ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ

ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2008

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

ГРИГОРЕНКО ЯРОСЛАВ МИХАЙЛОВИЧ
(К 80-летию со дня рождения)

Исполнилось восемьдесят лет со дня рождения выдающегося ученого-механика, известного специалиста по теории оболочек и пластин, академика Национальной академии наук Украины Ярослава Михайловича Григоренко.

Я.М.Григоренко родился в г.Киеве. Будучи юношей, во время Второй мировой войны пережил серьезные испытания – был угнан на работы в Германию. Проявив смекалку и мужество, ему удалось бежать, затем добровольно ушел в армию и участвовал во многих боевых действиях. После семилетнего перерыва он продолжил учебу в школе, которую закончил с золотой медалью и поступил в Киевский государственный университет им. Т.Г.Шевченко в возрасте, когда многие заканчивают университет, а некоторые даже защищают диссертации. Окончив университет в 1955 году, он связывает свою научную и трудовую деятельность с Институтом механики НАН Украины, став одним из столпов Института. В 1970 г. защитил докторскую диссертацию, в 1978 г. был избран членом-корреспондентом, а в 1992 г. – действительным членом НАН Украины по специальности «Механика».

Я.М.Григоренко прошел путь от старшего инженера до заместителя директора Института по научной работе. Долгие годы руководил Отделом вычислительных методов, с 2005 г. – главный научный сотрудник Института.

Я.М.Григоренко является заместителем академика-секретаря отделения механики НАН Украины, членом многих Научных советов, лауреат Государственной премии УССР в области науки и техники (1979, 1986 гг.). В 1985 г. ему присуждена премия АН Украины им. М.К.Янгеля, а в 1996 г. – премия НАН Украины им. А.Н.Динника. Им подготовлено большое количество докторов и кандидатов наук.

Трудно представить современное состояние теории пластин и оболочек без фундаментальных работ Я.М.Григоренко. Он разработал весьма эффективный численно-аналитический метод расчета оболочек. Полученные им основополагающие результаты по коническим, анизотропным слоистым оболочкам со слоями переменной жесткости, оболочкам вращения, неоднородным и гибким оболочкам при широком спектре силовых и температурных воздействий, колебаниям и прочности оболочек – тому подтверждение. Результаты, полученные Я.М.Григоренко и его учениками, изложенные в 26 монографиях и нескольких сот научных статьях, существенно обогатили золотой фонд механики тонкостенных систем и широко используются в расчетах и проектировании новой техники.

На протяжении многих десятилетий Я.М.Григоренко поддерживает тесные научные контакты с учеными Армении, неоднократно выступал с интересными докладами на научных конференциях и симпозиумах в Армении, был официальным оппонентом по нескольким диссертационным работам из Армении.

Ярослав Михайлович Григоренко подкупает своим обаянием и чуткостью.

Ученые Армении и редакция журнала «Изв.НАН Армении. Механика» сердечно поздравляют дорогого Ярослава Михайловича Григоренко с юбилеем, желают крепкого здоровья, новых творческих успехов, всех благ.

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

О РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ

Агаян К.Л., Григорян Э.Х.

Ключевые слова: контакт, стрингер, интегральное уравнение, функциональное уравнение, бесконечная система.
Keywords: contact, stringer, integral equation, functional equation, infinite system.

Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան

Առաձգական ամրանով կիսահարթության կոնտակտային խնդրի լուծման մասին

Ֆուրյեի ձևափոխության և Վիներ-Հոֆի մեթոդի օգնությամբ, առաձգական վերադիրով ամրանավորված առաձգական կիսահարթության կոնտակտային խնդրի օրինակի վրա, որն ուսումնասիրված է [1]-ում, առաջարկվում է նոր մոտեցում վերջավոր ինտերվալի վրա սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման լուծման համար: Այն տրվում է աստիճանային շարքի և խնդրին բնորոշ եզակիությունները բնութագրող առանձին գումարելի գումարի տեսքով: Անհայտ գործակիցների որոշումը բերվում է պարզ, ռեգուլյար գծային անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի անհայտ կոնտակտային լարման ինտենսիվության Ֆուրյեի պատկերի մնացքների նկատմամբ:

K.L.Aghayan, E.Kh.Grigoryan

About Solution of Contact Problem for Semi-Plane with Elastic Stringer

The new approach to the solution of singular integro-differential equation in finite interval is showed at example of contact problem for elastic semi-plane [1] by Fourier transformation and Wiener-Hopf method. The solution is obtained in the form of power series with segregated singularities. The definition of coefficients is reduced to the system of regular infinite system of linear algebraic equations with simple structure in regard to residue of Fourier's transformant of unknown contact strains.

На примере контактной задачи для упругой полуплоскости с упругим креплением, решенной в [1], показан новый подход к решению сингулярного интегрального уравнения на конечном интервале при помощи преобразования Фурье и метода Винера-Хопфа. Решение получено в виде степенного ряда с отдельно выделенными особенностями. Определение коэффициентов разложения сведено к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений простой структуры относительно вычетов трансформанты Фурье неизвестных контактных напряжений.

Исследованию контактного взаимодействия между тонкостенными элементами типа упругих накладок (крепление, стрингер) или включений, различных геометрических форм с более массивными телами посвящены многочисленные работы. Коротко остановимся на работах, которые прямым образом связаны с известной работой Н.Х. Арутюняна [1], где в рамках известной модели Мелана [2] исследуется контактная задача о передаче нагрузки от крепления (накладки) конечной длины и постоянной толщины к упругой полуплоскости.

Первая работа, по-видимому, принадлежит Бенскотеру [3], в которой изучается поле напряжений в бесконечной пластине с упругим креплением конечной длины. Исходное интегро-дифференциальное уравнение здесь решено численно для двух случаев, когда на концах накладки сосредоточенные силы направлены в одну сторону и в противоположные стороны. Буфлер в [4] рассмотрел контактную задачу для полуплоскости (или полной плоскости), когда вдоль конечного отрезка ее свободной поверхности (или, соответственно, внутри плоскости) припаяна упругая накладка постоянного поперечного сечения. При различных видах нагружения и температурного воздействия получено приближенное решение исходного интегро-дифференциального уравнения. В статье В.М. Толкачева [5] ребро конечной длины и постоянного сечения прикреплено по всей длине к бесконечной пластине или к границе полубесконечной пластины. Здесь решение интегро-дифференциального уравнения получено путем обращения сингулярной части, и последующим использованием тригонометрических рядов решение задачи сведено к регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

В 1968г. Н.Х. Арутюняном [1] вновь была рассмотрена контактная задача для полуплоскости, когда на ее свободной поверхности приклеено крепление (накладка) конечной длины и постоянной толщины. Решение определяющего интегро-дифференциального уравнения, после обращения сингулярного интеграла, построено при помощи степенного ряда. Представляя решение в виде суммы своих четной и нечетной частей, решение задачи сведено к двум регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения степенных рядов. В итоге получено изящное решение поставленной задачи, содержащее в явном виде особенности, характеризующие контактные напряжения около концевых точек накладки. Отметим, что работа [1] послужила своеобразным стимулом для дальнейшего развития этой области контактных и смешанных задач теории упругости, подтверждением чего является большое количество опубликованных работ в этой области.

В последствии, примерно одновременно, были опубликованы исследования [6,7,8], в которых методом ортогональных многочленов Чебышева решения рассмотренных в [1,3] задач сведены к регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений более простой структуры.

В работах [9,10] рассмотрены контактные задачи для двух полубесконечных балок и полубесконечных накладок, находящихся на границе упругой полуплоскости. Решение этих задач методом Винера-Хопфа сведено к решению бесконечных систем линейных уравнений простой структуры относительно вычетов трансформанты Фурье интенсивности неизвестного контактного напряжения и построено решение в виде степенных рядов по этим же коэффициентам–вычетам.

В предлагаемой работе вновь рассматривается задача для полуплоскости с упругой накладкой конечной длины [1]. Здесь, как и в работах [9,10], нам удалось построить решение задачи в виде степенных рядов, содержащих в явном виде особенности, которые характеризуют напряжения в окрестности концов упругой накладки. При этом, ядра полученных бесконечных систем имеют весьма простую структуру.

1. Рассмотрим плоскую контактную задачу о передаче нагрузки от накладки конечной длины к упругой полуплоскости [1]. На конечном отрезке $[-a,a]$ свободной границы упругой полуплоскости приклеена упругая накладка (стрингер) постоянной толщины h, на правом конце которой приложена осевая растягивающая сила P. При известных предположениях относительно накладки [1,2] задача определения неизвестных контактных касательных напряжений, возникающих в зоне контакта, сводится к решению следующего сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши [1]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\tau(s)}{s-x}ds=\lambda^{*}\left[P-\int_{x}^{a}\tau(s)ds\right],\quad -a<x<a, \tag{1.1}$$

при условии равновесия накладки:

$$\int_{-a}^{a}\tau(x)dx=P. \tag{1.2}$$

Здесь $\tau(x)$–подлежащее определению контактное напряжение, действующее под накладкой,

$$\lambda^* = E_2 / 2\left(1-\nu_2^2\right) h E_1 \ . \tag{1.3}$$

E_1 – модуль упругости материала накладки, h – ее толщина, E_2 – модуль упругости материала полуплоскости, ν_2 – коэффициент Пуассона.

Для решения сингулярного интегрального уравнения (1.1) функцию $\tau(x)$ представим в виде суммы своих четной и нечетной частей [1]:

$$\begin{gathered} \tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x), \\ \tau_1(-x) = -\tau_1(x), \quad \tau_2(x) = \tau_2(-x), \end{gathered} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.1) и (1.2) и отделяя четные и нечетные части, приходим к следующим сингулярным интегральным уравнениям ($\vartheta(x)$ – функция Хевисайда):

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a \left[\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x}\right]\tau_2(s)ds = \lambda^* \int_0^a \vartheta(x-s)\tau_2(s)ds, \quad 0 < x < a, \tag{1.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a \left[\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x}\right]\tau_1(s)ds = \lambda^* \left[\frac{P}{2} - \int_0^a \vartheta(s-x)\tau_1(s)ds\right], \tag{1.6}$$

с условием

$$\int_0^a \tau_2(s)ds = P/2 \, . \tag{1.7}$$

Таким образом, задача сводится к решению сингулярных интегральных уравнений (1.5) и (1.6) с условием (1.7).

Для решения полученных интегральных уравнений произведем в (1.5)-(1.7) замену переменных $s = ae^u, x = ae^{\mathrm{v}}$ и рассмотрим их и при $0 < \mathrm{v} < \infty$. В итоге получим

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{1-e^{\mathrm{v}-u}} - \frac{1}{1+e^{\mathrm{v}-u}}\right] q_2^-(u)du = \\ = \lambda\vartheta(-\mathrm{v})\int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{v}-u) q_2^-(u)e^u du + g_2^+(\mathrm{v}) \qquad (-\infty < \mathrm{v} < \infty), \end{gathered} \tag{1.8}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{1-e^{\mathrm{v}-u}} + \frac{1}{1+e^{\mathrm{v}-u}}\right] q_1^-(u)du = \\ = \lambda\vartheta(-\mathrm{v})\left[\frac{P}{2a} - \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta(u-\mathrm{v}) q_1^-(u)e^u du\right] + g_1^+(\mathrm{v}) \quad (-\infty < \mathrm{v} < \infty), \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} q_2^-(u)e^u du = P/2a, \quad \lambda = \lambda^* a \, , \tag{1.10}$$

где

$$\begin{gathered} \tau_j\left(ae^u\right) = q_j(u), \qquad q_j^-(u) = \vartheta(-u) q_j(u), \\ g_j^+(\mathrm{v}) = \vartheta(\mathrm{v}) g_j(\mathrm{v}), \quad g_j(\mathrm{v}) = \left[\frac{\mu}{1-\nu}\frac{du_2^{(j)}(x,0)}{dx}\right]\Bigg|_{x=ae^{\mathrm{v}}} \qquad (j=1,2), \end{gathered} \tag{1.11}$$

$u_2(x,0)$– перемещение граничных точек полуплоскости, а $u_2^{(2)}(x,0)$ и $u_2^{(1)}(x,0)$ – ее четные и нечетные части, соответственно.

Применив теперь к (1.8) и (1.9) комплексное преобразование Фурье, после некоторых выкладок приходим к следующим функционально-разностным уравнениям:

$$\mathrm{th}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\overline{q}_2^-(\alpha)+\lambda\frac{\overline{q}_2^-(\alpha-i)}{\alpha}=\lambda\frac{\overline{q}_2^-(-i)}{\alpha}+i\overline{g}_2^+(\alpha)\quad(-1<\mathrm{Im}\,\alpha<0),\tag{1.12}$$

$$\mathrm{cth}\frac{\pi\alpha}{2}\cdot\overline{q}_1^-(\alpha)+\lambda\frac{\overline{q}_1^-(\alpha-i)}{\alpha}=\lambda\frac{P}{2a\cdot\alpha}+i\overline{g}_1^+(\alpha),\tag{1.13}$$

где

$$\overline{q}_j^-(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}q_j^-(\alpha)e^{i\alpha u}du,\qquad \overline{g}_j^+(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}g_j^+(\alpha)e^{i\alpha u}du \qquad (j=1,2)\tag{1.14}$$

$\alpha=\sigma+i\tau,$

$\overline{q}_j^-(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha<0$, а $\overline{g}_j^+(\alpha)$ – при $\mathrm{Im}\,\alpha>-1$, поскольку $q_1^-(u)=O(1)$, $g_j^+(u)=O(e^{-u})$ при $|u|\to\infty$. Кроме того, так как $\tau_j(ax)$ и $g_j(ax)$ имеют порядок $(1-x)^{-1/2}$ при $x\to 1$ [11,1], то

$$\overline{q}_j^-(\alpha)\sim\alpha^{-1/2},\quad \overline{g}_j^+(\alpha)\sim\alpha^{-1/2},\quad (j=1,2)\tag{1.15}$$

при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности.

Заметим еще, что из (1.10) и (1.14) следует

$$\overline{q}_2^-(-i)=P/2a\,.\tag{1.16}$$

2. Решения функционально-разностных уравнений (1.12) и (1.13) построим методом Винера-Хопфа [12]. Для этого исследуем аналитические свойства функций $\overline{q}_j^-(\alpha)$ $(j=1,2)$ в области $\mathrm{Im}\,\alpha\geq 0$ [9,10].

Сначала рассмотрим уравнение (1.12). Как было отмечено, $\overline{q}_2^-(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha<0$, а $\overline{g}_2^+(\alpha)$ – при $\mathrm{Im}\,\alpha>-1$. Исследуем полюса функции $\overline{q}_2^-(\alpha)$, рассматривая ее аналитическое продолжение в дополнении к области $\mathrm{Im}\,\alpha<0$. Так как, согласно (1.16), $\overline{q}_2^-(-i)$ конечна, $\overline{g}_2^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha>-1$ и $\mathrm{th}(\pi\alpha/2)=0$ при $\alpha=0$, то из (1.12) следует, что точка $\alpha=0$ может быть простым полюсом для $\overline{q}_2^-(\alpha)$. Следовательно, $\alpha=i$ может быть простым полюсом для $\overline{q}_2^-(\alpha-i)$. Тогда, поскольку $\alpha=i$ является простым полюсом для $\mathrm{th}(\pi\alpha/2)$, а $\overline{g}_2^+(i)$ конечна, то опять из (1.12) следует, что $\overline{q}_2^-(i)$ конечна. Теперь, поскольку $\overline{q}_2^-(i)$ и $\overline{g}_2^+(2i)$ конечны, а $\mathrm{th}(\pi\alpha/2)=0$ при $\alpha=2i$, то точка $\alpha=2i$ может быть простым полюсом для $\overline{q}_2^-(\alpha)$. Далее рассмотрим точку $\alpha=3i$. В этой точке $\overline{g}_2^+(3i)$ конечна, $\mathrm{th}(\pi\alpha/2)$ имеет простой полюс, а $\overline{q}_2^-(\alpha-i)$ может иметь простой полюс. Тогда из (1.12) следует, что $\overline{q}_2^-(3i)$ конечна. Продолжая эти рассуждения, нетрудно убедиться, что полюсами функции $\bar{q}_2^-(\alpha)$ могут быть только точки $\alpha = 2ni \ \ (n = 0,1,2,...)$ и, притом, простыми.

Перейдем теперь к решению функционального уравнения (1.12). Для этого факторизуем $\mathrm{th}(\pi\alpha/2)$, представив ее в виде:

$$th(\pi\alpha/2) = \bar{K}_2(\alpha) = \bar{K}_2^-(\alpha)\cdot \bar{K}_2^+(\alpha), \tag{2.1}$$

$$\bar{K}_2^-(\alpha) = \frac{\alpha\Gamma\left(\frac{1}{2}+i\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(1+i\frac{\alpha}{2}\right)}, \qquad \bar{K}_2^+(\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-i\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(1-i\frac{\alpha}{2}\right)}, \tag{2.2}$$

$\Gamma(\alpha)$– известная гамма-функция Эйлера.

Очевидно, что $\bar{K}_2^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\alpha > -1$ и там не имеет нулей, а $\bar{K}_2^-(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\alpha < 0$ и там не имеет нулей. Кроме того, из (2.2) следует, что $\bar{K}_2^+(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\bar{K}_2^-(\alpha) = O(\alpha^{1/2})$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Подставляя (2.1) в (1.12), получим уравнение

$$\bar{K}_2^-(\alpha)\bar{q}_2^-(\alpha) + \frac{\lambda\bar{q}_2^-(\alpha - i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} - \frac{\lambda\bar{q}_2^-(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} = i\,\frac{\bar{g}_2^+(\alpha)}{\bar{K}_2^+(\alpha)}, \ \ (-1 < \mathrm{Im}\alpha < 0), \tag{2.3}$$

которое, в свою очередь, представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{L}_2^-(\alpha) = \bar{K}_2^-(\alpha)\bar{q}_2^-(\alpha) + \lambda\bar{\phi}_2^-(\alpha) - \lambda\bar{F}_2^-(\alpha) = \lambda\bar{F}_2^+(\alpha) - \lambda\bar{\phi}_2^+(\alpha) - \\ - i\bar{g}_2^+(\alpha)/\bar{K}_2^+(\alpha) = \bar{L}_2^+(\alpha), \qquad (-1 < \mathrm{Im}\,\alpha < 0), \end{aligned} \tag{2.4}$$

где

$$\bar{F}_2^-(\alpha) = \frac{\bar{q}_2(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(0)}, \qquad \bar{F}_2^+(\alpha) = \frac{\bar{q}_2(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} - \frac{\bar{q}_2^-(-i)}{\alpha\bar{K}_2^+(0)}, \tag{2.5}$$

$$\bar{\phi}_2(\alpha) = \frac{\bar{q}_2^-(\alpha - i)}{\alpha\bar{K}_2^+(\alpha)} = \bar{\phi}_2^+(\alpha) + \bar{\phi}_2^-(\alpha). \tag{2.6}$$

Здесь $\bar{F}_2^+(\alpha)$ и $\bar{\phi}_2^+(\alpha)$ регулярны при $\mathrm{Im}(\alpha) > -1$, а $\bar{F}_2^-(\alpha)$ и $\bar{\phi}_2^-(\alpha)$ регулярны при $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$. При этом:

$$\bar{\phi}_2^-(\alpha) = \int_{-\infty}^{0} \bar{\phi}_2(u) e^{i\alpha u} du, \qquad \mathrm{Im}\alpha < 0, \tag{2.7}$$

$$\bar{\phi}_1^+(\alpha) = \int_{0}^{\infty} \bar{\phi}_2(u) e^{i\alpha u} du, \qquad \mathrm{Im}\alpha > -1, \tag{2.8}$$

$$\phi_2(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty} \bar{\phi}_2(\alpha) e^{-i\alpha u} d\alpha, \qquad -1 < \tau < 0. \tag{2.9}$$

Как было отмечено, $\bar{K}_2^+(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\bar{q}_2^-(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности. Тогда из (2.6) следует, что $\bar{\phi}_2(\sigma) = O(|\sigma|^{-1})$ при

$|\sigma| \to \infty$. Следовательно, из (2.9) следует, что $\overline{\phi}_2(u) = O(\ln|u|)$ при $|u| \to 0$. Тогда из (2.7) и (2.8) следует, что $\overline{\phi}_2^{\pm}(\alpha) = O(\alpha^{-1}\ln\alpha)$ при $|\alpha| \to \infty$ в своих областях регулярности.

Имея эти оценки, из уравнения (2.4), с учетом асимптотических поведений присутствующих функций при $|\alpha| \to \infty$, получим, что $\overline{L}_2^-(\alpha) = O(1)$ при $|\alpha| \to \infty$, $\mathrm{Im}(\alpha) < 0$ и $\overline{L}_2^+(\alpha) = O(1)$ при $|\alpha| \to \infty$, $\mathrm{Im}(\alpha) > -1$. Тогда, согласно теореме об аналитическом продолжении и теореме Лиювилля, из (2.4) получим

$$\overline{K}_2^-(\alpha)\overline{q}_2^-(\alpha) + \lambda\overline{\phi}_2^-(\alpha) - \lambda\overline{F}_2^-(\alpha) = a_2, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha < 0, \tag{2.10}$$

$$\lambda\overline{F}_2^+(\alpha) - \lambda\overline{\phi}_2^+(\alpha) - i\overline{g}_2^+(\alpha)/K_2^+(\alpha) = a_2, \qquad \mathrm{Im}\,\alpha > -1, \tag{2.11}$$

где a_2 – неизвестная постоянная, подлежащая определению из условия равновесия накладки (1.16).

С другой стороны, из представления (2.6) и из сказанного выше о возможных полюсах $\overline{q}_2^-(\alpha)$ следует, что точки $\alpha = 0$, $\alpha = (2n-1)i$ $(n = 1,2,...)$ могут быть простыми полюсами для $\overline{\phi}_2(\alpha)$. Поскольку $\overline{\phi}_2^+(\alpha)$ регулярна при $\mathrm{Im}\,\alpha > -1$, то $\overline{\phi}_2^-(\alpha)$ можно представить в виде разложения на простейшие дроби [13]:

$$\overline{\phi}_2^-(\alpha) = \frac{\overline{q}_2^-(-i)}{\alpha\overline{K}_2^+(0)} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{iA_{-1}^{(2n)}}{(2n+1)(\alpha - i(2n+1))\overline{K}_2^+(2ni)}, \tag{2.12}$$

где

$$A_{-1}^{(2n)} = \lim_{\alpha\to(2n+1)i}(\alpha - i(2n+1))\overline{q}_2^-(\alpha - i) = \lim_{\alpha\to 2ni}(\alpha - 2ni)\overline{q}_2^-(\alpha). \tag{2.13}$$

Подставляя (2.12) в (2.10), с учетом (2.5) получим

$$\overline{q}_2^-(\alpha) = \frac{i\lambda}{\overline{K}_2^-(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n)}}{(2n+1)(\alpha - i(2n+1))\overline{K}_2^+(2ni)} + \frac{a_2}{\overline{K}_2^-(\alpha)}. \tag{2.14}$$

Теперь, имея в виду, что $A_{-1}^{(2m)}$ представляет вычет функции $\overline{q}_2^-(\alpha)$ в точках $\alpha = 2mi(m = 0,1,2,...)$, из (2.13) и (2.14) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения $A_{-1}^{(2n)}(n = 0,1,2,...)$:

$$\mathrm{X}_m^{(2)} + \frac{\lambda}{4}\beta_m^{(2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(2)}}{(n+1/2)(n-m+1/2)} = \beta_m^{(2)}, \tag{2.15}$$

$$A_{-1}^{(2m)} = a_2\overline{K}_2^+(i(2m+1))\mathrm{X}_m^{(2)}, \qquad m = 0,1,2,... \tag{2.16}$$

$$\beta_m^{(2)} = \frac{1}{2m+1}\left[\frac{(2m+1)!!}{2^m \cdot m!}\right]^2 = \left(1 + \frac{1}{4m^2}\right)\beta_{m-1}^{(2)}, \qquad m = 1,2,...$$

$$\beta_0^{(2)} = 1, \quad \beta_m^{(2)} = O(1), \text{при} \quad m \to \infty. \tag{2.17}$$

Таким образом, решение функционального уравнения (1.12) свелось к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (2.15) простой структуры.

Регулярность бесконечной системы (2.15) следует из легко проверяемого равенства

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1/2)|n-m+1/2|}=\begin{cases}\pi^2/2, & m=0\\ \dfrac{3}{m}\left[\psi(m+1/2)-\psi(1/2)\right], & m=1,2,...\end{cases} \qquad (2.18)$$

где $\psi(z)$–известная пси-функция.

Имея решение (2.15), при помощи (2.16), (2.14) и (1.16) получим значение a_2 в виде

$$ia_2=\frac{P}{a\sqrt{2\pi}}\left[1-\frac{\lambda}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X_n^{(2)}}{(2n+1)(n+1)}\right]^{-1}. \qquad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.14), после обратного преобразования Фурье для определения неизвестных контактных напряжений $\tau_2(x)$ получим следующую формулу:

$$\tau_2(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{ia_2\cdot a}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{i\sqrt{2}a_2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1/2)}{\beta_m^{(2)}\Gamma(m+1)}\left[X_m^{(2)}-\beta_m^{(2)}\right]\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} \qquad (2.20)$$

$$(0\le x<a),$$

где $X_m^{(2)}(m=0,1,2,...)$– решение бесконечной системы (2.15), а a_2 определяется из (2.19).

Отметим, что при получении (2.20) использовано значение интеграла

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-ic-\infty}^{-ic+\infty}\frac{\Gamma(i\alpha-i\alpha_0)}{\Gamma(i\alpha)}e^{-i\alpha u}d\alpha=\vartheta(-u)\frac{e^{-i\alpha_0 u}\left(1-e^{u}\right)^{i\alpha_0-1}}{\Gamma(i\alpha_0)},\quad -1<c<0. \qquad (2.21)$$

Из (2.15) и (2.18) следует

$$\left(X_m^{(2)}-\beta_m^{(2)}\right)=O\left(m^{-1}\ln m\right),\qquad m\to\infty. \qquad (2.22)$$

Следовательно, ряд в (2.20) равномерно сходится при $0\le x\le a$, т.е. особенность $\tau_2(x)$ дается только первым слагаемым.

При $\lambda=0$ (жесткая накладка) $X_m^{(2)}=\beta_m^{(2)}(m=0,1,2,...)$. Тогда из (2.19) и (2.20) получим известное решение

$$\tau_2(x)=P\big/\pi\sqrt{a^2-x^2}. \qquad (2.23)$$

3. Рассмотрим теперь функционально-разностное уравнение (1.13), где $\overline{q}_1^-(\alpha)$ регулярна при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\overline{g}_1^+(\alpha)$– при $\operatorname{Im}\alpha>-1$.

Факторизуя $\operatorname{cth}(\pi\alpha/2)$

$$\operatorname{cth}(\pi\alpha/2)=\overline{K}_1(\alpha)=\overline{K}_1^-(\alpha)\cdot\overline{K}_1^+(\alpha), \qquad (3.1)$$

функциональное уравнение (1.13) представим в виде:

$$\overline{L}_1^-(\alpha)=\overline{K}_1^-(\alpha)\overline{q}_1^-(\alpha)+\lambda\overline{\phi}_1^+(\alpha)-\frac{\lambda P}{2a}\overline{F}_1^-(\alpha)=\frac{i\overline{g}_1^+(\alpha)}{\overline{K}_1^+(\alpha)}+$$
$$+\frac{\lambda P}{2a}\overline{F}_1^+(\alpha)-\lambda\overline{\phi}_1^+(\alpha)=\overline{L}_1^+(\alpha),\qquad(-1<\operatorname{Im}\alpha<0), \qquad (3.2)$$

где

$$\overline{K}_1^-(\alpha)=\left[\overline{K}_2^-(\alpha)\right]^{-1},\qquad \overline{K}_1^+(\alpha)=\left[\overline{K}_2^+(\alpha)\right]^{-1}. \qquad (3.3)$$

$$\overline{F}_1^-(\alpha)=\frac{1}{\alpha\overline{K}_1^+(0)},\quad \overline{F}_1^+(\alpha)=\frac{1}{\alpha\overline{K}_1^+(\alpha)}-\frac{1}{\alpha\overline{K}_1^+(0)},\tag{3.4}$$

$$\overline{\Phi}_1(\alpha)=\frac{\overline{q}_1^-(\alpha-i)}{\alpha\overline{K}_1^+(\alpha)}=\overline{\phi}_1^+(\alpha)+\overline{\phi}_1^-(\alpha),\tag{3.5}$$

а $\overline{K}_2^\pm(\alpha)$ даются при помощи (2.2).

Здесь $\overline{K}_1^-(\alpha)$, $\overline{F}_1^-(\alpha)$, $\overline{\phi}_1^-(\alpha)$ регулярны при $\operatorname{Im}\alpha<0$, а $\overline{K}_1^+(\alpha)$, $\overline{F}_1^+(\alpha)$, $\overline{\phi}_1^+(\alpha)$– при $\operatorname{Im}\alpha>-1$. При этом, из (2.2) и (3.3) следует, что $\overline{K}_1^\pm(\alpha)=0\left(\alpha^{\pm 1/2}\right)$ при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности. Тогда из (1.15) и (3.5) следует, что $\overline{\phi}_1(\sigma)=O\left((\sigma|\sigma|)^{-1}\right)$ при $|\sigma|\to\infty$. Опираясь на свойства интегралов Фурье, из аналогичных представлений (2.7)-(2.9) для $\overline{\phi}_1^{\,\pm}(\alpha)$ получим

$$\overline{\phi}_1^\pm(\alpha)=\mp\frac{A}{i\alpha}+O\left(\alpha^{-2}\ln\alpha\right)\tag{3.6}$$

при $|\alpha|\to\infty$ в своих областях регулярности, где

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{i\tau-\infty}^{i\tau+\infty}\overline{\phi}_1(\alpha)d\alpha,\qquad -1<\tau<0.\tag{3.7}$$

Имея в виду (3.6) и сказанное выше об асимптотических поведениях, входящих в (3.2) функций, получим, что $\overline{L}_1^-(\alpha)=O\left(\alpha^{-1}\right)$ при $|\alpha|\to\infty,\ \operatorname{Im}\alpha<0$ и $\overline{L}_1^+(\alpha)=O\left(\alpha^{-1}\right)$ – при $|\alpha|\to\infty,\ \operatorname{Im}\alpha>-1$. Следовательно, опять из теорем об аналитическом продолжении и Лиювилля получим, что в (3.2) $\overline{L}_1^+(\alpha)=\overline{L}_2^-(\alpha)\equiv 0$. Тогда для $\overline{q}_1^-(\alpha)$ получим:

$$\overline{q}_1^-(\alpha)=-\frac{\lambda\overline{\phi}_1^-(\alpha)}{\overline{K}_1^-(\alpha)}+\frac{\lambda P}{2a}\frac{1}{\overline{K}_1^+(0)\alpha\overline{K}_1^-(\alpha)},\quad \operatorname{Im}\alpha<0.\tag{3.8}$$

Обратимся теперь к $\overline{\phi}_1^-(\alpha)$ из (3.5). Аналогичными рассуждениями, как это делалось относительно $\overline{q}_2^-(\alpha)$, при помощи (1.13) нетрудно убедиться, что полюсами аналитического продолжения $\overline{q}_1^-(\alpha)$ в области $\operatorname{Im}\alpha\ge 0$ могут быть только точки $\alpha=(2n-1)i,\ n=1,2,3,\ldots$, притом простыми. Тогда из (3.5) следует, что точки $\alpha=2ni(n=0,1,2,\ldots)$ могут быть простыми полюсами для аналитического продолжения $\overline{\phi}_1^-(\alpha)$ и ее можно представить в виде разложения на простейшие дроби [13]

$$\overline{\phi}_1^-(\alpha)=\frac{\overline{q}_1^-(-i)}{\alpha\overline{K}_1^+(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{-1}^{(2n-1)}}{2ni(\alpha-2ni)K_1^+(2ni)},\tag{3.9}$$

$$A_{-1}^{(2n-1)}=\text{Выч}\,\overline{q}_1^-(\alpha-i)\Big|_{\alpha=2ni}=\lim_{\alpha\to(2n-1)i}\overline{q}_1^-(\alpha),\quad n=1,2,\ldots\tag{3.10}$$

Подставляя (3.9) в (3.8) и учитывая (3.10), после некоторых выкладок для определения $A_{-1}^{(2n-1)}(n=1,2,...)$ приходим к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\mathrm{X}_m^{(1)}+\frac{\lambda}{4}\beta_m^{(1)}\sum\frac{\mathrm{X}_n^{(1)}}{n(n-m+1/2)}=\frac{\lambda}{2m-1}\beta_m^{(1)},\quad m=1,2,... \tag{3.11}$$

$$\beta_m^{(1)}=\frac{1}{2m}\left[\frac{(2m-1)!!}{2^{m-1}(m-1)!}\right]^2=\left(1+\frac{1}{4m(m-1)}\right)\beta_{m-1},\qquad m=2,3,...$$

$$\beta_1^{(1)}=1/2,\qquad \beta_m^{(1)}=O(1),\qquad m\to\infty \tag{3.12}$$

$$A_{-1}^{(2m-1)}=ia_1\overline{K}_1^{+}(2mi)\mathrm{X}_m^{(1)},\qquad m=1,2,... \tag{3.13}$$

Постоянная a_1 определяется при помощи (3.8) и имеет вид

$$a_1=\frac{P}{a}\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(1)}}{n(2n+1)}\right]^{-1}. \tag{3.14}$$

Регулярность бесконечной системы (3.12) следует из равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n|n-m+1/2|}=\frac{2}{2m-1}\left[2\psi(m)+\psi\left(m+\frac{1}{2}\right)-2\psi\left(\frac{1}{2}\right)+\gamma\right] \tag{3.15}$$

$$(m=1,2,...),$$

где $\gamma=0.5772...$ – постоянная Эйлера, $\psi(z)$– функция-пси.

Имея решение $\left\{\mathrm{X}_m^{(1)}\right\}_{m=1}^{\infty}$ системы (3.11), при помощи (3.8), (3.9), (3.13) и (3.14) получим решение функционального уравнения (1.13) $\overline{q}_1^{-}(\alpha)$. После чего, при помощи обратного преобразования Фурье определим распределение контактного напряжения $\tau_1(x)$. Не останавливаясь на этих выкладках, приведем ее окончательное выражение

$$\tau_1(x)=\lambda\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c_0x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{a_1}{\beta_m^{(1)}}\mathrm{X}_m^{(1)}+\frac{\lambda c_0}{2m-1}\right]\overline{K}_1^{+}((2m-1)i)\left(\frac{x}{a}\right)^{2m-1}$$

$$(0\le x<1), \tag{3.16}$$

где

$$c_0=1-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{X}_n^{(1)}}{n}. \tag{3.17}$$

$\mathrm{X}_m^{(1)}(m=0,1,2,...)$– решение бесконечной системы (3.11), а a_1 определяется из (3.14).

Исходя из (3.6) и (3.8), можно показать, что

$$\left[\frac{a_1}{\beta_m^{(1)}}\mathrm{X}_m^{(1)}+\frac{\lambda c_0}{2m-1}\right]=O(m^{-2}\ln m),\quad m\to\infty \tag{3.18}$$

Тогда, из (3.3) и (3.18) следует, что ряд в (3.16) равномерно сходится при $0\le x\le a$, т.е. особенность $\tau_1(x)$ дается первым слагаемым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. Вып.4. С.632-646.
2. Melan E. Ein eitrag zur Theorie geschwesster Verbindungen. –Ingenieur –Archiv. 1932. Bd3. Hef 2. s123-129.
3. Benscoter S.U. Analysis of single stiffener on an infinite sheet. // J.Appl. Mech. 1949. Vol.16. №3. P.242-246.
4. Bufler H. Scheibe mit endlichaer elastischer Vesteifang. VDI –Forshungsh. 1961. №485. S.41.
5. Толкачев В.М. Передача нагрузки от стрингера конечной длины к бесконечной и полубесконечной пластине. //Докл. АН СССР. 1964. Т.154. №4. С.806-808.
6. Морарь Г.А., Попов Г.Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением. //ПММ. 1970. Т.34. №3. С.412-421.
7. Arutunyan N.Kh., Mkhitaryan S.M. Some contact problems for a semi-plane with elastic stiffeners.-Trends in elasticity and thermoelasticity (W. Novacki Anniversary Volume). Groningen, Wolters-Noordhoff publ. 1971.
8. Эрдоган Ф., Гупта Г. Задача о полуплоскости с упругой накладкой. // Прикл. Мех. Тр.Амер. о-ва инж.-мех. Сер.Е. 1971. Т.34. №4.
9. Григорян Э.Х. Изгиб двух полубесконечных балок, лежащих на границе упругой полуплоскости. // Изв.НАН Армении. Механика. 1993. Т.46. №3-4. С.20–30.
10. Григорян Э.Х. О решении контактной задачи для упругой полуплоскости, граница которой усилена двумя полубесконечными накладками. Ереван: Межвуз. сб. науч. трудов. Механика. Изд ЕГУ. 1991. №8.
11. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. //Quart. J. Mech. And Appl. Math. 1955. 8. №2.
12. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: 1962. 278с.
13. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: Физматгиз. 1961.

Инситтут механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
16.05.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3, 624.04

ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Баблоян А.А., Багдасарян А.В.

Ключевые слова: прямоугольник, ослабленный, трещина, напряжение, перемещение.
Key words: rectangular, weakened, crack, tension, displacement.

Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ. Բաղդասարյան.
Ուղղահայաց ճաքով թուլացված ուղղանկյան ճկվածքը

Բերվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդրի լուծումը կենտրոնական տեղակայված ճաքով թուլացված ուղղանկյան համար: Ուղղանկյան հորիզոնական կողմերի վրա և ճաքի ափերին տրվում են լարումներ: Ուղղահայաց կողմերի վրա տրվում են երեք տիպի եզրային պայմաններ:

A.H. Babloyan, A.V. Baghdasaryan
The bending of rectangular weakened by a vertical crack

The solution of a problem of elasticity theory for rectangular weakened by a centrally located vertical crack is brought. On the horizontal sides of the rectangular and on the crack faces the stresses are given. On the vertical sides of the rectangular three types of boundary conditions are given.

Приводится решение задачи теории упругости для прямоугольника, ослабленного центрально расположенной вертикальной трещиной. На горизонтальных сторонах прямоугольника и на берегах трещины задаются напряжения. На боковых сторонах прямоугольника задаются три типа граничных условий.
1) Боковые стороны жестко защемлены.
2) На боковых сторонах заданы внешние нагрузки.
3) На боковых сторонах заданы неоднородные условия типа симметрии.
Все задачи решаются методом Фурье и, в конечном итоге, сведены к решению вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости для прямоугольника с размерами $2l \times h$, ослабленного вертикальной наружной трещиной. На горизонтальных сторонах прямоугольника и на берегах трещины заданы внешние усилия. На боковых сторонах задаются три типа граничных условий, как упомянуто в аннотации. Внешние усилия расположены симметрично относительно оси *oy*, поэтому задачи решаются только для половины основной области, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$u(0,y)=0, \quad \tau_{xy}(0,y)=0, \quad (c \le y \le h) \tag{1}$$

Граничные условия на горизонтальных сторонах прямоугольника и на берегах трещины имеют вид:

$$\begin{gathered}\sigma_y(x,l)=f_1(x), \quad \sigma_y(x,h)=f_2(x), \\ \tau_{xy}(x,0)=\tau_{xy}(x,h)=0, \quad \sigma_x(0,y)=\tau_{xy}(0,y)=0, \quad (0 \le y \le c).\end{gathered} \tag{2}$$

На боковых сторонах прямоугольника задаются следующие граничные условия:

задача 1 – $$u(l,y)=\chi(0.5h-y), \quad v(l,y)=0, \quad (0 \le y \le h) \tag{3}$$

задача 2 – $$\sigma_x(0,y)=f_0(y), \quad \tau_{xy}(l,y)=g(y) \tag{4}$$

задача 3 – $$\tau_{xy}(l,y)=g(y), \quad Eu(l,y)=u_0+\chi y \tag{5}$$

где χ – угол поворота боковой стороны, c – высота трещины.

Задачи решаются при помощи бигармонической функции Эйри. При этом имеем [1, 2].

$$\sigma_x(x,y)=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2},\sigma_y(x,y)=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2},\tau_{xy}(x,y)=\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x\partial y},$$

$$Eu(x,y)=\int\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial y^2}dx-\nu\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+c_1y+a_1,\quad \Delta\Delta\Phi(x,y)=0,$$

$$Ev(x,y)=\int\frac{\partial^2\Phi(x,y)}{\partial x^2}dx-\nu\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}-c_1x+b_1. \tag{6}$$

Для правой части области бигармоническую функцию ищем в виде:

$$\Phi\left(x,y\right)=a_0x^2+b_0y^2+\frac{2}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(y)\cos(\alpha_kx)+\frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\psi_p(x)\cos(\beta_py),$$

$$\varphi_k(y)=A1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_ky)+B1_k\,\mathrm{ch}(\alpha_ky)+\alpha_ky[C1_k\,\mathrm{ch}(\alpha_ky)+D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_ky)], \tag{7}$$

$$\psi_p(x)=A2_p\,\mathrm{sh}(\beta_px)+B2_p\,\mathrm{ch}(\beta_px)+\beta_px[C2_p\,\mathrm{ch}(\beta_px)+D2_p\,\mathrm{sh}(\beta_px)].$$

Постоянные α_k и β_p выбираем следующим образом: для задачи 1 $\alpha_k=\pi(2k-l)/(2l), \beta_p=p\pi/h$, для задач 2 и 3 $\alpha_k=k\pi/l, \beta_p=p\pi/h$.

1^0. *<u>Задача 1.</u>* Удовлетворяя нескольким граничным условиям, получим

$$A2_p+C2_p=0,\quad A1_k+C1_k=0,$$

$$(B1_k+D1_k+hC1_k\alpha_k)\,\mathrm{sh}(\alpha_kh)+(A1_k+C1_k+hD1_k\alpha_k)\,\mathrm{ch}(\alpha_kh)=0,$$

$$[(1+\nu)B2_p+2D2_p+l(1+\nu)C2_p\beta_p]\,\mathrm{ch}(\beta_pl)+ \tag{1.1}$$

$$+[(1+\nu)A2_p+2C2_p+l(1+\nu)D2_p\beta_p]\,\mathrm{sh}(\beta_pl)=0.$$

Теперь введем новые неизвестные по формулам

$$X2_p=\beta_p{}^2[C2_p\,\mathrm{sh}(\beta_pl)+D2_p\,\mathrm{ch}(\beta_pl)],\quad Y2_p=\beta_p{}^2C2_p,$$

$$X1_k=\alpha_k{}^2\left(C1_k[1+\mathrm{ch}(\alpha_kh)]+D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_kh)\right), \tag{1.2}$$

$$Y1_k=\alpha_k{}^2\left(C1_k[\mathrm{ch}(\alpha_kh)-1]+D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_kh)\right).$$

Решая восемь уравнений (1.1) и (1.2), старые неизвестные выразим новыми, при этом, для функций $\varphi_k(y)$ и $\psi_p(x)$ получим

$$\varphi_k(y)=-\frac{Y1_k\left(\mathrm{sh}[\alpha_k(h-y)]+\mathrm{sh}(\alpha_ky)\right)}{2\alpha_k{}^2[\mathrm{ch}(\alpha_kh)-1]}-$$

$$-\frac{Y1_k\alpha_k\left(y\,\mathrm{ch}[\alpha_k(h-y)]+(h-y)\,\mathrm{ch}(\alpha_ky)\right)}{2\alpha_k{}^2[\mathrm{ch}(\alpha_kh)-1]}+$$

$$+\frac{X1_k\left[\mathrm{sh}[\alpha_k(h-y)]-\mathrm{sh}(\alpha_ky)+\alpha_k\left(y\,\mathrm{ch}[\alpha_k(h-y)]+(y-h)\,\mathrm{ch}(\alpha_ky)\right)\right]}{2\alpha_k{}^2[\mathrm{ch}(\alpha_kh)+1]},$$

$$\psi_p(x)=\frac{Y2_p\left(\mathrm{sh}[\beta_p(2l-x)]-\mathrm{sh}(\beta_px)\right)}{2\beta_p{}^2\,\mathrm{ch}^2(\beta_pl)}+$$

$$+\frac{Y2_p\left(x\beta_p \operatorname{ch}[\beta_p(2l-x)]-(2l-x)\beta_p \operatorname{ch}(\beta_p x)\right)}{2\beta_p^{\,2}\operatorname{ch}^2(\beta_p l)}+$$
$$+\frac{X2_p\left(-2\operatorname{ch}(\beta_p x)+(1+\nu)\beta_p[x\operatorname{sh}(\beta_p x)-l\operatorname{ch}(\beta_p x)\operatorname{th}(\beta_p l)]\right)}{(1+\nu)\beta_p^{\,2}\operatorname{ch}(\beta_p l)}. \tag{1.3}$$

Удовлетворяя остальным несмешанным граничным условиям, для определения новых неизвестных получим три бесконечные системы:

$$\frac{X1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h)-\alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h)+1}+\frac{8}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\left[\frac{Y2_p\alpha_k^{\,2}\beta_p}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}+\frac{(-1)^k X2_p\alpha_k(\alpha_k^{\,2}\nu-\beta_p^{\,2})}{(1+\nu)(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}\right]=$$
$$=f2_k-f1_k,$$
$$\frac{Y1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h)+\alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h)-1}-\frac{8}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\left[\frac{Y2_p\alpha_k^{\,2}\beta_p}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}+\frac{(-1)^k X2_p\alpha_k(\alpha_k^{\,2}\nu-\beta_p^{\,2})}{(1+\nu)(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}\right]=$$
$$=f1_k+f2_k-\frac{4a_0(-1)^{-1+k}}{\alpha_k},$$
$$\frac{2[-1+(-1)^p](\chi+c_1)}{\beta_p}+\frac{X2_p[(3-\nu)\operatorname{sh}(2\beta_p l)-2l(1+\nu)\beta_p]}{\operatorname{ch}^2(\beta_p l)}+$$
$$+\frac{4\beta_p}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(X1_k[-1+(-1)^p]+Y1_k[1+(-1)^p]\right)(-\nu\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}+ \tag{1.4}$$
$$+\frac{Y2_p[4\operatorname{ch}(\beta_p l)+2l(1+\nu)\operatorname{sh}(\beta_p l)\beta_p]}{\operatorname{ch}^2(\beta_p l)}=0.$$

Удовлетворяя смешанным граничным условиям на линии $x=0$, для $Y2_p$ получим парные уравнения по тригонометрическим функциям

$$a_1+yc_1+\frac{4}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y2_p\cos(\beta_p y)}{\beta_p}=0,\quad (0\le y\le c),$$
$$2b_0+\frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\left[\left(-(1-N_p)Y2_p+M_pX2_p+W_p\right)\cos(\beta_p y)\right]=0,\quad (c\le y\le h), \tag{1.5}$$

где

$$M_p=\frac{2+(1+\nu)\beta_p l\operatorname{th}(\beta_p l)}{(1+\nu)\operatorname{ch}(\beta_p l)},\quad N_p=1-\frac{\operatorname{sh}(\beta_p l)-\beta_p l\operatorname{sech}(\beta_p l)}{\operatorname{ch}(\beta_p l)},$$
$$W_p=\frac{2\beta_p^{\,2}}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(X1_k[-1+(-1)^p]+Y1_k[1+(-1)^p]\right)\alpha_k}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2}. \tag{1.6}$$

Решение парных уравнений приведено в параграфе 4.

2^0. *<u>Задача 2.</u>* Из части граничных условий имеем:

$$A2_p+C2_p=0,\quad A1_k+C1_k=0,$$
$$(B1_k+D1_k+hC1_k\alpha_k)\operatorname{sh}(\alpha_k h)+(A1_k+C1_k+hD1_k\alpha_k)\operatorname{ch}(\alpha_k h)=0,$$

$$\beta_p^{\,2}[\mathrm{sh}(\beta_p l)(B2_p + D2_p + lC2_p\beta_p) + \mathrm{ch}(\beta_p l)(A2_p + C2_p + lD2_p\beta_p)] = g_p. \quad (2.1)$$

Введем новые неизвестные

$$\begin{aligned}
X2_p &= \beta_p^{\,2}\left(C2_p[-1+\mathrm{ch}(\beta_p l)] + D2_p\,\mathrm{sh}(\beta_p l)\right),\\
Y2_p &= \beta_p^{\,2}\left(C2_p[-1-\mathrm{ch}(\beta_p l)] - D2_p\,\mathrm{sh}(\beta_p l)\right),\\
X1_k &= \alpha_k^{\,2}\left(C1_k[-1+\mathrm{ch}(\alpha_k h)] + D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_k h)\right),\\
Y1_k &= \alpha_k^{\,2}\left(C1_k[-1-\mathrm{ch}(\alpha_k h)] - D1_k\,\mathrm{sh}(\alpha_k h)\right), \qquad (2.2)\\
X2_p &= (Z2_p + T2_p)/2, \quad Y2_p = (Z2_p - T2_p)/2.
\end{aligned}$$

Решая восемь уравнений (2.1) и (2.2) и подставляя в (7), для функций $\varphi_k(y)$ и $\psi_p(x)$ получаем

$$\varphi_k(y) = -\frac{Y1_k\left(\mathrm{sh}[\alpha_k(h-y)] - \mathrm{sh}(\alpha_k y)\right)}{2\alpha_k^{\,2}[\mathrm{ch}(\alpha_k h)+1]} -$$

$$-\frac{Y1_k\alpha_k\left(y\,\mathrm{ch}[\alpha_k(h-y)] - (h-y)\,\mathrm{ch}(\alpha_k y)\right)}{2\alpha_k^{\,2}[\mathrm{ch}(\alpha_k h)+1]} -$$

$$-\frac{X1_k\left[\mathrm{sh}[\alpha_k(h-y)] + \mathrm{sh}(\alpha_k y) + \alpha_k\left(y\,\mathrm{ch}[\alpha_k(h-y)] + (h-y)\,\mathrm{ch}(\alpha_k y)\right)\right]}{2\alpha_k^{\,2}[\mathrm{ch}(\alpha_k h)-1]},$$

$$\begin{aligned}
\psi_p(x) &= \frac{\mathrm{ch}(\beta_p x)g_p}{\beta_p^{\,2}\,\mathrm{sh}(\beta_p l)} + \frac{T2_p\left(\beta_p x\,\mathrm{sh}(\beta_p x) - \mathrm{ch}(\beta_p x)[1+\beta_p l\,\mathrm{cth}(\beta_p l)]\right)}{2\beta_p^{\,2}\,\mathrm{sh}(\beta_p l)} - \\
&-\frac{Z2_p\left(\mathrm{ch}[\beta_p(l-x)] + \beta_p l\,\mathrm{ch}(\beta_p x)\,\mathrm{csch}(\beta_p l) + \beta_p x\,\mathrm{sh}[\beta_p(l-x)]\right)}{2\beta_p^{\,2}\,\mathrm{sh}(\beta_p l)}. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Удовлетворяя остальным несмешанным граничным условиям, для новых неизвестных получаются три бесконечные системы.

$$\frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\left(\frac{[(-1)^k T2_p + Z2_p]\alpha_k^{\,2}}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2} + \frac{(-1)^k g_p}{\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2}}\right) + \frac{X1_k[\mathrm{sh}(\alpha_k h) + \alpha_k h]}{\mathrm{ch}(\alpha_k h) - 1} =$$

$$= f1_k + f2_k, \quad \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{[(-1)^k T2_p + Z2_p]\alpha_k^{\,2}}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2} + \frac{(-1)^k g_p}{\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2}}\right) +$$

$$+\frac{Y1_k[\mathrm{sh}(\alpha_k h) - \alpha_k h]}{\mathrm{ch}(\alpha_k h) + 1} = f1_k - f2_k, \quad 4a_0 l + \frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 + f2_0,$$

$$\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{[X1_k + (-1)^p(X1_k - Y1_k) + Y1_k]\alpha_k\beta_p^{\,2}}{(\alpha_k^{\,2}+\beta_p^{\,2})^2} + T2_p\frac{\mathrm{sh}(2\beta_p l) + 2\beta_p l}{2\,\mathrm{sh}(\beta_p l)^2} +$$

$$+Z2_p\frac{\mathrm{sh}(\beta_p l) + \beta_p l\,\mathrm{ch}(\beta_p l)}{\mathrm{sh}(\beta_p l)^2} = 2f0_p + 2g_p\,\mathrm{cth}(\beta_p l),$$

$$2b_0 h = f0_0, \quad \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 - f2_0. \tag{2.4}$$

Последнее соотношение является условием равновесия статики для внешних сил $\sum Y = 0$.

Из смешанных граничных условий получаем парные уравнения

$$\begin{aligned} & a_1 + yc_1 - \frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z2_p\cos(\beta_p y)}{\beta_p} = 0, \quad (c \le y \le h) \\ & 2b_0 + \frac{1}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\big((1+N_p)Z2_p + M_p T2_p + W_p\big)\cos(\beta_p y)\Big] = 0, \quad (0 \le y \le c) \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$\begin{aligned} & M_p = \frac{\operatorname{sh}(\beta_p l) + \beta_p l\operatorname{ch}(\beta_p l)}{\operatorname{sh}^2(\beta_p l)}, \quad N_p = \frac{\operatorname{sh}(2\beta_p l) + 2\beta_p l}{2\operatorname{sh}^2(\beta_p l)} - 1 \\ & W_p = \frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\big(X1_k + (-1)^p(X1_k - Y1_k) + Y1_k\big)\alpha_k\beta_p^{\,2}}{(\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2})^2} - 2g_p\operatorname{csch}(\beta_p l) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Решение парных уравнений приведено в параграфе 4.

3[0]. *Задача 3.* В этой задаче из некоторых граничных условий получаем соотношения (2.1). Введем еще новые неизвестные (2.2).

Здесь функция $\varphi_k(y)$ выражается первой формулой (2.3), а $\psi_p(x)$ примет вид:

$$\begin{aligned} \psi_p(x) = {} & \frac{Z2_p\big(\operatorname{ch}[\beta_p(l-x)] + l\beta_p\operatorname{ch}(\beta_p x)\operatorname{csch}(\beta_p l) + x\beta_p\operatorname{sh}[\beta_p(l-x)]\big)}{2\beta_p^{\,2}\operatorname{sh}(\beta_p l)} - \\ & - \frac{g_p\big((\nu-1)\operatorname{ch}(\beta_p x) + (1+\nu)[l\beta_p\operatorname{ch}(\beta_p x)\operatorname{cth}(\beta_p l) - x\beta_p\operatorname{sh}(\beta_p x)]\big)}{2\beta_p^{\,2}\operatorname{sh}(\beta_p l)}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Удовлетворяя граничным условиям для нормальных напряжений $\sigma_y(x,y)$ и нормальных перемещений $u(l,y)$, получаются две бесконечные системы:

$$\begin{aligned} & \frac{X1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h) + \alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h) - 1} + \frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{\beta_p\big(-Z_p\alpha_k^{\,2} + (-1)^k g_p[(2+\nu)\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2}]\big)}{(\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2})^2} = \\ & = f1_k + f2_k, \\ & \frac{Y1_k[\operatorname{sh}(\alpha_k h) - \alpha_k h]}{\operatorname{ch}(\alpha_k h) + 1} + \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{\beta_p\big(-Z_p\alpha_k^{\,2} + (-1)^k g_p[(2+\nu)\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2}]\big)}{(\alpha_k^{\,2} + \beta_p^{\,2})^2} = f1_k - f2_k, \\ & 4a_0 l + \frac{4}{h}\sum_{p=2,4,6}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 + f2_0, \quad \frac{4}{h}\sum_{p=1,3,5}^{\infty}\frac{g_p}{\beta_p} = f1_0 - f2_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Последнее уравнение является условием статики $\sum Y = 0$. Из смешанных граничных условий получаются парные уравнения по косинусам

$$
\begin{gathered}
2b_0 + \frac{1}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\Big[\Big(W_p - N_p Z_p\Big)\cos(\beta_p y)\Big] = 0, \quad (0 \le y \le c), \\
a_1 + yc_1 + \frac{2}{h}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z_p\cos(\beta_p y)}{\beta_p} = 0, \quad (0 \le y \le c).
\end{gathered} \tag{3.3}
$$

где

$$
\begin{gathered}
N_p = \frac{\operatorname{sh}(2\beta_p l) + 2\beta_p l}{2\operatorname{sh}^2(\beta_p l)} - 1, \quad W_p = g_p\,\frac{(\nu-1)\operatorname{sh}(\beta_p l) + \beta_p l(1+\nu)\operatorname{ch}(\beta_p l)}{\operatorname{sh}^2(\beta_p l)} + \\
+\frac{4}{l}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Big(X1_k + (-1)^p(X1_k - Y1_k) + Y1_k\Big)\alpha_k\beta_p{}^2}{(\alpha_k{}^2 + \beta_p{}^2)^2}.
\end{gathered} \tag{3.4}
$$

4⁰. Здесь рассматриваются парные уравнения (1.5), (2.5) и (3.3). Такие парные уравнения рассматривались многими авторами [3,4]. Здесь будем пользоваться результатами работ [5,6].

Парные уравнения (1.5) сведены к решению бесконечной системы

$$
\begin{gathered}
2p^{-1}Y2_p = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k I(k,p,\gamma) + 2b_0 h p^{-1} z_p(\cos\gamma) - \\
-\frac{c_1 h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right) y_p(\cos\gamma)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta \quad (p = 1,2,3,\ldots),
\end{gathered} \tag{4.1}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{\pi}{2}(a_1 + c_1 h) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_k z_k(\cos\gamma)}{k} - \\
-\frac{c_1 h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta - 4b_0 h\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right) \quad \left(z = \frac{\pi y}{h}, \gamma = \frac{\pi c}{h}\right),
\end{gathered} \tag{4.2}
$$

где $P_k(x)$ – полином Лежандра

$$
\begin{gathered}
y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad y_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x), \\
Q_k = N_k Y2_k + M_k X2_k + W_k, \quad I(k,p,\gamma) = \int_{\gamma}^{\pi} y_k(\cos\theta) y_p(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta.
\end{gathered} \tag{4.3}
$$

Перемещения точек берегов трещины определяются формулой

$$
\begin{gathered}
\frac{\pi}{4}(a_1 + c_1 h) + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y2_p}{p}\cos px = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z}{2}\left[2b_0 h\int_{z}^{\gamma}\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} + \right. \\
\left. +\sum_{k=1}^{\infty} Q_k\int_{z}^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} - \frac{c_1 h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right)\frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\,d\theta}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}}\,d\theta\right],
\end{gathered} \tag{4.4}
$$

где $(0 \le z \le \gamma)$, $\quad z = \pi y/h$, $\quad \gamma = \pi c/h$.

Контактные напряжения на отрезке $(x = 0, c < y < h)$ выражаются формулой

$$
\sum_{p=1}^{\infty}[(1 - N_P)Y2_P - M_P X2_P - W_p]\cos pz = b_0 h -
$$

$$-\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\frac{K_1}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}-\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\left(-\sum_{k=1}^{\infty}kQ_k\int_{\gamma}^{z}\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}+\right.$$

$$\left.+\frac{c_1h}{2\pi}\int_{\gamma}^{z}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta/2)\sqrt{\cos\theta-\cos z}}\right), \qquad (4.5)$$

где K_1 – коэффициент интенсивности контактных напряжений

$$K_1=2b_0h+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k y_k(\cos\gamma)+\frac{c_1h}{\pi}\ln\mathrm{tg}(\gamma/4) \qquad (4.6)$$

Парные уравнения (2.5) сведены к бесконечной системе

$$2p^{-1}Z2_p=\sum_{k=1}^{\infty}Q_k I(k,p,\gamma)+4b_0hp^{-1}z_p(\cos\gamma)+$$

$$+\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta}{4}\right)y_p(\cos\gamma)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta,\quad Q_k=N_kZ2_p+M_kT2_k+W_k \qquad (4.7)$$

$$\pi(a_1+c_1h)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q_kz_k(\cos\gamma)}{k}-\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}\right)\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta-8b_0h\ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \qquad (4.8)$$

Формула перемещения точек берегов трещины получается следующей:

$$\frac{\pi}{2}(a_1+c_1h)-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z2_p}{p}\cos px=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z}{2}\left[4b_0h\int_{z}^{\gamma}\frac{\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}Q_k\int_{z}^{\gamma}\frac{y_k(\cos\theta)\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}-\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta}{4}\right)\frac{\mathrm{tg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos z-\cos\theta}}\mathrm{d}\theta\right]. \qquad (4.9)$$

Контактные напряжения будут выражаться формулой

$$b_0h+\sum_{p=1}^{\infty}[(1+N_P)Z2_P+M_PT2_P+W_p]\cos pz=$$

$$=\frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}}\left(\frac{K_1}{\sqrt{\cos\gamma-\cos z}}-\sum_{k=1}^{\infty}kQ_k\int_{\gamma}^{z}\frac{z_k(\cos\theta)\,\mathrm{ctg}(\theta/2)\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos z}}+\right. \qquad (4.10)$$

$$\left.+\frac{c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{z}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sin(\theta/2)\sqrt{\cos\theta-\cos z}}\right),\quad (\gamma\le z\le\pi),$$

где

$$K_1=2b_0h+\sum_{k=1}^{\infty}Q_ky_k(\cos\gamma)+\ln\mathrm{tg}(\gamma/4)\,. \qquad (4.11)$$

Бесконечные системы, связанные с парными уравнениями (3.3), будут

$$2p^{-1}Z2_p=\sum_{k=1}^{\infty}(W_k-N_kZ2_p)I(k,p,\gamma)+4b_0hp^{-1}z_p(\cos\gamma)+$$

$$+\frac{2c_1h}{\pi}\int_{\gamma}^{\pi}\ln\left(\mathrm{ctg}\frac{\theta}{4}\right)y_p(\cos\gamma)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta, \qquad (4.12)$$

$$\pi(a_1 + c_1 h) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(W_k - N_k Z2_p) z_k(\cos\gamma)}{k} -$$
$$- \frac{2c_1 h}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \, d\theta - 8b_0 h \ln\left(\cos\frac{\theta}{2}\right). \tag{4.13}$$

Формула перемещений точек берегов трещины будет следующей:

$$\frac{\pi}{2}(a_1 + c_1 h) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z2_p}{p} \cos px = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\frac{z}{2} \left[4b_0 h \int_{z}^{\gamma} \frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\, d\theta}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} + \right. \tag{4.14}$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} (W_k - N_k Z2_p) \int_{z}^{\gamma} \frac{y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}(\theta/2)\, d\theta}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} - \frac{2c_1 h}{\pi} \int_{\gamma}^{\pi} \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{4}\right) \frac{\operatorname{tg}(\theta/2)\, d\theta}{\sqrt{\cos z - \cos\theta}} d\theta \right].$$

Контактные напряжения будут выражаться формулой

$$b_0 h + \sum_{p=1}^{\infty} [W_p - (1 + N_P) Z2_P] \cos pz =$$

$$= \frac{\sin(z/2)}{\sqrt{2}} \left(\frac{K_1}{\sqrt{\cos\gamma - \cos z}} + \frac{c_1 h}{\pi} \int_{\gamma}^{z} \frac{d\theta}{\sin(\theta/2)\sqrt{\cos\theta - \cos z}} - \right. \tag{4.15}$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{\infty} k (W_k - N_k Z2_p) \int_{\gamma}^{z} \frac{z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg}(\theta/2)\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos z}} \right), \quad (\gamma \le z \le \pi),$$

$$K_1 = 4b_0 h + \frac{c_1 h}{\pi} \ln(\operatorname{tg}\tfrac{\gamma}{2}) + \sum_{k=1}^{\infty} (W_k - N_k Z_k) y_k(\cos\gamma). \quad \text{`(4.16)}$$

Доказательства регулярности аналогичных бесконечных систем приводятся в работах [5,6].

Полученные результаты могут быть полезны при расчете строительных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л.С. Курс теории упругости. М.–Л.: ОТИЗ, 1947. 464с.
2. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
3. Уфлянд Я.С. Метод парных уравнений в задачах математической физики. М.: Наука, 1977. 250 с.
4. Sneddon I.N. Mixed boundary value problems in potential theory. Amsterdam: North-Holl. Publ. Com. 1966. 283 c.
5. Баблоян А.А. Контактные и смешанные задачи для однородных и составных тел. // Докторская диссертация. Л.: 1979. 346 с.
6. Мхитарян С.М., Александров В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.

Ереванский государственный университет архитектуры и строительства

Поступила в редакцию 12.09.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРАНЕНИЯ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СВОЙСТВАМИ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

Белубекян М. В., Мгерян Д. Э.

Ключевые слова: поверхностные волны, условия затухания, кубическая симметрия.
Keywords: surface waves, damping conditions, cube symmetry.

Մ. Վ. Բելուբեկյան, Դ. Հ. Միերյան
Առանձգական մակերևույթային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր խորանարդային սիմետրիա ունեցող առաձգական կիսատարածություններում

Ներկա աշխատանքում եռաչափ դրվածքով ուսումնասիրվում է մակերևույթային ալիքների վարքը խորանարդային սիմետրիա ունեցող առանձգական կիսատարածություններում, երբ կիսատարածության եզրը ազատ է լարումներից: Այսպիսի կիսատարածություններում սիմետրիայի հարթություն չլինելու պատճառով հնարավոր չի լինում մտցնել պոտենցիալ ֆունկցիաներ,ինչպես [1,2,3,4] աշխատանքնեռում, հետևաբար խնդիրը լուծվել է ուղղիղ ձևով: Ստացվել է, որ մակերևույթային ալիքի մարման պայմանը կախված է ալիքային թվերից: Ցույց է տրվել, որ մակերևույթային ալիքը ունի դիսպերսիայի հատկություն, ստացվել և լուծվել է դիսպերսիոն հավասարումը:

M. V. Belubekyan, D. H. Mheryan
Three dimensional problem of surface wave propagation in elastic half-space with the properties of cube symmetry

In the offered work three- dimensional problem of propagation of elastic surface waves in a cube isotropic semi-space, when on the surface of semi-space all three components of stresses are equal to zero, was considered. In these mediums the plane of simmetry does not exists, so we can't introduce the potential functions, as in works [1,2,3,4], so we solved the problem without potential functions. It is shown, that conditions of damping of surface waves are depending from wave numbers. The new dispersion equation is obtained and solved.

В данной работе рассматривается трехмерная задача распространения упругих поверхностных волн в полупространстве из материала со свойствами кубической симметрии. В таких средах нет плоскостей изотропии [1,2,3,4]. Задача решена без введения потенциальных функций. Получено, что условия затухания поверхностной волны зависят от волновых чисел. Доказано, что в этом случае поверхностная волна обладает свойством дисперсии. Получено и решено дисперсионное уравнение.

1.Рассматривается полупространство из материала со свойствами кубической симметрии. Предполагается, что координатные оси x и y лежат в плоскости, ограничивающей полупространство, а ось z направлена перпендикулярно к этой плоскости, в глубь полупространства. Далее предполагается, что координатные оси совпадают с осями кубической симметрии. В таком случае полупространство в декартовой координатной системе занимает область $(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \le z < \infty)$.

Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&c_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\\
&+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\
&c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+c_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+c_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\\
&+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\\
&c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+c_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+c_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+\\
&+\{c_{11}-c_{44}(2\gamma-1)\}\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Здесь u, v, w– проекции вектора на оси координат x, y, z / соответственно, c_{ij} – три упругих независимых констант кубической симметрии, ρ –плотность материала, $\gamma=\dfrac{c_{11}-c_{12}}{2c_{44}}$ – коэффициент анизотропии для изотропных материалов $\gamma=1$.

При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания:

$$
\lim_{z\to\infty} u=0,\quad \lim_{z\to\infty} v=0,\quad \lim_{z\to\infty} w=0 \tag{1.2}
$$

Решения системы дифференциальных уравнений (1.1) представляются в виде:

$$
\begin{aligned}
&u=Ae^{-pz}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),\\
&v=Be^{-pz}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),\\
&w=Ce^{-pz}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y).
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Подстановка (1.3) в систему (1.1) приводит к системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных A, B, C:

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma^2\eta-\theta^{-1}k_1^2-k_2^2+p^2)A+(2\gamma-\theta^{-1}-1)k_1k_2B+(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_1piC=0,\\
&(2\gamma-\theta^{-1}-1)k_1k_2A+(\Gamma^2\eta-k_1^2-\theta^{-1}k_2^2+p^2)B+(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_2piC=0,\\
&(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_1piA+(\theta^{-1}-2\gamma+1)k_2piB+[\Gamma^2(\eta-1)+\theta^{-1}p^2]C=0.
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$
\gamma=\frac{c_{11}-c_{12}}{2c_{44}},\ \theta=\frac{c_{44}}{c_{11}}<1,\ \eta=\frac{\omega^2}{c_2^2\Gamma^2}\,/\,\Gamma^2=k_1^2+k_2^2,\ c_2^2=\frac{c_{44}}{\rho}.
$$

Равенство нулю детерминанта системы (1.4), после некоторых преобразований, приводит к следующему уравнению:

$$
\begin{aligned}
&\rho^3-(s_1+2s_2+4\varepsilon_1)\rho^2+[s_2(s_2+2s_1)+4\varepsilon_1s_2+\varepsilon_2]\rho+\\
&+s_2(s_1s_2+\xi\varepsilon_1)=0
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

где

$$\rho = \frac{p^2}{\Gamma^2},\ \ s_1 = 1-\theta\eta,\ s_2 = s_3 = 1-\eta,\ \varepsilon_1 = (\gamma-1)(1-\gamma\theta),$$

$$\varepsilon_2 = \xi(\gamma-1)[1-\theta-(\gamma-1)(3-4\gamma\theta)],\ \xi = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2+k_2^2)^2}.$$

2. По теореме Гаусса свободный член уравнения (1.5) представляет произведения корней этого уравнения с отрицательным знаком, его можно представить в следующем виде:

$$\theta(1-\eta)\left[\frac{1+\theta^{-1}-\sqrt{(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})}}{2}-\eta\right]\times$$
$$\times\left[\frac{1+\theta^{-1}+\sqrt{(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})}}{2}-\eta\right]. \qquad (2.1)$$

Отметим, что в случае изотропной среды $(\gamma=1)$ выражение (2.1) принимает вид

$$\theta(1-\eta)(1-\eta)(1-\theta\eta). \qquad (2.1a)$$

В случае, когда все корни уравнения (1.5) являются действительными, то они должны быть положительными, чтобы выполнялись условия затухания. Выражение (2.1) должно быть положительным. В этом случае знак выражения (2.1) определяется значением трех сомножителей. Из различных вариантов знаков сомножителей, определяющих положительность выражения (2.1), выбирается тот вариант, который в пределе $\gamma\to 1$ совпадает с условием затухания для изотропной среды. Следовательно, в этом случае условие затухания (1.2) принимает вид

$$0<\eta<\min(1,\ \beta^*)$$
$$\beta^* = \frac{1+\theta^{-1}-\sqrt{(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})}}{2}. \qquad (2.2)$$

Показано, что $(\theta^{-1}-1)^2+4\xi(\gamma-1)(\gamma-\theta^{-1})>0,\ \beta^*>0.$ При $\xi=1$ $\beta^*=\gamma$, а при $\xi=0$ $\beta^*=1$.

В табл.1 представлены значения β^* для $\xi=1$. Характеристики материалов взяты из монографии [5].

Таблица1

материал	$\beta^*(\xi=1)$
Al	0.8215
GaAs	0.5471
$Y_3Al_5O_{12}$	0.9621
$Y_3Fe_5O_{12}$	1.055
$Bi_{12}GeO_{20}$	1.91176
Au	0.3478
Pt	0.634

Из вышесказанного следует, что для тех материалов, у которых $\gamma<1$, условия затухания получаются в виде $0<\eta<\beta^*$, а для тех материалов, у которых $\gamma>1$, условия затухания получаются в виде $0<\eta<1$.

В частном случае изотропной среды ($\gamma = 1$) условие затухания (2.2) совпадает с условием затухания для изотропных материалов.

3.Уравнение (1.5) можно представить в следующем виде:

$$(\rho - s_1)(\rho - s_2)^2 - 4\varepsilon_1\rho(\rho - s_2) + \varepsilon_2(\rho - \frac{\xi\varepsilon_1}{\varepsilon_2}s_2)\ . \tag{3.1}$$

В частном случае, при $\alpha = 1$ уравнение (3.1) приводится к следующему виду:

$$(\rho - s_2)\{\rho^2 - (4\varepsilon_1 + s_1 + s_2)\rho + \varepsilon_2 + s_1 s_2\} = 0\ .$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\rho^2 - (4\varepsilon_1 + s_1 + s_2)\rho + \varepsilon_2 + s_1 s_2 = 0\,. \tag{3.2}$$

Корни уравнения (3.2) имеют вид:

$$\rho_{12} = \frac{1}{2}\left\{ 4\varepsilon_1 + s_1 + s_2 \pm \sqrt{(4\varepsilon_1 + s_1 + s_2)^2 - 4(\varepsilon_2 + s_1 s_2)} \right\}$$

Для того, чтобы выполнялись условия затухания, требуется, чтобы $\rho_2 > 0$, то есть $\varepsilon_2 + s_1 s_2 > 0$ (3.3). Из (3.3) можно определить условие затухания:

$$0 < \eta < \min(1, \eta_*)$$

$$\eta_* = \frac{1 + \theta^{-1} - \sqrt{(\theta^{-1} - 1)^2 - 4\theta^{-1}[1 - \theta - (\gamma - 1)(3 - 4\gamma\theta)]\xi}}{2}. \tag{3.4}$$

4. Из уравнения (1.5) получаются корни $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, из которых корни p_1, p_2, p_3 и только они удовлетворяют условиям затухания, следовательно, u, v, w примут следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= \left\{ A_1 e^{-p_1 z} + A_2 e^{-p_2 z} + A_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \\ v &= \left\{ B_1 e^{-p_1 z} + B_2 e^{-p_2 z} + B_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y), \\ w &= \left\{ C_1 e^{-p_1 z} + C_2 e^{-p_2 z} + C_3 e^{-p_3 z} \right\} \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Первое уравнение системы (1.4) умножаем на κ_2, а второе – на κ_1 и вычитая, получается:

$$B = \frac{k_2}{k_1}\frac{\rho - s_2 + (1 - \gamma)\xi_1}{\rho - s_2 + (1 - \gamma)\xi_2} A\ . \tag{4.2}$$

Подставляя выражение (4.2) в третье уравнение системы (1.4), получается:

$$C = \frac{pi}{k_1}\frac{\theta^{-1} - 2\gamma + 1}{s_2 - \theta^{-1}\rho}\frac{\rho - s_2 + (1 - \gamma)\xi}{\rho - s_2 + (1 - \gamma)\xi_2} A\ . \tag{4.3}$$

В (4.2) и (4.3) дополнительно использованы обозначения:

$$\xi_1 = \frac{2k_1^2}{\Gamma^2}, \quad \xi_2 = \frac{2k_2^2}{\Gamma^2}\ . \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что $\xi = \xi_1 \xi_2$. Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.4), получим:

$$u=\left\{A_1e^{-p_1z}+A_2e^{-p_2z}+A_3e^{-p_3z}\right\}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),$$

$$v=\{\frac{k_2}{k_1}\frac{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_1}{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_2}A_1^{-p_1z}+\frac{k_2}{k_1}\frac{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_1}{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_2}A_2^{-p_2z},$$

$$+\frac{k_2}{k_1}\frac{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_1}{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_2}A_3^{-p_3z}\}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y),$$

$$w=\{\frac{pi}{k_1}\frac{\theta^{-1}-2\gamma+1}{s_2-\theta^{-1}\rho}\frac{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi}{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_2}A_1e^{-p_1z},\tag{4.5}$$

$$+\frac{pi}{k_1}\frac{\theta^{-1}-2\gamma+1}{s_2-\theta^{-1}\rho}\frac{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi}{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_2}A_2e^{-p_2z},$$

$$+\frac{pi}{k_1}\frac{\theta^{-1}-2\gamma+1}{s_2-\theta^{-1}\rho}\frac{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi}{\rho-s_2+(1-\gamma)\xi_2}A_3e^{-p_3z}\}\times\exp i(\omega t-k_1x-k_2y).$$

5.Рассматривается полупространство со свободной от нагрузки поверхностью:

$$\sigma_{zz}=0,\ \sigma_{zx}=0,\ \sigma_{zy}=0 \quad \text{при } z=0. \tag{5.1}$$

Граничные условия (5.1) в перемещениях имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\ (1-2\theta\gamma)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{5.2}$$

Подстановка (4.5) в (5.2) приводит к следующей системе однородных и алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, A_3:

$$\begin{aligned}&\sqrt{\rho_1}[q_1f_1-1]A_1+\sqrt{\rho_2}[q_2f_2-1]A_2+\sqrt{\rho_3}[q_3f_3-1]A_3=0,\\&\sqrt{\rho_1}[q_1f_1-g_1]A_1+\sqrt{\rho_2}[q_2f_2-g_2]A_2+\sqrt{\rho_3}[q_3f_3-g_3]A_3=0,\\&f_1[2\theta\gamma-1-q_1\rho_1]A_1+f_2[2\theta\gamma-1-q_2\rho_2]A_2+f_3[2\theta\gamma-1-q_3\rho_3]A_3=0,\end{aligned}\tag{5.3}$$

где

$$\begin{aligned}&f_i=\frac{\rho_i-s_2+(1-\gamma)\xi}{\rho_i-s_2+(1-\gamma)\xi_2},\quad i=1,2,3,\\&g_i=\frac{\rho_i-s_2+(1-\gamma)\xi_1}{\rho_i-s_2+(1-\gamma)\xi_2},\quad i=1,2,3,\\&\mathrm{q}_i=\frac{\theta^{-1}-2\gamma+1}{s_2-\theta^{-1}\rho_1},\qquad i=1,2,3\ .\end{aligned}\tag{5.4}$$

Равенство нулю детерминанта системы (5.3) после ряда преобразований приводится к виду:

$$\begin{aligned}&R(\eta,\xi)=\sqrt{\rho_1\rho_2}(\rho_1-\rho_2)[\Omega-\rho_1\rho_2+s_2\theta(\rho_1+\rho_2)][(-1+\gamma)\xi+s_2-\rho_3],\\&[(-1+2\gamma\theta s_2-\rho_3)]-\sqrt{\rho_1\rho_3}(\rho_1-\rho_3)[\Omega-\rho_1\rho_3+s_2\theta(\rho_1+\rho_3)]\times\\&\quad\times[(-1+\gamma)\xi+s_2-\rho_2][(-1+2\gamma\theta s_2-\rho_2)]+\sqrt{\rho_2\rho_3}(\rho_2-\rho_3)\times\\&\quad\times[\Omega-\rho_2\rho_3+s_2\theta(\rho_2+\rho_3)][(-1+\gamma)\xi+s_2-\rho_1][(-1+2\gamma\theta s_2-\rho_1)],\end{aligned}\tag{5.5}$$

где

$$\Omega = [1-\theta+2\theta(1-\gamma)][(1-\gamma)\xi-(1-\theta)s_2]-\theta^2 s_2^2 \quad . \qquad (5.6)$$

Если вставить $\xi = 0,$ который соответствует задаче плоской деформации [6], то получится уравнение

$$\eta - \frac{4\gamma(1-\gamma\theta)\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{1-\eta}+\sqrt{1-\theta\eta}} = 0 \quad . \qquad (5.7)$$

В частном случае изотропной среды $\gamma = 1,\ \rho_1 = 1-\eta,\ \rho_2 = 1-\eta,\ \rho_1 = 1-\theta+\eta$, а уравнение (5.5), после ряда преобразований приводится к уравнению Релея, для пространственной задачи [7,8]

$$(2-\eta)^2 - 4\sqrt{(1-\eta)(1-\theta\eta)} = 0 \quad . \qquad (5.8)$$

Решив уравнение (5.5), можно найти параметр η и исследовать влияние дисперсии на поверхностную волну.

Для материала $Y_3Fe_5O_{12}$ (железоитриевый гранат) γ равна 1,05563.

В табл. 2 приводятся корни уравнения (5.5) для материала $Y_3Fe_5O_{12}$ в зависимости от ξ .

Таблица 2

ξ	η
0	0.86935
0.1	0.8690
0.2	0.86686
0.3	0.8683
0.4	0.8680
0.5	0.8677
0.6	0.8674
0.7	0.8671
0.8	0.8668
0.9	0.8665
1.0	0.8662

Таблица3

ξ	η
0	0,949033
0.1	0,946171
0.2	0,944108
0.3	0,942386
0.4	0,9408
0.5	0,9395
0.6	0,9382
0.7	0,9370
0.8	0,9359
0.9	0,9349
1.0	0,9339

При $\xi = 0$ значение η совпадает с корнем уравнения (5.7). Табл. 2 показывает, что с возрастанием ξ безразмерный параметр η уменьшается.

Для материала $Bi_{12}GeO_{20}$ (Германат висмута) γ равна 1.91176. В табл. 3 приводятся корни уравнения (5.5) для материала $Bi_{12}GeO_{20}$ в зависимости от ξ .

При $\xi = 0$ значение η совпадает с корнем уравнения (5.7). Табл. 3 показывает, что с возрастанием ξ безразмерный параметр η уменьшается, что приводит к увеличению степени локализации поверхностной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т.105. №4. С. 362 –369.
2. Wàng Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional problems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. №1. PP.105 – 115.
3. Белубекян В. М., Мгерян Д. Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде. //Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. № 2. С.3-9.
4. Мгерян Д. Э. Распространение пространственной поверхостной волны, когда на границе полупространства одно касательное перемещение равно нулю. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. №.2. С.18-23.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
6. Kazaryan, K. B., Belubekyan M. V. Elastic waves propagation in an elastic layer with cubic anisotropic properties. //Pros. NAS of Armenia. Mechanics. 1996. Vol. 49. №4. p.29–35.
7. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids, North-Holland. 425p.
8. Knowles J. K. A note on surface waves, J. of Geophysical Research. 1996. V.21. №22. P. 5480-5481.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
5.10.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ РАВНОПРОЧНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Капанадзе Г. А.

Ключевые слова: плоская задача, формулы Колосова–Мусхелишвили, задача Келдыша–Седова.

Keywords: Plane problem, Kolosov-Muskhelishvili's complex potentials, Keldysh-Sedov problem.

Կապանաձե Գ.Ա.

Պարբերական տեղադրված հավասարաամուր անցքերով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության մի հարթ խնդրի մասին

Դիտարկված է պարբերական տեղադրված հավասարաամուր անցքերով թուլացված ներքևի կիսահարթության համար առաձգականության տեսության հարթ խնդիր: Ենթադրվում է, որ անցքերի եզրերին ազդում են հաստատուն նորմալ ուժեր, իսկ կիսահարթության եզրին տեղադրված է ուղղագիծ հիմքով ողորկ դրոշմ: Կոլոսով-Մուսխելիշվիլու բանաձևերի օգնությամբ քննարկվող խնդիրը բերվել է կիսահարթության համար Կելդիշ-Սեդովի խնդրին, որի լուծմամբ կոմպլեքս պոտենցիալները և անհայտ կոնտուրների հավասարումները կառուցված են անալիտիկ:

G. A. Kapanadze

ON ONE PROBLEM OF THE PLANE THEORY OF ELASTICITY FOR A HALF-PLANE WEAKENED BY PERIODICALLY DISTRIBUTED EQUI-STRONG HOLES

The problem of elastic equilibrium of a lower half-plane which is weakened by periodically distributed equi-strong holes, is considered. The hole boundaries are assumed to be free from external stresses, an absolutely smooth rigid stamp with a rectilinear base is applied to the boundary of the half-plane, and external normal contracting forces with principal vector *P* are applied to the stamp.

The problem is to find stressed state of the half-plane as well as analytic forms of boundaries of equi-string holes under the condition that tangential normal stress takes on them constant value.

Using the methods of the theory of analytic functions, the problem is reduced to the Keldysh-Sedov problem for a half-plane whose solution allows us to construct Kolosov-Muskhelishvili's complex potentials and equations of unknown contours effectively (analytically).

Рассматривается периодическая задача упругого равновесия нижней полуплоскости, ослабленной периодично расположенными равнопрочными отверстиями. Предполагается, что на границах отверстий действуют постоянные нормальные напряжения, а на границе полуплоскости приложен абсолютно гладкий жёсткий штамп с прямолинейным основанием и к штампу приложены внешние периодически повторяющиеся нормальные сжимающие силы с главным вектором P, направленным вертикально вниз.

Задача заключается в определении напряженного состояния полуплоскости и аналитических форм границ равнопрочных отверстий при условии, что на них нормальное напряжение принимает постоянное значение.

На основании формул Колосова–Мусхелишвили рассмотренная задача приведена к задаче Келдыша–Седова для полуплоскости и решением последней, комплексные потенциалы и уравнения искомых контуров построены эффективно (в аналитическом виде).

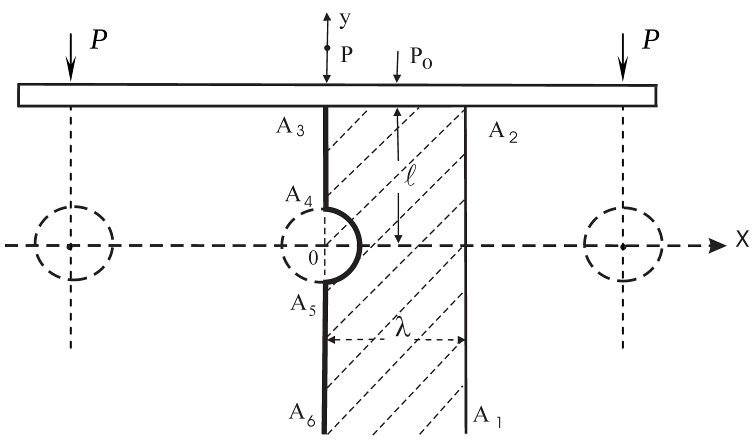
Аналогичные задачи плоской теории упругости для бесконечных областей, ослабленных равнопрочными отверстиями, исследованы в работах [1-4], а для конечной двухсвязной области – в работах [5–7].

Постановка задачи. Пусть на границе упругой нижней полуплоскости, ослабленной периодично расположенными отверстиями, приложен прямолинейный абсолютно гладкий жёсткий штамп, на который действуют внешние периодически повторяющиеся нормальные усилия с главным вектором P и штамп перемещается лишь вертикально вниз. Предположим, что отверстия симметричны относительно локальных вертикальных осей.

Рассмотрим задачу: Определить упругое равновесие полуплоскости и аналитическую форму контуров отверстий при условии, что на этих контурах нормальное напряжение принимает одно и то же постоянное значение $\sigma_s = k = \text{const}$.

Решение задачи. В силу симметрии и периодичности поставленной задачи ограничимся рассмотрением упругого равновесия полуполосы S (заштрихованная часть на фиг.1), граница которой состоит из прямолинейных отрезков $L_1 = \sum_{j=1}^{4} L_1^{(j)}$,

$L_1^{(j)} = A_j A_{j+1}$ $(j = 1,2,3,5)$ и неизвестной дуги $L_0 = A_4 A_5$



Фиг. 1

(под A_1 и A_6 подразумеваем точки $\lambda - i\infty$ и $-i\infty$, соответственно).

Легко заметить, что в рассмотренном случае касательные напряжения $\tau_{ns} = 0$ на всей границе области S, а нормальное смещение $v_n = v = \text{const}$ на $L_1^{(2)}$ и $v_n = 0$ на $L_1^{(1)} \cup L_1^{(3)} \cup L_1^{(4)}$.

На основании известных формул Колосова–Мусхелишвили [8] поставленная задача сводится к отысканию двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, голоморфных в области S по граничным условиям на $L = L_1 \cup L_0$:

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)}\left[\aleph\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}\right] = 2\mu\, v_n(t), \qquad t \in L_1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} e^{-i\alpha(t)}\left[\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}\right] = C(t), \qquad t \in L_1, \tag{2}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = B(t), \qquad t \in L_0, \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\left[\overline{\varphi'(t)}\right] = \frac{k}{4}, \quad t \in L_0, \tag{4}$$

где $\alpha(t)$ – угол между внешней нормалью к контуру L_1 и осью ox,

$$C(t) = \operatorname{Re}\left[i\int_{A_1}^{t} \sigma_n(s_0)\exp i(\alpha(t_0) - \alpha(t))ds_0 + \exp(-\alpha(t))(c_1 + ic_2)\right], \ t \in L_1,$$

$$B(t) = i\int_{A_1}^{t} \sigma_n(s_0)\exp i\alpha(t_0)ds_0 + c_1 + ic_2,\ \ t \in L_0;$$

c_1 и c_2 – произвольные действительные постоянные. Легко заметить, что $C(t)$ – кусочно-постоянная, а $B(t)$ – постоянная функция.

В дальнейшем потребуем, чтобы функция $\varphi(z)$ была непрерывна в замкнутой области $S+L$, а функции $\varphi'(z)$ и $\psi(z)$ были непрерывно продолжимыми на границе L всюду, за исключением, быть может, точек A_k, в окрестности которых оси удовлетворяют условию

$$|\varphi'(z)|,\ \ |\psi(z)| < M\,|z - A_k|^{-\delta_k}, \tag{5}$$

где $M = \text{const},\ 0 \le \delta_k < 1,\ k = 2,3;\ \ 0 \le \delta_k < \frac{1}{2};\ k = 4,5$.

Сложением равенств (1) и (2), а затем дифференцированием на дуговой абсциссе s, с учетом кусочно-постоянности функций $v_n(t)$ и $C(t)$, получаем

$$\operatorname{Im}\varphi'(z) = 0,\ \ t \in L_1. \tag{6}$$

Условия (4) и (6) представляют собой задачу Келдыша–Седова (см. [8], [9]):

$$\operatorname{Re}\left[\varphi'(t) - \frac{k}{4}\right] = 0,\ t \in L_0;\ \ \operatorname{Im}\left[\varphi'(t) - \frac{k}{4}\right] = 0,\ t \in L_1. \tag{7}$$

Задача (7) при условии (5) имеет единственное решение $\varphi'(z) = \frac{k}{4}$, и таким образом получаем

$$\varphi(z) = \frac{k}{4}z \tag{8}$$

(произвольную постоянную интегрирования считаем равной нулю).

Полагаем $c_1 = -P_0$ (P_0–главный вектор внешних усилий, приложенных на $L_1^{(2)}$, $c_2 = \int_{A_3}^{A_4}\sigma_n ds - \int_{A_1}^{A_2}\sigma_n ds$, с учетом (6), из граничных условий (1)–(3) получаем

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k + \psi(t)\right] = -P_0;\\
&\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k - \psi(t)\right] = -\frac{\lambda k(\aleph - 3)}{4};
\end{aligned}\right\}\ t \in L_1^{(1)};$$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{Im}\left[\frac{k}{2}k + \psi(t)\right] = 2\mu v - \frac{\aleph - 3}{4}kt;\\
&\operatorname{Im}\left[\frac{k}{2}k - \psi(t)\right] = -2\mu v + \frac{\aleph + 1}{4}kl;
\end{aligned}\right\}\ t \in L_1^{(2)}; \tag{9}$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k + \psi(t)\right] = 0;\ \operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k - \psi(t)\right] = 0,\ \ t \in L_1^{(3)};$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k+\psi(t)\right]=0;\ \operatorname{Im}\left[\frac{k}{2}k-\psi(t)\right]=0,\ \ t\in L_0;$$

$$\operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k+\psi(t)\right]=0;\ \operatorname{Re}\left[\frac{k}{2}k-\psi(t)\right]=0,\ \ t\in L_1^{(4)};$$

Для равновесия выделенной части предполагаем, что к этой части бесконечности приложены силы, равнодействующая которых равна $-P_0$ (т.е. напряжения на бесконечности остаются ограниченными).

Пусть функция $z=\omega(\zeta)$ комформно отображает верхнюю полуплоскость ($\operatorname{Im}\zeta>0$) на область S. Обозначим через a_k прообразы точек A_k ($k=1,\ldots,5$) и будем считать, что $a_1=-\infty$; $a_4=-1$; $a_5=1$; $a_6=\infty$ (точки $\sigma=-\infty$ и $\sigma=\infty$ представляют одну и ту же точку $\zeta=\infty$ плоскости ζ).

Граничные условия (9) относительно функций

$$\Phi(\zeta)=\frac{k}{2}\omega(\zeta)+\psi\left[\omega(\zeta)\right];\ \Psi(\zeta)=\frac{k}{2}\omega(\zeta)-\psi\left[\omega(\zeta)\right] \tag{10}$$

примут вид:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\Phi(\tau)=-P_0,\ \ \tau\in(-\infty;a_2);\\&\operatorname{Im}\Phi(\tau)=2\mu v-\frac{\aleph-3}{4}k\,l,\ \ \ \tau\in(a_2;a_3);\\&\operatorname{Re}\Phi(\tau)=0,\ \ \tau\in(a_3;\infty);\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\Psi(\tau)=-\frac{\aleph-3}{4}k\lambda,\ \ \ \tau\in(-\infty;a_2);\\&\operatorname{Im}\Psi(\tau)=-2\mu v+\frac{\aleph+1}{4}k\,l,\ \ \ \ \tau\in(a_2;a_3);\\&\operatorname{Re}\Psi(\tau)=0,\ \ \tau\in(a_3;-1)\cup(1;\infty);\ \operatorname{Im}\Psi(\tau)=0,\ \tau\in(-1;1).\end{aligned} \tag{12}$$

Задачи (11) и (12) представляют собой задачу Келдыша–Седова для полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$.

Рассмотрим задачу (11). Будем искать ограниченное на бесконечности решение этой задачи. Это решение представится формулой

$$\Phi(\zeta)=\frac{\chi_1(\zeta)}{\pi i}\left[-P_0\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\zeta)}+i\left(2\mu\nu-\frac{\aleph-3}{4}k\,l\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\zeta)}\right], \tag{13}$$

где $\chi_1(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}$ (под радикалом подразумевается ветвь, разложение которой в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $\sqrt{(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)}=\zeta+a_1+\cdots$. Аналогичным образом будем понимать радикалы, встречающиеся в дальнейшем).

Рассмотрим теперь задачу (12). Необходимое и достаточное условие существования ограниченного на бесконечности решения этой задачи имеет вид

$$-\frac{\aleph-3}{4}k\lambda\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}+i\left(2\mu\nu-\frac{\aleph+1}{4}kl\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\tau)}=0, \tag{14}$$

а само решение дается формулой

$$\Psi(\zeta)=\frac{\chi_2(\zeta)}{\pi i}\left[-\frac{\aleph-3}{4}\lambda k\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\zeta)}+\right.$$
$$\left.+i\left(-2\mu\nu+\frac{\aleph+1}{4}kl\right)\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\zeta)}\right], \tag{15}$$

где $\chi_2(\zeta)=\sqrt{(\zeta-a_2)(\zeta-a_3)(\zeta-1)(\zeta+1)}$.

После нахождения функций $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, на основании (10), функции $\omega(\zeta)$ и $\psi[\omega(\zeta)]$ выражаются формулой

$$\omega(\zeta)=\frac{1}{k}\left[\Phi(\zeta)+\Psi(\zeta)\right];\ \Phi[\omega(\zeta)]=\frac{1}{k}\left[\Phi(\zeta)-\Psi(\zeta)\right]. \tag{16}$$

Перейдем теперь к определению аналитической формы искомых равнопрочных контуров. Уравнение части A_4A_5 искомого контура получаем из образа функции $\omega(\zeta)$ при $\zeta=\xi e[-1;1]$.

Заметим, что интегралы, входящие в формулу (13), выражаются в элементарных функциях, а интегралы, входящие в формулы (14) и (15), выражаются через эллиптические интегралы первого и третьего рода, а именно, для $\zeta=\xi e[-1;\ 1]$ имеем (см.[10]):

$$\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{1}{\chi_1(\xi)}\ln\frac{a_3-a_2}{\left[\sqrt{\xi-a_2}-\sqrt{\xi-a_3}\right]^2};$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_1(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{\pi i}{\chi_1(\xi)};$$

$$\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{2}{\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}F(\varphi_0;k_0);$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)}=-\frac{2i}{\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right);$$

$$\int_{-\infty}^{a_2}\frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\xi)}=\frac{2}{(\xi-a_2)(\xi-a_3)\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}}\times$$
$$\times\left[(a_3-a_2)\prod\left(\varphi_0;\frac{(a_2-1)(\xi-a_3)}{(a_3-1)(\xi-a_2)};k_0\right)+\right.$$
$$\left.+(a_2-\xi)F(\varphi_0;k_0)\right];$$

$$\int_{a_2}^{a_3} \frac{d\tau}{\chi_2(\zeta)(\tau-\xi)} = \frac{2i}{(\xi+1)(\xi-a_3)\sqrt{(a_3-1)(a_2+1)}} \times$$

$$\times\left[(a_3+1)\prod\left(\frac{\pi}{2};\frac{(a_2-a_3)(\xi+1)}{(a_2+1)(\xi-a_3)};k_1\right)+(\xi-a_3)\,F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right)\right],$$

где $\varphi_0=\arcsin\sqrt{\dfrac{1-a_3}{1-a_2}}$; $k_0=\sqrt{\dfrac{(a_3+1)(a_2-1)}{(a_2+1)(a_3-1)}}$; $k_1=\sqrt{\dfrac{2(a_3-a_2)}{(a_2+1)(a_3-1)}}$, а

$$F(\varphi;k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{и} \quad \prod(\varphi;n;k)=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1-n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

– эллиптические интегралы первого и третьего рода, соответственно.

На основании приведенных формул, в силу (16), уравнение искомой части равнопрочного контура имеет вид:

$$\omega(\xi)=\frac{1}{k}\left\{\frac{P_i}{\pi}\ln\frac{a_3-a_2}{\left[\sqrt{\xi-a_2}-\sqrt{\xi-a_3}\right]^2}+i\left(2\mu\,\mathrm{v}-\frac{\aleph-3}{4}k\,l\right)-\right.$$

$$-\frac{\aleph-3}{2\pi i}k\lambda\frac{1}{\sqrt{(a_2+1)(a_3-1)}}\sqrt{\frac{\xi^2-1}{(\xi-a_2)(\xi-a_3)}}\times$$

$$\times\left[(a_3-a_2)\prod\left(\varphi_0;\frac{(a_2-1)(\xi-a_3)}{(a_3-1)(\xi-a_2)};k_0\right)+\right.$$

$$+(a_2-\xi)\,F\left(\varphi_0;k_0\right)+\frac{i}{\pi}\left(-2\mu\,\mathrm{v}+\frac{\aleph+1}{4}k\,l\right)\times$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{(a_2+1)(a_3-1)}}\sqrt{\frac{(\xi-1)(\xi-a_2)}{(\xi+1)(\xi-a_3)}}\right]\times$$

$$\times\left[(a_3+1)\prod\left(\frac{\pi}{2};\frac{(a_2-a_3)(\xi+1)}{(a_2+1)(\xi-a_3)};k_1\right)+\right.$$

$$\left.\left.+(\xi-a_3)\,F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right)\right]\right\},\quad \xi\in[-1;1], \tag{17}$$

а условие (14) представится в виде

$$\lambda\,k(\aleph-3)\,F(\varphi_0;k_0)=\left[-8\mu\,\mathrm{v}+(\aleph+1)k\,l\,\right]F\left(\frac{\pi}{2};k_1\right). \tag{18}$$

Учитывая [11], будем иметь

$$\Phi(a_2)=-P_0+i\left(2\mu\,\mathrm{v}-\frac{\aleph-3}{4}k\,l\right),$$

$$\Psi(a_2)=-\frac{\aleph-3}{4}k\,\lambda+i\left(-2\mu\,\mathrm{v}+\frac{\aleph+1}{4}k\,l\right),$$

$$\omega(a_2)=A_2=\lambda+il$$

из (16) получаем $k=-\dfrac{4P_0}{(\aleph+1)\lambda}$. Подставляя сюда значение $\aleph=3-4\sigma$ ($\sigma-$ коэффициент Пуассона), получим

$$k=-\frac{P_0}{(1-\sigma)\lambda}. \tag{19}$$

Таким образом, относительно параметров a_2 и a_3 получаем условие (18). Фиксируя один из этих параметров и определяя другой из упомянутых условий, по формуле (17) определяется аналитическая форма части искомого равнопрочного контура, а другая часть определяется путем симметричного отражения относительно вертикальной оси.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости. // ПММ. 1974. Т.38. № 6. С.963-980.
2. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980. 216 с.
3. Иванов Г. И., Космодамианский А. С. К решению задач с неизвестной границей при наличии циклической симметрии. //Тр. Николаевского кораблестр. ин-та, 1973. 302 с.
4. Мжаванадзе Ш. В. Обратные задачи плоской теории упругости при наличии циклической симметрии. //Сообщ. АН ГССР. 1984. Т.113. № 1. С.53-60.
5. Банцури Р. Д., Исаханов Р. С. Некоторые обратные задачи теории упругости. //Тр. Тбилисск. мат. ин-та, 87(1987). С. 3-20.
6. Банцури Р. Д., Исаханов Р. С. Полуобратная задача теории упругости для конечной двухсвязной области. //Тр. Тбилисск. мат. ин-та, 90(1988). С. 3-15.
7. Bantsuri R. On one Mixed Problem of the Plane Theory of Elasticity with a Partially Unknown Boundary. Proced. of A. Razmadze Mathematical Inst. 140(2006), 8-16.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
9. Келдыш М. В., Седов Л. И. Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций. //ДАН СССР. 1937. Т. XVI. № 1. С.7-10.
10. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

Институт математики
НАН Грузии им. А.М.Размадзе

Поступила в редакцию
2.05.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, КОТОРЫЕ УСИЛЕНЫ ЧАСТИЧНО СКЛЕЕННЫМИ РАЗНОРОДНЫМИ СТРИНГЕРАМИ

Керопян А. В.

Ключевые слова: контактная задача, упругая полуплоскость, упругая бесконечная пластина, частично склеенный разнородный стрингер, обобщенное интегральное преобразование Фурье, система интегро-дифференциальных уравнений, бесконечная система.
Key words: contact problem, elastic half-plane, infinite elastic plate, partially glued, heterogeneous stringer, system of singular integro-differential equations, infinite system.

Ա. Վ. Քերոբյան
Առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար կոնտակային խնդիրների լուծումը, որոնք ուժեղացված են մասնակիորեն սոսնձված տարբեր համասեռությամբ ստրինգերներով

Դիտարկված են խնդիրներ առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար, որոնն $y=0$ գծի երկարությամբ xoy հարթության մեջ (xoy սալի միջին հարթությունն է) ուժեղացված են տարբեր առաձգական բնութագրեր ունեցող ստրինգերներով՝ առաձգական վերադիրների տեսքով: Ստրինգերները բաղկացած են սիմետրիկ դասավորված միևնույն առաձգական հատկություններ ունեցող երկու կիսաանվերջ կտորներից և մեկ առանձնացված վերջավոր կտորից այլ առաձգական հատկությունով: Ենթադրվում է, որ վերջավոր տեղամասում կոնտակտային փոխազդեցությունը իրագործվում է այլ ֆիզիկամեխանիկական հատկություններ ունեցող սոսնձի շերտի միջոցով, իսկ կիսաանվերջ տեղամասերում իրագործված է իդեալական մեխանիկական կոնտակտի վիճակ: Անհայտ կոնտակտային լարումների որոշման խնդիրը Ֆուրյեի ընդհանրացված ձևափոխության օգնությամբ բերված է վերջավոր հատվածներում սինգուլյար ինտեգրո-դիֆերենցյալ հավասարումների համակարգի լուծման, որոշակի եզրային պայմաններով: Այնուհետև, Չեբիշևի օրթոգոնալ բազմանդամների ապարատի կիրառմամբ այդ համակարգի լուծումը հանգեցված է քվազիլիովին ռեգուլյար անվերջ հանրահաշվական հավասարումների համակարգի լուծման, որից հետո որոշված են կոնտակտային լարումները կիսաանվերջ տեղամասերում և պարզաբանված են նրանց վարքը և եզակիությունների բնույթը:

A. V. Kerobyan
The solution of the contact problems for the elastic half-plane and the infinite plate which are strengthened by partially glued heterogeneous stringers

This work observes contact problems for the elastic half-plane and the infinite plate which in the line of $y=0$ (for the plate xoy its average plane) is strengthened by the heterogeneous elastic stringers (overlays) which consist of two semi-infinite pieces and one separated finite piece another is one elastic characteristic. It is supposed that contact interaction in finite part is realized into a thin layer of glue (another physico-mechanical characteristic) and stringers are deformed under the action of horizontal forces. Using generalized Fourier transformation the determinational problem of unknown contact stresses is reduced to the system of singular integro-differential equations within the finite intervals.

The solution is constructed using Chebishev polynomials. The particular cases are considered and the character of the change contact stresses is illustrated in the different contact parts.

В работе рассматриваются контактные задачи для упругих тел, моделированных в виде упругой полуплоскости и бесконечной пластины, которые вдоль линии $y=0$ в плоскости xoy (xoy –средняя плоскость пластины) усилены разнородными стрингерами в виде тонких упругих накладок, состоящих из двух симметрично расположенных полубесконечных кусков и одного разделенного конечного куска с разными упругими характеристиками, когда контакт между стрингерами и деформируемыми основаниями в конечном участке осуществляется через слой клея (с другими физико-механическими и геометрическими характеристиками), а в полубесконечных частях имеет место жесткое сцепление (в смысле идеального механического контакта) и деформируются под действием горизонтальных сил, приложенных к

стрингерам. Задача определения неизвестных контактных напряжений при помощи обобщенного интегрального преобразования Фурье сведена к решению системы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений на конечных интервалах при определенных граничных условиях. Далее, решение этой системы с помощью аппарата ортогональных многочленов Чебышева сведено к системе квазивполне регулярных бесконечных систем алгебраических уравнений, после чего определены и контактные напряжения в полубесконечных интервалах в замкнутом виде. Рассмотрены частные случаи и выяснен характер поведения контактных напряжений в конечном и полубесконечных участках, а также характер их особенностей.

Перед рассмотрением поставленных задач отметим, что для краткого изложения работы за основу постановки и формулировки задач в качестве деформируемого основания выбрана полуплоскость, а для упругой бесконечной пластины результаты приводятся параллельно, при котором по мере возможности, для них придерживаются одинаковые обозначения.

§1. Постановка задачи и вывод основных разрешающих функциональных уравнений. Пусть упругая полуплоскость (модуль упругости E, коэффициент Пуассона ν) усилена на своей границе $y=0$ разнородными стрингерами с модулями упругости E_1 при $|x|>b$ и E_2 при $|x|<a$ и малыми толщинами h, соответственно, когда контакт между стрингерами и деформируемыми основаниями при $|x|<a$ осуществляется через тонкий слой клея (модуль упругости E_k, коэффициент Пуассона ν_k и толшина h_k), а при $|x|>b$ они находятся в идеальном механическом контакте. Задача заключается в определении контактных напряжений, когда на краях стрингеров т. е. в точках $x=\pm b,\ x=\pm a$ приложены горизонтальные силы P, а в точках $x=\pm c$ – горизонтальные силы $Q\left(Q>P,\ c>b>a\right)$.

Аналогичная задача при отсутствии слоя клея была рассмотрена в работе [1]. Рассматриваемые задачи, когда стрингеры имеют одинаковые упругие характеристики, рассмотрены в работе [2]. В работах [3-7] разными подходами рассмотрены задачи для упругих бесконечных тел, усиленных через слой клея конечными стрингерами, обладающими разными физико-механическими характеристиками.

Здесь относительно стрингеров принимается модель контакта по линии, а для слоя клея – условия чистого сдвига, благодаря чему под стрингерами действуют только касательные контактные напряжения [2-7].

Согласно вышепринятой модели, из условия равновесия элемента стрингеров и закона Гука уравнения равновесия стрингеров с помощью обобщенных функций представим в виде двух уравнений [2]:

$$\frac{dU_1^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_1(x)}{E_1h}+\frac{Q[\delta(x+c)-\delta(x-c)]}{E_1h}-\frac{P[\delta(x+b)-\delta(x-b)]}{E_1h}, \tag{1.1}$$

$$\frac{dU_0^{(1)}(x)}{dx}=\frac{\tau_0(x)}{E_2h}+\frac{P[\delta(x+a)-\delta(x-a)]}{E_2h},\quad -\infty<x<\infty . \tag{1.2}$$

Здесь

$$U_1^{(1)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(1)}/dx,$$

$$U_0^{(1)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(1)}/dx,$$

$$\tau_1(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]\tau(x),\quad \tau_0(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]\tau(x),$$

$$\tau(x)=\tau_0(x)+\tau_1(x)\,, \tag{1.3}$$

$u^{(1)}(x)$ – горизонтальные перемещения точек стрингеров, $\tau(x)$ – интенсивность неизвестных касательных контактных напряжений, $\theta(x)$ – функция Хевисайда, $\delta(x)$ – ее производная.

В дальнейшем, для интегрального преобразования Фурье функции $f(x)$ будем пользоваться обозначениями:

$$\overline{f}(\sigma)=F\left[f(x)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\sigma x}dx\,,\ \ f(x)=F^{-1}\left[\overline{f}(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma\,.$$

Для части стрингера, находящегося на отрезке $\left[-a,a\right]$, полагая, что каждый дифференциальный элемент слоя клея находится в условии чистого сдвига, будем иметь условие [2-7]:

$$u^{(1)}(x)-u^{(2)}(x,0)=k\tau(x)\,,\ -a\le x\le a\,, \tag{1.4}$$

которое в обобщенных функциях можно представить так:

$$U_0^{(1)}(x)=U_0^{(2)}(x)+k\tau_0^*(x)\,,\ -\infty<x<\infty\,, \tag{1.5}$$

где $\tau_0^*(x)=\left[\tau_0(x)\right]'+\tau(a)\left[\delta(x+a)+\delta(x-a)\right]$, $\tau(a)$ – значение $\tau(x)$ в точке $x=a$ при нечетности $\tau(x)$, штрих означает дифференцирование по x, $k=h_k\,/\,G_k$, $G_k=E_k\,/\,2(1+\nu_k)$, $u^{(2)}(x,0)$ – горизонтальные перемещения граничных точек деформируемого основания.

С другой стороны, деформацию граничных точек упругой полуплоскости, когда на ее границе $y=0$ действуют только касательные напряжения интенсивности $\tau(x)$, в обобщенных функциях представим так:

$$\frac{du^{(2)}(x,0)}{dx}=U^{(2)}(x)=\frac{1}{\pi A}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\tau_0(s)+\tau_1(s)\right]ds}{s-x}\,. \tag{1.6}$$

Здесь

$U^{(2)}(x)=U_1^{(2)}(x)+U_0^{(2)}(x)+G_u(x)$, $U_1^{(2)}(x)=\left[\theta(-x-b)+\theta(x-b)\right]du^{(2)}/dx$,

$U_0^{(2)}(x)=\left[\theta(x+a)-\theta(x-a)\right]du^{(2)}/dx$,

$G_u(x)=[\theta(x+b)-\theta(x+a)+\theta(x-a)-\theta(x-b)]g_u(x)$,

$$g_u(x)=du^{(2)}/dx\,,\ x\in(-b,-a)\cup(a,b)\,,\ A=E\big/2(1-\nu^2)\,. \tag{1.7}$$

В аналогичной задаче для бесконечной пластины, находящейся в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, в предположении, что стрингеры расположены по одной $y=0$ линии (xoy – средняя плоскость пластины), в (1.6) A следует заменить на $A^*=4Ed\,/\,b_1^*(1+\nu)(3-\nu)$, где d – толщина пластины, в (1.1) и (1.2) h следует заменить площадями поперечных сечений стрингеров F, а в (1.5) – k на $k^*=k\,/\,b_1^*$, b_1^* – ширина стрингеров в контактных участках.

Для частей стрингеров, находящихся при $|x| > b$, условие контакта в обобщенных функциях будет иметь вид:

$$U_1^{(1)}(x) = U_1^{(2)}(x). \tag{1.8}$$

Теперь применив к (1.1), (1.6) и (1.8) обобщенное преобразование Фурье, а затем поступив аналогичным образом с (1.2), (1.5) и (1.6), получим два функциональных уравнения на действительной оси $-\infty < \sigma < \infty$, которые приводятся к одному уравнению:

$$\begin{gathered}\left(\lambda_1 + |\sigma|\right)\overline{\tau}_1(\sigma) + \left(\lambda_2 + |\sigma| + \kappa A\sigma^2\right)\overline{\tau}_0(\sigma) = Ai\sigma G_u(\sigma) + 2iQ\lambda_1 \sin c\sigma - \\ -2i\lambda_1 P\sin b\sigma + 2i\lambda_2 P\sin a\sigma - 2i\sigma kA\tau(a)\cos a\sigma, \qquad -\infty < \sigma < \infty,\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$\lambda_j = A/E_j h$ $(\mathrm{j} = 1,2)$, $\quad \overline{\tau_i}(\sigma) = F[\tau_i(x)]$ $\quad (i = 0{,}1)$.

Для бесконечной пластины в (1.9) λ_j следует заменить на $\overline{\lambda_j} = A^* / E_j F$ $(j = 1,2)$, k на k^*.

Таким образом, поставленные задачи сведены к решению функциональных уравнений типа (1.9).

§*2.* Решение функционального уравнения (1.9). Для этой цели представим его в следующем виде:

$$\overline{\tau}(\sigma) + \frac{\left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma|} + \frac{kA\sigma^2\,\overline{\tau}_0(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma|} = \frac{Ai\sigma\, G_u(\sigma)}{\lambda_1 + |\sigma|} + \overline{g}(\sigma), \quad -\infty < \sigma < \infty, \tag{2.1}$$

которое после обратного преобразования Фурье представим так:

$$\tau(x) + \left(\lambda_2 - \lambda_1\right)\int_{-a}^{a} K(x-s)\tau_0(s)\,ds - kA\int_{-a}^{a} K'(x-s)\tau_0'(s)\,ds + A\int_{-\infty}^{\infty} K'(x-s)G_u(s)\,ds = g(x),$$

$$-\infty < x < \infty \tag{2.2}$$

Здесь

$$K(x) = F^{-1}\left[K(\sigma)\right],\ \tau(x) = F^{-1}\left[\overline{\tau}(\sigma)\right],\quad K(\sigma) = \frac{1}{\lambda_1 + |\sigma|},$$

$$K'(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\sigma}{\lambda_1 + |\sigma|} e^{-i\sigma x} d\sigma,\quad \tau'(x) = \frac{d\,\tau(x)}{d\,x}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} g(x) = Q\lambda_1[K(x-c) - K(x+c)] - P\lambda_1[K(x-b) - K(x+b)] + \\ +P\lambda_2[K(x-a) - K(x+a)] + kA\tau(a)[K'(x-a) + K'(x+a)]. \end{gathered}$$

Отметим, что $K(x) \sim \ln(1/|x|)$ при $x \to 0$, и $K(x) \sim |x|^{-2}$ при $x \to \infty$.

Теперь, поскольку $\tau(x) = \tau_0(x)$ при $x \in (-a,a)$, а также $\tau(x) = 0$ при $x \in (-b,-a) \cup (a,b)$, $G_u(x) = 0$ при $x \notin (-b,-a) \cup (a,b)$ и имеют место соотношения $\tau(-x) = -\tau(x)$, $g_u(-x) = g_u(x)$, то из (2.2) будем иметь:

$$\tau(x)+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\int_{-a}^{a}K(x-s)\,\tau(s)\,ds-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\,\tau'(s)\,ds+$$

$$+A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds=g(x),\quad x\in(-a,a),$$

$$(2.4)$$

$$A\int_{a}^{b}[K'(x-s)+K'(x+s)]g_u(s)\,ds+\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\int_{-a}^{a}K(x-s)\,\tau(s)\,ds-$$

$$-kA\int_{-a}^{a}K'(x-s)\,\tau'(s)\,ds=g(x),\qquad x\in(a,b)$$

при условиях

$$\int_{-a}^{a}\tau(s)\,ds=0\,,\quad \int_{b}^{\infty}\tau(s)\,ds=Q-P\,. \tag{2.5}$$

Таким образом, задачи сведены к решению системы интегро-дифференциальных уравнений типа (2.4) при условии (2.5).

После решения системы (2.4) значения $\tau(x)$ при $|x|>b$ будут определяться из уравнения (2.2) при требовании, чтобы $|x|>b$.

Теперь отметим некоторые возможные предельные случаи, которые непосредственно можно получить из уравнений (2.2) и (2.4) прямой подстановкой: т.е. а) при $k=0$ [1], б) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ [2], в) при $a\to 0$ (случай с двумя полубесконечными стрингерами), г) $k=0$ и $a\to b$ при учете P неизвестной ($P=X$), д) при $k=0$ $a\to b$ и $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$, которые будут задавать основные разрешающие уравнения соответствующих задач при приложенных здесь силах.

Решение системы (2.4) при условиях (2.5) сведем к системе бесконечных систем алгебраических уравнений. Для этой цели заметим, что имеют место следующие представления:

$$K(x)=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|\lambda_1 x|}+R_1(x)\,, \tag{2.6}$$

$$K'(x-s)+K'(x+s)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)+\frac{\lambda_1}{2}[\operatorname{sgn}(x-s)+\operatorname{sgn}(x+s)]+\lambda_1\left[R_2(x-s)+R_2(x+s)\right],$$

где

$$R_1(x)=-\frac{C}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(\lambda_1x)^{2k}}{\pi(2k)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda_1x|}+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k}-C\right)-\frac{|\lambda_1x|^{2k-1}}{2(2k-1)!}\right],$$

$$R_2(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{(\lambda_1x)^{2k-1}}{\pi(2k-1)!}\left(\ln\frac{1}{|\lambda_1x|}+1+\cdots+\frac{1}{2k-1}-C\right)+\frac{|\lambda_1x|^{2k}\operatorname{sgn}x}{2(2k)!}\right],$$

С – постоянная Эйлера.

Следовательно, систему (2.4) можно представить так:

$$
\begin{gathered}
(1-kA\lambda_1)\tau(x)+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds-\frac{kA}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}\tau'(s)ds+ \\
+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\tau(s)ds-kA\lambda_1\int_{-a}^{a}R_2(x-s)\tau'(s)ds+\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)g_u(s)ds+ \qquad (2.7)\\
+A\lambda_1\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]g_u(s)ds=g(x), \qquad x\in(-a,a),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{s-x}g_u(s)ds-\frac{A}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{1}{s+x}g_u(s)ds+\frac{A\lambda_1}{2}\int_{a}^{b}[\mathrm{sgn}(x-s)+\mathrm{sgn}(x+s)]g_u(s)ds+ \\
+A\lambda_1\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]g_u(s)ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{\pi}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\tau(s)ds-\frac{kA}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{1}{s-x}\tau'(s)ds+ \\
+(\lambda_2-\lambda_1)\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\tau(s)ds-kA\lambda_1\int_{-a}^{a}R_2(x-s)\tau'(s)ds=g^*(x), \quad x\in(a,b).
\end{gathered}
$$

Далее, из первого уравнения (2.7) легко обнаружить, что значения $\tau(x)$ в точках $x=\pm a$ ограничены [2–7]. Следовательно, решения системы (2.7) представим в виде:

$$
\tau(x)=\tau(a)\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}U_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right), \qquad x\in[-a,a], \tag{2.8}
$$

$$
g_u(x)=\frac{1}{\sqrt{1-h^2(x)}}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nT_n[h(x)], \qquad |h(x)|<1, \qquad x\in(a,b), \tag{2.9}
$$

где $h(x)=(2x-a-b)/(b-a)$, $T_n(y)=\cos(n\arccos y)$ ($n=0,1,2,...$) – многочлены Чебышева первого рода $U_{n-1}(x)=\sin(n\arccos x)/\sin(\arccos x)$ ($n=1,2,...$) – многочлены Чебышева второго рода [10], $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Отметим, что из (1.4) и (1.6) легко получить, что $g_u(x)$ и $\tau'(x)$ в точках $x=\pm a$ имеют логарифмическую особенность.

Подставляя выражения $\tau(x)$, $g_u(x)$ в систему (2.7), пользуясь соотношениями [1, 7–14]:

$$
\int_{a}^{b}\sqrt{1-h^2(x)}U_{n-1}[h(x)]U_{m-1}[h(x)]dx=\begin{cases}0, & n\neq m\\ \dfrac{\pi(b-a)}{4}, & n=m=1,2,...\end{cases}, \qquad x\in(a,b),
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{T_n[h(s)]}{(s-x)\sqrt{1-h^2(s)}}ds=\begin{cases}0, & n=0\\ U_{n-1}[h(x)], & n=1,2,...\end{cases}, \qquad x\in(a,b), \tag{2.10}
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{T_n[h(s)]}{(s-x)\sqrt{1-h^2(s)}}ds=\begin{cases}-\dfrac{1}{\sqrt{h^2(x)-1}}, & n=0\\ U_{n-1}[h(x)]-\dfrac{T_n[h(x)]}{\sqrt{h^2(x)-1}}, & n=1,2,...\end{cases}, \qquad x>b,
$$

а также первым условием из (2.5), получим

$$\frac{1-kA\lambda_1}{kAa}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\sqrt{a^2-x^2}U_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{akA\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{T_{2n}\left(s/a\right)ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{kAa\pi}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds+$$

$$+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds-$$

$$-\frac{\lambda_1\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds-2\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(s/a\right)ds+ \qquad (2.11)$$

$$+\frac{1}{k\pi}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds+\frac{\lambda_1}{k}\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds=$$

$$=-\frac{Y_0}{k\pi}\int_a^b\left(\frac{1}{s-x}-\frac{1}{s+x}\right)\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds-\frac{\lambda_1Y_0}{k}\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+g_1(x),\qquad x\in(-a,a),$$

$$A\sum_{n=1}^{\infty}Y_nU_{n-1}[h(x)]-\frac{A}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}Y_n\int_a^b\frac{1}{(s+x)}\frac{T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}-\frac{A\lambda_1(b-a)}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n}{n}\sqrt{1-h^2(x)}U_{n-1}[h(x)]+$$

$$+A\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}T_n[h(s)]ds+$$

$$+A\lambda_1Y_0\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+$$

$$+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds+$$

$$+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{a\pi}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds+$$

$$+\frac{2kA}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{T_{2n}\left(s/a\right)ds}{(s-x)\sqrt{a^2-s^2}}+2kA\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds- \qquad (2.12)$$

$$-\frac{kA\lambda_1\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds=g_2(x),\qquad x\in(a,b),$$

где

$$g_1(x)=\frac{g(x)}{kA}-\frac{\tau(a)}{a}\left[\frac{(1-kA\lambda_1)}{kA}x-\frac{1}{\pi}\ln\frac{a-x}{a+x}\right],$$

$$g_2(x)=g^*(x)+\frac{kA\tau(a)}{\pi a}\ln\frac{x-a}{x+a},\qquad g^*(x)=g(x)+kA\lambda_1\tau(a)\ .$$

Теперь, умножив обе части (2.11) на $(1/a\pi)\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}(x/a)$, а (2.12) на $4\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]/\pi A(b-a)$ и интегрируя в соответствующих интервалах, известным способом получим следующую систему бесконечных систем алгебраических уравнений:

$$X_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(1)}+K_{m,n}^{(2)}+R_{m,n}^{(1)}+R_{m,n}^{(2)}\right)X_n+\left(K_{m,n}^{(3)}+R_{m,n}^{(3)}\right)Y_n\right]=\alpha_m^{(1)}Y_0+L_m^{(1)}+f_m^{(1)}\qquad (m=1,2,..)\tag{2.13}$$

$$Y_m+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(K_{m,n}^{(4)}+K_{m,n}^{(5)}+K_{m,n}^{(6)}\right)Y_n+\left(R_{m,n}^{(4)}+R_{m,n}^{(5)}+R_{m,n}^{(6)}+R_{m,n}^{(7)}\right)X_n\right]=\alpha_m^{(2)}Y_0+L_m^{(2)}+f_m^{(2)}\quad (m=1,2,..)\tag{2.14}$$

Здесь

$$L_m^{(1)}=K_m^{(1)}+R_m^{(1)}+R_m^{(2)},\qquad L_m^{(2)}=K_m^{(2)}+R_m^{(3)}+R_m^{(4)},$$

$$K_{m,n}^{(1)}=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{2k\pi A}\int_{-a}^{a}\left[\frac{T_{2n-1}\left(\frac{x}{a}\right)}{n(2n-1)}-\frac{T_{2n+1}\left(\frac{x}{a}\right)}{n(2n+1)}\right]\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_{m,n}^{(2)}=\frac{(kA\lambda_1-1)a}{kA}\frac{4(2m-1)}{\pi\left[(2n-1)^2-4(m-1)^2\right]\left[(2n-1)^2-4m^2\right]},\ (n,m=1,2,...),$$

$$R_{m,n}^{(1)}=\frac{(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{Ak\pi a^2 n}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_{m,n}^{(2)}=\frac{2\lambda_1}{\pi a}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_{m,n}^{(3)}=\frac{1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\left\{U_{n-1}[h(x)]-U_{n-1}[h_*(x)]-\frac{T_n\left[h(x)\right]}{\sqrt{h^2(x)-1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{T_n\left[h_*(x)\right]}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}\right\}\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_{m,n}^{(3)}=\frac{\lambda_1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$\alpha_m^{(1)}=-\frac{1}{k\pi a}\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}+\lambda_1\int_{a}^{b}[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$K_m^{(1)}=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{kA\pi^2a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$R_m^{(1)}=\frac{\lambda_1\tau(a)}{\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,\qquad h_*(x)=h(-x),$$

$$R_m^{(2)}=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{kA\pi a^2}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx,$$

$$f_m^{(1)}=\frac{1}{\pi a}\int_{-a}^{a}g_1(x)\sqrt{a^2-x^2}U_{2m-1}\left(\frac{x}{a}\right)dx\,,\qquad f_m^{(2)}=\frac{4}{A\pi(b-a)}\int_a^b g_2(x)\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$K_{m,n}^{(4)}=\frac{4}{\pi(a-b)}\int_a^b\sqrt{\frac{1-h^2(x)}{h_*^2(x)-1}}\left[\sqrt{h_*^2(x)-1}-h_*(x)\right]^n U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$K_{m,n}^{(5)}=\frac{\lambda_1(b-a)}{\pi}\frac{2m\left[1+(-1)^{n-m}\right]}{\left[n^2-(m-1)^2\right]\left[n^2-(m+1)^2\right]},\quad n\neq m\pm1;\ K_{m,n}^{(5)}=0,\ n=m\pm1,$$

$$K_{m,n}^{(6)}=\frac{4\lambda_1}{\pi(b-a)}\int_a^b\int_a^b\frac{[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\,T_n[h(s)]ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$R_{m,n}^{(4)}=\frac{2(\lambda_1-\lambda_2)}{\pi A(b-a)}\int_a^b\left[\frac{a^{2n}}{n(2n-1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n-1}}-\frac{a^{2n+2}}{n(2n+1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n+1}}\right]\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx,$$

$$R_{m,n}^{(5)}=\frac{4(\lambda_2-\lambda_1)\tau(a)}{A\pi a(b-a)n}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}\left[h(x)\right]dx,$$

$$R_{m,n}^{(6)}=\frac{8k}{\pi(b-a)}\int_a^b\frac{a^{2n}\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}\left[h(x)\right]dx}{\sqrt{x^2-a^2}(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n}},$$

$$R_{m,n}^{(7)}=\frac{8k\lambda_1}{\pi(b-a)a}\int_a^b\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$R_m^{(3)}=\frac{4(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{\pi A(b-a)a}\int_a^b\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$R_m^{(4)}=\frac{4k\lambda_1\tau(a)}{\pi(a-b)a}\int_a^b\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$K_m^{(2)}=\frac{4(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{\pi^2(b-a)a}\int_a^b\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds\sqrt{1-h^2(x)}U_{m-1}[h(x)]dx\,,$$

$$\alpha_m^{(2)}=\frac{4}{\pi(a-b)}\left[\int_a^b\sqrt{\frac{1-h^2(x)}{h_*^2(x)-1}}U_{m-1}[h(x)]dx+\lambda_1\int_a^b\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{1}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds\sqrt{1-h^2(x)}\,U_{m-1}[h(x)]dx\right]$$

Система уравнений (2.13), (2.14) исследуется аналогично системам [11-13]. Оказывается, что при произвольных значениях λ_1, λ_2 эта система квазивполне регулярна. Постоянная Y_0 определяется из второго условия (2.5). После определения X_n $(n=1,2,3...)$ и Y_n $(n=0,1,2,...)$ значения $\tau(x)$ при $x>b$ будут определяться так:

$$\tau(x)=\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{2}\sum_{n=1}^{\infty}X_n\left[\frac{a^{2n}}{n(2n-1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n-1}}-\frac{a^{2n+2}}{n(2n+1)(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n+1}}\right]+$$
$$+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{\pi a}\int_{-a}^{a}s\ln\frac{1}{|x-s|}ds+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}sR_1(x-s)\,d\,s+$$
$$+\frac{(\lambda_1-\lambda_2)}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{n}\int_{-a}^{a}R_1(x-s)\sqrt{a^2-s^2}U_{2n-1}\left(\frac{s}{a}\right)d\,s-2kA\sum_{n=1}^{\infty}X_n\frac{a^{2n}}{\sqrt{x^2-a^2}\,(x+\sqrt{x^2-a^2})^{2n}}-$$
$$-2kA\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}X_n\int_{-a}^{a}\frac{R_2(x-s)}{\sqrt{a^2-s^2}}T_{2n}\left(\frac{s}{a}\right)d\,s+\frac{kA\lambda_1\tau(a)}{a}\int_{-a}^{a}R_2(x-s)ds-$$
$$-A\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\left[U_{n-1}[h(x)]-U_{n-1}\left[h_*(x)\right]-\frac{T_n\left[h(x)\right]}{\sqrt{h^2(x)-1}}+\frac{T_n\left[h_*(x)\right]}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}\right]+$$
$$+AY_0\left[\frac{1}{\sqrt{h^2(x)-1}}-\frac{1}{\sqrt{h_*^2(x)-1}}-\lambda_1\int_a^b\left[R_2(x-s)+R_2(x+s)\right]\frac{ds}{\sqrt{1-h^2(s)}}\right]-$$
$$-A\lambda_1\sum_{n=1}^{\infty}Y_n\int_a^b[R_2(x-s)+R_2(x+s)]\frac{T_n\left[h(s)\right]}{\sqrt{1-h^2(s)}}ds+kA\lambda_1\tau\left(a\right)+\frac{kA\tau(a)}{\pi a}\ln\frac{x-a}{x+a}+g(x),\quad x>b$$

а значение $\tau(x)$ в точке $x=a$ получим из первого уравнения (2.7), подставляя $x=a$.

Далее, из представления (2.3) и (2.6) следует, что $\tau(x)$ в точках $x=\pm c$ имеет логарифмическую особенность.

С другой стороны, из (2.1) в силу разложения $K(\sigma)=1/\left(\lambda_1+|\sigma|\right)$ при $|\sigma|\to 0$ получим, что $\tau(x)=F^{-1}\left[\overline{\tau}(\sigma)\right]$ при $|x|\to\infty$ имеет степенной порядок $O\left(x^{-3}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э.Х., Мелтонян Б.А. Об одной задаче для упругой полуплоскости, усиленной на своей границе упругими накладками. //Уч. записки ЕГУ, Естеств. науки. 1984. №1. С. 46-51.
2. Керопян А.В. Контактные задачи для упругой полуплоскости и бесконечной пластины, усиленных частично склеенными стрингерами. //Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 2007. №2. С. 35–44.
3. Lubkin J.L. and Lewis L.C. Adhesive shear flow for an axially loaded, finite stringer bounded to an infinite sheet. // Quart J. of Mech. and Applied Math. Vol. XXIII, 1970. P. 521.
4. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Саркисян В.С. Контактная задача для упругой полуплоскости, граница которой усилена склеенными с ней полубесконечными накладками //Изв. РАН. МТТ. 1992. №3. С.180–184.

5. Саркисян В.С., Керопян А.В. Контактные задачи для упругих тел, на границе которых приклеен линейно или нелинейно деформируемый стрингер конечной длины. //В сб. научных трудов: "Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твердого тела." Ереван: НАН Армении. 1999. С. 126 – 132.
6. Григорян Э.Х. О решении задачи для упругой бесконечной пластины, на поверхности которой приклеен стрингер конечной длины. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №4. С. 11-16.
7. Григорян Э.Х., Керопян А.В., Шагинян С.С. Контактная задача для бесконечной пластины с двумя конечными стрингерами, один из которых склеен с ней, а другой находится в идеальном контакте. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №2. С. 14-23.
8. Григорян Э.Х. Об одном эффективном методе решения одного класса смешанных задач теории упругости. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1979. №2. С.62–71.
9. Саркисян В.С., Григорян Э.Х., Шагинян С.С. О двух задачах для упругой плоскости с бесконечным кусочно-однородным включением. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1981. №1. С.27–40.
10. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1979. 415с.
11. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд. ЕГУ, 1983. 259с.
12. Григорян Э.Х., Манукян Э.А. Об одной задаче для упругой плоскости с частично скрепленным бесконечным упругим включением.// Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1981. С. 51-59.
13. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487с.
14. Попов Г.Я. Контактные задачи для линейно-деформируемого основания. Киев–Одесса: "Вища школа", 1982. 167 с.

Ереванский государственный университет

Поступила в редакцию
26.02.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА

Саргсян А. М.

Ключевые слова: упругий клин, сингулярность напряжений типа r^{-1}, окрестность угловой точки, трансцендентное уравнение.

Keywords: elastic wedge, stress singularities in form r^{-1}, neighborhood of angular point, transcendental equation.

Ա.Մ.Սարգսյան
Առաձգականության տեսության մի խնդրում լարումների եզակիության մասին

Հետազոտված է լարումների վարքը կամայական α բացվածքի անկյունով $\left(0<\alpha\le 2\pi\right)$ առաձգական սեպի անկյունային կետի շրջակայքում, երբ սեպի շառավիղային կողերի վրա տրված են ողորկ կոնտակտով եզրային պայմաններ:

Լարումների եզակիության կարգը որոշող տրանսցենդենտ հավասարման արմատների հետազոտությանը, որը դեռևս 1969 թ., կատարել էր Ա.Ի. Կալանդիան $\alpha<\pi$ անկյունների դեպքում, լրացված է $\pi\le\alpha\le 2\pi$ միջակայքի համար:

$\alpha=\pi$ և $\alpha=2\pi$ դեպքերում մեկնաբանված է լարումների տիպի եզակիության մեխանիկական իմաստը:

A.M.Sargsyan
On Stresses Singularity in one Problem of Elasticity Theory for the Wedge

The behavior of the stresses in the angular point neighborhood of the elastic wedge with arbitrary opening angle α $\left(0<\alpha\le 2\pi\right)$ is considered. On the radial bounds of the wedge the boundary conditions of the smooth contact are given.

The investigation of the transcendental equation roots at $\alpha<\pi$, determining the order of the stresses singularity , which was carried out by A.I.Kalandia in 1969, is completed for the interval $\pi\le\alpha\le 2\pi$.

The mechanical sense of the stresses singularity of r^{-1} type in case of $\alpha=\pi$ and $\alpha=2\pi$ is interpreted.

Исследуется поведение напряжений в окрестности угловой точки упругого клина с произвольным углом раствора α $\left(0<\alpha\le 2\pi\right)$, когда на радиальных гранях заданы граничные условия гладкого контакта.

Исследование корней трансцендентного уравнения, определяющих порядок сингулярности напряжений, которое еще в 1969 г. проводил А.И. Каландия при $\alpha<\pi$, дополняется для интервала $\pi\le\alpha\le 2\pi$.

Интерпретирован механический смысл особенности напряжений типа r^{-1} в случаях $\alpha=\pi$, $\alpha=2\pi$.

Сингулярности напряжений, возникающие в основных граничных задачах плоской теории упругости для упругого клина с произвольным углом раствора α в его вершине, когда на гранях заданы внешние усилия (случай I-I) или смещения (случай II-II), либо когда на одной грани заданы усилия, а на другой – смещения (случай I-II), впервые, по-видимому, исследованы в работе М.Л.Вильямса [1].

Представляя функцию напряжений Эри в виде

$$\Phi(r,\varphi) = r^{\lambda+1}\sum_{j=1}^{2}[A_j\cos(\lambda-(-1)^j)\varphi + B_j\sin(\lambda-(-1)^j)\varphi]$$

где A_j, B_j, λ – произвольные комплексные параметры, и удовлетворяя на гранях клина однородным граничным условиям, задачи о сингулярности сведены к исследованию корней соответствующих трансцендентных уравнений относительно λ. Кроме выявления зависимости порядка сингулярности напряжений от угла раствора α, а в третьем случае и от коэффициента Пуассона ν материала клина, получены также условия отсутствия сингулярности напряжений.

В работе [2] А.И.Каландии, используя известный метод Колосова–Мусхелишвили, наряду с основными задачами теории упругости (случай I-I, II-II и I-II) исследован также случай III-III, когда на гранях клина осуществляется условие соприкасания с жестким штампом без трения

$$u_\varphi = f(r), \quad \tau_{r\varphi} = 0.$$

Для этого случая трансцендентное уравнение

$$\sin\lambda\alpha \pm \sin\alpha = 0$$

имеет только вещественные корни. Отметим, что уравнение (1) возникает также при граничных условиях

$$u_r = f(r), \quad \sigma_\varphi = 0$$

на гранях клина. Такие граничные задачи связаны с вопросами передачи нагрузок от тонкостенных элементов в виде стрингеров к массивным упругим телам [3].

Рассмотрены и другие возможные виды граничных условий – случаи I-III и II-III (обозначения здесь очевидны). Найдены корни трансцендентных уравнений с минимальными положительными действительными частями при $\nu = 0{,}3$ и при различных значениях α из интервала $0 < \alpha \le 2\pi$. Для всех шести случаев построены графики функции $\min\mathrm{Re}\lambda$. При $\mathrm{Re}\lambda < 1$ напряжения у вершины клина имеют сингулярность порядка $1 - \min\mathrm{Re}\lambda$.

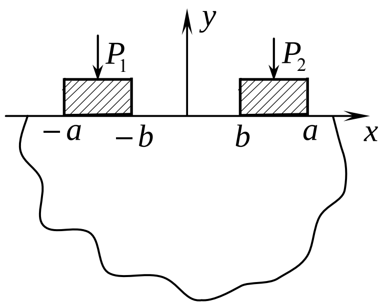
Далее, по поводу случая III-III, А.И.Каландия пишет: «В случае III-III график показан лишь в интервале $(0,\pi)$. Корень $\lambda = 0$, соответствующий $\alpha = \pi$, тривиален и его следует исключить».

В связи с этим замечанием А.И.Каландии возникают следующие вопросы:

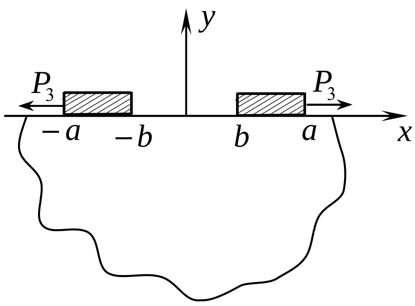
1. *Каково поведение напряжений вблизи вершины клина при* $\alpha = \pi$ **?**

Ведь в случае $\alpha = \pi$ уравнение (1) имеет корни $\lambda = k \ (k = 0,1,2,\ldots)$, и при исключении корня $\lambda = 0$ получается, что напряжения в вершине клина принимают конечные значения. Этого не может быть из соображения непрерывности: в интервале $0 < \alpha \le \pi$ из решения (1) имеем $\lambda_{\min} = \pi/\alpha - 1$ и при $\alpha = \pi - \varepsilon$ (ε – сколь угодно малое положительное число) порядок сингулярности напряжений равен $1 - \varepsilon/(\pi - \varepsilon)$. При $\varepsilon \to 0$ напряжения в окрестности вершины клина стремятся к бесконечности как $1/r$.

Как заметил профессор д.ф.-м.н. С.М.Мхитарян во время обсуждения этого вопроса, подобного рода сингулярности напряжений возникают в контактных задачах о взаимодействии с упругой полуплоскостью двух неодинакого нагруженных абсолютно жестких штампов или нагруженных горизонтальными силами абсолютно жестких к растяжению и абсолютно гибких к изгибу двух накладок [4, 5]. Приведем соответствующие формулы:



Фиг. 1



Фиг. 2

$$p(x)=\frac{[(P_1+P_2)x-c_0]\operatorname{sgn}x}{\pi\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \qquad (2)$$

$p(x)$ – давление под штампами,

$$c_0=\frac{\pi a}{2K(k')}(P_1-P_2) \qquad (3)$$

c_0 – жесткое вертикальное смещение штампов при кососимметричном нагружении,

$K(k')$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$k'=\sqrt{1-b^2/a^2}, \quad b<|x|<a$

$$\tau(x)=\frac{aP_3\operatorname{sgn}x}{K(k')\sqrt{(a^2-x^2)(x^2-b^2)}} \qquad (2')$$

$\tau(x)$ – касательное напряжение под накладками

$$\delta=\frac{2P_3}{E}\frac{K(k)}{K(k')} \qquad (3')$$

δ – жесткое горизонтальное смещение накладок,

$k=b/a, \quad b<|x|<a$

$$K(k')=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}$$

Когда расстояние между штампами (накладками) стремится к нулю $(b\to 0)$, давление $p(x)$ под штампами (касательное напряжение $\tau(x)$ под накладками) в начале координат стремится к бесконечнсти как $1/r$ (фиг. 1 и 2).

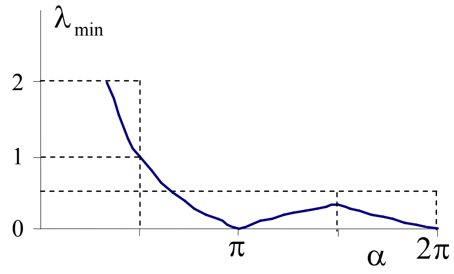
Причем, если задаются внешние силы $P_j\,(j=1,2,3)$, то коэффициенты при этих особенностях, а также δ и c_0 становятся равными нулю ($K(k')$ имеет логарифмическую особенность при $b\to 0$).

Если задать c_0 и δ, то, как следует из (3) и (3'), внешние силы P_j возрастают логарифмически. В этом случае коэффициенты при особенностях типа r^{-1} становятся конечными.

Формулы (2') и (3') заимствованы с согласия С.М. Мхитаряна из его еще неопубликованной работы.

2. ***Почему в рамках обычной теории упругости задача III–III не исследована в интервале $\pi\le\alpha\le 2\pi$, и каков порядок сингулярности напряжений при $\alpha>\pi$ и, в частности, в вершине трещины?***

Из решения уравнения (1) имеем

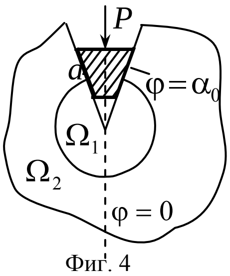


Фиг.3

$$\lambda_{\min}=\begin{cases}\pi/\alpha-1, & 0<\alpha\le\pi\\ 1-\pi/\alpha, & \pi\le\alpha\le 3\pi/2\\ 2\pi/\alpha-1, & 3\pi/2\le\alpha\le 2\pi\end{cases}$$

Зависимость $\lambda_{\min}$ от α представлена в виде графика на фиг.3. И в случае $\alpha=2\pi$ $\lambda_{\min}=0$, т.е. в вершине трещины ($r\to 0$) напряжение имеет сингулярность r^{-1}.

Заметим здесь, что и в монографиях [6, 7] несколько иным путем получены те же трансцендентные уравнения, соответствующие описанным выше шести случаям граничных условий, однако кривые зависимости $\min\operatorname{Re}\lambda$ от угла раствора клина при различных граничных условиях заимствованы из работы [2] без каких-либо комментариев.



Фиг. 4

То, что задача III-III имеет реальный физический смысл и в случае $\pi\le\alpha\le 2\pi$ сомнений не вызывает хотя бы потому, что в более поздних исследованиях других авторов эта задача рассматривалась для любого угла раствора клина, в том числе и для $\alpha=2\pi$.

Так, в работе [8] при рассмотрении задач для составленной из двух однородных областей $\Omega_1\{0\le r\le a, -\alpha_0\le\varphi\le\alpha_0, 2\alpha>\pi\}$ и $\Omega_2\{a\le r<\infty, -\alpha_0\le\varphi\le\alpha_0\}$ упругой плоскости с бесконечным клиновидным вырезом (фиг. 4), к краям которого без трения прижат жесткий штамп в виде клина, возникла необходимость исследовать краевую задачу о плоской деформации бесконечного упругого клина с общим основным условием $\tau_{r\varphi}=0$ при $\varphi=\pm\alpha_0$ $(\alpha=2\alpha_0)$ и со смешанными условиями:

а) $u_\varphi(r,\pm\alpha_0)=\pm g_1(r)$ $\quad(1\le r<\infty)$,

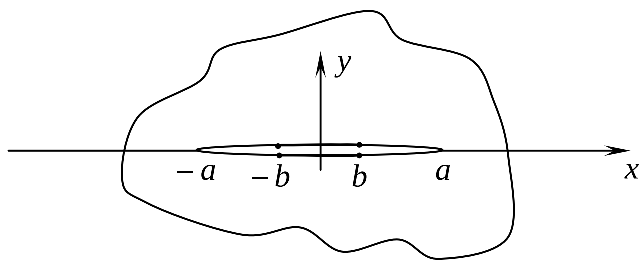
б) $\sigma_\varphi(r,\pm\alpha_0)=f_2(r)$ $\quad(1\le r<\infty)$, $u_\varphi(r,\pm\alpha_0)=\pm g_2(r)$ $\quad(0\le r\le 1)$

Представляя решение задачи в виде интеграла Меллина и удовлетворяя неоднородным граничным условиям а) и б), с учетом симметрии граничных условий получены соответствующие трансцендентные уравнения для случаев I-I и III-III, что и следовало ожидать.

Граничная задача для упругого кругового сектора, на окружной части которого заданы нормальные нагрузки в виде двух симметричных сосредоточенных сил, а на радиальных сторонах–нулевые касательные напряжения и нормальные перемещения, исследована в работе [9]. Более подробно рассмотрен случай, когда

$u_\varphi(r, \pm\alpha_0) = a_0 r$. Приведены асимптотические представления напряжений у вершины сектора. Причем, полученный в этой задаче порядок особенности напряжений, естественно, содержится в решении уравнения (1). В случае $\alpha_0 = \pi$, т.е. в вершине трещины все три напряжения стремятся к бесконечности как r^{-1}, однако коэффициенты при этих особенностях становятся равными нулю и, как пишут авторы, «в разложениях по тригонометрическим функциям «неинтегрируемые» особенности исчезают».

Работа [10] посвящена исследованию смешанной граничной задачи для упругого пространства со сквозной прямолинейной трещиной конечной длины, когда на одинаковых участках верхнего и нижнего берегов трещины ($|x| < b$) задаются компоненты смещений, а остальные части берегов трещины свободны от напряжений (фиг. 5). При этом упругое пространство находится в условиях антиплоской или плоской деформации.



Фиг. 5

Для случая антиплоской деформации задаются следующие граничные условия:

$$u_z^{\pm}(x,0) = \pm f(x) \quad (|x| < b), \quad \tau_{yz}^{\pm}(x,0) = 0 \quad (b < |x| < a),$$

а в случае плоской деформации –

$$u_y^{\pm}(x,0) = \pm f(x) \quad (|x| < b), \quad \tau_{yz}^{\pm}(x,0) = 0 \quad |x| < a,$$

$$\sigma_y^{\pm}(x,0) = 0 \quad (|x| < b).$$

Решение одной задачи получается из другой путем соответствующих замен.

В случае антиплоской деформации получено явное выражение для касательного напряжения $\tau_{yz}(x,0)$ как при $|x| < b$, так и при $|x| > a$, а в случае плоской деформации – $\sigma_y(x,0)$ при $|x| < b$ и $|x| > a$. И здесь получены формулы, аналогичные (3) и (3'). В пределе, когда $b \to a$, соответствующие напряжения в вершинах трещин стремятся к бесконечности как r^{-1}.

Таким образом, появление неинтегрируемой особенности напряжений типа r^{-1} в различных задачах теории упругости не случайно, но, к сожалению, какого-либо объяснения по поводу его возникновения и физического смысла не было дано.

По интерпретации С.М. Мхитаряна появление сингулярности напряжений типа r^{-1}, когда задается c_0 или δ, физически означает следующее: еще до того, как расстояние между штампами (накладками) становится равным нулю, в сечении $x = 0$ упругой полуплоскости разрушающие напряжения σ_x, пропорциональные P_j, возрастая вместе с P_j, достигают предела хрупкого разрушения, вследствие чего образуется вертикальная трещина, берега которой расходятся. А в задаче, исследованной в работе [10], трещина начинает распространяться до того, как размер накладки $2b$ достигнет размера трещины ($b = a$), так как при этом коэффициент интенсивности напряжений становится сколь угодно большим.

Для нехрупких материалов при $b \to 0$ (фиг. 1, 2) или $b \to a$ (фиг. 5) соответственно в некоторой окрестности начала координат и в вершине трещины, естественно, возникают нелинейные эффекты и, как в задаче Фламана–Буссинеска, окрестность этих точек при определенных этапах исследований можно исключить из анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams M. L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extensions. // J. Appl. Mech. 1952. Vol. 19. № 4. P. 526-528.
2. Каландия А. И. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. // ПММ. 1969. Т.33. № 1. С. 132-135.
3. Melan E. Ein Beitrag zur Theoric geschweisster Verbindungen. // Ing.- Archiv. 1932. Bd. 3. Heft 2. p.123.
4. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.– Л.: Гостехтеориздат, 1949. 270 с.
5. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойкими. М.: Наука, 1983. 487с.
6. Партон В.З., Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. М.: Наука, 1977. 312с.
7. Партон В.З., Перлин П.И. Методы математической теории упругости. М.: Наука, 1981. 688с.
8. Лебедев Д. В. Хрупкое разрушение упругой составной плоскости с клиновидным вырезом. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т.43. № 2. С. 12-21.
9. Макарян В. С., Саркисян В. Г. Об одной граничной задаче для упругого кругового сектора. // Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т.43. № 2. С. 3-11.
10. Gevorgyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitaryan S.M., Mkrtchyan M.S. On A Mixed Problem For An Elastic Space With A Crack Under Antiplane And Plane Deformations. Collection of Papers. Yerevan-2005. 282p.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
10.11.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

УЧЕТ НЕПРЕРЫВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Барсегян В. Р., Геворкян Г. А.

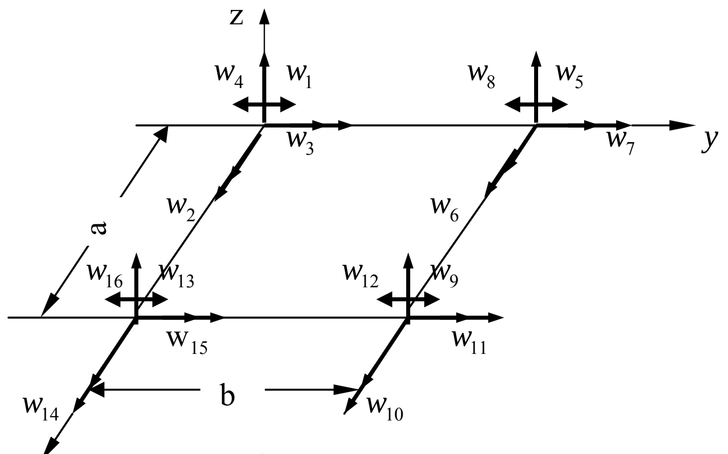
Ключевые слова: конечные элементы, узловые перемещения, квадратичное программирование, пластина, изгиб.
Keywords: finite elements, junction transferences, quadratic programming, plate, bending.

Վ. Ռ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորգյան
Լարումների անընդհատության հաշվառումը վերջավոր տարրերի մեթոդով սալերի ծռման խնդիրների լուծման ժամանակ
Առաջարկվում է քառանկյունաձև վերջավոր տարրերի մեթոդի ձևափոխված տարբերակ, որում լարումների անընդհատության հաշվառումով սալերի ծռման խնդիրների լուծումը հանգեցվում է քառակուսային ծրագրավորման խնդրի:

V. R. Barseghyan, G. A. Gevorgyan
Consideration of Continuousness of Tensions in Solving the Tasks of Plate Bending by the Finite - Element Method
It is suggested a modification of tetragonal finite - element method, where the tasks of plate bending with taking into consideration continuousness of tensions are reduced to quadratic programming ones.

Предлагается модификация метода конечных элементов четырехугольной формы, при котором решения задач изгиба пластин с учетом непрерывности напряжений сводятся к задачам квадратичного программирования.

Срединную плоскость плиты представим в виде совокупности $s \in N = \{1, 2, ..., \overline{n}\}$ конечных элементов прямоугольной формы. Рассмотрим прямоугольный элемент плиты в плоскости xy, показанный на фиг.1. Обозначим через $w_s = (w_1^s, w_2^s, ..., w_{16}^s)^T$ вектор узловых перемещений. Нумерация и положительные направления компонентов этого вектора приведены на фиг.1. Здесь вектором с двумя стрелками указано положительное направление поворота, связанное с движением штопора в направлении вектора, а вектором с двухсторонними стрелками указан угол сдвига.



Фиг. 1

Перемещения точек срединной поверхности элемента аппроксимируем следующим многочленом четвертого порядка, содержащим 16 неизвестных параметров:

$$w^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \Phi_i(x,y), \tag{1}$$

тогда, при $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ для функции Эрмита $\Phi_i(x,y)$ имеем [4]:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1^s(\xi,\eta) = 1 - 3\xi^2 - 3\eta^2 + 2\xi^3 + 2\eta^3 + 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3,\\
&\Phi_2^s(\xi,\eta) = b(\eta - 2\eta^2 - 3\xi^2\eta + \eta^3 + 2\xi^3\eta + 6\xi^2\eta^2 -\\
&\qquad - 3\xi^2\eta^3 - 4\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta,\\
&\Phi_3^s(\xi,\eta) = a(-\xi + 2\xi^2 - \xi^3 + 3\xi\eta^2 - 2\xi\eta^3 - 6\xi^2\eta^2 +\\
&\qquad +4\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_4^s(\xi,\eta) = ab(\xi\eta - 2\xi^2\eta - 2\xi\eta^2 + \xi^3\eta + \xi\eta^3 + 4\xi^2\eta^2 -\\
&\qquad -2\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3),\\
&\Phi_5^s(\xi,\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3,\\
&\Phi_6^s(\xi,\eta) = b(-\eta^2 + \eta^3 + 3\xi^2\eta^2 - 3\xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_7^s(\xi,\eta) = a(-3\xi\eta^2 + 2\xi\eta^2 + 6\xi^2\eta^2 - 4\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_8^s(\xi,\eta) = ab(-\xi\eta^2 + \xi\eta^3 + 2\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3),\\
&\Phi_9^s(\xi,\eta) = 9\xi^2\eta^2 - 6\xi^2\eta^3 - 6\xi^3\eta^2 + 4\xi^3\eta^3,\\
&\Phi_{10}^s(\xi,) = b(-3\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 2\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_{11}^s(\xi,\eta) = a(3\xi^2\eta^2 - 2\xi^2\eta^3 - 3\xi^3\eta^2 + 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_{12}^s(\xi,\eta) = ab(\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3),\\
&\Phi_{13}^s(\xi,\eta) = 3\xi^2 - 2\xi^3 - 9\xi^2\eta^2 + 6\xi^2\eta^3 + 6\xi^3\eta^2 - 4\xi^3\eta^3,\\
&\Phi_{14}^s(\xi,\eta) = b(3\xi^2\eta - 2\xi^3\eta - 6\xi^2\eta^2 + 3\xi^2\eta^3 + 4\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_{15}^s(\xi,\eta) = a(\xi^2 - \xi^3 - 3\xi^2\eta^2 + 2\xi^2\eta^3 + 3\xi^3\eta^2 - 2\xi^3\eta^3),\\
&\Phi_{16}^s(\xi,\eta) = ab(-\xi^2\eta + \xi^3\eta + 2\xi^2\eta^2 - \xi^2\eta^3 - 2\xi^3\eta^2 + \xi^3\eta^3).
\end{aligned} \tag{2}$$

Компоненты вектора перемещения

$$f_s = (w^s, \frac{\partial w^s}{\partial y}, -\frac{\partial w^s}{\partial x}, \frac{\partial^2 w^s}{\partial x \partial y})^T = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$$

внутри s-го элемента соответственно определяются формулой (1) и формулами

$$\theta^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x,y)}{\partial y},$$

$$\omega^s(x,y) = -\sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i(x,y)}{\partial x},$$

$$\gamma^s(x,y) = \sum_{i=1}^{16} w_i^s \frac{\partial \Phi_i^2(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Потенциальная энергия изгиба s -го элемента определяется выражением [3]

$$\Omega_s = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b \left\{[\nabla^2 w(x,y)]^2 + 2(1-\nu)[(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y})^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}]\right\} dxdy\,, \tag{3}$$

где $D = Eh^3 / 12(1-\nu^2)$, $E-$модуль упругости, $h-$ толщина плиты, ν – коэффициент Пуассона.

Подставляя значения $w^s(x,y)$ из выражения (1) в выражение (3), с учетом связей (2) потенциальную энергию изгиба представим в виде

$$\overline{\Omega}_s = \frac{1}{2}(w_s)^T k_s w_s\,, \tag{4}$$

где $k_s = \dfrac{D}{ab}\left\|\overline{k}_{ij}^s\right\|$ – матрица жесткости, компоненты которой при $m = \dfrac{a}{b}$ определяются формулами:

$$\overline{k}_{11}^s = \overline{k}_{55}^s = \overline{k}_{99}^s = \overline{k}_{13,13}^s = \frac{156}{35}(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{72}{25}\,,$$

$$\overline{k}_{22}^s = \overline{k}_{66}^s = \overline{k}_{10,10}^s = \overline{k}_{14,14}^s = (\frac{4}{35m^2} + \frac{52}{35}m^2 + \frac{8}{25})b^2\,,$$

$$\overline{k}_{33}^s = \overline{k}_{77}^s = \overline{k}_{11,11}^s = \overline{k}_{15,15}^s = (\frac{52}{35m^2} + \frac{4}{35}m^2 + \frac{8}{25})a^2\,,$$

$$\overline{k}_{44}^s = \overline{k}_{88}^s = \overline{k}_{12,12}^s = \overline{k}_{16,16}^s = [\frac{4}{105}(\frac{1}{m^2} + m^2) + \frac{8}{225}]a^2b^2\,,$$

$$\overline{k}_{21}^s = \overline{k}_{14,13}^s = -\overline{k}_{65}^s = -\overline{k}_{10,9}^s = [\frac{22}{35m^2} + \frac{78}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]b\,,$$

$$\overline{k}_{11,9}^s = \overline{k}_{15,13}^s = -\overline{k}_{31}^s = -\overline{k}_{75}^s = [\frac{78}{35m^2} + \frac{22}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]a\,,$$

$$\overline{k}_{32}^s = -\overline{k}_{76}^s = \overline{k}_{11,10}^s = -\overline{k}_{15,14}^s = -[\frac{11}{35}(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{1}{50}(1+60\nu)]ab\,,$$

$$\overline{k}_{51}^s = \overline{k}_{13,9}^s = \frac{54}{35m^2} - \frac{156}{35}m^2 - \frac{72}{25}\,,$$

$$\overline{k}_{52}^s = \overline{k}_{14,9}^s = -\overline{k}_{61}^s = -\overline{k}_{13,10}^s = (\frac{13}{35m^2} - \frac{78}{35}m^2 - \frac{6}{25})b\,,$$

$$\overline{k}_{62}^s = \overline{k}_{14,10}^s = (-\frac{3}{35m^2} + \frac{26}{35}m^2 - \frac{2}{25})b^2\,,$$

$$\overline{k}_{71}^s = \overline{k}_{53}^s = -\overline{k}_{13,11}^s = -\overline{k}_{15,9}^s = [-\frac{27}{35m^2} + \frac{22}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]a\,,$$

$$\overline{k}_{73}^s = \overline{k}_{15,11}^s = (\frac{18}{35m^2} - \frac{4}{35}m^2 - \frac{8}{25})a^2\,,$$

$$\overline{k}_{91}^s = \overline{k}_{13,5}^s = -\frac{54}{35}(m^2 + \frac{1}{m^2}) + \frac{72}{25}\,,$$

$$\overline{k}_{92}^s = \overline{k}_{14,5}^s = -\overline{k}_{10,1}^s = -\overline{k}_{13,6}^s = (-\frac{13}{35m^2} - \frac{27}{35}m^2 + \frac{6}{25})b\,,$$

$$\bar{k}^s_{93} = \bar{k}^s_{13,7} = -\bar{k}^s_{11,1} = -\bar{k}^s_{15,5} = (\frac{27}{35m^2} + \frac{13}{35}m^2 - \frac{6}{25})a,$$

$$\bar{k}^s_{13,1} = \bar{k}^s_{95} = -\frac{156}{35m^2} + \frac{54}{35}m^2 - \frac{72}{25},$$

$$\bar{k}^s_{96} = \bar{k}^s_{10,5} = -\bar{k}^s_{14,1} = -\bar{k}^s_{13,2} = [\frac{22}{35m^2} - \frac{27}{35}m^2 + \frac{6}{25}(1+5\upsilon)]b,$$

$$\bar{k}^s_{97} = \bar{k}^s_{13,3} = -\bar{k}^s_{15,1} = -\bar{k}^s_{11,5} = (\frac{78}{35m^2} - \frac{13}{35}m^2 + \frac{6}{25})a,$$

$$\bar{k}^s_{10,2} = \bar{k}^s_{14,6} = (\frac{3}{35m^2} + \frac{9}{35}m^2 + \frac{2}{25})b^2,$$

$$\bar{k}^s_{14,2} = \bar{k}^s_{10,6} = (-\frac{4}{35m^2} + \frac{18}{35}m^2 - \frac{8}{25})b^2,$$

$$\bar{k}^s_{11,3} = \bar{k}^s_{15,7} = (\frac{9}{35m^2} + \frac{3}{35}m^2 + \frac{2}{25})a^2,$$

$$\bar{k}^s_{15,3} = \bar{k}^s_{11,7} = (\frac{26}{35m^2} - \frac{3}{35}m^2 - \frac{2}{25})a^2,$$

$$\bar{k}^s_{63} = \bar{k}^s_{14,11} = -\bar{k}^s_{72} = -\bar{k}^s_{15,10} = [\frac{13}{70m^2} - \frac{11}{35}m^2 - \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab,$$

$$\bar{k}^s_{14,7} = \bar{k}^s_{15,6} = -\bar{k}^s_{10,3} = -\bar{k}^s_{11,2} = [\frac{13}{70}(m^2 + \frac{1}{m^2}) - \frac{1}{50}]ab,$$

$$\bar{k}^s_{10,7} = \bar{k}^s_{15,2} = -\bar{k}^s_{11,6} = -\bar{k}^s_{14,3} = [-\frac{11}{35m^2} + \frac{13}{70}m^2 - \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab,$$

$$\bar{k}^s_{41} = \bar{k}^s_{12,9} = -\bar{k}^s_{85} = -\bar{k}^s_{16,13} = [\frac{11}{35}(\frac{1}{m^2} + m^2) + \frac{1}{50}(1+10\upsilon)]ab,$$

$$\bar{k}^s_{81} = \bar{k}^s_{16,9} = -\bar{k}^s_{54} = -\bar{k}^s_{13,12} = [-\frac{13}{70m^2} + \frac{11}{35}m^2 + \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab,$$

$$\bar{k}^s_{13,8} = \bar{k}^s_{16,5} = -\bar{k}^s_{94} = -\bar{k}^s_{12,1} = [\frac{13}{70}(\frac{1}{m^2} + m^2) - \frac{1}{50}]ab,$$

$$\bar{k}^s_{9,8} = \bar{k}^s_{16,1} = -\bar{k}^s_{12,5} = -\bar{k}^s_{13,4} = [\frac{11}{35m^2} - \frac{13}{70}m^2 + \frac{1}{50}(1+5\upsilon)]ab,$$

$$\bar{k}^s_{42} = \bar{k}^s_{86} = -\bar{k}^s_{12,10} = -\bar{k}^s_{16,14} = [\frac{2}{35m^2} + \frac{22}{105}m^2 + \frac{2}{75}(1+5\upsilon)]ab^2,$$

$$\bar{k}^s_{64} = \bar{k}^s_{82} = -\bar{k}^s_{14,12} = -\bar{k}^s_{16,10} = [-\frac{3}{70m^2} + \frac{11}{105}m^2 - \frac{1}{150}(1+5\upsilon)]ab^2,$$

$$\bar{k}^s_{10,4} = \bar{k}^s_{14,8} = -\bar{k}^s_{12,2} = -\bar{k}^s_{16,6} = (\frac{3}{70m^2} + \frac{13}{210}m^2 + \frac{1}{150})ab^2,$$

$$\bar{k}^s_{14,4} = \bar{k}^s_{10,8} = -\bar{k}^s_{12,6} = -\bar{k}^s_{16,2} = (-\frac{2}{35m^2} + \frac{13}{105}m^2 - \frac{2}{75})ab^2,$$

$$\bar{k}^s_{8,7} = \bar{k}^s_{12,11} = -\bar{k}^s_{43} = -\bar{k}^s_{16,15} = [\frac{22}{105m^2} + \frac{2}{35}m^2 + \frac{2}{75}(1+5\upsilon)]a^2b\,,$$

$$\bar{k}^s_{8,11} = \bar{k}^s_{12,7} = -\bar{k}^s_{15,4} = -\bar{k}^s_{16,3} = [\frac{11}{105m^2} - \frac{3}{70}m^2 - \frac{1}{150}(1+5\upsilon)]a^2b\,,$$

$$\bar{k}^s_{8,15} = \bar{k}^s_{12,3} = -\bar{k}^s_{11,4} = -\bar{k}^s_{16,7} = (\frac{13}{210m^2} + \frac{3}{70}m^2 + \frac{1}{150})a^2b\,,$$

$$\bar{k}^s_{8,3} = \bar{k}^s_{15,12} = -\bar{k}^s_{74} = -\bar{k}^s_{16,11} = (\frac{13}{105m^2} - \frac{2}{35}m^2 - \frac{2}{75})a^2b\,,$$

$$\bar{k}^s_{8,4} = \bar{k}^s_{12,16} = (-\frac{1}{35m^2} + \frac{2}{105}m^2 - \frac{2}{225})a^2b^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{12,4} = \bar{k}^s_{16,8} = [-\frac{1}{70}(\frac{1}{m^2} + m^2) + \frac{1}{450}]a^2b^2\,,$$

$$\bar{k}^s_{12,8} = \bar{k}^s_{16,4} = (\frac{2}{105m^2} - \frac{1}{35}m^2 - \frac{2}{225})a^2b^2\,.$$

Обозначим через $P_s = (P^s_1, P^s_2, ..., P^s_{16})^T$ вектор узловых нагрузок, эквивалентный внешней нагрузке.

В случае равномерно распределенной нагрузки q имеем [3]

$$P_s = \frac{qab}{4}(1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, \frac{ab}{36}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, -\frac{ab}{36}, 1, -\frac{b}{6}, \frac{a}{6}, \frac{ab}{36}, 1, \frac{b}{6}, -\frac{a}{6}, -\frac{ab}{36})^T\,.$$

Работа узловых нагрузок элемента задается формулой [3]

$$\tilde{\Omega}^s = w_s^T P_s\,. \qquad (5)$$

Принимая во внимание формулы (4) и (5), находим общую потенциальную энергию s -го конечного элемента

$$\Omega^s = \bar{\Omega}^s - \tilde{\Omega} = \frac{1}{2}w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s\,.$$

Исходя из принципа минимума потенциальной энергии системы, для определения искомых векторов $w_s, s \in \{1, 2, ..., \bar{n}\}$ получим следующую задачу квадратичного программирования [1,2]:

$$\min\left\{\sum_{s=1}^{\bar{n}}(\frac{1}{2}w_s^T k_s w_s - w_s^T P_s)\,|\,\text{условие совместности деформации,}\right.$$

$$\left.\text{кинематические краевые условия}\right\} \qquad (6)$$

Обозначим через $w = (w_1^1, w_1^2, w_1^3, w_1^4, ..., w_n^1, w_n^2, w_n^3, w_n^4)^T$ вектор узловых перемещений, $P = (P_1^1, P_1^2, P_1^3, P_1^4, ..., P_n^1, P_n^2, P_n^3, P_n^4)^T$ – вектор узловых нагрузок, $K = \frac{D}{ab}\left\|K_{ij}\right\|$ – матрица жесткости для всей пластины, n – общее число узлов пластины.

Далее, вводя обозначения

$$w_1^1 + K_{12}^{(0)}w_1^2 + K_{13}^{(0)}w_1^3 + K_{14}^{(0)}w_1^4 + ... + K_{1(4n-1)}^{(0)}w_n^3 + K_{1(4n)}^{(0)}w_n^4 = -r_1\,,$$

$$w_1^2 + K_{23}^{(1)}w_1^3 + K_{24}^{(1)}w_2^1 + +K_{24}^{(0)}w_1^4 ... + K_{2(4n-1)}^{(1)}w_n^3 + K_{2(4n)}^{(1)}w_n^4 = -r_2\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (7)$$

$$w_n^3 + K_{(4n-1)(4n)}^{(4n-3)} w_n^4 = -r_{4n-1},$$

в котором

$$K_{ii}^{(0)} = -K_{ii}, i \in M = \{1, 2, ..., 4n\}; \quad K_{1j}^{(0)} = -K_{1j}, j \in \{2, 3, ..., 4n\},$$

$$K_{ij}^{(r)} = -K_{ij}^{(r-1)} - K_{i(j-1)}^{(r-1)} K_{ij}^{(r-1)}, r \in \bar{M} = \{1, 2, ..., 4n-1\},$$

$$i \in \{r, ..., 4n\}, \; j \in \{r+1, ..., 4n\}$$

$$q_{ii} = K_{ii}^{(0)} - \sum_{s=1}^{i-1} (K_{si}^{(s)})^2 - 1, i \in \bar{M}; \quad q_{(4n)4n} = K_{(4n)4n}^{(0)} - \sum_{i=1}^{4n-1} (K_{i(4n)}^{(4n)})^2,$$

целевую функцию задачи (6) представим в виде

$$\Omega = \frac{1}{2}(w^T Q w + \frac{D}{ab} r^T I r) - w^T P.$$

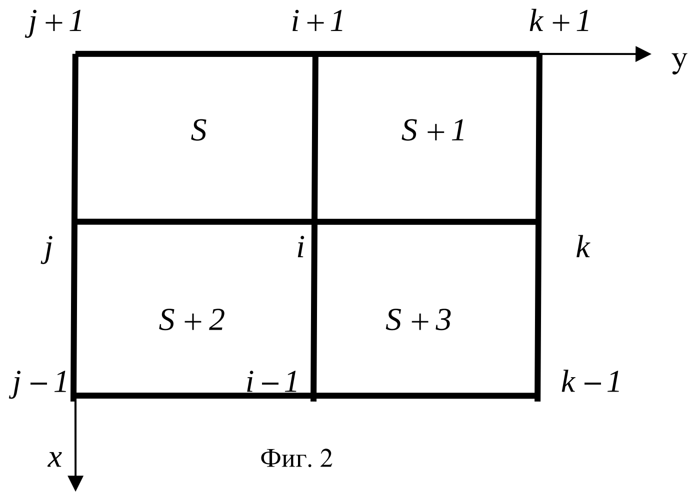
Здесь $Q = \frac{D}{ab}\|q_{ij}\|$ – диагональная матрица порядка $4n$; I – единичная матрица порядка $4n-1$; $r = (r_1, r_2, ..., r_{4n-1})^T$.

Пусть $C = -P$ – вектор-столбец порядка $4n$, $A = (A_1, A_2, ..., A_{4n})$ – матрица коэффициентов обозначений (7), где

$$A_J = (a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{4n-1,j})^T, \; j \in \{1, 2, ..., 4n\}$$

Тогда, принимая во внимание, что r является вектором дополнительных переменных, взамен задачи (6) получим

$$\min\{\frac{1}{2} w^T Q w + C^T w \mid Aw < 0, \text{ условия совместности деформации, кинематические краевые условия } \} \quad (8)$$



Фиг. 2

Функция w^s, задаваемая формулой (1), обеспечивает совместность перемещения $f_s = (w^s, \theta^s, \omega^s, \gamma^s)^T$, но не обеспечивает непрерывности напряжений. Как известно, напряжения от изгиба в элементе пластины определяются формулами [3]

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}), \quad \sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2}(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}), \tag{9}$$

$$\tau_{xy} = -\frac{2Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{10}$$

где z – расстояние до срединной поверхности по толщине.

Условия непрерывности напряжений в i- ом узле, соответствующие фиг. 2, задаются соотношениями:

$$\sigma_x^s = \sigma_x^{s+1}, \quad \sigma_x^{s+2} = \sigma_x^{s+3}, \quad \sigma_x^s = \sigma_x^{s+2},$$

$$\sigma_y^s = \sigma_y^{s+1}, \quad \sigma_y^{s+2} = \sigma_y^{s+3}, \quad \sigma_y^s = \sigma_y^{s+2},$$

откуда, принимая во внимание формулы (9), (10), а также

$$\frac{\partial^2 w^s(x,y)}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{16} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x,y)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 w^s(x,y)}{\partial y^2} = \sum_{j=1}^{16} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x,y)}{\partial y^2}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2 w^s(x,y)}{\partial x \partial y} = \sum_{j=1}^{16} w_j^s \frac{\partial^2 \Phi_j(x,y)}{\partial x \partial y}, \tag{12}$$

находим

$$3w_1^{i+1} - aw_3^{i+1} - 4aw_3^i - 3w_1^{i-1} - aw_3^{i-1} = 0, \ i \in N, \tag{13}$$

$$3w_1^j + bw_2^j + 4bw_2^i - 3w_1^k + bw_2^k = 0, \ i \in N. \tag{14}$$

Заметим, что нормальные напряжения σ_x и σ_y вдоль сторон опорного контура конечного элемента изменяются по закону кубической параболы, а касательные напряжения τ_{xy}– по закону квадратичной параболы. Для обеспечения непрерывности касательных напряжений на границах разделов элементов введем дополнительные точки, на которых будет задано условие непрерывности касательных напряжений. Возьмем эти точки в центре сторон конечных элементов. Тогда условия непрерывности касательных напряжений в смежном сечении вдоль границы разделов s-го и $(s+1)$-го, а также s-го и $(s+2)$-го конечных элементов задаются соотношениями

$$\tau_{xy}^s(a/2,b) = \tau_{xy}^{s+1}(a/2,0); \quad \tau_{xy}^s(a,b/2) = \tau_{xy}^{s+2}(0,b/2),$$

откуда, используя формулу (12) для смежных сечений $i+1,i$ и j,i, параллельных осям x и y (фиг.2), получим, что они тождественно удовлетворяются.

Условия непрерывности напряжений σ_x и σ_y вдоль границы разделов смежных сечений $i+1,i$ и j,i параллельных осям x и y (фиг.2), зададим соотношениями

$$\sigma_x(\xi,b) = \sigma_x(\xi,0), \quad \sigma_y(a,\eta) = \sigma_y(0,\eta),$$

$$\sigma_y(\xi,b) = \sigma_y(\xi,0), \quad \sigma_x(a,\eta) = \sigma_x(0,\eta),$$

откуда, с учетом связей (13) и (14), получаем

$$-3w_3^j + bw_4^j + 4bw_4^i + 3w_3^k + bw_4^k = 0, \quad i \in N,$$

$$3w_2^{i+1} + aw_4^{i+1} + 4aw_4^i - 3w_2^{i-1} + aw_4^{i-1} = 0, \ i \in N.$$

Исключая из этих уравнений переменную w_4^i, имеем

$$-3aw_3^j + abw_4^j + 3aw_3^k + abw_4^k - 3bw_2^{i+1} -$$

$$- abw_4^{i+1} + 3bw_2^{i-1} - abw_4^{i-1} = 0,\ i \in N. \qquad (15)$$

Перепишем условия (13), (14) и (15) в виде системы уравнений. Имеем

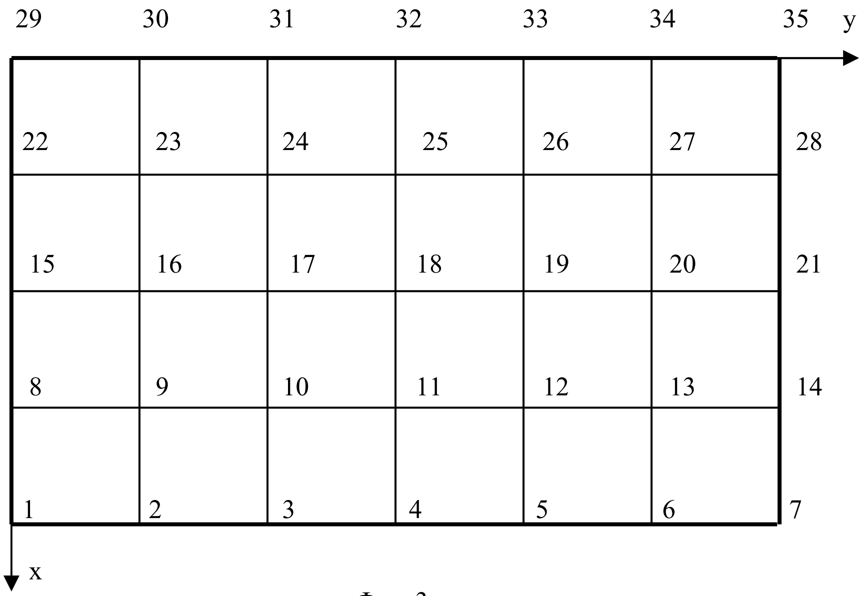
$$Hw = 0, \qquad (16)$$

где H – матрица порядка $3n \times 4n$.

Принимая во внимание соотношения (16), задачу (8) перепишем в виде

$$\min\{\frac{1}{2} w^T Qw + C^T w \mid Aw < 0,\ Hw = 0,$$

$$\text{кинематические краевые условия}\} \qquad (17)$$



Фиг. 3

Пример. Рассмотрим прямоугольную пластину, жестко защемленную по всем сторонам (фиг.3), которая загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q. Для решения задачи использована сетка 4×6 (фиг.3). Некоторые результаты расчета, полученные по программе, написанной на языке С++ для $m = a/b = 1$ и $\nu = 0{,}3$ с учетом следующих граничных условий:

$$w_i^1 = 0,\ w_i^2 = 0,\ w_i^3 = 0,\ i \in \{1,2,...,8,14,15,21,22,28,...,35\},$$

$$w_j^4 = 0,\ j \in \{1,7,29,35\},$$

приведены в таблице.

Как следует из таблицы, разница в значениях между обобщенными перемещениями при расчете изгиба пластин без учета непрерывности напряжений и с учетом непрерывности напряжений в узлах 16,17,18 составляют от 27% до 45%.

Для квадратной пластины значение перемещения в точке 18 (максимальный прогиб), вычисленное без учета непрерывности напряжений, получается $1{,}10601qa^2b^2/D$, а с учетом непрерывности напряжений – $0{,}697672\,qa^2b^2/D$. Принимая во внимание, что сторона квадрата представлена в виде $c = 4a$ и $c = 6b$, соответственно получаем, что значение максимального прогиба без учета непрерывности напряжений равно $0{,}00192\,qc^4/D$, а с учетом непрерывности напряжений — $0{,}00121\,qc^4/D$. Так как точное значение максимального прогиба квадратной пластины равно [3] $0{,}00127qc^4/D$, то легко увидеть, что учет непрерывности напряжений существенно увеличивает точность решения задачи.

Таблица значений компонентов вектора узловых перемещений

Узел	без учета непрерывности напряжений				с учетом непрерывности напряжений			
	w	$\partial w/\partial y$	$-\partial w/\partial x$	$\partial^2 w/\partial x\partial y$	w	$\partial w/\partial y$	$-\partial w/\partial x$	$\partial^2 w/\partial x\partial y$
2	0	0	0	-0.066225	0	0	0	0.209203
3	0	0	0	-0.056558	0	0	0	-0.14058
4	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0.056558	0	0	0	0.140581
6	0	0	0	0.066225	0	0	0	-0.20920
8	0	0	0	-0.047549	0	0	0	0.209206
9	0.136944	0.1783	0.169595	-0.241188	0.055186	0.04867	0.09552	-0.28658
10	0.277428	0.09336	0.35523	-0.137562	0.098549	0.10090	0.22583	-0.09354
11	0.323108	0	0.41836	0	0.205944	0	0.26886	0
12	0.277428	-0.09336	0.35523	0.137562	0.098549	-0.10090	0.22583	-0.09354
13	0.136944	-0.1783	0.169595	0.241188	0.055186	-0.04867	0.09552	0.28658
14	0	0	0	0.047549	0	0	0	-0.20921
15	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0.232113	0.30816	0	0	0.12738	0.19466	0	0
17	0.480406	0.16778	0	0	0.301119	0.12467	0	0
18	0.563445	0	0	0	0.358501	0	0	0
19	0.480406	-0.16778	0	0	0.301119	-0.12467	0	0
20	0.232113	-0.30816	0	0	0.12738	-0.19466	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0
Множитель	qa^2b^2/D	qab^2/D	qa^2b/D	qab/D	qa^2b^2/D	qab^2/D	qab^2/D	qab/D

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян А. В., Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба плит. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т. 57. №1. С. 26-34.
2. Геворкян Г.А. Об одной модификации метода конечных элементов для решения задач изгиба пластин. // Тезисы докладов XXI Международной конференции. Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов. Санкт-Петербург: 4-7 октября 2005 г. С. 67-68.
3. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. Ленинград: Судостроение, 1974. 384 с.
4. Bogner F. K., Fox R. L., Schmit L. A., The Generation of Interelement – Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulae, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., Air Force Inst. of Techn., Wright Patterson A. F. Base, Ohio, Oct. 1965.

Ереванский Государственный Университет
Архитектуры и Строительства

Поступила в редакцию
18.10.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ «АНИЗОТРОПНЫХ» СТЕРЖНЕЙ

Мовсисян Л.А.

Ключевые слова: анизотропия, неоднородность, стержень, устойчивость, изгиб, кручение.
Keywords: anisotropic, nonhomogeneous, bar, stability, bending, torsion.

Լ.Ա.Մովսիսյան
Անիզոտրոպ ձողերի կայունության մասին

Գլանային անիզոտրոպիա ունեցող նյութը, երբ դիտարկվում է դեկարտային կորդինատներով ստացվում է անհամասեռություն: Ընդհանրացվում է ուղիղների վարկածը տարբեր դեպքերի համար: Ուսումնասիրվել են կայունության խնդիրներ ոլորող մոմենտների և առանցքային սեղման դեպքերի համար:

L.F. Movsisyan
On the Stability of Anisotropic Beam

On consideration of cylindrical anisotropic materials in cartesian sistem of coordinates the material behaves is as nonhomogenusus one. The three problems of stability of bar of circular cross section under action of torsion moment and two problems for bar of rectangular cross section under axial compression are considered. In all cases one must generalise of rectilinear hypotheses.

Почему термин анизотропия в кавычках? Дело в том, что, если имеется анизотропия материала в одной системе координат, то в другой системе он уже будет анизотропным и неоднородным, т.е. имеется своего рода координатная неоднородность. В частности, если, например, деревянный брусок ([1] с.69) в цилиндрической системе ортотропен, то уже в декартовой он будет неоднородным.

Изучаются три типа задач устойчивости для такого типа материалов. Основное внимание уделено особенности постановки этих задач, так как приходится обобщить гипотезу прямых.

Различные задачи для кручения и изгиба стержней в постановке Сен-Венана методом физического малого параметра рассмотрены в [2].

1.Если материал ортотропен в цилиндрической системе координат, то в декартовой системе, когда одна из осей (z) совпадает с осью анизотропии, законы упругости запишутся в виде [1, с. 67-69].

$$\begin{gathered}\varepsilon_x = b_{11}\sigma_x + b_{12}\sigma_y + b_{13}\sigma_z + b_{16}\sigma_{xy} \\ -------------------- \\ \varepsilon_{xz} = b_{45}\sigma_{yz} + b_{55}\sigma_{xz}\end{gathered} \tag{1.1}$$

причем

$$\begin{gathered}b_{11} = a_{11}\cos^4\varphi + \left(2a_{12} + a_{66}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + a_{22}\sin^4\varphi \\ -------------------- \\ b_{45} = \left(a_{45} - a_{55}\right)\sin\varphi\cos\varphi\end{gathered} \tag{1.2}$$

где a_{ij} – постоянные в цилиндрической системе.

Здесь помимо того, что уже имеется общая анизотропия, надо учесть еще, что при рассмотрении задач в декартовой системе координат от r и φ должны перейти к x и y по

$$x = r\cos\varphi\ ,\quad y = r\sin\varphi\ ,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{1.3}$$

Будут рассмотрены три задачи устойчивости.

2. Стержень кругового сечения подвергается кручению – на концах действуют крутящие моменты M . Оси стержня и анизотропии совпадают с осью z . Так как потеря устойчивости происходит пространственным образом [3], примем, что изгиб происходит в плоскостях xz и yz. Примем гипотезу прямых в следующем виде (здесь гипотеза не нуждается в обобщении):

$$u_x = u(z)\ ;\qquad u_y = v(z),$$
$$u_z = f(z)\frac{x}{R}\ ;\ u_z = \psi(z)\frac{y}{R}. \tag{2.1}$$

Известно [1], если ось анизотропии проходит по телу, то между упругими постоянными имеется связь. При составлении уравнений устойчивости учитывалось это обстоятельство, и они имеют вид:

$$D\frac{d^2 f}{d\xi^2} = l^2 C\left(f + \varepsilon\frac{du}{d\xi}\right),$$
$$C\left(\frac{df}{d\xi} + \varepsilon\frac{d^2u}{d\xi^2}\right) + \frac{M}{l}\varepsilon\frac{d^3v}{d\xi^3} = 0,$$
$$D\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = l^2 C\left(\psi + \varepsilon\frac{d\nu}{d\xi}\right),$$
$$C\left(\frac{d\psi}{d\xi} + \varepsilon\frac{d^2v}{d\xi^2}\right) - \frac{M}{l}\varepsilon\frac{d^3u}{d\xi^3} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь $\xi = z/l$ – безразмерная координата, l – длина стержня, R – радиус сечения

$$D = \frac{\pi R^4}{4}B_{33}\ ,\quad C = \pi R^2 B_{44}\ ,\quad \varepsilon = \frac{R}{l}. \tag{2.3}$$

Решением системы (2.2) будет:

$$u = c_1\cos s_1\xi + c_2\sin s_1\xi + c_3\cos s_2\xi + c_4\sin s_2\xi + A_1\xi + A_2\ ,$$
$$\nu = z_1\left(c_2\cos s_1\xi - c_1\sin s_1\xi\right) + z_2\left(c_4\cos s_2\xi - c_3\sin s_2\xi\right) + D_1\xi + D_2,$$
$$f = \varepsilon z_1\left(c_1\sin s_1\xi - c_2\cos s_1\xi\right) + \varepsilon z_2\left(c_3\sin s_1\xi - c_4\cos s_2\xi\right) - \varepsilon A_1,$$
$$\psi = \lambda\varepsilon\left(c_1\cos s_1\xi + c_2\sin s_1\xi + c_3\cos s_2\xi + c_4\sin s_2\xi\right) - \varepsilon D_1, \tag{2.4}$$

где

$$z_i = \frac{s_i}{1 + \alpha s_i^2}\ \left(i = 1,2\right),\qquad s_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha\lambda^2}}{2\alpha\lambda},$$
$$\lambda = \frac{Ml}{D}\ ,\qquad \alpha = \frac{1}{4}\varepsilon^2\frac{B_{33}}{B_{44}}. \tag{2.5}$$

Удовлетворяя условиям свободного опирания –

$$u = \nu = f = \psi = 0 \text{ при } \xi = 0 \text{ и } \xi = 1, \tag{2.6}$$

получим

$$2\left(1 - \cos s_1\cos s_2\right)z_1 z_2 = \left(z_1^2 + z_2^2\right)\sin s_1\sin s_2, \tag{2.7}$$

но так как $z_1 = z_2$, то уравнение превратится в

$$\cos(s_1 - s_2) = 1, \tag{2.8}$$

отсюда для минимального критического момента получим

$$M_{\text{кр}} = \frac{\pi R^3}{4}\sqrt{B_{33}B_{44}}.$$

3. Рассмотрим задачу устойчивости стержня прямоугольного сечения $(b \times h)$ с центром, не совпадающим с осью анизотропии цилиндрической системы. Ось стержня направлена по z и изгиб происходит в плоскости xz. Тогда геометрическая часть гипотезы прямых должна быть обобщена.

Непротиворечивая система относительно перемещений выглядит так:

$$u_x = u(z) + y\theta(z)\ , \quad u_y = \nu + x\theta \ , \quad u_z = w + xf(z), \tag{3.1}$$

а из закона Гука необходимые уравнения –

$$\begin{aligned} \sigma_z &= B_{33}e_z + B_{36}e_{xy}\ , \quad \sigma_{xz} = B_{45}e_{yz} + B_{55}e_{xx}, \\ \sigma_{xy} &= B_{36}e_z + B_{66}e_{xx}\ , \quad \sigma_{yz} = B_{44}e_{yz} + B_{45}e_{xz}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

При изотропном материале вопрос, в какой плоскости происходит потеря устойчивости, решается однозначно. Однако, для анизотропных материалов геометрическое условие уже недостаточно. Например, если $h < b$, но $\frac{B_{44}}{B_{55}}\frac{h^2}{b^2} < 1$, потеря устойчивости может происходить в плоскости yz.

Надо учесть, что по (1.2) и (1.3) B_{ij} – функции от x и y.

Систему уравнений при осевом сжатии силой P получим на основе [4-6]

$$\begin{aligned} &\frac{dM_1}{dz} = N_1, \quad \frac{dN_1}{dz} = P\frac{d^2u}{dz^2}\ , \quad \frac{dN_2}{dz} = -P\frac{d^2\nu}{dz^2}, \\ &\frac{dT_1}{dz} = P\frac{d^2w}{dz^2}\ , \quad \frac{dH}{dz} + P(1+\alpha)\frac{h^2}{12}\frac{d^2\theta}{dz^2} = N_2, \end{aligned} \tag{3.3}$$

здесь

$$M_1 = \int_F \sigma_z x dF \ldots., \quad H = \int_F (\sigma_{yz}\cdot x + \sigma_{xz}Y)dF. \tag{3.4}$$

Учитывая, что B_{ij} из (3.2) – функции от x и y, интегралы (3.4) в замкнутом виде не вычисляются. Под D_{ij}, C_{ij} примем некоторые приведенные значения.

К тому же надо учесть, что для декартовой анизотропии, где уже B_{ij} – постоянные, качественная картина задачи устойчивости получается совершенно аналогичной. Поэтому основное внимание обратим на появление новых членов.

Уравнения в перемещениях распадаются на две системы:

$$\begin{aligned} &D_{33}\frac{d^2f}{dz^2} == C_{55}\left(f + \frac{du}{dz}\right) + C_{45}\frac{d\nu}{dz}, \\ &C_{55}\left(\frac{df}{dz} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) + C_{45}\frac{d^2\nu}{dz^2} - P\frac{d^2u}{dz^2} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$C_{44}\frac{d^2u}{dz^2}+C_{45}\left(\frac{df}{dz}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)-P\frac{d^2\nu}{dz^2}=0,$$

$$C_{33}\frac{d^2w}{dz^2}+2C_{36}\frac{d\theta}{dz}-P\frac{d^2w}{dz^2}=0,$$

$$\left(D_{44}+\alpha D_{55}\right)\frac{d^2\theta}{dz^2}-2C_{66}\theta-C_{36}\frac{dw}{dz}-P\frac{h^2}{12}(1+\alpha)\frac{d^2\theta}{dz^2}=0, \tag{3.6}$$

$$D_{ij}=B_{ij}\frac{h^3b}{12},\quad C_{ij}=B_{ij}\cdot hb,\quad \alpha=b^2/h^2=\frac{J_x}{J_y}.$$

При граничных условиях

$$u=\nu=\frac{df}{dz}=w=\frac{d\theta}{dz}=0 \text{ при } z=0,\ z=l \tag{3.7}$$

системы для минимальных значений критических сил дают, соответственно:

$$P_{\text{кр}}^{(1)}=D_{33}\lambda^2\left(1-\frac{c_{44}+c_{55}}{c_{44}c_{55}-c_{45}^2}D_{33}\lambda^2\right),$$

$$P_{\text{кр}}^{(2)}=\frac{c_{33}D\lambda^2+2\left(c_{33}c_{66}-c_{36}^2\right)}{D\lambda^2+2c_{66}}, \tag{3.8}$$

$$D=D_{44}+\alpha D_{55},\quad \lambda=\pi/l.$$

При получении (3.8) удерживались по порядку главные члены. Легко видеть, что $P_{\text{кр}}^{(1)}<P_{\text{кр}}^{(2)}$.

4. Если брать стержень по оси x, то неоднородность будет и по этой оси, и при приведении трехмерной задачи к одномерной, только при интегрировании по y возникают сложности. Если предположить, что оно как-нибудь совершенно, полученная система будет с переменными по x коэффициентами. Поэтому, как и в предыдущем примере, примем, что это все верно для некоторых осредненных значений, а, скорее всего, для декартовой анизотропии, тем более опять качественная картина одинаковая.

Необходимые уравнения из закона Гука

$$\begin{aligned}\sigma_x&=B_{11}\varepsilon_x+B_{16}e_{xy}, & \sigma_{yz}&=B_{44}e_{yz}+B_{45}e_{xz},\\ \sigma_{xy}&=B_{16}\varepsilon_x+B_{66}e_{xy}, & \sigma_{xz}&=B_{45}e_{yz}+B_{55}e_{xz}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

При такой анизотропии [6] изгиб сопровождается кручением, поэтому аналог гипотезы прямых в этом случае должен быть сформулирован –

$$u_x=z\varphi(x),\quad u_y=z\theta(x),\quad u_z=w(x)+y\theta(x). \tag{4.2}$$

Изгиб происходит в плоскости xz и θ – угол закручивания.

Уравнения устойчивости при осевой сжимающей силе будет иметь вид:

$$\begin{aligned}&\frac{dN}{dx}=P\frac{d^2w}{dx^2},\quad \frac{dM}{dx}=N,\\ &\frac{dH}{dx}-P\frac{h^2}{12}(1+\alpha)\frac{d^2\theta}{dx^2}=N_1\quad \alpha=\frac{J_z}{J_y}=\frac{b^2}{h^2}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь крутящий момент H определяется как

$$H = \int_F \left(\sigma_{xy} z + \sigma_{x\alpha} y\right) dF. \tag{4.4}$$

В перемещениях уравнения устойчивости будут

$$D_{11} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + D_{16} \frac{d^2\theta}{dx^2} = C_{45}\theta + C_{55}\left(\varphi + \frac{dw}{dx}\right),$$

$$C_{45} \frac{d\theta}{dx} + C_{55}\left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2}\right) - P\frac{d^2 w}{dx^2} = 0,$$

$$D_{16} \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(D_{66} + D_{55}\alpha\right)\frac{d^2\theta}{dx^2} - P\frac{h^2}{12}(1+\alpha)\frac{d^2\theta}{dx^2} =$$

$$= C_{44}\theta + C_{45}\left(\varphi + \frac{dw}{dx}\right). \tag{4.5}$$

Как видно из (4.5) , для ортотропного материала изгиб не сопровождается кручением.

Ищем решение (4.5) для условий свободного опирания:

$$w = \varphi' = \theta' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = l, \tag{4.6}$$

$$w = \bar{w}\sin\lambda_m x, \quad \varphi = \bar{\varphi}\cos\lambda_m x, \quad \theta = \bar{\theta}\cos\lambda_m x, \ \lambda_m = \frac{m\pi}{l}. \tag{4.7}$$

Тогда для определения безразмерной критической силы $\bar{P} = \dfrac{Pl^2}{D_{11}}$ получается уравнение

$$\bar{P}^2 (1+\alpha) m^2 \left(m^2 + \delta\beta_{55}\right) - \bar{P}\delta\Big\{\left(m^2 + \delta\beta_{55}\right)\left[\left(\beta_{66} + \beta_{55}\right)m^2 + \delta\beta_{44}\right] -$$

$$-\left(\beta_{16} m^2 + \delta\beta_{45}\right)^2 + (1+\alpha) m^4 \beta_{55}\Big\} +$$

$$+\delta^2\Big\{m^2\left(\beta_{16} m^2 + \delta\beta_{45}\right)\left(\beta_{45} + \beta_{16}\beta_{55}\right) - \beta_{16}\beta_{45} m^2\left(m^2 + \delta\beta_{55}\right)\Big] -$$

$$-\beta_{55} m^2\left[\left(\beta_{66} + \alpha\beta_{55}\right) m^2 + \delta\beta_{44}\right]\Big\} = 0, \tag{4.8}$$

здесь $\beta_{ij} = \dfrac{B_{ij}}{B_{11}}, \quad \delta = \dfrac{12 l^2}{h^2}.$

Корни уравнения (4.8) определялись для материала однонаправленного углепластика [7, с.290] с данными

$$B_{11} = 182.2 \text{ ГП}a, \quad B_{12} = 2.897 \text{ ГП}a,$$
$$B_{22} = 10.34 \text{ ГП}a \ , \quad B_{66} = 6.9 \text{ ГП}a \ ,$$

перевернутый на угол $\pi/4$.

Так как данных для коэффициента сдвига в плоскостях xz и zy нет, то в качестве такового брались

$$\beta_{16} = 0,7604 \ ; \ \beta_{66} = 0,8267 \ ; \quad \beta_{44} = \beta_{55} = 3\beta, \ \beta_{45} = \beta.$$

Вычисления проводились для различных α, β и $\delta' = \delta\pi^{-2}$. В таблице приведены значения минимальных корней $\bar{P}\pi^2$. Вторые значения корней, которые возникают вследствие кручения, во много больше, чем приведенные.

Таблица

β / δ',α		0,1	0,04	0,02
100	1	0,8537	0,8012	0,7190
	4	0,8562	0,8029	0,7202
	25	0,8705	0,8131	0,7267
200	1	0,8709	0,8447	0,8010
	4	0,8722	0,8457	0,8021
	25	08820	0,8534	0,8078
300	1	0,8757	0,8591	0,8298
	4	0,8783	0,8599	0,8307
	25	0,8846	0,8661	0,8355

Критическая сила достигается при $m=1$, т.е. потеря устойчивости происходит по одной полуволне.

Как видно из таблицы, это и естественно, при увеличении β критическая сила уменьшается, а ее увеличение с увеличением δ' не противоречит разумному соображению. Дело в том, что, если $\delta' \sim \dfrac{l^2}{h^2}$, ведь $\overline{P} \sim l^2$.

Пожалуй, самый интересный вывод в том, что учет кручения уменьшает значение критической силы, и в приведенных примерах разница между ними составляет порядка 10%.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
2. Саркисян В.С., Айрапетян В.Ж. Новые классы задач теории упругости анизотропного тела. Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. 241 с.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Изд. ФМЛ, 1963. 879 с.
4. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 211 с.
5. Мовсисян Л.А., Пештмалджян Д.В. Об уравнениях устойчивости и колебаний анизотропных пластин. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1973. Т.26. №6. С.18-29.
6. Мовсисян Л.А. К учету поперечного обжатия в тонких пластинах. // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1999. Т.52. №2. С.30–35.
7. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
11.05.2006

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 537.2 : 539.3

УСИЛЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА КЛАССА 222 И ПОЛУПРОВОДНИКА

Даноян З.Н., Берберян А.Х

Ключевые слова: электроупругая сдвиговая волна, отражение, усиление и поглощение, ромбический пьезоэлектрик, полупроводник.

Keywords: Amplification, reflection and absorption, electro-elastic shear wave, piezoelectric rhombic crystal of 222 class, semiconductors.

Զ.Ն.Դանոյան, Ա.Խ.Բերբերյան

Սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի ուժեղացումը և կլանումը շեղանկյուն 222 դասի պյեզոէլեկտրիկ բյուրեղից և կիսահաղորդչից կազմված շերտավոր համակարգում

Դիտարկված է սահքի էլեկտրաառաձգական հարթ ալիքի անդրադարձումը, ուժեղացումը կամ կլանումը 222 դասի շեղանկյուն պյեզոէլեկտրիկ բյուրեղի և կիսահաղորդչի կազմած շերտավոր համակարգու, ակուստիկ կոնտակտի բացակայության դեպքում: Գտնված են ալիքային դաշտերը պյեզոէլեկտրիկ բյուրեղում և կիսահաղորդչում, որոշված են առաջացող ալիքների լայնույթային գործակիցները: Ցույց է տրված, որ բյուրեղում առաջանում է ուղեկցող մակերևութային ալիք, որի պատճառով էլ տեղի է ունենում ուժեղացում:

Z.N.Danoyan, A.Kh.Berberyan

Amplification **and absorption of acousto-electric waves in the system of piezoelectric rhombic crystal of 222 class and semiconductor**

The reflection, amplification and absorption of plane electro-elastic shear wave from the boundary of piezoelectric rhombic crystal of 222 class and semiconductor in the absence of acoustic contact is considered. The wave fields' in the piezoelectric crystal and semiconductor are found. The amplitude ratios of arising waves are determined. It is shown, that in the crystal the attendant surface waves are occurred, in consequence of which, the amplification is took place.

Рассмотрено отражение, усиление и поглощение плоской электроупругой сдвиговой волны от границы раздела пьезоэлектрического ромбического кристалла класса 222 и полупроводника при отсутствии акустического контакта. Найдены волновые поля в пьезоэлектрическом кристалле и в полупроводнике, определены амплитудные коэффициенты возникающих волн. Показано, что в кристалле возникают сопутствующие поверхностные волны, вследствие чего имеет место усиление.

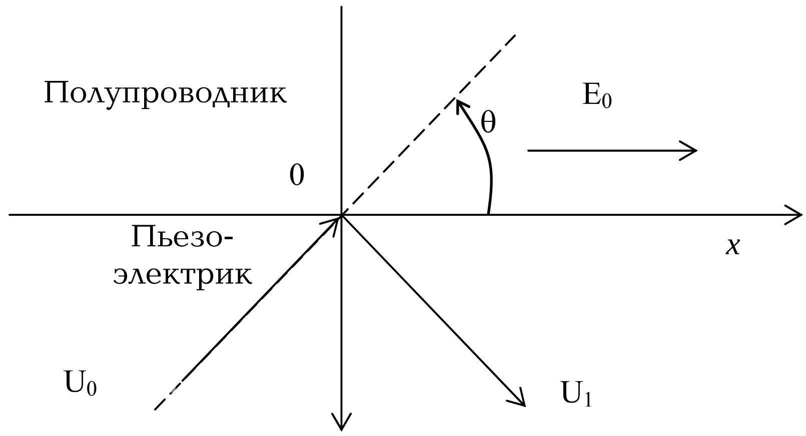
1.Введение. Особый интерес в последнее время приобрели вопросы, связанные с взаимодействием электронных потоков с различными волнами [10,11], существующими в той или иной системе, а также систем, в которых один из слоев – пьезоэлектрик [12-15]. Одна из причин такого повышенного внимания к этим явлениям состоит в том, что в определенных условиях в системе с электронными потоками возможно усиление или генерация различных типов волн, как электромагнитных, так и звуковых. Физическая причина усиления и генерации волн в таких системах одна и та же, а именно: черенковское излучение той или иной волны зарядом, движущимся со “сверхволновой” скоростью. [1].

Впервые исследование таких явлений было начато сравнительно давно (главным образом, применительно к газоразрядной плазме). В электронно-ионной плазме возможно распространение многих типов волн (особенно, при наличии магнитного поля [2]) и присутствие электронных потоков или пучков, как правило, приводит к нарастанию, т.е. к усилению или генерации тех или иных волн в системе [3,4,5]. В конечном счете, для газоразрядной плазмы это приводит к развитию неустойчивости.

При деформировании пьезоэлектрика в нем возникают пропорциональные деформации электрического поля. Такого рода поля создаются и при распространении звуковой волны в пьезоэлектрических кристаллах. В пьезоэлектриках сохраняется линейная связь между частотой волны и ее волновым вектором, однако эта связь зависит от направления распространения гораздо сложнее, чем в непьезоэлектриках (см., напр., [1]). Измеряя скорость волны при разных направлениях его распространения и поляризации, можно определить параметры, характеризующие упругие свойства пьезоэлектрического диэлектрика – компоненты тензора модулей упругости c_{ijkl} и компоненты пьезоэлектрического тензора e_{ikl}.

Значительно более разнообразные ситуации возникают в ограниченных пьезоэлектриках. В частности, в слоистых структурах пьезоэлектрик–полупроводник возможен заметный обмен энергий между подсистемами даже в отсутствии акустического контакта вследствие приповерхностных сопутствующих колебаний (СПК) [6,7].

2. Постановка задачи. Рассмотрим это явление в гидродинамическом приближении с ромбическим пьезоэлектриком. Пусть ромбический пьезоэлектрик класса 222, занимающий полупространство $y > 0$, граничит без акустического контакта с полупроводником с током, созданным внешним постоянным полем $\vec{E} = \{E_0, 0, 0\}$, занимающим полупространство $y < 0$ (фиг. 1), акустический контакт между средами отсутствует.



Фиг.1

В объеме пьезоэлектрика задана сдвиговая волна со смещением и углом скольжения θ. Полное решение в пьезокристалле, описывающее сопутствующие поверхностные колебания, падающую и отраженную волны, дается выражениями (2.1), поскольку удовлетворяет исходным уравнениям ромбической пьезосреды (2.2) [8].

$$\begin{aligned} u &= [U_0 e^{-iq_0 y} + U_1 e^{iq_0 y} + iB\Phi_2 e^{-ry}]e^{i(px-\omega t)}, \\ \varphi &= [-U_0 A e^{-iq_0 y} + AU_1 e^{iq_0 y} + \Phi_2 e^{-ry}]e^{i(px-\omega t)}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $$A = \frac{(1+\beta)e\sin 2\theta}{2\varepsilon[1+(\gamma-1)\cos^2\theta]}, B = \frac{\gamma(1+\beta)ep\cos^2\theta}{cr[1+(\gamma-1)\cos^2\theta]},$$

$$r = k\sqrt{\gamma}|\cos\theta|\sqrt{\frac{1+(\gamma-1+4\chi^2)\cos^2\theta}{1+(\gamma-1)\cos^2\theta}}, \ \alpha = \frac{c_{55}}{c_{44}}, \ \beta = \frac{e_{25}}{e_{14}}, \ \gamma = \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}.$$

Уравнения ромбической пьезосреды:

$$\begin{aligned} & c_{44}\left(\alpha\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) + e_{14}(1+\beta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = \rho\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \\ & e_{14}(1+\beta)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_2} - \varepsilon_{22}\left(\gamma\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}\right) = 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где c_{44}, c_{55} – упругие постоянные, e_{14}, e_{25} – пьезоэлектрические модули, ε_{11}, ε_{22} – диэлектрические проницаемости, ρ – плотность пьезокристалла, χ –коэффициент электромеханической связи. В работе используется система СИ.

Возмущения, возникающие в плазме, описываются линеаризованными уравнениями (2.3):

$$\varepsilon_*\Delta\varphi_* = -\delta n_\sim\,,\ \frac{\partial n_\sim}{\partial t} + \frac{1}{\delta} div\, j_\sim = 0\,,\ j_\sim = -\sigma_0\nabla\varphi_* + \delta n_\sim \mu E_0 - \delta D\nabla n_\sim\,. \quad (2.3)$$

3.Решение. Отыскивая решение системы в виде $\{n_\sim,\varphi_*\}=\{N_*,\Phi_*\}e^{i(q_s y+px-\omega t)}$, получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$(q_*^2+p^2)[i(\omega-pv_0)-\omega_M-D](q_*^2+p^2)]=0\ , \quad (3.1)$$

которое имеет две пары корней q_{*1}^2 и q_{*2}^2:

$$q_{*1}=\pm i|p|,\quad q_{*2}=\pm i\gamma_* = \pm i(1+\xi^2\cos^2\theta - i\eta)^{1/2}/r_0\,. \quad (3.2)$$

В (3.2) мы учли соотношение $p=k\cos\theta=\omega\cos\theta/s$ и ввели обозначения: D – коэффициент диффузии, $\sigma=\delta\mu N_*$ – проводимость, μ – подвижность носителей заряда, ω_M – максвеловская частота релаксации носителей тока в полупроводнике, N_* – амплитудное значение их концентрации, $n_\sim$ – переменная часть их концентрации, ε_* – диэлектрическая проницаемость, φ_* – переменный потенциал, $r_0=(\omega_M/D)^{-1/2}$ – радиус Дебая; $\Delta_1=1-v_0/v_s$ – параметр дрейфа; $v_s=s/\cos\theta$ – скорость следа акустической волны на поверхности; $\xi=kr_0p$, $\eta=\Delta_1\omega/\omega_M$.

Отбирая из корней (3.2) те, которые соответствуют убывающим решениям при $y\to-\infty$, находим полное решение, описывающее поверхностные возмущения в полупроводнике:

$$\varphi_*=\Phi_* e^{|p|y}+[\delta/\varepsilon_*(p^2-\gamma_*^2)]N_*e^{\gamma_* y};\ n_\sim=N_*e^{\gamma_* y}\,. \quad (3.3)$$

Граничные условия при $y=0$ сводятся к непрерывности нормальной компоненты вектора индукции и потенциала и к обращению в нуль нормальных компонент тока в полупроводнике и тензора напряжений в пьезокристалле:

$$\varphi=\varphi_*,\ \beta e_{14}\frac{\partial U}{\partial x}-\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\varepsilon_*\frac{\partial\varphi_*}{\partial y},\ \sigma_0\frac{\partial\varphi_*}{\partial y}+\delta D\frac{\partial n_*}{\partial y}=0,\ c_{44}\frac{\partial U}{\partial y}+e_{14}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

Решая данную систему, находим амплитуды и коэффициент отражения:

$$U_1=RU_0\,,\quad R=\frac{(n_1-m_1A)-in_2+(\ell+m_1m)(b_1+m_2)/m_2m}{(n_1-m_1A)+in_2+(\ell+m_1m)(b_1+m_2)/m_2m},$$

$$N_*=\frac{-(b_1+m_2)U_0-(b_1-m_2)U_1}{m_2m},\ \Phi_2=AU_0-AU_1+mN_*, \quad (3.4)$$

$$\Phi_*=-AU_0+AU_1+\Phi_2-CN_*,$$

где $m_1=\varepsilon r-\beta e_{14}Bp+\varepsilon_*|p|$, $m_2=e_{14}p-c_{44}rB$, $b_1=c_{44}q_0+e_{14}pA$,

$$m = C - r_*(\sigma_0 C + \delta D)/\sigma_0 |p|,\ C = \delta/\varepsilon_*(p^2 - r_*^2),$$

$$\ell = \varepsilon_* C(\varepsilon_* - |p|),\ n_1 = \varepsilon_* pA,\ n_2 = \beta e_{14} p - \varepsilon A q_0 .$$

В общем случае R – величина комплексная, $|R|$ зависит от скорости дрейфа. Если $\xi << 1, |\eta| << 1$ и углы скольжения не слишком малы, $\theta >> \chi_2^2 \varepsilon/\varepsilon_*$, то $|R| \cong 1$, т.е. отражение от “металлизированной” поверхности имеет обычный характер. При $\omega_M = 0$ возникает полное внутреннее отражение при любых углах скольжения (исключение – случай нормального падения ($\theta=\pi/2$) и скольжения под углами, которые определяются из уравнения: $1-(1+\gamma\beta)\cos^2\theta = 0$. Наиболее сильно $|R|$ изменяется при $\xi << 1, |\eta| << 1$.

Физический механизм изучаемого эффекта принципиально связан с существованием СПК. В приграничной области помимо объемных потоков звуковой P_y^{SO} и электромагнитной P_y^{EO} энергии существуют потоки, обусловленные интерференцией объемных волн и СПК: P_y^{SO}, P_y^{EI}, так что $P_y^S = P_y^{SO} + P_y^{SI}$ и $P_y^E = P_y^{EO} + P_y^{EI}$. При $y = 0$ $\overline{P}_y^S = 0$, т.е. полный поток энергии на границе является электромагнитным, а при $y \to \infty$ $P_y^{EI} \to 0,$ $\overline{P}_y^{EO} << P_y^{SO}$, то есть поток энергии, в основном, звуковой. Поскольку среднее суммарной энергии $W_S + W_E$ за период изменения волны равно нулю, суммарный поток $\overline{P}_y^E + \overline{P}_y^S = \text{const} = P_y^E(0)$ [9].

Заключение. Таким образом, в приграничной области пьезоэлектрика происходит трансформация электромагнитной энергии в звуковую. Обмен энергией между носителями тока и волной электрического поля определяется стандартными условиями. При $\Delta_1 > 0$ носители в среднем поглощают втекающую энергию и отраженный поток меньше падающего, т.е. $|R| < 1$; при $\Delta_1 < 0$ носители тормозятся волной и отдают энергию полю, поэтому $\overline{P}_y^E$ меняет знак, и $\overline{P}_{y\,\mathrm{Re}\,flekt..} > \overline{P}_{yFall}, |R| > 1$. Усиление акустоэлектрической волны будет тем значительнее, чем больше поток энергии, втекающий из полупроводника. При малых ξ индукция на границе существенно увеличивается из-за больших градиентов концентрации носителей в плазме полупроводника, что и приводит к заметному усилению (или ослаблению) акустоэлектрической волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш Л.В. О влиянии ультразвука на электронный спектр кристалла //ФТТ. 1962. Т.4. Вып.8. С. 2265–2267.
2. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. М.:Физматгиз, 1960.
3. Силин В.П., Рухадзе А.А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных средств. М.: Атомиздат, 1961.

4. Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза. //Сб. статей под редакцией Синельникова К.Д. Киев: 1963.
5. Гинзбург В.Л. Некоторые вопросы теории излучения при сверхсветовом движении в среде //УФН. 1959. Т.69. Вып.4. С.537–564.
6. Hutson A.R. McFee J.H., White D.L. Ultrasonic amplification in CdS // Phys. Rev. Lett. 1961. V.7. №4. P.237-241.
7. Мак-Фи Дж. Распространение и усиление звуковых волн в пьезоэлектрических полупроводниках.//В кн.: Физическая акустика / Под редакцией У Мэзона. Т.6. М.: Мир, 1969. С .13-62.
8. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Берберян А.Х. Отражение электроупругой сдвиговой волны от границы раздела ромбического пьезоэлектрического кристалла класса 222 и вакуума // Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.42–48.
9. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезоэлектриках. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
10. E.Dieulesaint, D.Royer. Onges Elastiques Dans les solides: Application au traitement du signal. Masson. 1998.
11. G.S.Kino Acoustic waves; Devices, imaging and analog signal processing. 1990.
12. J.S.Yang Acoustic Gap Waves in Piezoelectromagnetic Materials // Mathematics and Mechanics of Solids. 2006. V.11. P.451-458.
13. Q.Wang, Varadan V.K. Wave propagation in piezoelectric coupled plates by use of interdigital transducer. Part 2: Wave excitation by interdigital transducer // International Journal of Solids and Structuris. 2002. V.39. P.1131-1144.
14. Liu H., Wang Z.K., Wang T.J. Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure // International Journal of Solids and Structuris. 2001. V.38. P.37-51.
15. H. Liu, Z.B.Kuang, Z.M.Cai. Propagation of Bleustein-Gulyaev waves in a prestressed layeredpiezoelectric structure – Ultrasonics 2003. V.41. P.397-405.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
18.01.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА КРИТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ И КРИТИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ ФЛАТТЕРА

Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А.

Ключевые слова: вязкоупругость, флаттер, интегро-дифференциальные уравнения, критическая скорость, критическое время.
Keywords: viscous-elastic, flutter, integro-differential equations, critical speed, critical time.

Ֆ.Բ. Բադալով, Բ.Ա. Խուդայարով
Ֆլատերի կրիտիկական ժամանակի և կրիտիկական արագության վրա թռչող սարքի նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների ազդեցության ուսումնասիրությունը
Դիտարկված է գազով շրջհոսվող առաձգամածուցիկ սալի ոչ գծային ֆլատերի խնդիրը: Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով խնդիրը բերված է սովորական ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ուսումնասիրությանը, որը լուծված է թույլ եզակիությունների արտաքսման թվային եղանակով: Բերված են ֆլատերի կրիտիկական ժամանակի և կրիտիկական արագության հաշվարկի արդյունքներ:

F.B. Badalov, B.A. Khudayarov
Research Influence Viscoelastic of Property Material of Designs of the Flying Device on Critical Time and Critical Speeds of the Flutter
The flutter of viscoelastic plates streamlined by a gas current are investigated. The basic direction of the present work consists in taking into account of viscoelastic material properties at supersonic speeds. An algorithm of the numerical solution for the problem has been worked out on the basic of the method. The results of the flutter critical speed calculations have been given.

Исследуется нелинейный флаттер вязкоупругой пластины, обтекаемой потоком газа. Цель настоящей работы определить критическое время и скорости флаттера с учетом вязкоупругих свойств материала при сверхзвуковых скоростях. При помощи метода Бубнова–Галеркина задача сведена к исследованию системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ). Решение ИДУ находится численным методом исключения слабо сингулярных особенностей в интегральных и ИДУ. На основе этого метода разработан алгоритм численного решения задачи. Приведены результаты расчетов критического времени и критической скорости флаттера пластины.

Введение

Широкое применение композиционных материалов в аэрокосмической технике привело к необходимости изучения задач тонкостенных конструкций, обладающих вязкоупругими свойствами. В соответствии с этим представляет значительный интерес анализ особенностей по отношению к аналогичным задачам для упругих тонкостенных конструкций.

Влияние вязкоупругих свойств материала конструкций и некоторые результаты численного решения нелинейных задач обсуждаются ниже. Используется квадратичный вариант нелинейных уравнений теории тонких пологих оболочек [1,2]. В современной литературе эти уравнения обычно называют уравнениями Маргерра [3], который предложил эту систему уравнений для исследования проблем прочности, жесткости и устойчивости тонкостенных конструкций типа авиационных крыльев. Из нее в частном случае можно получить уравнения Кармана [4-6].

1. Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим нелинейную задачу о флаттере вязкоупругой пластины. Пусть пластина со сторонами a и b и толщиной h шарнирно оперта по всему контуру, обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа. Аэродинамическое давление учитываем по поршневой теории [7].

Уравнения Кармана в декартовой системе координат относительно перемещений u, v и w с учетом вязкоупругих свойств материала конструкций, можно записать в следующем виде [3]:

$$(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+L_1(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,$$

$$(1-R^*)\left\{\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+L_2(w)\right\}-\rho\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, \qquad (1)$$

$$D(1-R^*)\nabla^4 w+L_3^*\ (u,v,w)+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q\ .$$

Здесь $L_1(w)=\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$,

$$L_2(w)=\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$L_3^*(u,v,w)=-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^{\bullet}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}-\frac{Eh}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-R^*\right)\left[\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\},$$

где D – цилиндрическая жесткость; μ, E, ρ – коэффициент Пуассона, модуль упругости и плотность материала; h – толщина пластинки; R^* – интегральный оператор вида: $R^*\varphi(t)=\int_0^t R(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; $R(t-\tau)$ – ядро релаксации; $q=-B\dfrac{\partial W}{\partial t}-BV\dfrac{\partial W}{\partial x}-B_1V^2\left(\dfrac{\partial W}{\partial x}\right)^2-\ ...$ – аэродинамическое давление, определяемое по теории А.А.Ильюшина [7].

При изгибе в срединной поверхности возникают нормальные и касательные усилия:

$$N_x=\frac{Eh}{1-\mu^2}\left(1-R^*\right)\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)\quad (\mathrm{x}\Leftrightarrow\mathrm{y}),\quad \mathrm{N_{xy}}=\frac{Eh}{2(1+\mu)}\left(1-R^*\right)\varepsilon_{xy},$$

где ε_x, ε_y, ε_{xy} – компоненты конечной деформации, определяемые формулами [6]:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\quad \varepsilon_{\mathrm{xy}}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Моменты M_x, M_y и M_{xy} определяются через функцию прогиба w:

$$M_x = -D\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\ M_y = -D\left(1-R^*\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{xy} = D\left(1-\mu\right)\left(1-R^*\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Будем искать приближенное решение системы (1) в виде:

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N}\ \sum_{m=1}^{M} u_{nm}(t)\cos\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b},$$

$$v(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N}\ \sum_{m=1}^{M} v_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{m\pi y}{b}, \tag{2}$$

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{N}\ \sum_{m=1}^{M} w_{nm}(t)\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Подставляя (2) в систему (1) и применяя метод Бубнова–Галёркина, получим систему ИДУ. Введя в ИДУ следующие безразмерные величины $\frac{x}{y}, \frac{y}{b}, \frac{u}{h}, \frac{\nu}{h}, \frac{w}{h}, \frac{V_\infty t}{a}$ и сохраняя при этом прежние обозначения, запишем:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{1k\ln m}\ddot{u}_{nm} - \Omega(1-R^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(A_{1k\ln m}u_{nm} + \frac{1+\mu}{2}B_{1k\ln m}v_{nm}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n,\,i=1}^{N}\ \sum_{m,\,r=1}^{M} D_{1k\ln mir}w_{nm}w_{ir}\right\} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{2k\ln m}\ddot{v}_{nm} - \Omega(1-R^*)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1+\mu}{2}A_{2k\ln m}u_{nm} + B_{2k\ln m}v_{nm}\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n,\,i=1}^{N}\ \sum_{m,\,r=1}^{M} D_{2k\ln mir}w_{nm}w_{ir}\right\} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{3k\ln m}\left(\ddot{w}_{nm} + M_\lambda \dot{w}_{nm}\right) + (1-R^*)\Omega\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} C_{3k\ln m}w_{nm} - \sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M} w_{nm}\times$$
$$\times\left(1-R^*\right)\left\{A_{4k\ln mir}u_{ir} + B_{4k\ln mir}v_{ir}\right\}\Omega +$$
$$+\chi M_p\left(\lambda_1 M^*\sum_{n=1}^{N}\gamma_{k\ln m}w_{nm} + \frac{\chi+1}{4}M^{*2}\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}\Gamma_{kenmir}w_{nm}w_{ir}\right) = 0, \tag{3}$$

где

$N_{1k\ln m}, A_{1k\ln m}, B_{1k\ln m}, D_{1k\ln m}, N_{2k\ln m}, A_{2k\ln m}, B_{2k\ln m}, D_{2k\ln m}$,
$N_{3k\ln m}, C_{3k\ln m}, A_{4k\ln m}, B_{4k\ln m}, \gamma_{k\ln m}, \Gamma_{k\ln mir}, M^*, M_p, \Omega$
– безразмерные параметры.

2. Численные результаты

Интегрируем систему (3) два раза по t, запишем ее в интегральной форме и с помощью рационального преобразования исключим слабо-сингулярные особенности интегрального оператора R^* [8]. Полагая затем $t = t_i$, $t_i = i\Delta t,\ i = 1, 2, \ldots$ $\left(\Delta h = \text{const}\right)$ и заменяя интегралы квадратурными формулами трапеций для вычисления $u_{ikl} = u_{kl}\left(t_i\right)$, $\nu_{ikl} = \nu_{kl}\left(t_i\right)$ и $w_{ikl} = w_{kl}\left(t_i\right)$, получим следующие рекуррентные формулы при ядре Колтунова–Ржаницына $\left(R(t) = A \cdot \exp(-\beta t) \cdot t^{\alpha-1},\ \ 0 < \alpha < 1\right)$:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{1k\ln m} u_{pnm} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{1k\ln m}(u_{0nm} + \dot{u}_{onm}\, t_p) - \\
&-\Omega\sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(A_{1k\ln m}\left[u_{jnm} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm}\right] + \right.\right.\\
&\left.+\frac{1+\mu}{2} B_{1k\ln m}\left[\ v_{jnm} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl}\right]\ \right) + \\
&\left.+\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M} D_{1k\ln mir}\left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{2k\ln m} v_{pnm} = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{2k\ln m}(v_{0nm} + \dot{v}_{onm}\, t_p) - \\
&-\Omega\sum_{j=0}^{p-1} A_j (t_p - t_j)\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\left(\frac{1+\mu}{2} A_{2k\ln m}\left[u_{jnm} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-snm}\right] + \right.\right.\\
&\left.+B_{2k\ln m}\left[\ v_{jnm} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) v_{j-skl}\right]\ \right) + \\
&\left.+\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M} D_{2k\ln mir}\left(w_{jnm} w_{jir} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm} w_{j-sir}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{3k\ln m} w_{pnm} = \frac{1}{1 + A_p M_\lambda}\left\{\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{3k\ln m}\left\langle w_{0nm} + \left(\dot{w}_{0nm} + M_\lambda w_{0nm}\right) t_p\right\rangle - \right.\\
&-\sum_{j=0}^{p-1} A_j\left(M_\lambda \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} N_{3k\ln m} w_{jnm} - \left(t_p - t_j\right)\right)\left[\chi M_p\left(\lambda_1 M^* \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\gamma_{k\ln m} w_{jnm} + \right.\right.\\
&\left.+\frac{\chi+1}{4} M^{*2}\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M}\Gamma_{k\ln mir} w_{jnm} w_{jir}\right) + \Omega\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} C_{3k\ln m}\left(w_{jnm} - \frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) w_{j-snm}\right) - \\
&-\Omega\sum_{n,i=1}^{N}\ \sum_{m,r=1}^{M} w_{jnm}\left\langle A_{4k\ln mir}\left(u_{jir} - \frac{A}{\alpha}\ \sum_{s=0}^{j} B_s \exp(-\beta t_s) u_{j-sir}\right) + B_{4k\ln mir}\ \times \right.
\end{aligned}
$$

$$\times\left(v_{jir}-\frac{A}{\alpha}\sum_{s=0}^{j}B_s\exp(-\beta t_s)v_{j-sir}\right)\Bigg\rangle\Bigg]\Bigg]\Bigg\},\qquad(4)$$

$$p=1,2,\ldots;\qquad k=\overline{1,N};\qquad l=\overline{1,M},$$

где

$$A_0=\frac{\Delta t}{2};\quad A_j=\Delta t,\quad j=\overline{1,i-1};\quad A_i=\frac{\Delta t}{2},$$

$$B_0=\frac{\Delta t^{\alpha}}{2};\quad B_j=\frac{\Delta t^{\alpha}(j^{\alpha}-(j-1)^{\alpha})}{2},\quad s=j,$$

$$B_s=\frac{\Delta t^{\alpha}((s+1)^{\alpha}-(s-1)^{\alpha})}{2}.$$

На основе разработанного алгоритма создан пакет прикладных программ на языке «Delphi».

Результаты вычислений представлены в таблице и отражаются графиками, приведенными на фиг. 1,2.

В качестве критерия, определяющего критическую скорость флаттера $V_{кр}$, принимаем условие, что при этой скорости происходит незатухающее колебательное движение с быстро возрастающими амплитудами, которое может привести конструкцию к разрушению (фиг. 1,2) [9, 10].

Для определения $V=V_{кр}$ рассматриваются числа V_1 и V_2, расположенные на интервале (A,B) таким образом, что $A<V_1<V_2<B$ при $t_1<t<t_2$. Сравнивая закон изменения w при $V=V_1$ и $V=V_2$, можно сделать следующие выводы:

а) если при $V<V_1$ закон изменения функции w близок к гармоническому, то $V_{кр}$ не может быть на интервале (A,V_1), т.е. $V_{кр}$ лежит на интервале $(V_1,\,B)$, $t_{кр}$ лежит в интервале $(t_1<t_{кр}<\infty)$;

в) если при $V<V_1$ наблюдается быстрый рост функции w во времени, то $V_{кр}$ лежит в интервале (A,V_1).

Процессы а) и в), т.е. процесс исключения интервалов повторяется для (A,V_1) или $(V_1,\,B)$ и т.д. Поиск завершается тогда, когда оставшийся подынтервал уменьшается до достаточно малых размеров.

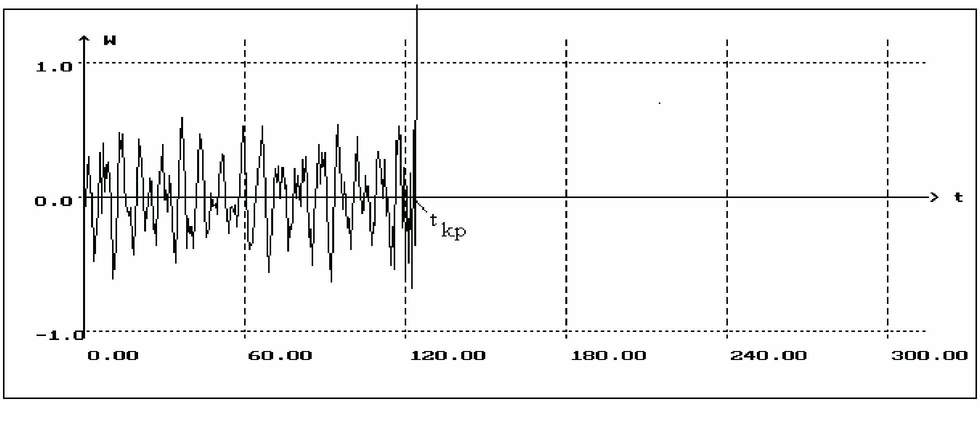
Исследовалось влияние вязкоупругих свойств материала пластинки на критические значения времени и скорости флаттера. Результаты вычислений, представленные в таблице, показывают, что решения упругих $(A=0)$ и вязкоупругих $(A>0)$ задач существенно различаются между собой. Например, при увеличении параметра A от нуля до значения 0.1 критическое время увеличивается на 90%, а критическая скорость флаттера уменьшается на 44.7%.

Далее исследовано влияние параметра сингулярности α на критическое время и скорость флаттера. С увеличением α эта скорость возрастает, а время уменьшается. Например, разница между значениями критического времени при α=0.2 и α=0.8 составляет 77,7%.

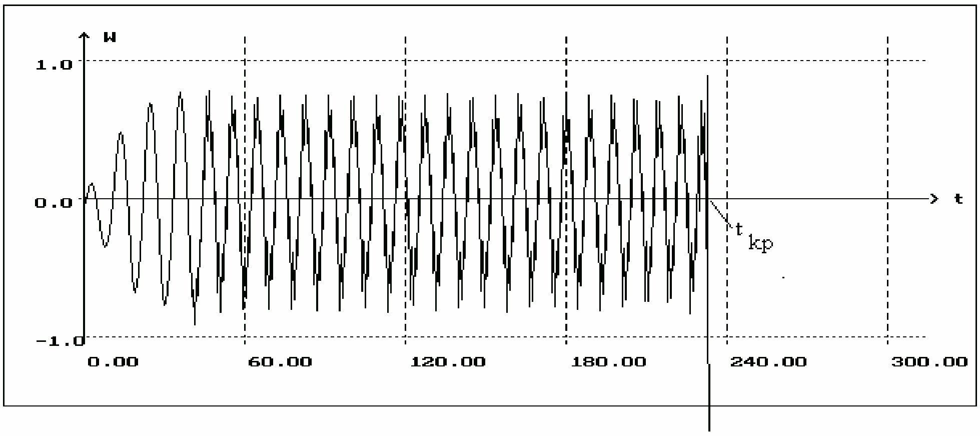
Из приведенной выше таблицы видно, что влияние параметра затухания β ядра наследственности на скорость флаттера пластинки по сравнению с влиянием параметра вязкости A и сингулярности α незначительно, что еще раз подтверждает общеизвестные выводы о том, что экспоненциальное ядро релаксации неспособно полностью описать наследственные свойства материала конструкций.

Таблица. Зависимость критического времени и критической скорости флаттера от физико-механических и геометрических параметров пластинки

A	α	β	λ_1	λ	$t_{кр}$	$V_{кр}$
0.0 0.1	0.116	0.05	250	2.2	123 232	1016 661.5
0.001	0.2 0.6 0.8	0.05	250	2.2	112.5 90 25	961.5 1014 1096
0.001	0.2	0.1 0.2	250	2.2	122 134	952.5 944.5
0.001	0.2	0.05	300 350 400	2.2	165 110 80	826 651 524
0.001	0.2	0.05	250	1.5 1.9 2.4	53 76 120	819 886 1001



Фиг. 1. Зависимости прогиба идеально-упругой пластины от времени t при $V = V_{кр}$



Фиг. 2. Зависимости прогиба вязкоупругой пластины
от времени t при $V = V_{\text{кр}}$

Изучено влияние параметра относительной толщины пластинки λ_1 на критическое время и критическую скорость $V_{\text{кр}}$ флаттера. Расчеты были проведены при λ_1=300, 350 и 400. Полученные результаты показывают, что с уменьшением толщины пластинки (с ростом параметра λ_1) критическое время и скорость флаттера вязкоупругой пластинки уменьшаются.

Исследовалось влияние параметра удлинения пластинки λ на величину критической скорости и время флаттера. С увеличением λ происходит повышение критического времени скорости флаттера, что объясняется тем, что с ростом λ (при постоянном λ_1) уменьшается размер пластинки перпендикулярно к направлению течения и, следовательно, повышается относительная жесткость системы.

На основании полученных результатов можно заключить, что учет вязкоупругих свойств материала пластинки приводит не только к уменьшению критической скорости флаттера $V_{\text{кр}}$, но и к увеличению критического времени $t_{\text{кр}}$, с которого начинается явление флаттера (фиг.1,2). Это принципиально новый механический эффект и может представлять интерес для специалистов в области проектирования подобных конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения к технике. М.: Гостехтеориздат, 1949. 784 с.
2. Галимов К.З. К общей теории пластин и оболочек при конечных перемещениях и деформациях //ПММ. 1951. Т.15. №6. С.723-742.
3. Григолюк Э.И., Мамай В.И. Нелинейное деформирование тонкостенных конструкций. М.: Наука. Физматлит, 1997. 272 с.
4. Karman Th. Collected works. V. 1. London: 1956. 530 p.
5. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.
6. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей // ПММ. 1956. Т. XX. Вып. 6. С.733-755.
8. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269 с.
9. Khudayarov B.A. Numerical Analysis of the Nonlinear Flutter of Viscoelastic Plates // INTERNATIONAL J. APPLIED MECHANICS. New York, USA. – 2005. –Vol. 41. – No 5. – P. 538-542.
10. Бадалов Ф.Б., Ганихонов Ш.Ф. Вибрации наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов. Ташкент: 2002, 230 с.

Ташкентский Государственный Авиационный
Институт МВ и ССО РУз

Поступила в редакцию
26.02.2007

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ
Մեխանիկա 61, №1, 2008 Механика

УДК 62-50

УПРАВЛЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫМ ПОИСКОМ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТАХ

Аветисян В.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: гарантированный поиск, оптимальное управление.
Keywords: guaranteed search, optimal control.

Վ.Վ. Ավետիսյան, Ս.Ռ. Մարտիրոսյան
Շարժական օբյեկտի երաշխավորված փնտրման ղեկավարումը ըստ նվազագույն լուսային էներգածախսերի

Մշակվել է տրված լուսավորության պայմաններում մանիպուլյատորի բռնիչի շարժման օպտիմալ՝ ըստ նվազագույն լուսային էներգածախսերի ղեկավարման մի ալգորիթմ, որն ապահովում է որոնելի օբյեկտի հայտնաբերումն իրականացնել երաշխավորված ժամանակում: Գտնվել և թվային հաշվարկներով հիմնավորվել է, որ հնարավոր են օպտիմալ երաշխավորված փնտրման պրոցեսներ, որոնց ընթացում չնայած ծախսվում է միևնույն քանակի լուսային էներգիա, սակայն մի դեպքում օպտիմալ երաշխավորված փնտրումն իրականացվում է արագ և պահանջվում է լույսի աղբյուրի մեծ հզորություն, իսկ մյուս դեպքում՝ ընդհակառակը:

V.V. Avetisyan, S.R. Martirosyan

Control the guaranteed search of moving objects **at minimum expense of light energy**

An algorithm of control manipulator gripper movement in given light conditions with optimal, minimum expense of light energy has been developed, provides the location of the searched object within the planned timeframe. It has been found and justified through digital calculations that optimal processes of guaranteed search are possible which require same volume of light energy expense, but, however, in one case the optimal guaranteed search is implemented quickly and needs a great light source, while in the other case the requirements are opposite.

Разработан алгоритм оптимального по минимальным световым энергозатратам управления движением схвата манипулятора, обеспечивающий при заданной освещенности в процессе поиска обнаружение искомого объекта за гарантированное время. Установлено и численными расчетами обосновано, что возможны оптимальные режимы поиска, доставляющие одинаковое значение минимизирующему функционалу, при этом, быстрый поиск осуществляется при большей потребной мощности источника света, и наоборот.

1. Постановка задачи. Пусть имеется трехзвенный электромеханический манипулятор, звенья которого перемещаются друг относительно друга в трех взаимно перпендикулярных направлениях Ox_1, Ox_2, Ox_3. Движение схвата рассматриваемого манипулятора описывается уравнениями [1,2]:

$$n_i k_i \dot{x}_i = u_i, \quad |u_i| \le U_i, \quad i = 1,2,3, \tag{1.1}$$

$$D = \{(x_1, x_2, x_3): \quad 0 \le x_i \le c, \quad i = 1,2,3\},$$

где u_i –управляющее напряжение i-го электродвигателя, U_i, k_i –заданные электрические постоянные, n_i – размерное передаточное отношение ($\omega_i = n_i \dot{x}_i$), D – рабочее пространство манипулирования схвата.

Пусть на основании рабочего пространства манипулятора

$$\overline{D}(a_1, a_2) = \{(x_1, x_2): \quad 0 \le x_i \le a_i, \quad a_i \le c, \, i = 1,2\} \tag{1.2}$$

имеется некоторый точечный подвижный объект Y, совершающий простое движение в области (1.2):

$$\dot{y} = \mathrm{v}, \quad y(t_0) = y^0, \quad \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2} \le V,$$
$$y(t) = (y_1(t), y_2(t)) \in \overline{D}, \ t \ge t_0. \tag{1.3}$$

Координаты $y(t_0) = y^0$ и текущая скорость $\mathrm{v}(t)$ подвижного объекта Y управляемой стороне X – схвату манипулятора – неизвестны. Будем полагать, что на схвате X манипулятора расположен изотропный точечный источник света, при помощи которого на основании $\overline{D}$ образуется подвижная и изменяющаяся информационная область чувствительности – световой круг

$$G(x(t)) = \left\{\bar{o} \in R^2\colon \ \left|\bar{o} - \bar{x}\right| \le r = C_1 x_3, \ \ \bar{x} = (x_1, x_2) \in \overline{D}, \ 0 < x_3 \le c, \ C_1 > 0\right\} \tag{1.4}$$

с центром в точке $\bar{x}(t) = (x_1, x_2) \in \overline{D}$ и с радиусом $r = C_1 x_3$, $C_1 = \mathrm{tg}(б/2)$ (x_3 – расстояние схвата манипулятора до основания $\overline{D}$), который можно перемещать в “темной” области $\overline{D} \subset R^2$ с целью обнаружения (освещения) искомого объекта Y при попадании последнего в эту область – $y \in G(x(t))$ [3].

Искомый объект при попадании его в световой круг (1.4) может быть обнаружен или распознан только при достаточной освещенности E, которая определяется по формуле [2]

$$E = kQ/(\Omega x_3^2). \tag{1.5}$$

Здесь Ω –телесный угол конуса направлений световых лучей; x_3 – расстояние от источника света до плоскости освещения; k –коэффициент пропорциональности; Q –мощность световой энергии.

Функционал, характеризующий энергозатраты светового устройства в процессе поиска при постоянных $E, \Omega = \mathrm{const}$, определяется выражением [2]

$$J = \int_{t_0}^{T} Q\,dt = \frac{E\Omega}{k} \int_{t_0}^{T} x_3^2\,dt. \tag{1.6}$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления.

Задача. Для схвата манипулятора (1.1) при фиксированных x_1^0, x_2^0 требуется найти начальную вертикальную координату $0 < x_3^0 \le c$ и управление $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, при которых обнаружение искомого подвижного объекта Y в области $\overline{D}$ осуществляется за гарантированное время поиска $t = T$ при минимальной величине световых энергозатрат (1.6).

2. Алгоритм решения задачи. Перейдем к безразмерным переменным в соотношениях (1.1)–(1.6). Полагая в них [2]

$$E\Omega / k = 1; \ n_i k_i = 1, \ i = 1,2,3; \ U_3 = 1, \ \ \overline{U} = \min(U_1, U_2),$$

эти соотношения (1.1) и (1.6) упростятся и примут вид [2]:

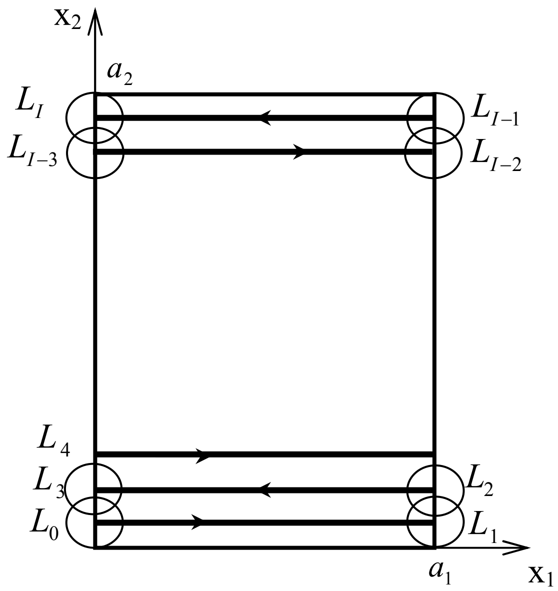
$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1,2,3; \qquad \sqrt{u_1^2 + u_2^2} \le \overline{U}, \qquad |u_3| \le 1, \tag{2.1}$$

$$J = \int_0^T x_3^2\,dt. \tag{2.2}$$

Пусть в начальный момент $t_0 = 0$ схват манипулятора находится в некоторой точке $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = r_0$, $0 < x_3^0 \le 1$, где r_0 – начальный радиус круга обнаружения:

$$r_0 = C_1 x_3^0 < \min(a_1, a_2). \qquad (2.3)$$

При условии (2.3) можно обходить тривиальный случай $G \supset \overline{D}$.



Фиг. 1

Рассмотрим исходящую из точки x^0 траекторию, проекция L которой на прямоугольное основание $\overline{D}$ в плоскости Ox_1x_2 показана на фиг. 1. Здесь $L = L_0 L_1 ... L_I$ –ломаная с конечным числом вершин на сторонах прямоугольника. Движение проекции схвата – центра круга обнаружения – по каждому участку ломаной L происходит с максимальной скоростью $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \overline{U}$ и с постоянным радиусом обнаружения r_0(2.3), т.е. $u_3 = 0$.

Как видно из фиг. 1, вершины начального участка траектории $L = L_0 L_1 L_2 L_3 L_4$, который повторяется с каждой пятой вершины $L_j ... L_{j+4}$, $j = 0,1,...,I-4$, со сдвигом на величину $|L_3 L_4| = h$, h – шаг перемещения центра круга обнаружения: $h \le 2r$, определяются следующими условиями:

$$L_0 = (0, r_0), \quad L_1 = (0, r_0), \quad L_2 = (a_1, r_0), \quad L_3 = (a_1, r_0 + h), \qquad (2.4)$$
$$L_4 = (0, r_0 + h), \quad L_5 = (0, r_0 + 2h),$$

так как, в соответствии с законом движения схвата (1.1) и выбранного способа управления

$$x_1(t_1) = \overline{U} t_1 = a_1, \; x_2(t_2) = \overline{U}(t_2 - t_1) = h, \qquad (2.5)$$
$$x_1(t_2) = a_1, \; x_1(t_3) = a_1 - \overline{U}(t_3 - t_2) = 0.$$

Здесь промежуток времени $[0, t_3]$ соответствует времени прохождения (просмотра) центром круга обнаружения начального участка траектории $L_{0,4} = L_0 ... L_4$.

Очевидно, что если выполняется условие [4,5]

$$(2r_0 - h)/V \ge t_3, \qquad (2.6)$$

то искомый объект Y, находящийся в начальный момент времени в наихудшем для объекта X положении – вне полосы $\{x_1, x_2 : 0 \le x_1 \le a_1,\ \ 0 \le x_2 \le 2r_0\}$, не может избегать обнаружения до момента времени $t = t_3$. Поэтому, движение схвата манипулятора по описанному способу при условии (2.6) гарантирует обнаружение подвижного объекта Y за конечное время T.

Из соотношений (2.5) следует, что $t_1 = a_1 / \overline{U}$, $t_2 - t_1 = h / \overline{U}$, $t_3 - t_2 = a_1 / \overline{U}$. Учитывая (2.6), получаем

$$t_3 = (2a_1 + h) / \overline{U} \le (2r_0 - h) / V, \tag{2.7}$$

$$0 < h \le h_{\max},\ h_{\max} = 2(r_0 \overline{U} - a_1 V) / (\overline{U} + V) < 2r_0. \tag{2.8}$$

Очевидно, что в соответствии с (2.3)

$$r_0 / a_1 > V / \overline{U} = m,\ m < 1. \tag{2.9}$$

При заданных исходных параметрах задачи $a_1, a_2, \overline{U}, V$ рассмотрим следующую положительную функцию N от r_0 и h:

$$N(r_0, h) = \frac{a_2 - 2r_0}{h},\ r_0 \in (0, a_2 / 2). \tag{2.10}$$

В силу (2.9) и (2.10)

$$m a_1 < r_0 < a_2 / 2. \tag{2.11}$$

Функция $N(r_0, h)$ при фиксированном $r_0 \in (m a_1, a_2 / 2)$ является монотонно убывающей функцией относительно h на интервале (2.8):

$$\min_{0 < h \le h_{\max}} N(r_0, h) = \frac{a_2 - 2r_0}{h_{\max}} = \frac{(a_2 - 2r_0)(\overline{U} + V)}{2(r_0 \overline{U} - a_1 V)} = N(r_0),\ r_0 \in (m a_1, a_2 / 2),$$

или, в соответствии с (2.9),

$$\min_{0 < h \le h_{\max}} N(r_0, h) = (1 + m) \frac{a_2 / 2 - r_0}{r_0 - a_1 m} = N(r_0),\ r_0 \in (m a_1, a_2 / 2). \tag{2.12}$$

Функция (2.12) относительно $r_0 \in (m a_1, a_2 / 2)$ также является монотонно убывающей. Обозначим

$$R_0 = \{ r_0 \in (m a_1, a_2 / 2) :\ N(r_0) = [N(r_0)] \}, \tag{2.13}$$

где символ $[\cdot]$ означает целую часть действительного числа.

Для значений $r_0 \in R_0$ целое число $N(r_0)$ в (2.13) определяет то минимальное количество перемещений с левой стороны прямоугольника $\overline{D}$ (1.2) к правой и наоборот, при которых движение по траектории L центра круга обнаружения с постоянным радиусом r_0 заканчивается в точке $(ma_1, a_2 - h_{\max}(r_0))$, $r_0 \in R_0$, когда $N(r_0)$ – четное целое число, и в точке $(a_1, a_2 - h_{\max}(r_0))$, $r_0 \in R_0$, когда $N(r_0)$ – нечетное целое число. Ясно, что паре $(r_0, h_{\max}(r_0))$, $r_0 \in R_0$, соответствует ломаная $L = L_0 L_1 ... L_I$, $I = 0,1,...,4N$ минимальной длины по сравнению с другими ломаными, соответствующими значениям $(r_0, h(r_0))$, $r_0 \notin R_0$. Таким образом, управление, при котором движение центра круга обнаружения происходит по траектории L, можно задавать следующим образом:

$$u_L(t) = \begin{cases} u_1(t) = \bar{U}, \quad u_2(t) = 0, \quad u_3 = 0; & t_{4p} \le t \le t_{4p+1}, \quad p = 0,1,...,N/2 \\ u_1(t) = 0, \quad u_2(t) = \bar{U}, \quad u_3 = 0; & t_{2p+1} \le t \le t_{2p+2}, \quad p = 0,1,...,N \\ u_1(t) = -\bar{U}, \; u_2(t) = 0, \quad u_3 = 0; & t_{4p+2} \le t \le t_{4p+3}, \quad p = 0,1,...,(N-1)/2, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $N(r_0)$ определяется по формуле (2.13).

При движении схвата по управлению (2.14) горизонтальные полосы, заметаемые кругом обнаружения, покрывают прямоугольник со взаимными пересечениями с шириной $h_{\max}(r_0)$, $r_0 \in R_0$. При этом движение по заключительному участку траектории обеспечивает приведение схвата в конечную точку траектории L: в точку $(0, a_2 - h_{\max}(r_0))$, $r_0 \in R_0$ или в точку $(a_1, a_2 - h_{\max}(r_0))$, $r_0 \in R_0$.

Будем полагать, что движение проекции схвата манипулятора на промежутках времени $t_{2p} \le t \le t_{2p+1}$, $p = 0,1,..., N$ в соответствии с (2.14) происходит при включенном свете и с постоянным радиусом светового круга $r_0 = \text{const}$, а на промежутках времени $t_{2p+1} \le t \le t_{2p+2}$, $p = 0,1,..., N$ – при отключенном свете, т.е. $Q = 0$ (1.5).

Подставляя (2.14) в уравнения (2.1) и интегрируя при граничных условиях (2.4), находим моменты переключений t_i, $i = 1,...,4N$ управления (2.14). При найденных моментах t_i, $i = 1,...,4N$ функционал (2.3), характеризующий световые энергозатраты на промежутке гарантированного времени поиска $0 \le t \le T$, где

$$T(r_0) = t_{4N} = |L_0 L_1 ... L_I| / \overline{U}, \; I = 0,1,...,4N(r_0), \; r_0 \in R_0 \tag{2.15}$$

представится следующей формулой:

$$J = a_1 C^{-1} \overline{U}^{-1} r_0^2 (1 + N(r_0)), \; r_0 \in R_0. \tag{2.16}$$

Тем самым, поставленная задача сводится к решению следующей задачи минимума:

$$J^* = \min_{r_0 \in R_0} J(r_0). \tag{2.17}$$

Ясно, что задача (2.17) имеет решение, так как согласно (2.11) множество R_0 непусто.

Рассмотрим задачу минимизации (2.16) в интервале $(ma_1, a_2/2) \supset R_0$ (в соответствии с (2.13)).

Тогда, подставляя $N(r_0)$ из (2.12) в (2.16), получим

$$J = (a_1 C^{-1} \overline{U}^{-1}) \{ (-2r_0 m - 2a_1 m + a_2(1+m)) / 2(r_0 - a_1 m) \} r_0^2 , \qquad (2.18)$$

$$r_0 \in (ma_1, a_2/2) .$$

Приравнивая к нулю производную функции J (2.18) по r_0, имеем

$$\dot{J} = Z_1(r_0) - Z_2(r_0) = 0 , \qquad (2.19)$$

где

$$Z_1(r_0) = -r_0^2 + \{ ma_1 + (a_2(1+m)/2m - a_1) \} r_0 - ma_1(a_2(1+m)/2m - a_1) \qquad (2.20)$$

$$Z_2(r_0) = \{ (a_2(1+m)/2m - a_1) - ma_1 \} r_0 / 2 . \qquad (2.21)$$

Корни квадратного трехчлена $Z_1(r_0)$

$$r_0' = ma_1, \quad r_0'' = a_2(1+m)/2m - a_1 . \qquad (2.22)$$

Согласно (2.11), (2.22) при $m \in (0,1)$ имеем

$$0 < r_0' < a_2/2 < r_0'' . \qquad (2.23)$$

В соответствии с (2.22), выражения (2.20), (2.21) перепишутся в виде

$$Z_1(r_0) = -r_0^2 + (r_0' + r_0'') r_0 - r_0' r_0'' , \; Z_2(r_0) = (r_0'' - r_0') r_0 / 2 . \qquad (2.24)$$

Подставляя (2.24) в (2.19), получаем квадратное уравнение относительно r_0

$$\dot{J}(r_0) = -r_0^2 + (3r_0' + r_0'') r_0 / 2 - r_0' r_0'' = 0 , \qquad (2.25)$$

$$r_0 \in (ma_1, a_2/2) ,$$

дискриминант которого имеет вид

$$D = ((3r_0' - r_0'')^2 - 4r_0' r_0'') / 16 > 0 , \qquad (2.26)$$

где r_0' и r_0'' определяются выражениями (2.23).

С помощью графо–аналитических методов исследования получаем простые условия, позволяющие найти решение поставленной задачи.

Возможны следующие случаи:

1) $D < 0$, что имеет место при $r_0'' < 9r_0'$ или, в соответствии с (2.22),

$$a_2 / 2a_1 < m(9m+1)/(m+1) . \qquad (2.27)$$

Тогда, согласно (2.25)

$$\dot{J}(r_0) < 0 , \; r_0 \in (ma_1, a_2/2) . \qquad (2.28)$$

2) $D = 0$, что имеет место при $r_0'' = 9r_0'$ или, в соответствии с (2.22),

$$a_2 / 2a_1 = m(9m+1)/(m+1). \tag{2.29}$$

Тогда уравнение (2.25) имеет единственное решение $r^* = (3r_0' + r_0'')/4$, которое согласно (2.29) и (2.22) определяется выражением

$$r^* = 3r_0' = 3ma_1 \tag{2.30}$$

и является точкой минимума $r_0^{\min} = r^*$ функции $J(r_0)$ в интервале (r_0', r_0'').

В силу (2.29) имеем

$$r_0' < r^* < a_2/2 \text{ при } m > 1/3 \text{ и } r_0' < a_2/2 \le r^* \text{ при } m \le 1/3. \tag{2.31}$$

3) $D > 0$, что имеет место при $r_0'' > 9r_0'$ или, в соответствии с (2.22),

$$a_2 / 2a_1 > m(9m+1)/(m+1). \tag{2.32}$$

Тогда уравнение (2.25) имеет два решения

$$r_0^{+,-} = ((3r_0' + r_0'') \pm \sqrt{(3r_0' - r_0'')^2 - 4r_0' r_0''})/4, \tag{2.33}$$

причем

$$r_0' < r_0^- < r_0^+ < r_0'' \text{ при всех } m \in (0,1) \tag{2.34}$$

и

$$\dot{J}(r_0) < 0,\ r_0 \in (r_0', r_0^-) \cup (r_0^+, r_0'');\ \dot{J}(r_0) > 0,\ r_0 \in (r_0^-, r_0^+). \tag{2.35}$$

Таким образом, функция (2.18) в точке $r_0 = r_0^-$ достигает минимума, а в точке $r_0 = r_0^+$ – максимума:

$$J(r_0^-) = J^{\min}, \quad J(r_0^+) = J^{\max}\ .\ r_0 \in (r_0', r_0''). \tag{2.36}$$

В соответствии с вышеизложенным (1)–3)), решение задачи (2.17) имеет вид:

1. При $a_2 / 2a_1 < m(9m+1)/(m+1)$, $m \in (0,1)$;

при $a_2 / 2a_1 = m(9m+1)/(m+1)$, $m \in (0, 1/3]$ и

при $a_2 / 2a_1 > m(9m+1)/(m+1)$, $m \in (0,1/3]$, $a_2/2 \le r_0^-$ имеем

$$r_0^{\min} = a_2/2 - \Delta, \tag{2.37}$$

где $\Delta > 0$ однозначно определяется из условия

$$[N(r_0)\big|_{r_0 = a_2/2}] = N(r_0)\big|_{r_0 = a_2/2 - \Delta} = N(a_2/2 - \Delta) \tag{2.38}$$

с использованием формулы (2.12).

2. При $a_2 / 2a_1 = m(9m+1)/(m+1)$, $m \in (1/3, 1)$ имеем

$$r_0^{\min} = \begin{cases} r^* - \Delta' & \text{при} \quad J^{\min} = J(r^* - \Delta') = \\ & \quad = \min\{J(r^* - \Delta'), J(r^* + \Delta'')\} \\ r^* + \Delta'' & \text{при} \quad J^{\min} = J(r^* + \Delta'') = \\ & \quad = \min\{J(r^* - \Delta'), J(r^* + \Delta'')\} \\ r^* - \Delta' \text{ или } r^* + \Delta'' & \text{при} \quad J^{\min} = J(r^* - \Delta') = J(r^* + \Delta''), \end{cases} \tag{2.39}$$

где $\Delta', \Delta'' > 0$ определяются из соотношений

$$[N(r_0)\big|_{r_0=r^*}] = N(r_0)\big|_{r_0=r^*-\Delta'} = N(r^* - \Delta'), \tag{2.40}$$

$$[N(r_0)\big|_{r_0=r^*}] = N(r_0)\big|_{r_0=r^*+\Delta''} = N(r^* + \Delta''). \tag{2.41}$$

3. При $a_2 / 2a_1 > m(9m+1)/(m+1)$, $m \in (0,1/3]$, $a_2/2 > r_0^-$ и при $a_2 / 2a_1 > m(9m+1)/(m+1)$, $m \in (1/3, 1)$ имеем

$$r_0^{\min} = \begin{cases} r_0^- - \Delta_1 & \text{при} \quad J^{\min} = J(r_0^- - \Delta_1) = \\ & \quad = \min\{J(r_0^- - \Delta_1), J(r_0^- + \Delta_2)\} \\ r_0^- + \Delta_2 & \text{при} \quad J^{\min} = J(r_0^- + \Delta_2) = \\ & \quad = \min\{J(r_0^- - \Delta_1), J(r_0^- + \Delta_2)\} \\ r_0^- - \Delta_1 \text{ или } r_0^- + \Delta_2 & \text{при} \quad J^{\min} = J(r_0^- - \Delta_1) = J(r_0^- + \Delta_2), \end{cases} \tag{2.42}$$

где $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ определяются из соотношений

$$[N(r_0)\big|_{r_0=r_0^-}] = N(r_0)\big|_{r_0=r_0^- -\Delta_1} = N(r_0^- - \Delta_1), \tag{2.43}$$

$$[N(r_0)\big|_{r_0=r_0^-}] = N(r_0)\big|_{r_0=r_0^- +\Delta_2} = N(r_0^- + \Delta_2). \tag{2.44}$$

Таким образом, и в случае (2.39), и в случае (2.42) минимальное значение функционала (2.16) достигается при различных значениях r_0. Из (2.12), (2.15), (2.3), (1.5) следует, что чем больше r_0, тем меньше количество циклов и время поиска, и больше потребная мощность источника света при постоянной освещенности. Это означает, что при минимальных энергозатратах в процессе поиска в одном случае выигрывая во времени, проигрываем в потребной мощности источника света и, наоборот.

3. Результаты расчетов. Пусть имеются следующие безразмерные значения исходных параметров задачи: $m = 1/2$, $a_1 = 1/2$, $a_2 = 2$. Поскольку $a_2 / 2a_1 = 2$, а $m(9m+1)/(m+1) = 11/6$, то $a_2 / 2a_1 > m(9m+1)/(m+1)$. Так как $m \in (1/3, 1)$, то имеем случай 3. Следовательно, оптимальное значение функционала достигается при $r_0^{\min}$, определяемый по формулам (2.42)-(2.44).

В результате численных расчетов имеем: $r_0^- = 0.625$, $\Delta_1 = 0.052$, $\Delta_2 = 0.075$, откуда следует, что $r_0^- - \Delta_1 = 0.573$, $r_0^- + \Delta_2 = 0.7$, при этом $N(r_0^- - \Delta_1) = 2$; $J(r_0^- - \Delta_1) = 0.987\bar{\gamma}$, а $N(r_0^- + \Delta_2) = 1$; $J(r_0^- + \Delta_2) = 0.98\bar{\gamma}$, где $\bar{\gamma} = 1/C_1\overline{U}$ – постоянный сомножитель.

Таким образом, с точностью до сотых имеем $J^{\min} = J(r_0^- - \Delta_1) = J(r_0^- + \Delta_2)$. Однако при этом гарантированное время поиска T_1 (2.15) при $N(r_0^- - \Delta_1) = 2$ больше, чем T_2 (2.15) при $N(r_0^- + \Delta_2) = 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В. Управление поиском неподвижного объекта с целью захвата // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2006. № 6. С. 160-168.
2. Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. Оптимальный управляемый поиск электромеханическим манипулятором при минимальных световых энергозатратах // Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60. № 2. С.100–109.
3. Меликян А. А. Оптимальное гарантирующее управление динамической системой с поиском целевой точки // ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 4. С. 815-819.
4. Черноусько Ф.Л. Управляемый поиск подвижного объекта // ПММ. 1980. Вып. 1. С. 3-12.
5. Аветисян В.В., Меликян Т.Т. О задаче гарантированного поиска подвижного объекта в прямоугольной области // Изв. РАН. Теория и системы управления. 1999. № 2. С. 31-39.

Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 10. 04. 2007

Ինդեքս 77708 Индекс

ՄԵԽԱՆԻԿԱ Հատոր
МЕХАНИКА Том 61 №1 2008
MECHANICS Volume

Բովանդակություն		Содержание
Գրգորենկո Յարոսլավ Միքայելի (Ծննդյան 80-ամյակի առթիվ)	3	ГРИГОРЕНКО ЯРОСЛАВ МИХАЙЛОВИЧ (К 80-летию со дня рождения)
Կ.Լ. Աղայան, Է.Խ. Գրիգորյան Առաձգական ամրանով կիսահարթության կոնտակտային խնդրի լուծման մասին	5	Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О РЕШЕНИИ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМ КРЕПЛЕНИЕМ
Ա.Հ. Բաբլոյան, Ա.Վ Բաղդասարյան. ՈՒղղահայաց ճաքով թուլացված ուղղանկյան ճկվածքը	15	Бабдоян А.А., Багдасарян А.В. ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ
Մ. Վ. Բելուբեկյան, Դ. Հ. Միհերյան Առանձգական մակերևույթային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր խորանարդային սիմետրիա ունեցող առաձգական կիսատարածություններում	23	Белубекян М. В., Мгерян Д. Э. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА РАСПРОСТРА-НЕНИЯ УПРУГИХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ СО СВОЙСТВАМИ КУБИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ
Կապանաձե Գ.Ա. Պարբերական տեղադրված հավասարաամուր անցքերով թուլացված կիսահարթության համար առաձգականության տեսության մի հարթ խնդրի մասին	30	Капанадзе Г. А. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧНО РАСПОЛОЖЕННЫМИ РАВНОПРОЧНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ
Ա. Վ. Քերոբյան Առաձգական կիսահարթության և անվերջ սալի համար կոնտակային խնդիրների լուծումը, որոնք ուժեղացված են մասնակիորեն սոսնձված տարբեր համասեռությամբ ստրինգերներով	37	Керопян А. В. РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, КОТОРЫЕ УСИЛЕНЫ ЧАСТИЧНО СКЛЕЕННЫМИ РАЗНОРОДНЫМИ СТРИНГЕРАМИ
Ա.Մ.Սարգսյան Առաձգականության տեսության մի խնդրում լարումների եզակիության մասին	48	Саргсян А. М. ОБ ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КЛИНА
Վ. Ռ. Բարսեղյան, Գ. Ա. Գևորգյան Լարումների անընդհատության հաշվառումը վերջավոր տարրերի մեթոդով սալերի ծռման խնդիրների լուծման ժամանակ	54	Барсегян В. Р., Геворкян Г. А. УЧЕТ НЕПРЕРЫВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ИЗГИБА ПЛАСТИН МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
Լ.Ա.Մովսիսյան Անիզոտրոպ ձողերի կայունության մասին	63	Мовсисян Л.А. К УСТОЙЧИВОСТИ «АНИЗОТРОПНЫХ» СТЕРЖНЕЙ
Զ.Ն.Դանոյան, Ա.Խ.Բերբերյան Սահքի էլեկտրաառաձգական ալիքի ուժեղացումը և կլանումը շեղանկյուն 222 դասի պյեզոէլեկտրիկ բյուրեղից և կիսահաղորդչից կազմված շերտավոր համակարգում	69	Даноян З.Н., Берберян А.Х. УСИЛЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН В СИСТЕМЕ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ РОМБИЧЕСКОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКА КЛАССА 222 И ПОЛУПРОВОДНИКА
Ֆ.Բ. Բադալով, Բ.Ա. Խուդայարով Ֆլատերի կրիտիկական ժամանակի և կրիտիկական արագության վրա թռչող սարքի նյութի առաձգամածուցիկ հատկությունների ազդեցության ուսումնասիրությունը	75	Бадалов Ф.Б., Худаяров Б.А. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА КОНСТРУКЦИЙ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА КРИТИЧЕСКОЕ ВРЕМЯ И КРИТИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ ФЛАТТЕРА
Վ.Վ. Ավետիսըան, Ս.Ռ. Մարտիրոսյան Շարժական օբյեկտի երաշխավորված փնտրման ղեկավարումը ըստ նվազագույն լուսային էներգածախսերի	83	Аветисян В.В., Мартиросян С.Р. УПРАВЛЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫМ ПОИСКОМ ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ МИНИМАЛЬНЫХ СВЕТОВЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТАХ