = M_{11}^* \quad \text{или} \quad \Psi_1 = \Psi_1^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \quad \text{или} \quad w = w^*, \quad j_{10} = 0. \quad (4.16)$$

Уравнения движения (4.12), физические соотношения упругости (4.13), геометрические соотношения (4.14), интегродифференциальное уравнение для линейной плотности тока электропроводимости (4.15), граничные условия (4.16) и начальные условия определяют прикладную теорию классической магнитоупругости тонких балок с учётом поперечных сдвигов (т.е. уточнённая теория классической магнитоупругости тонких балок).

На основе (4.12)-(4.14) можем получить разрешающую систему уравнений относительно функций w , Ψ_1 , и j_{10} :

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{c} \cdot \frac{H_{02}}{2h} j_{10} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{q_3}{2h}, \\ \mu \left(\psi_1 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) - \frac{Eh^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1^2} &= -\frac{\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{q_1}{2}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$j_{10}(x_1, t) = \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t},$$

$$-a \leq x_1 \leq a.$$

К разрешающей системе уравнений (4.17) классической магнитоупругости тонких балок (при которой полностью учитываются поперечные сдвиги) следует присоединить граничные и начальные условия:

граничные условия жёсткого защемления будут (напр., для края $x_1 = a$):

$$w = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad j_{10} = 0,$$

а граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} = 0, \quad j_{10} = 0.$$

Если примем кинематическую гипотезу Бернулли $\left(\psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)$, при этом,

остальные гипотезы будем считать действующими, разрешающая система уравнений классической магнитоупругости примет следующий вид:

$$\begin{aligned} D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial t^2} - \frac{1}{c} \cdot H_{02} \cdot j_{10} &= -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_3 + \frac{\partial q_1}{\partial x_1} \cdot h, \\ j_{10}(x_1, t) &= \frac{\sigma h}{\pi c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-a}^a \ln \left| \frac{x_1}{a} - \frac{x_1'}{a} \right| \cdot j_{10}(x_1', t) dx_1' - \frac{2\sigma h}{c} H_{02} \cdot \frac{\partial w(x_1, t)}{\partial t}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$-a \leq x_1 \leq a,$$

где

$$D = \frac{2Eh^3}{3} \quad (4.19)$$

– классическая жёсткость балки.

К системе уравнений (4.18) следует присоединить начальные условия и следующие граничные условия:

а) жёсткого защемления

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при } x_1 = a; \quad (4.20)$$

б) шарнирного опирания

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad j_{10} = 0 \quad \text{при } x_1 = a. \quad (4.21)$$

5. Уравнение баланса энергии прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок. Сначала получим уравнение баланса энергии для поставленной задачи магнитоупругости микрополярного параллелепипеда.

Для этой цели умножим первое уравнение движения из (1.1) на $\frac{\partial U_1}{\partial t}$, второе – на $\frac{\partial U_3}{\partial t}$, а третье – на $\frac{\partial \omega_2}{\partial t}$, полученные равенства складываем и интегрируем по области прямоугольника: $-a \leq x_1 \leq a$, $-h \leq x_3 \leq h$, после некоторых преобразований приходим к следующему равенству:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial t} + H_{02} \int_{-a}^a \int_{-h}^h j_1 \cdot \frac{\partial U_3}{\partial t} dx_1 dx_3 - \frac{1}{c} H_{02} \int_{-a}^a \int_{-h}^h j_3 \cdot \frac{\partial U_1}{\partial t} dx_1 dx_3, \quad (5.1)$$

где

$$U = \int_{-a}^a \int_{-h}^h U_0 dx_1 dx_3, \quad T = \int_{-a}^a \int_{-h}^h T_0 dx_1 dx_3, \quad (5.2)$$

$$U_0 = \frac{1}{2}(\lambda^* + 2\mu)\gamma_{11}^2 + \lambda^* \gamma_{11} \gamma_{33} + \frac{1}{2}(\lambda^* + 2\mu)\gamma_{33}^2 + \frac{1}{2}(\mu + \alpha)\gamma_{31}^2 + \frac{1}{2}(\mu + \alpha)\gamma_{13}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{12}^2 + \frac{1}{2}B\chi_{32}^2, \quad (5.3)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}J \cdot \left(\frac{\partial \omega_2}{\partial t} \right)^2. \quad (5.4)$$

Здесь U_0 – поверхностная плотность потенциальной энергии деформации, когда материал тела микрополярно-упругий; U – полная потенциальная энергия деформации прямоугольника; T_0 – поверхностная плотность кинетической энергии, T – полная кинетическая энергия прямоугольника;

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2}, \quad \lambda^* + 2\mu = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (5.5)$$

λ и μ – классические коэффициенты Ламе материала; λ^* – коэффициент Ламе в случае плоского напряжённого состояния; $\frac{\partial R}{\partial t}$ – мощность внешних краевых усилий и моментов, приложенных на краевых линиях прямоугольника: $x_1 = \pm a, x_3 = \pm h$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} = & \int_{-a}^a \left(\frac{q_1}{2} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_3=h} + \frac{q_3}{2} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_3=h} + \frac{m_2}{2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_3=h} \right) dx_1 - \\ & - \int_{-a}^a \left(\frac{q_1}{2} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_3=-h} - \frac{q_3}{2} \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_3=-h} - \frac{m_2}{2} \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_3=-h} \right) dx_1 + \\ & + \int_{-h}^h \left(P_{11}^* \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_1=a} + P_{13}^* \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_1=a} + m_2^* \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_1=a} \right) dx_3 - \\ & - \int_{-h}^h \left(P_{11}^* \cdot \frac{\partial V_1}{\partial t} \Big|_{x_1=-a} + P_{13}^* \cdot \frac{\partial V_3}{\partial t} \Big|_{x_1=-a} + m_2^* \cdot \frac{\partial \omega_2}{\partial t} \Big|_{x_1=-a} \right) dx_3. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Далее, умножим скалярно первое векторное уравнение из системы (1.6) на вектор \vec{E} и используя второе векторное уравнение из системы (1.6), полученное равенство

проинтегрируем по объёму параллелепипеда, после некоторых преобразований придём к следующему равенству:

$$\begin{aligned}
& c \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_3 h_2) - (E_2 h_3)] dx_2 dx_3 + c \int_{-a-h}^a \int_{-h-h^*}^h [(E_1 h_3) - (E_3 h_1)] dx_1 dx_3 + \\
& + c \int_{-a-h^*}^a \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_2 h_1) - (E_1 h_2)] dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} \left[\frac{\partial(h_1)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3)^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \quad (5.7) \\
& = \frac{1}{2} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [E_1 j_1 + E_2 j_{21} + E_3 j_3] dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом поступим с уравнениями внешней задачи электродинамики (1.8), выполняя интегрирование по внешней от параллелепипеда бесконечной трёхмерной области и используя условия затухания поля на бесконечности, получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
& -c \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_3^{(e)} h_2^{(e)}) - (E_2^{(e)} h_3^{(e)})] dx_2 dx_3 - c \int_{-a-h}^a \int_{-h-h^*}^h [(E_1^{(e)} h_3^{(e)}) - (E_3^{(e)} h_1^{(e)})] dx_1 dx_3 - \\
& -c \int_{-a-h^*}^a \int_{-h-h^*}^{h^*} [(E_2^{(e)} h_1^{(e)}) - (E_1^{(e)} h_2^{(e)})] dx_1 dx_2 - \frac{1}{2} \iiint_{(R^3-V)} \left[\frac{\partial(h_1)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3)^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0, \quad (5.8)
\end{aligned}$$

где $R^{(3)}$ означает область трёхмерного евклидова бесконечного пространства, а V – область параллелепипеда.

Теперь складываем равенства (5.7) и (5.8), используя граничные условия электродинамики на поверхностях параллелепипеда (на поверхностях раздела внутренней и внешней сред), получим равенство:

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} \left[\frac{\partial(h_1)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2)^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3)^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 - \\
& -\frac{1}{2} \iiint_{(R^3-V)} \left[\frac{\partial(h_1^{(e)})^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_2^{(e)})^2}{\partial t} + \frac{\partial(h_3^{(e)})^2}{\partial t} \right] dx_1 dx_2 dx_3 = \quad (5.9) \\
& = \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} [E_1 j_1 + E_2 j_{21} + E_3 j_3] dx_1 dx_2 dx_3.
\end{aligned}$$

И, наконец, складывая равенства (5.1) и (5.9) с учётом формул (1.4), получим следующее равенство, которое выражает уравнение баланса энергии (мощности) поставленной в пункте 1– задачи микрополярной магнитоупругости:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} + \frac{\partial W_m^{(e)}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma} \int_{-a-h}^a \int_{-h-h^*}^h (j_1^2 + j_3^2) dx_1 dx_3 + \frac{1}{\sigma} \int_{-a-h-h^*}^a \int_{-h-h^*}^h \int_{-h-h^*}^{h^*} j_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial R}{\partial t}, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned}
W_m &= \iiint_V W_{om} dx_1 dx_2 dx_3, \quad W_{om} = \frac{1}{2} (h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \\
W_m^{(e)} &= \iiint_{(R^{(3)}-V)} W_{om}^{(e)} dx_1 dx_2 dx_3, \quad W_{om}^{(e)} = \frac{1}{2} \left((h_1^{(e)})^2 + (h_2^{(e)})^2 + (h_3^{(e)})^2 \right). \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Здесь $W_{ом}$ и $W_{ом}^{(e)}$ – соответственно, плотность энергии возбуждённого в теле и окружающем пространстве магнитного поля, а W_m и $W_m^{(e)}$ – энергия магнитного поля в теле и вакууме; сумма последних двух интегральных слагаемых в левой части формулы (5.10) представляет собой джоулево тепло, связанное с электрическим током в теле с плотностью $\vec{j} = \{j_1, j_2, j_3\}$.

Основываясь, что в левой части уравнения (5.10) присутствующие энергии (потенциальная энергия деформации, кинетическая энергия, энергия магнитного поля и джоулево тепло) положительно-определённые квадратичные формы, известным образом легко доказать однозначность решений задачи магнитоупругости для параллелепипеда (плоское напряжённое состояние). На этой же основе, используя методы прикладного функционального анализа [25], можем доказать применимость вариационного метода Ритца для решения соответствующих начально-краевых задач и, в итоге, получить доказательство существования решений этих задач. Отметим, что для классического случая задачи магнитоупругости, доказательства этих теорем приведены в работе [5].

Перейдём теперь к выводу уравнения баланса энергии для построенной прикладной модели изгибной деформации микрополярной магнитоупругости тонких балок.

Для этой цели, применяя в основу принятые гипотезы пункта два, из уравнений баланса энергии (5.10) получим следующее уравнение баланса энергии прикладной модели микрополярной магнитоупругости тонких балок:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{W}_m}{\partial t} + \frac{\partial \hat{W}_m^{(e)}}{\partial t} + \frac{2h}{\sigma} \int_{-a}^a j_{10}^2 dx_1 + \frac{1}{\sigma} \int_{-a}^a \int_{-h}^h \int_{-h^*}^h j_2^2 dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial \hat{R}}{\partial t}, \quad (5.12)$$

$$\hat{U} = \int_{-a}^a \hat{U}_0 dx_1, \quad \hat{T} = \int_{-a}^a \hat{T}_0 dx_1, \quad (5.13)$$

$$\hat{W}_m = \int_{-a}^a \hat{W}_{0m} dx_1, \quad \hat{W}_m^{(e)} = \iiint_{(R^3)} \hat{W}_{0m}^{(e)} dx_1 dx_2 dx_3, \quad (5.14)$$

$$\hat{U}_0 = \frac{1}{2} \left[2h(\mu + \alpha) \Gamma_{13}^2 + 4x(\mu - \alpha) \Gamma_{13} \Gamma_{31} + 2h(\mu + \alpha) \Gamma_{31}^2 + \frac{2Eh^3}{3} K_{11}^2 + 2Bhk_{12}^2 \right], \quad (5.15)$$

$$\hat{T}_0 = \frac{1}{2} \left[2\rho h \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 + \frac{2\rho h^3}{3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 + 2Ih \left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right)^2 \right], \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial t} = \int_{-a}^a \left(q_3 \frac{\partial W}{\partial t} + q_{1h} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + m_2 \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right) dx_1 + \left(M_{11}^* \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + N_{13}^* \frac{\partial W}{\partial t} + L_{12}^* \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \right) \Big|_{x_1=-a}^{x_1=a} \quad (5.17)$$

Здесь \tilde{U}_0 и \tilde{T}_0 – представляют собой соответственно линейную плотность потенциальной и кинематической энергии, а \tilde{U} и \tilde{T} – полная потенциальная и кинематическая энергии микрополярной тонкой балки.

Для плотности энергии и выражения самой энергии магнитного поля (как для внутренней, так и для внешней задач электродинамики) можно применить те же формулы (5.11) (с учётом конкретных зависимостей слагаемых от координат).

Легко убедиться, что для начально-краевой задачи (4.3), (4.2), (3.5), (4.5), (4.6), (4.7) имеет место теорема единственности.

6. Заключение. Основная система уравнений, граничные и начальные условия прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок выводятся на

базе теории магнитоупругости плоского напряжённого состояния тонкого параллелепипеда при введении некоторых упрощающих гипотез, имеющих асимптотическую почву. Выведено интегральное (интегродифференциальное) уравнение (которое входит в систему основных уравнений прикладной модели) электродинамической контактной задачи. Получено уравнение баланса энергии, доказана теорема единственности начально-краевых задач прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких балок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272 с.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: «Физматлит», 1996. 288 с.
3. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143 с.
4. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440с.
5. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. АН Армении, 1992. 232 с.
6. Sargsyan S.H. Effective manifestations of characteristics of strength and rigidity of micropolar elastic thin bars//Journal of materials science and engineering. 2012. V.1. №1. P.98-108.
7. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик. // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. №2. С.148-155.
8. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. № 1. С.55-66.
9. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
10. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Springer. 1998. 325 p.
11. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Pergamon Press. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Paris. Frankfurt. 1986. 383p.
12. Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. Magnetoelasticity of thin shells and plates based on the asymmetrical theory of elasticity// Advanced in mechanics and mathematics. Vol. 21. Mechanics of generalized continua. One hundred years after the Cosserats. New York, ets. «Springer». 2010. P. 325-337.
13. Саркисян С.О., Саркисян Л.С. Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин // Изв. НАН РА. Механика. 2010. Т.63. №3. С.52-65.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624с.
15. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Госфизматлит, 1962. 246 с.
16. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Кондрат В.Ф. Магнитоупругость электропроводных тел. Киев: Наукова Думка, 1982. 296с.
17. Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А. Электродинамика. М.: Наука, 1978. 352 с.
18. Панкович П.Ф. Теория упругости. Л.-М.: Оборонгиз, 1939. 640с.
19. Тимошенко С.П. Курс теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1972. 508с.
20. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414с.
21. Саркисян С.О. Прикладные одномерные теории балок на основе несимметричной теории упругости//Физическая мезомеханика. 2008. Т.11. №5. С.41-54.

22. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Математическая модель динамики микрополярных упругих тонких балок. Свободные и вынужденные колебания //Физическая мезомеханика. 2015. Т.18. №3. С.25-31.
23. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444с.
24. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
25. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Сведения об авторах:

Саркисян Лусине Самвеловна – кандидат физ.-мат.наук, доцент

Саркисян Самвел Оганесович – чл.-корр. НАН Армении, доктор физ-мат.наук, профессор, зав.каф. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им.М.Налбандяна.

Тел.: (093) 15 16 98. E-mail: slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 8.12.2014

УДК 532.613.5

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ В ЗАМКНУТОМ
КАНАЛЕ, НАПОЛНЕННОМ ПЕРИОДИЧЕСКИ ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ
ПРОБКАМИ ГАЗОЖИДКОСТНОЙ СМЕСИ И ГАЗА**

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л.

Բանալի բառեր: ալիք, խցաններ, հեղուկ, գազ:

Ключевые слова: волна, пробки, жидкость, газ.

Key words: wave, corks, fluid, gas.

Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ.

**Ճնշման ալիքի տարածումը փակ ջրանցքում, լցված պարբերաբար իրար հաջորդող
զազահեղուկ խառնուրդ և գազ պարունակող խցաններով**

Գծային դրվածքով ուսումնասիրված է ալիքի տարածումը փակ ջրանցքում, որում գոյություն ունեն խցաններ: Ենթադրվում է, որ նրանց կառուցվածքի տարրերը պարբերաբար կրկնվում են: Ստացված է դիսպերսիոն հավասարումը, որը բնութագրում է երկու խցաններից կազմված բջիջում Բլոխի ալիքային թվի կախվածությունը խցանների այլ ալիքային թվերից: Թվային հաշվարկների միջոցով որոշված են գրգռող հաճախությունների արժեքների ոչ թափանցելիության միջակայքերը, որոնցում ալիքը բացակայում է:

Grigoryan Sh.A., Ohanyan G.G., Sahakyan S.L.

**The propagation of pressure wave in closed channel filed of periodic alternate corks
with the gas-liquid mixture and gas**

The propagation of wave in closed channel filed of corks is considered. It is supposed that the discrete structure of corks is periodic. The dispersion equation of the Bloch wave number dependence on wave numbers of corks is derived. It is obtained the frequencies bands of transmitting waves.

При течении газожидкостной смеси в замкнутом канале может образоваться снарядный поток, характеризующий чётко выраженной дискретной структурой из чередующихся пробок жидкости и газа. Полагается, что структура потока периодически повторяется, вследствие чего рассматривается система из двух пробок, образующих элементарную ячейку. Исследуется заключительная стадия зарождения снарядного потока, когда чистое разделение фаз всё ещё отсутствует и среды представляют собой газожидкостную смесь с очень малым газосодержанием (первая пробка) и собственно газ (вторая пробка).

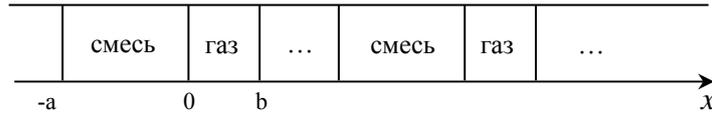
Выведено дисперсионное уравнение, описывающее зависимость волнового числа Блоха всей ячейки от волновых чисел пробок. Его численная реализация проведена в случае водовоздушной смеси и воздуха. Получены значения возбуждающих частот в диапазонах запирания (непрозрачности), при которых распространение волны сжатия не происходит.

Введение. Пусть в замкнутом канале бесконечной длины с абсолютно жёсткими стенками течёт бесстолкновительная монодисперсная смесь жидкости с пузырьками калорически совершенного газа. Эффектами межфазного теплообмена, трения, пульсационного движения пузырьков и их поступательного движения относительно жидкости пренебрегаются (односкоростная модель). Полагается, что процессы образования новых пузырьков, их дробление и слипание отсутствуют.

При сформировавшемся снарядном потоке имеет место разделение фаз в виде образований чередующихся жидкой и газовой пробок строго дискретной структуры [1,2]. Исследование скоростей распространения волны сжатия проведено в [1]. Для периодической структуры распределения пробок в [3] с использованием теоремы Флоке [4,5] получено дисперсионное трансцендентное уравнение, из которого на

примере воды и воздуха численно рассчитаны значения возбуждающих частот пропускания волны, образующих диапазоны прозрачности. Распространение волны в периодических структурах на основании уравнения Хилла рассмотрено в [6].

1. Исходные уравнения. Рассматривается распространение волны сжатия в замкнутом канале с периодически чередующимися ячейками из двух пробок, в которых первая наполнена газожидкостной смесью с очень малым содержанием газа $\beta \ll 1$, а вторая – одиночным большим пузырьком газа, имеющим форму сфероида и занимающим почти всё поперечное сечение канала. Идеализированная схема такого дискретного потока представлена на фиг.1



Фиг. 1

В приближении Буссинеска одномерные линейные уравнения движения смеси в первой пробке имеют вид [2,7]:

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - c_1^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} - (1-\beta) \frac{c_1^2}{\omega_{ar}^2} \frac{\partial^4 P_1}{\partial t^2 \partial x^2} = 0, \quad \omega_{ar}^2 = \frac{3\gamma P_0}{\rho_{10} R^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{1}{\rho_1 c_1^2} \frac{\partial P_1}{\partial t} = 0, \quad c_1^2 = \frac{\gamma P_0}{\beta \rho_{10}}, \quad \rho_1 = (1-\beta)\rho_{10} + \beta\rho_{20}$$

Движение газа во второй пробке описывается уравнениями:

$$\frac{\partial^2 P_2}{\partial t^2} - c_2^2 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial V_2}{\partial x} + \frac{1}{\rho_{20} c_2^2} \frac{\partial P_2}{\partial t} = 0, \quad c_2^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_{20}} \quad (1.2)$$

Здесь t – время, x – пространственная координата, направленная вдоль стенки канала, P – возмущение давления, ρ – плотность, ω_{ar} – резонансная частота Миннаэрта, R – радиус пузырька, γ – показатель адиабаты газа, c – невозмущённая скорость среды. Третье слагаемое из (1.1) ответственно за дисперсию волны в смеси. Индексы 0, 1 и 2 отнесены к состоянию равновесия и параметрам сред в первой и второй пробках. Полагая

$$[P_i(x, t), V_i(x, t)] = [P_{i*}(x), V_{i*}(x)] e^{i\omega t}, \quad i = 1, 2$$

где ω – возбуждающая распространение волны частота, уравнения (1.1), (1.2) переписутся в стационарной форме записи:

$$\frac{d^2 P_1}{dx^2} + \frac{\omega_1^2}{c_1^2} P_1 = 0, \quad \frac{d^2 P_2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c_2^2} P_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega \left[1 - (1-\beta) \frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2} \right]^{-1/2} \quad (1.3)$$

$$\frac{dV_1}{dx} = -i \frac{k_1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} P_1, \quad \frac{dV_2}{dx} = -i \frac{k_2}{\rho_{20} c_2} P_2, \quad k_1 = \frac{\omega_1}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}$$

Здесь звездочки в индексах опущены, что будет соблюдаться и далее.

На линии раздела сред $x = 0$ должны выполняться условия непрерывности как давления, так и скоростей частиц сред

$$P_1(0) = P_2(0), \quad V_1(0) = V_2(0) \quad (1.4)$$

Кроме того, на линиях $x = -a$ и $x = b$ раздела ячейки потребуем выполнения условий её квазипериодичности

$$P_1(-a) = lP_2(b), \quad V_1(-a) = lV_2(b) \quad (1.5)$$

Постоянный множитель l будет определён в процессе решения задачи. Требуется найти те значения возбуждающих частот ω , при которых либо существует процесс распространения волны (частоты пропускания), либо он отсутствует (частоты среза). В последнем случае падающая из какой-либо пробки волна по достижению линии раздела с другой полностью отражается от неё и процесс распространения обрывается.

Общие решения уравнений (1.3) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} P_1(x) &= A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}, & V_1(x) &= \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} (A_1 e^{-ik_1 x} - B_1 e^{ik_1 x}) \\ P_2(x) &= A_2 e^{-ik_2 x} + B_2 e^{ik_2 x}, & V_2(x) &= \frac{1}{\rho_{20} c_2} (A_2 e^{-ik_2 x} - B_2 e^{ik_2 x}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где A_i, B_i ($i=1,2$) – постоянные интегрирования.

Удовлетворяя условиям непрерывности (1.4) и квазипериодичности (1.5), для определения постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 получим систему однородных уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 - A_2 - B_2 &= 0 \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} A_1 - \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} B_1 - \frac{1}{\rho_{20} c_2} A_2 + \frac{1}{\rho_{20} c_2} B_2 &= 0 \\ A_1 e^{ik_1 a} + B_1 e^{-ik_1 a} - l A_2 e^{-ik_2 b} - l B_2 e^{ik_2 b} &= 0 \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} A_1 e^{ik_1 a} - \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} B_1 e^{-ik_1 a} - \frac{l}{\rho_{20} c_2} A_2 e^{-ik_2 b} + \frac{l}{\rho_{20} c_2} B_2 e^{ik_2 b} &= 0 \end{aligned}$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиальных решений является равенство нулю определителя матрицы, составленной из коэффициентов при A_1, A_2, B_1, B_2 . Раскрывая его, для определения множителя l получим уравнение:

$$\frac{1}{2} \left(l + \frac{1}{l} \right) = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin k_1 a \sin k_2 b$$

Вводя в рассмотрение волновое число Блоха q для ячейки, получим:

$$\cos qL = \cos k_1 a \cos k_2 b - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin k_1 a \sin k_2 b \quad (1.7)$$

$$l = e^{iqL}, \quad L = a + b$$

Волновой процесс в ячейке определяется не локальными волновыми числами k_1, k_2 , и некоторой, усреднённой по ячейке, величиной q , которая определяется с точностью до целого числа значений $2\pi n / L$, $n = \pm 1, 2, \dots$. Очевидно, что для значений возбуждающих частот ω , при которых $|\cos qL| \leq 1$ (частота пропускания), существуют волны давления (сжатия), а в случае $|\cos qL| > 1$ (частоты запирания) волны отсутствуют. В последнем случае волна, подающая из какой-либо пробки, по достижению начальной границы последующей пробки полностью отражается от неё и дальнейшее распространение не происходит.

2. Отсутствие дисперсии. Такой случай имеет место при пренебрежении третьим членом в уравнении (1.1). Рассмотрим частную задачу. Пусть выполняется условие $k_1 a = k_2 b$, означающее, что при распространении волны её фаза в каждой пробке меняется на одну и ту же величину. Уравнение (1.3) примет форму записи ($k_1 = \omega / c_1$, $k_2 = \omega / c_2$, $\omega_1 = \omega$)

$$\cos qL = 1 - \frac{1}{2} \frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} \left(1 + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \right)^2 \sin^2 \Omega, \quad \Omega = \frac{\omega}{c_1} (1 - \alpha) L \quad (2.1)$$

Здесь $a = (1 - \alpha)L$, $b = \alpha L$. Условие $k_1 a = k_2 b$ при фиксированных значениях ρ_{10} , ρ_{20} и β определяет величину параметра α

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{c_1 + c_2}{c_2} = 1 + \sqrt{\frac{1}{\beta} \frac{\rho_{20}}{\rho_{10}}}$$

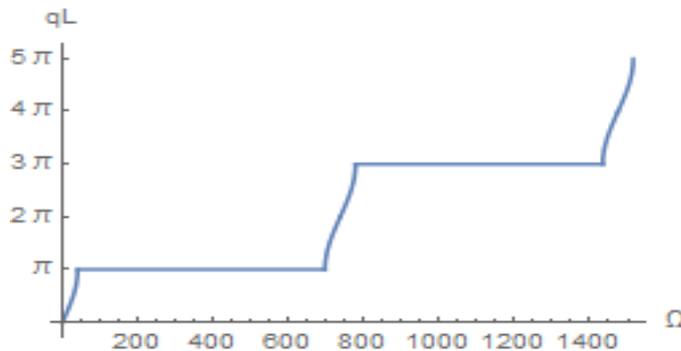
Очевидно, что когда правая часть в (2.1) по модулю больше единицы, волны отсутствуют и, тем самым, определяются диапазоны частот непропускания (среза). В противном случае волны распространяются.

В табл.1 приведены диапазоны среза (частот запираения), вычисленные по уравнению (2.1) с исходными параметрами, указанными там же.

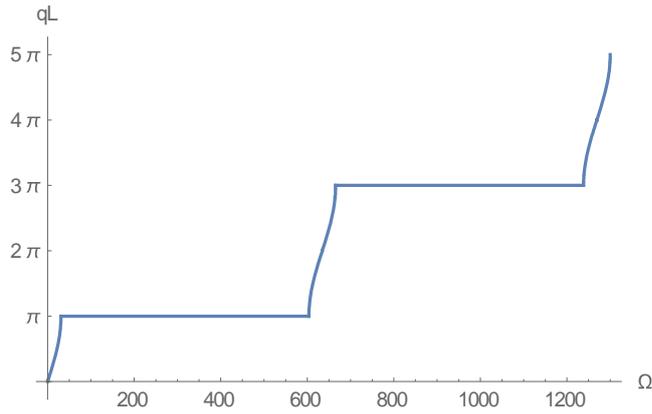
Таблица 1

Ω				
α	β	$P_0 = 0.1 \text{ МПа}, \gamma = 1.4, L = 2 \text{ м}$		
0.66	0.005	[25, 748]	[799, 1522]	[1573, 2296]
0.73	0.01	[27, 673]	[716, 1351]	[1405, 2040]
0.81	0.025	[31, 597]	[659, 1225]	[1287, 1853]
α	β	$P_0 = 0.2 \text{ МПа}, \gamma = 1.4, L = 2 \text{ м}$		
0.6	0.005	[34, 896]	[965, 1826]	[1895, 2756]
0.77	0.025	[40, 683]	[764, 1407]	[1487, 2130]

Из анализа данных табл.1 следует вывод, что с возрастанием α , т.е. увеличением газосодержания β водовоздушной смеси, ширины диапазонов среза уменьшаются, а с увеличением исходного давления P_0 частоты запираения и ширины диапазонов среза (непропускания) по величине возрастают.



Фиг.1а. Зависимость qL от Ω при $P_0 = 0.2 \text{ МПа}$,
 $\beta = 0.025$, $\alpha = 0.81$, $L = 2 \text{ м}$.



Фиг.16. Зависимость qL от Ω при $P_0 = 0.1$ МПа, $\beta = 0.025$, $\alpha = 0.81$, $L = 2$ м.

На фиг.1а и 1б показаны графики зависимости qL от безразмерной частоты Ω при соответствующих значениях $P_0 = 0.2$ МПа и $P_0 = 0.1$ МПа, которые качественно совпадают с приведённым в [6]. Из сравнения фиг.1а и 1б заключаем, что безразмерные значения частот запирания в первом случае больше по величине, чем вторые. Тот же вывод также следует из сравнения третьей и пятой строк табл.1.

Обратимся теперь к уравнению (1.7), которое в рассматриваемом случае переписывается в виде:

$$\cos qL = \cos \frac{\omega a}{c_1} \cos \frac{\omega b}{c_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_{20} c_2} + \frac{\rho_{20} c_2}{\rho_1 c_1} \right) \sin \frac{\omega a}{c_1} \sin \frac{\omega b}{c_2} \quad (2.2)$$

В табл. 2а и 2б приведены значения диапазонов частот запирания, вычисленные по уравнению (2.2) с указанными там же исходными данными. Здесь и далее главные диапазоны среза представлены первыми столбцами.

Таблица 2а

α	ω , гц ($P_0 = 0.05$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.001$		
0.7	[19, 668]	[670, 1331]	[1338, 1386]
0.8	[21, 585]	[586, 1170]	[1171, 1754]

Таблица 2б

α	ω , гц ($P_0 = 0.05$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.005$		
0.7	[19, 613]	[621, 668]	[675, 1237]
0.8	[21, 584]	[586, 928]	[932, 1170]

Из сравнения табл. 2а и 2б видно, что при фиксированном давлении и газосодержании с увеличением α значения частот и ширины главных диапазонов уменьшаются. С увеличением β значения частот убывают во всех диапазонах вне зависимости от α .

Аналогичным образом строятся таблицы 3а и 3б, которые выявляют зависимости частот запирания от величин параметров α и β , однако, при большем значении исходного давления.

Таблица 3а

α	ω , гц ($P_0 = 0.2$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.001$		
0.7	[37, 814]	[817, 1629]	[1632, 2442]
0.8	[42, 713]	[716, 1426]	[1428, 2139]

Таблица 3б

α	ω , гц ($P_0 = 0.2$ МПа, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$\beta = 0.005$		
0.7	[37, 812]	[817, 1237]	[1243, 1629]
0.8	[42, 712]	[716, 1422]	[1428, 1855]

Из сравнения данных таблиц 3а с 2а и 3б с 2б следует, что с увеличением исходного давления P_0 частоты запираия по величине возрастают во всех диапазонах для фиксированных α и β .

Таким образом, в случае отсутствия дисперсии из проведённого анализа следует вывод, что при фиксированных значениях P_0 и β с увеличением α частоты запираия в главных диапазонах убывают с уменьшением их ширины. С увеличением β частоты во всех диапазонах запираия убывают. С увеличением P_0 при фиксированных α и β частоты по величине возрастают во всех диапазонах среза.

3. Наличие дисперсии. Перейдём к численному исследованию полного уравнения (1.7), которое перепишем в развёрнутой форме.

$$\cos qL = \cos \frac{\omega_1 a}{c_1} \cos \frac{\omega b}{c_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho_2 c_2} \frac{\omega_1}{\omega} + \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \sin \frac{\omega_1 a}{c_1} \sin \frac{\omega b}{c_2} \quad (3.1)$$

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \sqrt{1 - (1 - \beta) \frac{\omega^2}{\omega_{ar}^2}}$$

В табл. 4а и 4б показаны диапазоны среза, определяемые из решений уравнения (3.1) с указанными исходными параметрами.

Таблица 4а

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\beta = 0.001$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.05$ МПа		
0.7	[19, 668]	[670, 1151]	[1153, 1337]
0.8	[21, 585]	[586, 1169]	[1171, 1468]

Таблица 4б

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-4}$ м, $\beta = 0.001$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.05$ МПа		
0.7	[19, 668]	[670, 1331]	[1338, 1383]
0.8	[21, 585]	[586, 1170]	[1171, 1754]

Уменьшение радиуса пузырька при фиксированных прочих параметрах не влияет на значения частот запираия из главных диапазонов, а в остальных, т.е. при более высоких частотах, возрастают по величине.

Влияние исходного давления при более высоком его значении, а также газосодержания проиллюстрированы в табл. 5а и 5б.

Таблица 5а

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\beta = 0.001$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.2$ МПа		
0.7	[37, 814]	[817, 1629]	[1632, 2300]
0.8	[42, 713]	[716, 1426]	[1428, 2139]

Таблица 5б

α	ω , гц ($R = 7 \cdot 10^{-3}$ м, $\beta = 0.005$, $\gamma = 1.4$, $L = 2$ м)		
	$P_0 = 0.2$ МПа		
0.7	[37, 812]	[817, 1186]	[1991, 1629]
0.8	[42, 712]	[716, 1422]	[1428, 1696]

С увеличением β при фиксированных остальных исходных данных частоты во всех диапазонах среза убывают. Сравнения данных табл. 5а и 4а указывают, что с увеличением P_0 частоты запираия во всех диапазонах возрастают по величине.

Из сравнения диапазонов табл. 4а и 2а видно, что в главных из них влияние дисперсии отсутствует. Она проявляется при более высоких возбуждающих частотах ω и уменьшает их значения.

Таким образом, увеличение α приводит к уменьшению ширины главных диапазонов, а с увеличением β и P_0 частоты запираия во всех диапазонах соответственно убывают и возрастают. Дисперсия проявляется для больших значений частот и приводит к их уменьшению по величине в сравнении с её отсутствием.

Заключение. Исследуются случаи, когда в замкнутом канале с газожидкостной смесью существуют пробки, первая из которых наполнена смесью с очень малым газосодержанием, а вторая – газом. Полагается, что структура стационарного режима является квазипериодической. Выведено дисперсионное уравнение зависимости волнового числа Блоха всей ячейки от волновых чисел пробок. В качестве примера рассмотрены пробки из водовоздушной смеси и воздуха. Численная реализация уравнения позволяет выявить диапазоны частот запираия (стреза), при которых волна отсутствует, а вне их присутствует.

При обобщении результатов исследования на случаи других исходных параметров можно обнаружить, что при фиксированных прочих параметрах значения частот запираия:

- с увеличением газосодержания β уменьшаются во всех диапазонах среза, как и их ширина,
- с увеличением ширины α второй пробки убывает лишь в главных диапазонах,
- с увеличением давления P_0 возрастают во всех диапазонах, как и ширины главных из них,

- с увеличением размера пузырька R не меняются в главных диапазонах. Эффект увеличения замечен в остальных диапазонах для высоких и сверхвысоких частот,
 - с увеличением ширины L всей ячейки убывают во столько же раз.
- Дисперсия волны проявляется при очень высоких частотах и приводит к уменьшению их значений в сравнении с её отсутствием.

ЛИТЕРАТУРА

1. Martin C.S., Padmanabhan M. Pressure Pulse Propagation in Two-Component Slug Flow // Trans. of the ASME. Vol.101. №1. 1979. Русский перевод – Распространение импульса давления в двухкомпонентном снарядном потоке. // Теорет. основы инженерных расчётов. 1979. Т.101. №1. С.161-171.
2. Накоряков В.Е., Покусаев Б.Г., Шрейбер И.Р. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред. М.: Энергоатомиздат, 1990. 248с.
3. Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Об одной модели снарядного потока газожидкостной смеси // Проблемы динамики взаимодействия деформ. сред. Труды VIII межд. конф., сентябрь 22-26, 2014, Горис–Степанакерт. Ереван, 2014. С.340-344.
4. Бриллюэн А., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М.: ИЛ, 1959. 448с.
5. Басс Ф.Г., Булгаков А.А., Тетервов А.П. Высокочастотные свойства полупроводников со сверхрешётками. М.: Наука, 1989. 288с.
6. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1979. 384с.
7. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч.1. М.: Наука, 1987. 464с.

Сведения об авторах:

Григорян Шушаник Акоповна, к. ф.-м. н., доцент кафедры «Математика и математическ. Моделирования» Российско-Армянского (Славянского) университета.

Адрес: 0051, Ереван, ул. Овсепя Эмина, 123, **тел.:** (+37494) 284-718,

E-mail: grig-shushanik@rambler.ru

Оганян Гагик Гришаевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Института механики НАН Армении. **Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24/2,

тел.: (+37493) 946-947, **E-mail:** oganyangagik@gmail.com

Саакян Саак Леонович, к.ф.-м.н., ассистент кафедры числ. анализа и матем. моделирования факультета информатики и прикл. Математики, ЕГУ.

Адрес: 0025, Ереван, ул. А.Манукяна 1, **тел.:** (+37477) 002-408 (моб.)

E-mail: ssahakyan@ysu.am

Поступила в редакцию 29.04.2015

УДК 517.977.56+58

**THE BUBNOV–GALERKIN PROCEDURE IN PROBLEMS OF MOBILE
(SCANNING) CONTROL FOR SYSTEMS WITH DISTRIBUTED
PARAMETERS**

Arakelyan Sh.Kh., Khurshudyan As.Zh.

Ключевые слова: метод Бубнова–Галёркина, подвижное управление, нелинейная проблема моментов, распределённая система, скользящие режимы

Key Words: Bubnov–Galerkin procedure, scanning (mobile) control, nonlinear moments problem, distributed system, sliding modes

Բանալի բառեր: Բուբնով–Գալյորկինի եղանակը, շարժական ղեկավարում, մոմենտների ոչ գծային պրոբլեմ, բաշխված բնութագրիչներով համակարգ, սահող ռեժիմներ

Առաքելյան Շ.Խ., Խուրշուդյան Ա.Շ.

Բուբնով–Գալյորկինի եղանակը բաշխված պարամետրերով համակարգերի շարժական ղեկավարման խնդիրներում

Բաշխված պարամետրերով համակարգերի շարժական ղեկավարման խնդիրների լուծման համար առաջարկվում է օգտագործել Բուբնով–Գալյորկինի հայտնի եղանակը: Առաջարկվող ալգորիթմը մանրամասն նկարագրված է ջերմահաղորդականության եռաչափ գծային հավասարման համար: Այն թույլ է տալիս ղեկավարման խնդրի լուծումը հանգեցնելու վերջավոր չափանի ոչ գծային մոմենտների պրոբլեմի: Դրա ստացման եղանակը դիտարկվում է ջերմահաղորդականության միաչափ հավասարման համար: Կառուցվում է ստացված մոմենտների պրոբլեմի լուծումը մասնավոր դեպքում: Արդյունքների հիման վրա միաչափ դեպքում ձողի համար իրականացվել է համակարգչային նմանակում՝ COMSOL Multiphysics միջավայրում: Արտացոլվել են ղեկավարման ֆունկցիայի հիմնական կախվածությունները խնդրի տվյալներից: Ձողի վիճակը ներկայացվում է գրաֆիկորեն՝ աղբյուրի ինտենսիվության մի քանի (հաստատուն) արժեքի դեպքում: Համեմատելու համար բերվում են համապատասխան արդյունքները՝ ղեկավարման բացակայության (գրոյական հզորությամբ աղբյուր) դեպքում:

Թույլատրելի ղեկավարումների ընդլայնված դասի համար նկարագրված է ստացված ոչ գծային հավասարումների համակարգի թվային արդյունավետ լուծման սխեմա: Ղեկավարման պարամետրերի որոշումը հանգեցված է ոչ գծային ծրագրավորման պարզագույն խնդրի:

Аракелян Ш.Х., Хуршудян Ас.Ж.

Метод Бубнова–Галёркина в задачах подвижного управления системами с распределёнными параметрами

Для решения задач подвижного управления системами с распределёнными параметрами предлагаем применить метод Бубнова–Галёркина. Алгоритм подробно описан для трёхмерного линейного уравнения теплопроводности. Он позволяет свести решение задачи управления к конечномерной нелинейной проблеме моментов. Процедура получения проблемы моментов подробно демонстрируется на примере одномерного уравнения теплопроводности. Найдено решение полученной проблемы моментов в частном случае. На основе полученных результатов одномерная задача была симулирована в среде COMSOL Multiphysics. Выявлены основные зависимости функции управления от входных данных задачи. Графически отражены состояния стержня для разных (постоянных) интенсивностей источника. Для сравнения приведены соответствующие иллюстрации при отсутствии управления (источник нулевой интенсивности).

В случае расширенного класса допустимых управлений предложена эффективная схема численного решения полученной системы нелинейных ограничений. Определение параметров управления сводится к простейшей задаче нелинейного программирования.

We suggest to apply the Bubnov–Galerkin procedure to solve scanning control problems for systems with distributed parameters. The algorithm is described in details for three-dimensional linear heat equation. It allows to

reduce the solution of control problem to finite-dimensional nonlinear moments problem. The procedure of derivation of moments problem is illustrated in details on the example of one-dimensional equation of thermal conductivity. The solution of obtained moments problem is found in a particular case. Based on obtained results a computer simulation is done using COMSOL Multiphysics platform in one-dimensional case for a rod. The main dependences of control function against input data of the problem are revealed. The state of the rod for several (constant) values of the source intensity is expressed in terms of graphs and illustrations. Corresponding illustrations are brought in case of control absence (null-power source) for comparison.

An effective numerical scheme for solving the obtained system of nonlinear constraints is suggested in the case of extended class of admissible controls. Calculation of control parameters is reduced to the simplest problem of nonlinear programming.

Introduction

The problem of bodies heating was always of interest for both engineers and theoreticians. In view of variety of possibilities to heat given body to a needed regime, as well as of amount of corresponding resources spent on the heating, a natural question arises about optimal choice of heating method. Optimality criterion may be different depending on a particular method: time optimality, heating with source of minimal intensity, heating with minimal quantity of sources, heating with optimal placements (fixed or changeable) of sources with given configuration, heating with optimal change of the external temperature field etc. Internal heat sources, heat sources with localized distribution on boundary of the heating body, heat sources with ability to change their localization in time discretely or continuously (scanning sources) can be used for this purpose. One may also fix the placements of the sources and carry out the heating by controlling the power of the source, however from control theory for distributed parameters systems point of view that problem does not have any significance. In [1] various interesting problems of plates and shells heating optimization are considered using methods of variational calculus.

In [2–4] a practical problem of bodies heating via electronic ray spread out from a point source, which can be freely moved over the body outer surface along controllable trajectory was stated by Russian scientist A. G. Butkovskiy and his colleagues. The problem was the characterization of trajectory for the source which provides required temperature distribution in the body when the power of the source is prescribed. Mathematically the problem was the determination of the control function included in the right-hand side of (linear) heat equation, naturally, in nonlinear manner. In order to solve the problem the Fourier method of variables separation was applied initially and it was reduced to an infinite-dimensional nonlinear problem of moments. Even though by that time the existence and uniqueness of optimal solution of the problem was proved [5], general algorithm for explicit solution construction was not developed yet. Further developments in this subject allowed not only describing such an algorithm [6], but to propose and develop other efficient approaches to solve mobile control problems as well. Namely, in articles [7, 8] two different methods of control by right-hand side of partial differential equations— *the method of substitution* and *the method of implementation*. Application of those methods in turn gives a unified approach for solving mobile control problems. Using the method of substitution first we need to determine such a distributed control on which the required state of controlled system is achieved and is held further. Then, using the method of implementation we are able to find unknown parameters of mobile control close in a certain sense to distributed control obtained earlier by the method of substitution. The algorithms of all methods described above are outlined in monograph [9] with many illustrative examples. Articles [10, 11], published after monograph [9], are devoted to generalization of substitution and implementation methods for two-dimensional systems, at this the considered heat equations is *nonlinear*.

In a recently published article by A. G. Butkovskiy [12] the mobile control problem is referred as one of the most important rigorously unsolved problems in control theory of

distributed parameter systems. Since the problem has significant practical value and, nevertheless, is rigorously unsolved, any approximate algorithm with easily implementable numerical scheme is very important and is required. Other mobile control problems for distributed parameter systems are considered, for example, in [13–17], mainly for vibrating systems with distributed parameters.

The Bubnov–Galerkin procedure [18], which initially was proposed for solving problems in elasticity theory, now is applied to solve boundary value problems arising in almost all areas of applied mathematics. In recent article [19] an algorithm is proposed for approximate solving control problems for bilinear systems. The solution is reduced to a finite-dimensional problem of moments resolvable explicitly. In material distribution, designs structure and topology optimization etc. problems, mathematically formulated via bilinear systems, in which the control function does not explicitly depend on one of independent variables (more often time-variable), application of Butkovskiy’s generalized method [20–25] and the Bubnov–Galerkin procedure in turn is suggested. The algorithm is applied in one [19, 26] and two-dimensional [27, 28] cases. Its numerical scheme was turned out to be very simple and easily implementable; solution of a nonlinear programming problem with equality and inequality type constraints is needed.

In this paper we suggest an approximate procedure for solving mobile (moving, scanning) control problems in dimensions three. The procedure is explained in details for spatial linear heat equation subjected to linear boundary conditions. The purpose of the problem is to explicitly construct a trajectory (motion law) for the heat source in order to provide required terminal temperature distribution when initial temperature distribution in the body is given. The solution of the (non-stationary) state equation is approximated via Bubnov–Galerkin procedure and a coupled system of Cauchy problems with respect to unknown coefficients of solution expansion is derived. The system is resolved explicitly. Force the approximating solution to satisfy prescribed terminal condition with required precision, for determination of the control function, a finite-dimensional system of necessary and sufficient conditions are obtained. This system is treated as nonlinear problem of moments. An example of nonlinear problem of moments derivation procedure is provided for one-dimensional heat equation. The solution of obtained problem is constructed in a particular case.

Based on obtained results a computational experiment is set up in order to reveal the sensitivity of a functional on control function (exactly its length) with respect to system external and internal parameters. Main results are discussed.

In order to derive a solution with easily implementable numerical scheme, the set of admissible controls is extended into the set of compactly supported Lebesgue measurable functions in order to accommodate sliding modes and the control function is represented as a piecewise constant function. Then, the determination of control trajectory parameters is reduced to a problem of nonlinear programming with constraints of equality and inequality types. Numerical solution of obtained problem is described through a table and graphs.

List of Notations

Throughout the paper the following notations and abbreviations:

$C_p(\mathcal{O})$ – the space of piecewise-continuous in \mathcal{O} functions,

$\mathcal{Q} = \{q \in C_p[0, T]; \text{supp } q = [0, T]\}$ – denotes any of the space of admissible controls \mathcal{U} , \mathcal{V} или \mathcal{W} , and q – any of control u, v or w .

$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) \neq 0\}}$ – the support of function $\varphi(x)$,

$\bar{\mathcal{O}}$ – the closure, and $\partial\mathcal{O}$ – the boundary of domain \mathcal{O} ,

∇ – the gradient,

$\mathcal{P} = \{p \in C_p[0, T]; |p(t)| \leq 1, t \in [0, T]\}$,

$\Theta(x, y, z, t)$ – the temperature distribution,

$\delta(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ – the spatial Dirac function,

$T_m(x) = \cos(m \arccos x)$ – Chebyshev polynomials of the first kind,

$\delta_m^\mu = \delta_\mu^m = \begin{cases} 1, & m = \mu, \\ 0, & m \neq \mu, \end{cases}$ – Kronecker's symbol,

$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ – sign function,

$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0.5, & x = 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$ – Heaviside unit step function,

the set $\{1, 2, \dots, N\}$, for short, we denote by $\{1; N\}$,

c_p – heat capacity,

ρ – density,

κ – coefficient of thermal conductivity,

$\chi = \frac{\kappa}{c_p \rho}$ – thermal diffusivity.

1. Problem Statement

Let we are aimed to heat a solid occupying finite domain $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ with piecewise smooth boundary $\partial\mathcal{O}$, into a prescribed heat-state. Let the boundary of the solid, for

instance, to be in heat exchange with external medium of constant (null) temperature¹. To achieve the aim we are allowed to use a point heat source with intensity varying in time $p \in \mathcal{P}$, able to move over the surface of the solid along any prescribed piecewise-continuous trajectory

$$\mathbb{T} = \{u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}; \text{supp}(x-u), \text{supp}(y-v), \text{supp}(z-w) \subset \mathcal{O}\} \subset \mathcal{O},$$

for all $t \in [0, T]$.

We have an opportunity to heat the body as by choosing a proper intensity law, as well as an easily realizable trajectory for the source.

The state of the solid satisfies heat equation [2–13]

$$c_p \rho \frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nabla [\kappa \nabla \Theta] + p(t) \delta(x-u(t), y-v(t), z-w(t)), \quad (1)$$

$$(x, y, z, t) \in \mathcal{O} \times (0, T).$$

It is supposed, that the coefficients of (1) depends on all independent variables, at this $0 < c_p, \rho, \kappa \in C_p(\mathcal{O}; C[0, T])$, $\kappa' \in C_p(\mathcal{O}; C[0, T])$. The boundary conditions are written as follows

$$\Theta = 0, \quad (x, y, z, t) \in \partial \mathcal{O} \times [0, T]. \quad (2)$$

Remark 1. The scanning source can also have other shapes. In general, it has to satisfy restrictions [2–11]

$$\varphi(x, y, z) \geq 0, \quad \text{supp } \varphi \subset \mathcal{O}, \quad \int_{\mathcal{O}} \varphi(x, y, z) dx dy dz = 1.$$

Particular cases include cylindrical, elliptical, rectangular shapes [30, 31], and shapes described by Gauss function [9–11] etc.

Remark 2. As it turns out in practice, control by intensity of the source is not far easy and, moreover, very expensive in sense of resources spent. At the same time, control by motion (trajectory) of the source is easily implementable and does not cost so much. Moreover, there is a wide class of required heat regimes that are unreachable by appropriate choice of source power and can be achieved only by controlling its motion [9].

The initial temperature distribution in the body is supposed to be known:

$$\Theta(x, y, z, 0) = \Theta_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\mathcal{O}}. \quad (3)$$

¹ Basically, this assumption does not play any significant role for applicability of suggesting method. In general, it can be replaced by a more practical assumption, however, as it will be seen below, the boundary conditions, mathematically expressing that assumption must be necessarily remain linear. Without losing the generality, the boundary conditions may be chosen to be homogeneous [1].

Our aim now can be expressed in terms of used notation. We are aimed to explicitly describe the set of all piecewise-continuous trajectories \mathbb{T} , ensuring for solution of initial-boundary value problem (1)–(3) the following terminal condition

$$\Theta(x, y, z, T) = \Theta_T(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\mathcal{O}}. \quad (4)$$

We will additionally assume that the power (intensity) of the source is given. We require also the consistency of boundary conditions with initial and terminal data.

2. Problem Solution

To solve the problem we are going to use the Bubnov–Galerkin procedure. Suppose that we were able to construct an orthonormal system of ansatz (approximating) functions $\{\sigma_m(x, y, z)\}_{m \in \mathbb{N}}$, satisfying to prescribed boundary conditions. Then, the approximating solution of (1) will be represented in the following form [18, 32]

$$\Theta_N(x, y, z, t) = \sum_{m=1}^N \omega_m(t) \sigma_m(x, y, z), \quad (x, y, z, t) \in \bar{\mathcal{O}} \times [0, T], \quad (5)$$

where the coefficients $\omega_m(t)$, of the expansion, according to the Bubnov–Galerkin procedure, are obtained from the following Cauchy problem

$$\omega'_\mu(t) - \sum_{m=1}^N \mathcal{K}_m^\mu \omega_m(t) = \Omega_\mu(t), \quad (6)$$

$$\omega_\mu(0) = \Theta_{0\mu}, \quad (7)$$

$$\mu \in \{1; N\},$$

in which

$$\mathcal{K}_m^\mu = \frac{1}{c_p \rho} \int_{\mathcal{O}} \sigma_\mu(x, y, z) \nabla [\kappa \nabla \sigma_m(x, y, z)] dx dy dz,$$

$$\begin{aligned} \Omega_\mu(t) &= \frac{p(t)}{c_p \rho} \int_{\mathcal{O}} \delta(x - u(t), y - v(t), z - w(t)) \sigma_\mu(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \frac{p(t)}{c_p \rho} \sigma_\mu(u(t), v(t), w(t)), \quad p \in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Conditions (7) are obtained by taking into account the expansion of initial conditions into ansatz functions

$$\Theta_0(x, y, z) = \sum_{m=1}^N \Theta_{0m} \sigma_m(x, y, z).$$

Remark 3. In order to improve the convergence of Bubnov–Galerkin procedure, usually a system of weighted orthogonal functions is taken [31]. Especially, when the

problem (1)–(3) is considered in a corresponding Sobolev space, in which Chebyshev polynomials of the first kind form an orthonormal basis, the most reasonable way of thinking might be the transformation of domain $\bar{\mathcal{O}}$ into cube $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$, and as $\{\sigma_m(x, y, z)\}_{m \in \mathbb{N}}$ consideration of system $\{T_m(x)T_n(y)T_k(z)\}_{m,n,k \in \mathbb{N}}$, orthonormal in $[-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$, with weight $[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{-\frac{1}{2}}$.

Let us write the Cauchy problem (6), (7) in matrix form as follows

$$\omega' = \mathcal{K}\omega + \Omega, \quad (8)$$

$$\omega(0) = \Theta_0, \quad (9)$$

in which ω , Ω and Θ_0 denote vector columns consisting of unknown functions, right-hand sides and initial function (6), (7), respectively, and \mathcal{K} denotes matrix consisting of coefficients of system (6). The general solution of Cauchy problem (8), (9) gives the Cauchy integral representation formula

$$\omega(t) = \Phi[t, 0]\Theta_0 + \int_0^t \Phi[t, \tau]\Omega(\tau) d\tau, \quad (10)$$

in which $\Phi[t, \tau]$ is the (fundamental) Cauchy matrix of the system. Force function (10) to satisfy the expansion of terminal condition (4) with respect to chosen ansatz functions $\{\sigma_m(x, y, z)\}_{m \in \{1;N\}}$:

$$\Theta_T(x, y, z) = \sum_{m=1}^N \Theta_{Tm} \sigma_m(x, y, z),$$

in order to derive a system on necessary and sufficient conditions with respect to unknown functions in purpose of system controllability

$$\int_0^T \Phi[T, \tau]\Omega(\tau) d\tau = \Theta_T - \Phi[T, 0]\Theta_0, \quad (11)$$

in which Θ_T is vector column consisting of coefficients of expansion of (4) mentioned above.

Remark 4. As a result of computation it might turn out that for some finite $N_0 \in \mathbb{N}$ approximating solution (5) is exact solution for the problem, i.e. the residue obtained by substitution of approximating solution (5) in equation (1) vanishes uniformly. Otherwise, the number N of ansatz functions in (5) can be chosen in a manner to provide a required precision. For instance, it can be chosen such that

$$\left\| \Theta_0 - \sum_{m=1}^N \Theta_{0m} \sigma_m \right\| \rightarrow \min, \quad \left\| \Theta_T - \sum_{m=1}^N \Theta_{Tm} \sigma_m \right\| \rightarrow \min,$$

in metrics of spaces of initial and terminal data. Error estimates for Bubnov–Galerkin procedure is carried out in [31].

Note, that unknown controls also depends on choice of N so we should rather use symbols $u_N(t)$, $v_N(t)$ and $w_N(t)$. However, to be short in text, we shall omit that fact and just keep it in mind throughout the whole paper.

The only parameter in system (11) for fixed T is the required trajectory, the components of which are figured out in the functional from left-hand side of the system. At the same time, its right-hand side is the value of that functional on a particular admissible trajectory. Namely, that admissible trajectory we are seeking for.

The components of required trajectory can be determined from system (11) in several manners. For instance, one may choose a cost functional having proper physical interpretation² for a particular problem and minimize it with respect to control functions which in their turn satisfy equality type restrictions (11). This problem can be solved through efficient numerical methods of nonlinear programming [33]. System (11) can be interpreted as a classical problem of moments [2–6, 9, 12] as well. In view of nonlinearity of inclusion of trajectory \mathbb{T} into components of vector column Ω , the derived problem of moments, naturally, will be nonlinear.

3. The Nonlinear Problem of Moments in One-Dimensional Case

Let us illustrate the derivation scheme of system (11) in the simplest one-dimensional case for a rod with constant parameters. Let the object of heating is a sufficiently thin homogeneous rod thermo-isolated at edges. Figure 1 shows the computational model simulating the influence of a point heat source on the rod. Then, the solution of the corresponding one-dimensional heat equation will satisfy the following boundary conditions (after rescaling all variables and functions)

$$\Theta(-1, t) = \Theta(1, t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

The control function (in this case the trajectory has only one component) must satisfy to restriction $|u(t)| < 1$ for all $t \in [0, T]$.

² As such a functional one may take, for instance

$$L[u, v, w] = \int_0^T \sqrt{\dot{u}^2(t) + \dot{v}^2(t) + \dot{w}^2(t)} dt,$$

which in our treatment characterizes the trajectory of the source.

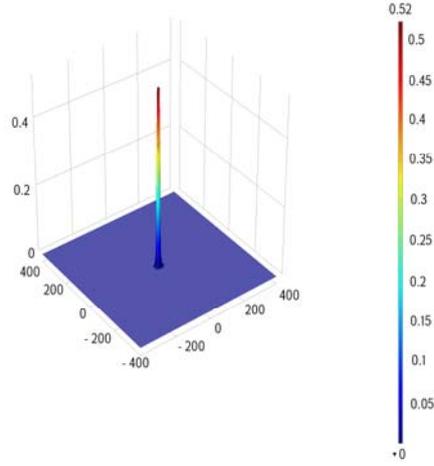


Figure 1. The computational form of a point source.

Initial and terminal data are given through the following functions

$$\Theta(x, 0) = \Theta_0(x), \quad \Theta(x, T) = \Theta_T(x), \quad x \in [-1, 1].$$

As system of ansatz functions in this case we may consider, for instance, the system of trigonometric sines $\{\sin(\pi m x)\}_{m \in \mathbb{N}}$ obviously satisfying prescribed boundary conditions.

Then

$$\mathcal{K}_m^\mu = -\chi(\pi m)^2 \int_{-1}^1 \sin(\pi m x) \sin(\pi \mu x) dx = -\chi(\pi m)^2 \delta_m^\mu,$$

$$\Omega_\mu(t) = \frac{p(t)}{c_p \rho} \int_{-1}^1 \delta(x - u(t)) \sin(\pi \mu x) dx = \frac{p(t)}{c_p \rho} \sin(\pi \mu u(t)), \quad p \in \mathcal{P}.$$

Instead of coupled system (6), (7) now for unknowns $\omega_\mu(t)$ we shall derive the following independent system of Cauchy problems

$$\omega_\mu'(t) + \chi(\pi \mu)^2 \omega_\mu(t) = \Omega_\mu(t), \quad (12)$$

$$\omega_\mu(0) = \Theta_{0\mu}, \quad (13)$$

$$\mu \in \{1; N\},$$

in which $\Theta_{0\mu}$ are the coefficients of the expansion of initial data with respect to chosen ansatz functions. The general solution of system (12), (13) reads as

$$\omega_\mu(t) = \left[\Theta_{0\mu} + \int_0^t \exp[\chi(\pi \mu)^2 \tau] \Omega_\mu(\tau) d\tau \right] \exp[-\chi(\pi \mu)^2 t], \quad \mu \in \{1; N\}. \quad (14)$$

Force this function to satisfy to expansion of terminal condition with respect to chosen ansatz functions, we will arrive at

$$\int_0^T \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 \tau\right] \Omega_\mu(\tau) d\tau = \Theta_{T\mu} \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 T\right] - \Theta_{0\mu}, \quad \mu \in \{1; N\},$$

which coincides with corresponding moment equalities from [2–6, 9, 12].

After determination of required trajectory $u(t)$ from that system, the approximating solution of corresponding one-dimensional problem will be

$$\Theta_N(x, t) = \sum_{\mu=1}^N \left[\Theta_{0\mu} + \int_0^t \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 \tau\right] \Omega_\mu(\tau) d\tau \right] \exp\left[-\chi(\pi\mu)^2 t\right] \sin(\pi\mu x),$$

$$(x, t) \in [-1, 1] \times [0, T]. \quad (15)$$

4. Example

Let the initial temperature distribution in the rod considered in the previous section is given as follows $\Theta(x, 0) = \sin(\pi x)$, $x \in [-1, 1]$, and we are required to heat the rod before some fixed T into a state

$$\Theta(x, T) = \begin{cases} \Theta_T = \text{const}, & x \in (-1, 1), \\ 0, & x = \pm 1. \end{cases}$$

The power of the source is constant: $p(\tau) = p_0 = \text{const}$. Let us first determine the coefficients of the expansion of initial and terminal functions into chosen ansatz functions. It is obvious that

$$\Theta_{0\mu} = \delta_\mu^1, \quad \Theta_{T\mu} = \frac{2\Theta_T}{\pi\mu} \left[1 - (-1)^\mu \right],$$

therefore from (14) we will have

$$\int_0^T \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 \tau\right] \sin(\pi\mu u(\tau)) d\tau = \mathcal{M}_\mu, \quad \mu \in \{1; N\}, \quad (16)$$

$$\mathcal{M}_\mu = \frac{c_p D}{p_0} \Theta_{T\mu} \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 T\right] - \frac{c_p D}{p_0} \delta_\mu^1, \quad \mu \in \{1; N\}.$$

It is quite easy to see that $\mathcal{M}_{2\mu} = 0$, $\mathcal{M}_\mu = O(\mu^{-1})$, $\mu \rightarrow \infty$. Figure 2 shows the discrete dependence $\mathcal{M}_\mu \leftrightarrow \mu$, $\mu \in \{1; 200\}$, which is almost the same for all values of parameters taken.

For determination of control function from (16), we will first use the algorithm for solving nonlinear problem of moments suggested in [6, 9]. Let us introduce the expression

$$\Lambda(l_1, l_2, \dots, l_N, u) = \int_0^T \max_u \lambda_N(l_1, l_2, \dots, l_N, \tau, u) d\tau, \quad |u(\tau)| < 1,$$

in which

$$\lambda_N(l_1, l_2, \dots, l_N, \tau, u) = \sum_{\mu=1}^N l_\mu \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 \tau\right] \sin(\pi\mu u(\tau))$$

$l_\mu, \mu \in \{1; N\}$, are undetermined multipliers, at this

$$\sum_{\mu=1}^N l_\mu^2 > 0.$$

Then, we calculate the derivative of expression $\lambda_N(l_1, l_2, \dots, l_N, \tau, u)$ with respect to u and find its roots. As a result we get

$$\frac{\partial \lambda_N}{\partial u} = \pi \sum_{\mu=1}^N \mu l_\mu \exp\left[\chi(\pi\mu)^2 \tau\right] \cos(\pi\mu u(\tau)) = 0.$$

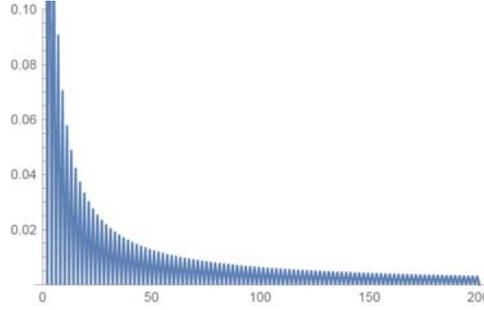


Figure 2. The discrete dependence $\mathcal{M}_\mu \leftrightarrow \mu$.

The analytical exact solution of derived functional equation for any $N \in \mathbb{N}$ is very hard to achieve. For fixed $N \in \mathbb{N}$ it can be done using the system of symbolic computation Wolfram Mathematica. It has the simplest form for $N = 2$:

$$u_{1,2}(\tau) = \pm \frac{1}{\pi} \arccos \left[\sqrt{\eta^2(\tau) + \frac{1}{2}} - \eta(\tau) \right],$$

$$u_{3,4}(\tau) = \pm \frac{1}{\pi} \arccos \left[-\sqrt{\eta^2(\tau) + \frac{1}{2}} - \eta(\tau) \right],$$

$$\tau \in [0, T],$$

$$\eta(\tau) = \frac{l_1}{8l_2} \exp[-3\chi\pi^2\tau] \geq -\frac{1}{4}, \quad \tau \in [0, T].$$

The last equality follows from the fact that the control trajectory must be real-valued. It is easy to see that the functional $\Lambda(l_1, l_2, u)$ does not satisfy condition of theorem 2 from [9] for all l_1, l_2 . In such cases according to [9] one is recommended to transform the moment equalities into the following ones

$$\int_0^T \exp[\chi\pi^2\tau] [\sin(\pi u(\tau)) - \gamma] d\tau = \mathcal{M}_1 - \gamma \frac{\exp[\chi\pi^2 T] - 1}{\chi\pi^2} := \mathcal{M}'_1,$$

$$\int_0^T \exp[\chi(2\pi)^2\tau] \sin(2\pi u(\tau)) d\tau = 0,$$

in which $\gamma = \text{const}$ is chosen in such a way that the new functional $\Lambda(l_1, l_2, u)$ becomes positive for all l_1, l_2 .

After some algebraic rearrangements, one can prove that

$$\text{sign} \frac{\partial^2 \lambda_2}{\partial u^2} = \mp \text{sign} \left[l_1 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{1}{2\eta^2}} \right) \right],$$

thus for $\text{sign} l_1 = 1$ we have

$$\begin{aligned} \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_1) &= \min_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \quad \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_4) = \min_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \\ \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_2) &= \max_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \quad \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_3) = \max_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \end{aligned}$$

and for $\text{sign} l_1 = -1$ –

$$\begin{aligned} \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_1) &= \max_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \quad \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_4) = \max_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \\ \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_2) &= \min_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u), \quad \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_3) = \min_u \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u). \end{aligned}$$

Moreover, it is easy to check that

$$\lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_1) = -\lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_2), \quad \lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_3) = -\lambda_2(l_1, l_2, \tau, u_4).$$

It is necessary and sufficient for solvability of system (16) fulfilment of [6, 9]

$$\min_{l_1, l_2} \Lambda(l_1, l_2, u) \geq 1, \quad \text{with} \quad l_1 \mathcal{M}'_1 + l_2 \mathcal{M}_2 = 1. \quad (17)$$

Since in our particular case $\mathcal{M}_2 = 0$, therefore l_1 is immediately defined. Substituting it into expression of $\Lambda(l_1, l_2, u)$, for solvability of problem of moments (16) we derive

$$\min_{l_2} \Lambda \left(\frac{1}{\mathcal{M}'_1}, l_2, u \right) \geq 1,$$

where l_2 may be computed from by efficient numerical methods of nonlinear programming [33]. If for some l_2^0 in the last inequality the equality sign takes place, then for almost every $\tau \in [0, T]$ the solution of (16) satisfies the following maximum condition [6, 9]

$$\lambda_2 \left(\frac{1}{\mathcal{M}'_1}, l_2^o, \tau, u^o \right) = \max_u \lambda_2 \left(\frac{1}{\mathcal{M}'_1}, l_2^o, \tau, u \right).$$

In order to define an initial approximation to start computing l_2^o one may use the restriction $4\eta(\tau) \geq -1$, $\tau \in [0, T]$, from where it follows that $l_2 \geq -\frac{\exp[-3\chi\pi^2 T]}{2\mathcal{M}'_1}$. Then, $-\frac{\exp[-3\chi\pi^2 T]}{2\mathcal{M}'_1}$ will be the required initial approximation for computing l_2^o .

Computations are done for various values of dimensionless parameters

$$\alpha^2 = \chi \frac{T_*}{l^2 T} \equiv \frac{\kappa}{c_p \rho} \frac{T_*}{l^2 T} \text{ and } p_0 = p_* \frac{\Theta_*}{lc_p \rho T},$$

in which l is the half-length of the rod, T_* is the prescribed heating time, p_* is the intensity of the source, and Θ_* is a scaling intensity for temperature distribution in the rod.

Figure 3 expresses the dependence $\Lambda(l_1, l_2, u^o) \leftrightarrow l_2$ for $\chi = 1.11 \cdot 10^{-4}$ m²/sec (copper) and $T = 2\pi$. In this case $l_2 = 0.088$, $\min_{l_2} \Lambda(l_1, l_2, u^o) = 3.97 > 1$. If for fixed γ , l_1 is positive, the minimum in (17) is attained with $u^o = u_4(t)$, otherwise — with $u^o = u_2(t)$, at this in both cases l_2^o is equal to its first approximation.

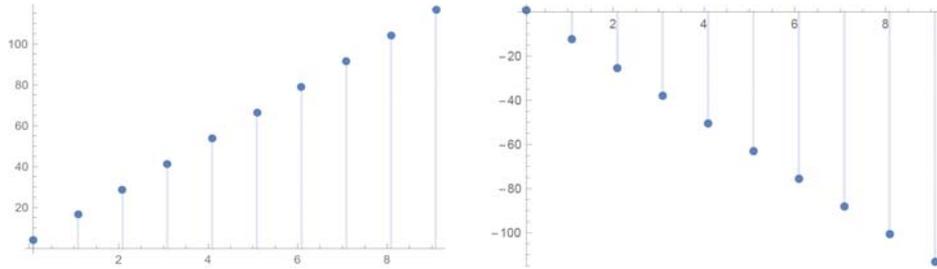


Figure 3. The dependence $\Lambda(l_1, l_2, u_4) \leftrightarrow l_2$ (left) and $\Lambda(l_1, l_2, u_1) \leftrightarrow l_2$ (right) for a rod made from copper: $\chi = 1.11 \cdot 10^{-4}$ m²/sec.

In order to reveal the sensitivity of control function with respect to other external and internal parameters of the system, we have computed the length of trajectory u^o for various combinations of those parameters. It turned out, that the control function is most sensitive with respect to rod length, at this for fixed length of the rod, the length of control trajectory does not sufficiently depend on rod material (computations are done for rods made from copper, aluminum, silver and steel, for which χ has almost the same order).

With increase (decay) of time T_* when the intensity of the source is fixed, the quantity $L[u_*]$ irregularly decreases (increases). It turned out as well that the numerical scheme of this algorithm requires high computational cost.

5. Numerics

On the basis of obtained results a computational experiment is set up, the main results of which are expressed graphically on Figures 4–11. The rod has length 2 m, and its cross sectional area (square) is equal to $1/40$ m². Physical characteristics of the rod are identical to those of copper. Figure 4 (left) shows the computational analogue of the rod, which is divided into 140 parts (elements), due to which its degrees of freedom (DOF) are equal to 4542 (2427 of them are internal). Figure 4 (right) shows so-called convergence plot, characterizing the reciprocal of the time step size versus the time step.

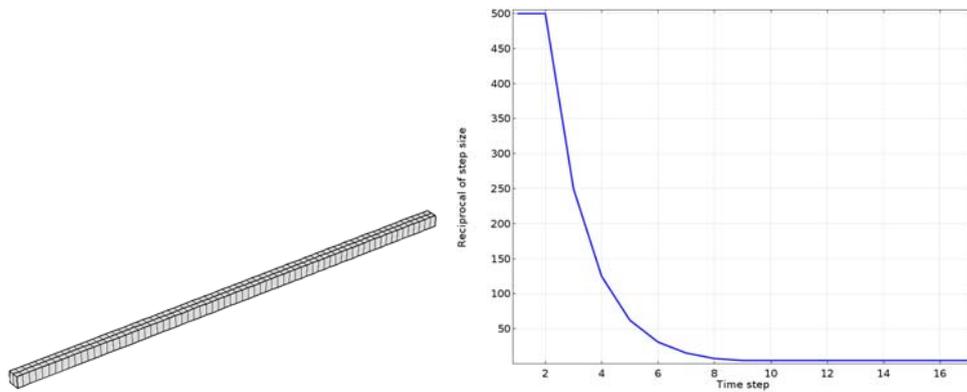


Figure 4. Computational analogue of the rod (left) and convergence plot (right).

On Figure 5 the temperature distribution along the rod length is plotted on fixed time moment $t_* = 250$ sec for four particular values of the source intensity P_* . Figure 6 shows the temperature distribution in spatial model of the rod for $p_* = 0$ and $t_* = 0$ (left), $t_* = 250$ sec (right). Figure 7 shows the temperature distribution in spatial model of the rod for $p_* = 7.5$ J/sec and $t_* = 0$ (left), $t_* = 250$ sec (right).

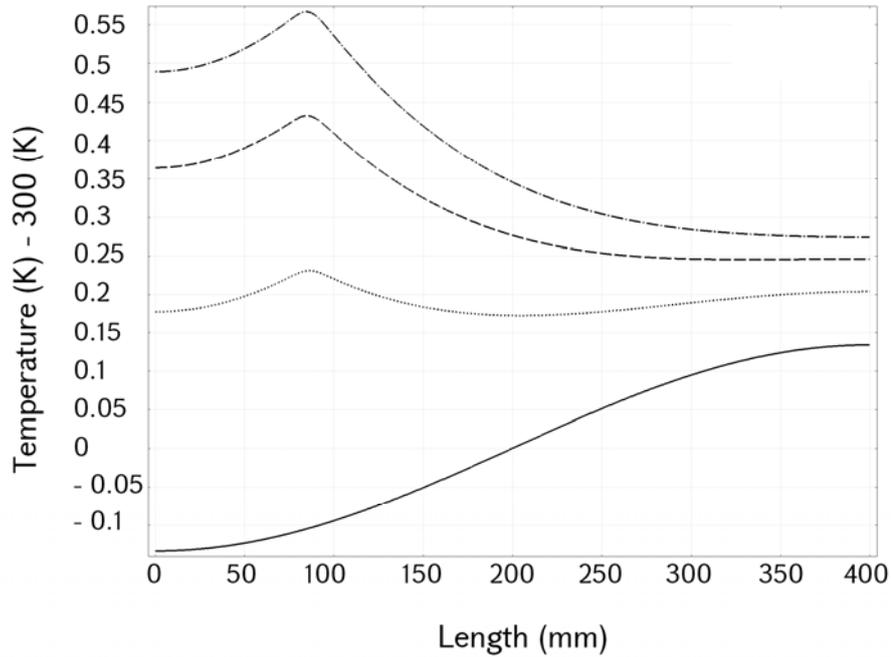


Figure 5. Temperature distribution along the rod length for $t_* = 250$ sec and different intensities of the source: $p_* = 0$ (solid line), $p_* = 7.5$ J/sec (dotted line), $p_* = 12$ J/sec (dashed line), $p_* = 15$ J/sec (dash-dot line).

On Figure 8 the temperature distribution along the rod length is plotted on fixed time moment $t_* = 350$ sec for four particular values of the source intensity p_* . Figure 9 shows the temperature distribution in spatial model of the rod for $p_* = 0$ (left), $p_* = 3$ J/sec (right). On Figure 10 the temperature distribution along the rod length is plotted on fixed time moment $t_* = 450$ sec for four particular values of the source intensity P_* . Figure 9 shows the temperature distribution in spatial model of the rod for $p_* = 0$ (left), $p_* = 1.4$ J/sec (right).

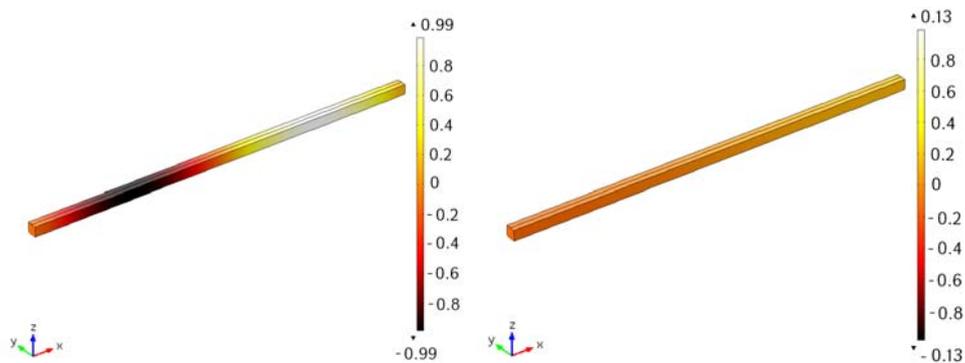


Figure 6. The state of the rod for $p_* = 0$ $t_* = 0$ (left) and $t_* = 250$ sec (right).

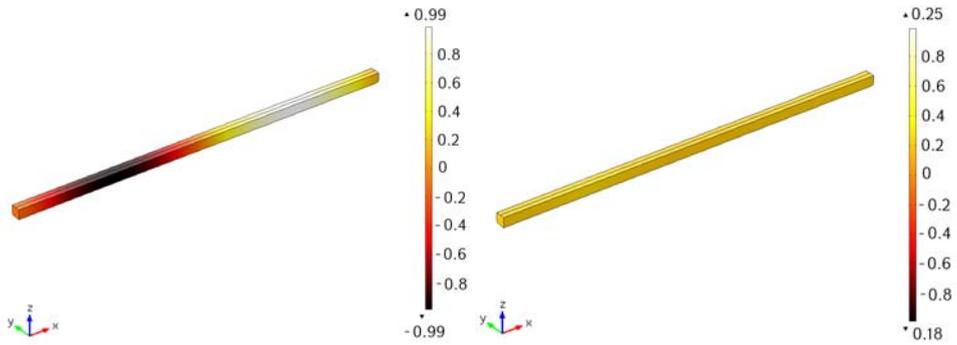


Figure 7. The state of the rod for $p_* = 7.5$ J/sec, $t_* = 0$ (left) and $t_* = 250$ sec (right).

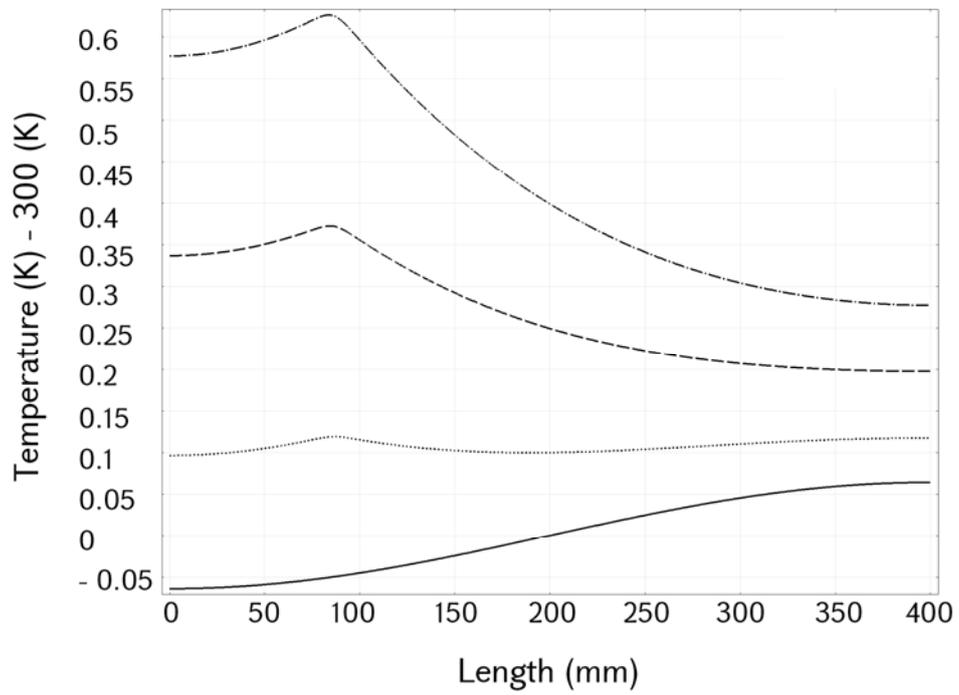


Figure 8. Temperature distribution along the rod length for $t_* = 350$ sec and different intensities of the source: $p_* = 0$ (solid line), $p_* = 3$ J/sec (dotted line), $p_* = 7.5$ J/sec (dashed line), $p_* = 12$ J/sec (dash-dot line).

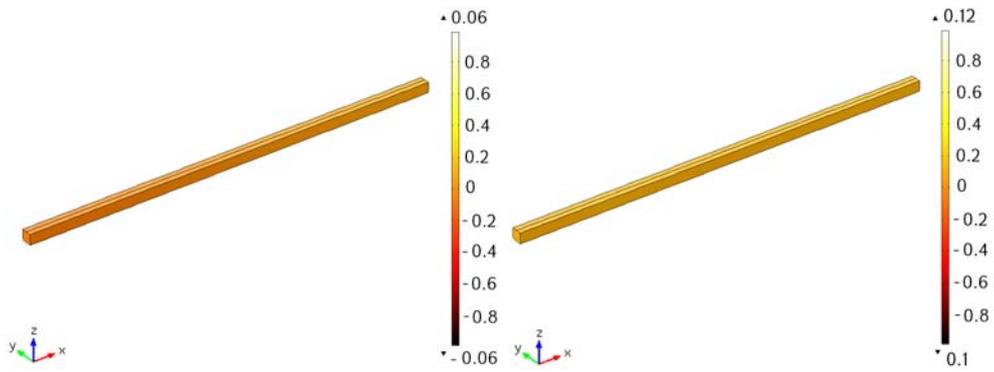


Figure 9. The state of the rod for $t_* = 350$ sec, $p_* = 0$ (left), $p_* = 3$ J/sec (right).

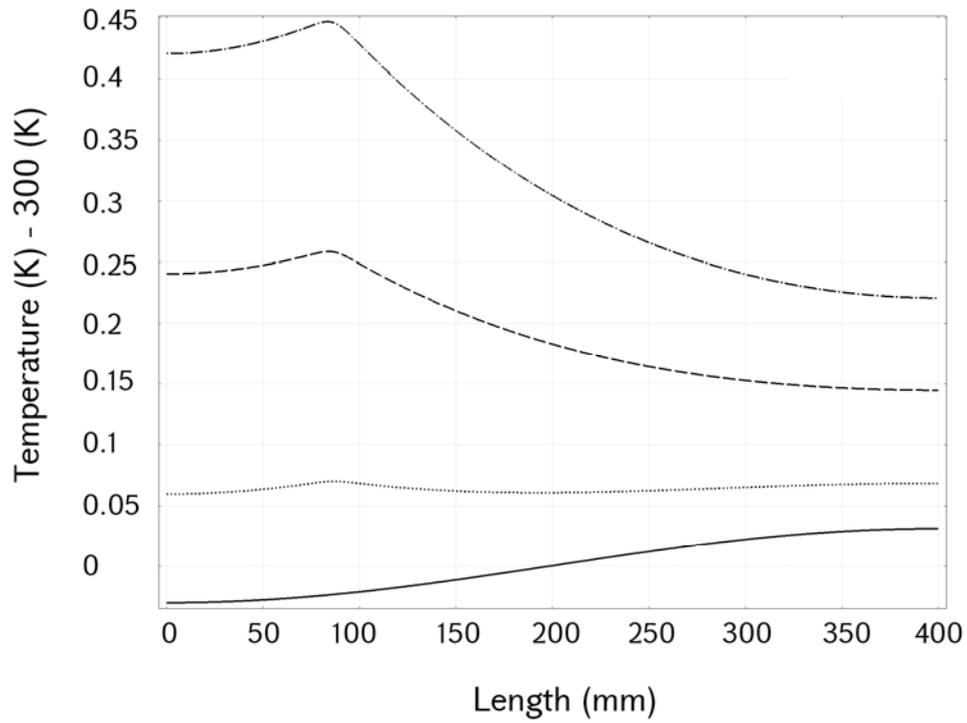


Figure 10. Temperature distribution along the rod length for $t_* = 450$ sec and different intensities of the source: $p_* = 0$ (solid line), $p_* = 1.4$ J/sec (dotted line), $p_* = 4.2$ J/sec (dashed line), $p_* = 7$ J/sec (dash-dot line).

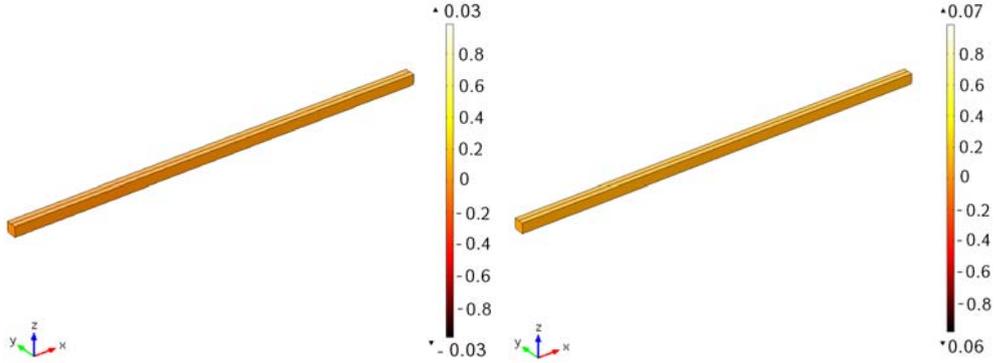


Figure 11. The state of the rod for $t_* = 450$ sec, $p_* = 0$ (left), $p_* = 1.4$ J/sec (right).

6. Introduction of Sliding Modes

As it was mentioned above, the realization of numerical scheme of the algorithm chosen for solving nonlinear problem of moments requires high computational costs. The situation gets even worse for large N ; the number of required operations, and therefore computational time, essentially increases. Besides, there is a wide class of initial and required heating regimes that are unreachable by piecewise-continuous trajectories of heat the source with prescribed intensity. However, it turns out [9], that it can be circumvented by extending the set of admissible controls including in it sliding modes. Let us extend the set of admissible controls to the set

$$\mathcal{U} = \{u \in L^1[0, T]; \text{supp } u \subseteq [0, T], |u| < 1\},$$

and to represent the trajectory of the source as a piecewise-constant function [20, 25, 27, 28, 34]

$$u(t) = \sum_{k=1}^M u_k [\theta(t - t_{k-1}) - \theta(t - t_k)], \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

uniquely defined through unknown parameters u_k and t_k , $k \in \{1; M\}$, which have to be found from the following system of equality type constraints

$$\frac{1}{\chi(\pi\mu)^2} \sum_{k=1}^M \left[\exp[\chi(\pi\mu)^2 t_k] - \exp[\alpha(\pi\mu)^2 t_{k-1}] \right] \sin(\pi\mu u_k) = \mathcal{M}_\mu, \quad (19)$$

$$\mu \in \{1; N\}.$$

This *finite dimensional discrete* system is obtained by substitution of (18) into (16). Note also, that in general the control (18) is discontinuous in switching points t_k , $k \in \{1; M\}$, where it has second order discontinuities.

The problem of computation of unknowns u_k and t_k , $k \in \{1; M\}$, now can be stated in terms of nonlinear programming, taking functional

$$L[u] = \sum_{k=1}^M |u_k|,$$

characterizing the length of required trajectory, as cost functional. To system of equality type constraints (19) one has to add the following restrictions of inequality type

$$|u_k| < 1, \quad 0 \leq t_{k-1} < t_k \leq T, \quad k \in \{1; M\}.$$

Opportunities of numerical minimization of Wolfram Mathematica 10 package allows to solve that problem very efficiently and without too much computational costs even for M and N large enough (using the built-in operators NMinimize, FindMinimum, NMinValue and FindMinValue). For solving this problem numerically with precision ε only $O(\varepsilon^{-1})$ operations are needed [33]. In Table 1 parameters of control function are presented for various combinations of ratio Θ_0/p_0 , coefficient α^2 and parameter T . For instance, when $\Theta_0/p_0 = -0.2$, $\alpha^2 = 4.7 \cdot 10^{-4}$, $T = 4\pi$, the control function takes the form

$$\begin{aligned} u(t) = & 0.99[\theta(t-0.) - \theta(t-2.81) + \theta(t-2.82) - \theta(t-12.55)] + \\ & + 0.43[\theta(t-12.55) - \theta(t-12.56)] + \\ & + 0.82[\theta(t-12.56) - \theta(t-4\pi)], \quad t \in [0, 4\pi]. \end{aligned}$$

The existence of solution to the problem is checked in traditional manners [33]. Corresponding restrictions obtained as a result will allow us to underline the boundary of application of suggested scheme.

Θ_0/p_0	$\alpha^2 \cdot 10^4$	T	u_k	t_k
0.25	3.86	2π	$u_1 = u_3 = u_5 = u_6 = 0.,$ $u_2 = 0.78, u_4 = 0.58$ $u_7 = 0.66$	$t_1 = t_2 = 0.41,$ $t_3 = t_4 = 0.62,$ $t_5 = 1.36, t_6 = 1.94$
-0.2	4.37	4π	$u_1 = 0., u_4 = 0.38,$ $u_6 = 0.43, u_7 = 0.82,$ $u_2 = u_3 = u_5 = 0.99$	$t_1 = 0., t_2 = 0.03,$ $t_3 = 2.81, t_4 = 2.82,$ $t_5 = 12.55, t_6 = 12.56$
0.5	1.38	4π	$u_2 = 0.76, u_3 = 0.15,$ $u_6 = 0.49, u_7 = 0.7,$ $u_1 = u_5 = u_6 = 0$	$t_1 = 0.24, t_2 = 0.41,$ $t_3 = 0.62, t_4 = 0.65,$ $t_5 = 1.27, t_6 = 1.92$

Table 1. Parameters of control function for $M=10$.

Besides providing an efficient numerical scheme, function (18) can be easily carried out in practice and has a simple physical interpretation; it characterizes piecewise-constant

trajectory for the source, namely in whole time-interval $[t_{k-1}, t_k]$ the source heats the point $x = u_k$ of the rod.

Conclusion

In this article we propose a new approximate algorithm for solving problems of mobile control for systems with distributed parameters. The algorithm is based on the Bubnov-Galerkin procedure and is set up on example of three-dimensional heat equation with parameters varying in time and spatial coordinates. Mathematical statement of the problem requires determination of a control function included in right-hand side of the governing equation in general nonlinearly. The Bubnov-Galerkin procedure allows to reduce the problem to a finite dimensional system of equality type constraints treated here as classical problem of moments. Numerical simulations done on the basis of obtained formulas for one-dimensional thin rod reveal the main dependences of control function from all other external and internal parameters of the system. A computational experiment is set up for thin rod made from copper, the main results of which are brought graphically.

It was observed that the method of solution chosen requires high computational costs and thus not efficient. In order to get an efficient numerical scheme the set of admissible controls is extended into set of Lebesgue measurable functions compactly supported in boundary of considered domain allowing to use sliding modes. The unknown function is represented as piecewise constant (discontinuous in general), the parameters of which are to be computed from a problem of nonlinear programming under equality and inequality type constraints.

One of the algorithm privileges is that it also can be applied for numerical solution of mobile control problems for *nonlinear* or other type of state equations (including integral, integro-differential, differential-difference etc.), equations with variable coefficients, particularly, for wave equation, for coupled systems of mentioned equations, and for sources of other forms as well. One of essential disadvantages of the method is its applicability only in the case of linear boundary conditions.

Acknowledgements. This problem was brought to our attention by associate professor S. Jilavyan (Yerevan State University) during one of our interesting scientific discussions. We highly appreciate him for that.

We acknowledge our colleagues from Institute of Numerical and Applied Mathematics, Muenster, Germany, in particular, Professor Benedikt Wirth, for valuable remarks and useful advices, which, by all means, increased the quality of the paper.

REFERENCES

1. Grigolyuk E.I., Podstrigach Ya.S., Burak Ya.I. Optimization of heating of shells and plates (in Russian). Kiev: Naukova Dumka, 1979.
2. Butkovskiy A.G., Methods of control of systems with distributed parameters (in Russian). Moscow: Nauka, 1975.
3. Butkovskiy A.G., Darinskiy Yu.V., Pustil'nikov L.M. Mobile control of distributed systems // Automation and Remote Control, 1976, vol.37, issue 2, pp.
4. Butkovskiy A.G., Pustil'nikov L.M. Mobile control of distributed parameter systems. Chichester, Ellis Horwood Limited, 1987.
5. Martin J.C. Optimal scanning control of parabolic systems // International Journal of Control, 1975, vol. 21, issue 2, pp. 305–317.

6. Kubyshkin V.A. On solutions of a finite dimensional nonlinear problem of moments for control // *Automation and Remote Control*, 1984, vol. 45, issue 3, pp. 298–308.
7. Butkovskiy A.G., Kubyshkin V.A., Tverdokhlebov Ye.S., Chubarov Ye.P. Implementation of distributed control functions with mobile control sources // *Automation and Remote Control*, 1983, vol. 44, issue 4, pp. 411–417.
8. Butkovskiy A.G., Kubyshkin V.A., Smirnov A.G., Tverdokhlebov Ye.S., Chubarov Ye.P. The substitution method for computation of distributed control functions // *Automation and Remote Control*, 1984, vol. 48, issue 9, pp. 1143–1151.
9. Kubyshkin V.A., Finyagina V.I. Moving control of systems with distributed parameters (in Russian). Moscow: SINTEG, 2005.
10. Finyagina V.I. The substitution method in solution of two-dimensional heating problem of bodies using mobile heat sources (in Russian) // *Problems of Controls*, 2010, issue 1, pp. 57–63.
11. Finyagina V.I. Multiple stage mobile controls in solution of two-dimensional heating problems of bodies // *Problems of Controls*, 2012, issue 1, pp. 47–54.
12. Butkovskiy A.G. Some problems of control of the distributed-parameter systems // *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, issue 6, pp. 1237–1241.
13. Kubyshkin V.A. Mobile control of vibrations ion systems with distributed parameters // *Automation and Remote Control*, 2011, vol. 72, issue 10, pp. 2112–2122.
14. Khapalov A.Yu. Controllability of the wave equation with moving control // *Applied Mathematics and Optimization*, 1995, vol. 31, pp. 155–175.
15. Martin Ph., Rosier L., Rouchon R. Null controllability of the structural damped wave equation with moving control // *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2013, vol. 51, issue 1, pp. 660–684.
16. Castro C., Cindea N., Münch A. Controllability of the linear one-dimensional wave equation with inner moving forces // *SIAM Journal of Control and Optimization*, 2014, vol. 52, issue 6, pp. 4027–4056.
17. Tao Q., Gao H., Yao Zh. Null controllability of a pseudo-parabolic equation with moving control // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014, vol. 418, issue 2, pp. 998–1005.
18. Mikhlin S.G. Variational methods in mathematical physics (in Russian). Moscow: Nauka, 1970.
19. Khurshudyan As.Zh. The Bubnov–Galerkin Method in control problems of bilinear systems // *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, issue 8, pp. 1361–1368.
20. Jilavyan S.H., Khurshudyan As.Zh., Sarkisyan A.S. On adhesive binding optimization of elastic homogeneous rod to a fixed rigid base as a control problem by coefficient // *A Quarterly of Polish Academy of Sciences. Archives of Control Sciences*, 2013, vol. 23 (LIX), № 4, pp. 413–425.
21. Khurshudyan As.Zh. On Optimal boundary control of non–homogeneous string vibrations under impulsive concentrated perturbations with delay in controls // *Math. Bulletin of T. Shevchenko Scientific Society*, 2013, vol.10, pp.203–209.
22. Khurshudyan As.Zh., Arakelyan Sh.Kh. Delaying control of nonhomogeneous string forced vibrations under mixed boundary conditions // *IEEE Proceedings on Control and Communication*, 2013, vol.10, pp.1–5.
23. Khurshudyan As.Zh. On optimal boundary and distributed control of partial integro–differential equations // *A Quarterly of Polish Academy of Sciences. Archives of Control Sciences*, 2014, vol. 24 (LX), №1, pp. 5–25.
24. Khurshudyan As.Zh. Generalized control with compact support of wave equation with variable coefficients // *International Journal of Dynamics and Control*, 2015, DOI: 10.1007/s40435-015-0148-3.

25. Khurshudyan As.Zh., Generalized control with compact support for systems with distributed parameters // A Quarterly of Polish Academy of Sciences, Archives of Control Sciences, 2015, vol. 25 (LXI), №1, pp. 5–20.
26. Khurshudyan Am.Zh., Khurshudyan As.Zh. Optimal distribution of viscoelastic dampers under elastic finite beam under moving load (in Russian) // Proceedings of NAS Armenia, Series Mechanics, 2014, vol. 64, issue 3, pp. 56–67.
27. Джилавян С.А., Хуршудян Ас.Ж. Оптимизация топологии упругого основания прямоугольной пластинки, подверженной воздействию подвижной нагрузки // Труды XII «Всероссийского совещания по проблемам управления», Москва: 2014, сс.1745–1756.
28. Khurshudyan As.Zh. On some problems of designs structural and topological optimization // Proceedings of International Conference «Advanced Problems in Mechanics». Institute for Problems in Mechanical Engineering. RAS. St. Petersburg, 2014, pp. 310–320.
29. Shilov G.E., Calculus. Second special course (in Russian). 2nd edition. Moscow: Moscow State University, 1984.
30. Kolyano Yu.M., Kulik A.N. Thermal stresses from volume sources (in Russian). Kiev: Naukova Dumka, 1983.
31. Muzychka Y.S., Yovanovich M.M. Thermal resistance models for non-circular moving heat sources on a half space // Transactions of the ASME. Journal of Heat Transfer, 2001, vol.123, № 4, pp.624–632.
32. Mikhlin S.G. Error analysis in numerical processes. New York: John Wiley & Sons, 1991.
33. Betts J.T. Practical methods of optimal control and estimation using nonlinear programming. 2nd ed. Philadelphia: SIAM, 2010.
34. Sarkisyan S.V., Jilavyan S.H., Khurshudyan As.Zh. Structural Optimization of an Inhomogeneous Infinite Layer in Problems on Propagation of Periodic Waves // Mechanics of Composite Materials, 2015, vol. 51, issue 3, pp. 277–284.

About authors:

Arakelyan Shant Khachatur – graduate student at Chair of Microwave Engineering and Telecommunications, Yerevan State University.

Address: 1 Alex Manoogian str., 0025 Yerevan.

Cell: +374 93 808–979

E-mail: shantaragelyan@gmail.com

Khurshudyan Asatur Zhora– graduate student at Chair of Mechanics, Yerevan State University.

Address: 1 Alex Manoogian str., 0025 Yerevan.

Cell: +374 99 420–713

E-mail: khurshudyan@ysu.am

Поступила в редакцию 20.01.2015

Բ Ո Վ Ա Ն Դ Ա Կ ՈՒ Թ Յ ՈՒ Ն

Գասպարյան Ա.Վ. Հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ կամայական վերջավոր թվով վերջավոր կամ կիսաանվերջ առաձգական շերտերից բաղկացած փաթեթի տեսքով կոմպոզիտի լարվածային վիճակը**3**

Ավետիսյան Ա.Ս., Բելուբեկյան Մ.Վ., Ղազարյան Կ.Բ. Պարբերական հենարաններով հեծանի կայունությունը**16**

Մարտիրոսյան Ք.Լ., Ղարբինյան Ա.Զ. Հոդակապորեն ամրակցված երկու հանդիպակաց կողմերով կիսաանվերջ սալի ծոման խնդրի մասին**22**

Սարգսյան Լ. Ս., Սարգսյան Ս. Հ. Էլեկտրահաղորդիչ (ոչ ֆերոմագնիսական) տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար բարակ հեծանների ծոման դեֆորմացիայի մագնիսաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելը**27**

Գրիգորյան Շ.Հ., Օհանյան Գ.Գ., Սահակյան Ս.Լ. Ճնշման ալիքի տարածումը փակ ջրանցքում, լցված պարբերաբար իրար հաջորդող զազահեղուկ խառնուրդ և զազ պարունակող խցաններով**46**

Առաքելյան Շ.Խ., Խուրշուդյան Ա.Ճ. Բուրնով-Գալյորկինի եղանակը բաշխված պարամետրերով համակարգերի շարժական ղեկավարման խնդիրներում**54**

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Гаспарян А.В. Напряжённое состояние композита в виде пакета из произвольного конечного числа конечных или полубесконечных упругих слоёв при антиплоской деформации**3**

Аветисян А.С., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Устойчивость балки с периодическими опорами**16**

Мартirosyan К.Л., Дарбинян А.З. Об одной задаче изгиба полубесконечной пластинки с двумя противоположными шарнирно-закреплёнными краями**22**

Саркисян Л. С., Саркисян С. О. Математическая модель изгибной деформации магнитоупругости микрополярных электропроводящих (неферромагнитных) тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений**27**

Григорян Ш.А., Оганян Г.Г., Саакян С.Л. Распространение волны давления в замкнутом канале, наполненном периодически чередующимися пробками газожидкостной смеси и газа**46**

Аракелян Ш.Х., Хуршудян Ас.Ж. Метод Бубнова–Галёркина в задачах подвижного управления системами с распределёнными параметрами**54**

C O N T E N T S

Gasparyan A.V. Stressed State of a Composite in a Form of Package Composed of an Arbitrary Finite Number of Finite or Semi-Infinite Elastic Layers under Anti-plane Deformation**3**

Avetisyan A.S., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Stability of a beam with periodic supports**16**

Martirosyan K.L., Darbinyan A.Z. The problem of bending semi-infinite plates with simply supported boundary conditions at two opposite edges**22**

Sargsyan L. S., Sargsyan S. H. Mathematical model of bending deformation of magnetoelasticity of micropolar electrically conductive (non ferromagnetic) thin bars with free fields of displacements and rotations**27**

Grigoryan Sh.A., Ohanyan G.G., Sahakyan S.L. The propagation of pressure wave in closed channel filed of periodic alternate corks with the gas–liquid mixture and gas**46**

Arakelyan Sh.Kh., Khurshudyan As.Zh. The Bubnov–Galerkin procedure in problems of mobile (scanning) control for systems with distributed parameters**54**