

ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ PROCEEDINGS OF NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ԱՐԿԻՄԻԿԱԿԱՆ ԶԵՂԵԿԱԳԻՐ



ՄԵԽԱՆԻԿԱ
МЕХАНИКА
MECHANICS

2006

УДК 539.3

**УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С УПРУГИМ
БЕСКОНЕЧНЫМ СЛОЕМ**

Восканян А.Р., Григорян Э.Х.

Ա.Ր.Ոսկանյան, Է.Խ.Գրիգորյան

Առաձգական անվերջ շերտով առաձգական տարածության հաստատված տատանումները

Դիտարկված են անվերջ առաձգական շերտ պարունակող առաձգական տարածության հաստատված տատանումները ներդաշնակ տատանումների գծային աղբյուրի ազդեցության տակ: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ: Ցույց է տրված, որ առաձգական շերտի և առաձգական տարածության բնութագրիչների որոշակի արժեքների դեպքում շերտի և տարածության կոնտակտային մակերևույթին առաջանում են տեղայնացված ալիքներ: Շերտի և տարածության տեղափոխության ամպլիտուդաները ներկայացված են տեղայնացված ալիքների և սահքի ծավալային ալիքների գումարի տեսքով: Ստացված են տեղափոխությունների ամպլիտուդների ասիմպտոտական բանաձևերը հեռավոր գոտում, որոնցից երևում է, որ ծավալային սահքային ալիքները շերտի և տարածության հեռավոր գոտիներում տարածվում են նույն արագությամբ: Դիտարկված է նաև փոքր հաստությամբ առաձգական շերտի դեպքը:

A.R.Voskanyan, E.Kh.Grigoryan

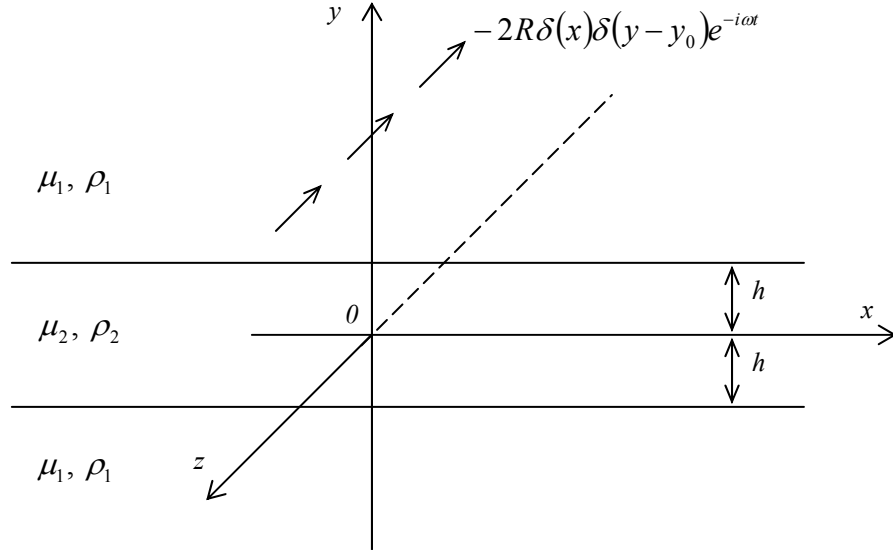
Steady-State Vibrations Of Elastic Space Contaning Elastic Infinite Strip

The problem of steady-state vibrations of elastic space containing elastic infinite strip under the action of a linear source of harmonic vibrations is considered. The problem is solved with the aid of Fourier integral transformation. It is shown that in some cases of elastic parameters' values of the strip and the space, surface waves appear, which are localized on the contact surface of the elastic strip and the space. The displacement amplitude of the elastic strip and the space are represented in the form of a sum of the above mentioned surface waves and shear volume waves. Asymptotic expressions in far field are derived for the displacements of the elastic strip in the case of different values of parametrs, from which it can be seen that the shear volume wave in the strip has the same propagation speed as the shear volume wave of the space. Asymptotic expressions in far field for the displacements of the elastic space are also derived. The case of a thin elastic strip is also considered in the paper.

Рассматривается задача об установившихся колебаниях упругого пространства с бесконечным упругим слоем под действием линейного источника гармонических колебаний. Задача решается с помощью интегрального преобразования Фурье. Показано, что при некоторых значениях параметров упругого слоя и пространства возникают поверхностные волны, локализованные на поверхности контакта упругого слоя и пространства. Амплитуда перемещений упругого слоя и пространства представлены в виде суммы вышеуказанных поверхностных волн и сдвиговых объемных волн. Для амплитуды перемещений упругого слоя при различных значениях параметров упругого слоя и пространства получены асимптотические формулы в дальней зоне, из которых видно, что сдвиговая объемная волна в слое распространяется со скоростью сдвиговой объемной волны упругого пространства. Получены также асимптотические формулы для амплитуды перемещений упругого пространства в дальней зоне. В работе рассматривается также случай упругого слоя малой толщины.

Рассмотрим установившиеся сдвиговые колебания упругого пространства, содержащего бесконечный упругий слой с толщиной $2h$. Начало оси координат $Oxyz$ поместим в середине слоя, ось Ox направим таким образом, чтобы образовалась левая система координат. Упругое пространство со слоем деформируется под действием линейного источника гармонических колебаний $2R\delta(x)\delta(y-y_0)e^{-i\omega t}$, направленного по отрицательной оси OZ , где $2R$ – интенсивность источника, $\delta(x)$, $\delta(y)$ – функции Дирака, ω – частота

колебаний, t – параметр времени. Величины, характеризующие пространство, обозначим индексом 1, а слой – 2.



Фиг. 1

Векторы перемещений упругого пространства и слоя имеют вид $\vec{U}_1(x, y, t) = \vec{U}_1(0, 0, W_1(x, y)e^{-i\omega t})$, $\vec{U}_2(x, y, t) = \vec{U}_2(0, 0, W_2(x, y)e^{-i\omega t})$, соответственно, где амплитуды перемещений $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ определяются из дифференциальных уравнений [1].

$$\frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_1(x, y)}{\partial y^2} + K_1^2 W_1(x, y) = 2P\delta(x)\delta(y - y_0), |y| > h \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_2(x, y)}{\partial y^2} + K_2^2 W_2(x, y) = 0, |y| < h \quad (2)$$

с контактными условиями

$$W_1(x, h) = W_2(x, h), W_1(x, -h) = W_2(x, -h) \\ \mu_1 \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h} = \mu_2 \frac{\partial W_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=h}, \mu_1 \frac{\partial W_1(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h} = \mu_2 \frac{\partial W_2(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=-h} \quad (3)$$

Здесь $y_0 > h$, $P = R/\mu_1$, $k_1^2 = \omega^2/C_1^2$, $C_1 = \sqrt{\mu_1/\rho_1}$ – скорость распространения сдвиговой волны в пространстве, μ_1 – модуль сдвига, ρ_1 – плотность материала пространства, $k_2^2 = \omega^2/C_2^2$, $C_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ – скорость распространения сдвиговой волны в слое, μ_2 – модуль сдвига, ρ_2 – плотность материала слоя. Функция $W_1(x, y)$ должна удовлетворять условию уходящей волны.

Для решения дифференциальных уравнений (1), (2) с условием (3) применим к ним действительное преобразование Фурье

$$\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma \quad (4)$$

В итоге получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{W}_1(\sigma, y)}{dy^2} - (\sigma^2 - k_1^2) \bar{W}_1(\sigma, y) &= 2P\delta(y - y_0) \quad |y| > h \\ \frac{d^2 \bar{W}_2(\sigma, y)}{dy^2} - (\sigma^2 - k_2^2) \bar{W}_2(\sigma, y) &= 0 \quad |y| < h \\ \bar{W}_1(\sigma, h) &= \bar{W}_2(\sigma, h), \quad \bar{W}_1(\sigma, -h) = \bar{W}_2(\sigma, -h) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mu_1 \left. \frac{d\bar{W}_1(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=h} &= \mu_2 \left. \frac{d\bar{W}_2(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=h} \\ \mu_1 \left. \frac{d\bar{W}_1(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=-h} &= \mu_2 \left. \frac{d\bar{W}_2(\sigma, y)}{dy} \right|_{y=-h} \end{aligned} \quad (6)$$

Чтобы $\bar{W}_1(x, y)$ удовлетворял условию уходящей волны, из (1) надо определить ту $\bar{W}_1(\sigma, y)$, которая при $|\sigma| > k_1$ стремилась к нулю, когда $|y| \rightarrow \infty$, а при $|\sigma| < k_1$ она представляла уходящую волну. Такое решение можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{W}_1(\sigma, y) &= A e^{-\gamma_1 y} - \frac{P}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 |y - y_0|}, \quad y > h \\ \bar{W}_1(\sigma, y) &= B e^{\gamma_1 y}, \quad y < -h \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}$, A, B – постоянные, которые определяются в дальнейшем. В силу вышесказанного, ветвь функции $\gamma_1 = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}$ выбирается таким образом, чтобы $\gamma_1(\sigma) \rightarrow |\sigma|$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} = -i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}$. В таком случае вещественная ось обходит точку $\sigma = -k_1$ сверху, а точку $\sigma = k_1$ снизу [2].

Решение уравнения (5) имеет вид

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = C \operatorname{sh} \gamma_2 y + D \operatorname{ch} \gamma_2 y \quad |y| < h, \quad \gamma_2 = \sqrt{\sigma^2 - k_2^2} \quad (7)$$

Удовлетворив условиям контакта (6), для определения неизвестных A, B, C, D получим систему уравнений

$$\begin{aligned} A e^{-\gamma_1 h} - \frac{P}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 (y_0 - h)} &= C \operatorname{sh} \gamma_2 h + D \operatorname{ch} \gamma_2 h \\ B e^{-\gamma_1 h} &= -C \operatorname{sh} \gamma_2 h + D \operatorname{ch} \gamma_2 h \end{aligned}$$

$$\gamma_1 \mu_1 \left(-A e^{-\gamma_1 y} - \frac{P}{\gamma_1} e^{-\gamma_1 (y_0 - h)} \right) = \gamma_2 \mu_2 (C \operatorname{ch} \gamma_2 h + D \operatorname{sh} \gamma_2 h)$$

$$B \gamma_1 \mu_1 e^{-\gamma_1 h} = \gamma_2 \mu_2 (C \operatorname{ch} \gamma_2 h - D \operatorname{sh} \gamma_2 h)$$

откуда A , B , C , D определяются в виде

$$A = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{cth} \gamma_2 h \right)} - \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{th} \gamma_2 h \right)} + \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1}$$

$$B = \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{cth} \gamma_2 h \right)} - \frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{th} \gamma_2 h \right)}$$

$$C = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{cth} \gamma_2 h \right)} \frac{1}{\operatorname{sh} \gamma_2 h}, \quad D = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \gamma_1} e^{\gamma_1 h}}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_2 \mu_2}{\gamma_1 \mu_1} \operatorname{th} \gamma_2 h \right)} \frac{1}{\operatorname{ch} \gamma_2 h}$$

Тогда для $\bar{W}_1(\sigma, y)$, $\bar{W}_2(\sigma, y)$ будем иметь

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = -\frac{P e^{-|y - y_0| \gamma_1}}{\gamma_1} +$$

$$+ P e^{\gamma_1(2h - y - y_0)} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{sh} \gamma_2 h} - \frac{\operatorname{sh} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{ch} \gamma_2 h} \right)$$

$$y > h$$

$$\bar{W}_1(\sigma, y) = P e^{\gamma_1(y + h)} e^{-(y_0 - h) \gamma_1} \left(\frac{\operatorname{sh} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{sh} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{ch} \gamma_2 h} - \frac{\operatorname{ch} \gamma_2 h}{\gamma_1 \operatorname{ch} \gamma_2 h + \gamma_2 \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{sh} \gamma_2 h} \right)$$

$$y < -h \quad (8)$$

$$\bar{W}_2(\sigma, y) = -\frac{P e^{-(y_0 - h) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}}{L_1(\sigma)} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y - \frac{P e^{-(y_0 - h) \sqrt{\sigma^2 - k_1^2}}}{L_2(\sigma)} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y$$

$$|y| < h \quad (9)$$

$$\text{где } L_1(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h - \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h$$

$$L_2(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \quad (10)$$

В дальнейшем, в основном, будет рассмотрен важный случай, когда $k_2 > k_1$. В

этом случае в зависимости от значения $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h$ функции $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ имеют действительные нули.

Рассмотрим случаи:

1) $(n-1)\pi < \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \leq \frac{(2n-1)\pi}{2}$. В этом случае, как показывают исследования, функция $L_1(\sigma)$ имеет $2n$ корней, квадраты которых находятся в интервалах отрезка (k_1^2, k_2^2) в следующем порядке [3]:

$$k_2^2 - \left[\frac{(2n-2m+1)\pi}{2h} \right]^2 < (\pm \sigma_m^{(1)})^2 < k_2^2 - \left[\frac{(n-m)\pi}{h} \right]^2,$$

$$\text{где } k_2^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} \right]^2 \leq k_1^2 \quad (m = \overline{1, n}; n = 1, 2, \dots)$$

А $L_2(\sigma)$ имеет $(2n-2)$ корней, квадраты которых распределены в порядке

$$k_2^2 - \left[\frac{(n-m)\pi}{h} \right]^2 < (\pm \sigma_m^{(2)})^2 < k_2^2 - \left[\frac{(2n-2m-1)\pi}{2h} \right]^2$$

$$(m = \overline{1, n-1}; n = 2, 3, \dots), \quad k_2^2 - \left[\frac{(n-1)\pi}{h} \right]^2 > k_1^2$$

2) $\frac{(2n-1)\pi}{2} < \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \leq n\pi$. В этом случае и $L_1(\sigma)$, и $L_2(\sigma)$ имеют $2n$ корней, расположенных в интервале (k_1^2, k_2^2) , соответственно в порядке

$$k_2^2 - \left[\frac{(2n-2m+1)\pi}{2h} \right]^2 < (\pm \sigma_m^{(1)})^2 < k_2^2 - \left[\frac{(n-m)\pi}{h} \right]^2$$

$$\text{где } k_2^2 - \left[\frac{(2n-1)\pi}{2h} \right]^2 > k_1^2$$

$$k_2^2 - \left[\frac{(n-m+1)\pi}{h} \right]^2 < (\pm \sigma_m^{(2)})^2 < k_2^2 - \left[\frac{(2n-2m+1)\pi}{2h} \right]^2$$

$$\text{где } k_2^2 - \left[\frac{n\pi}{h} \right]^2 \leq k_1^2, \quad (m = \overline{1, n}; n = 1, 2, \dots)$$

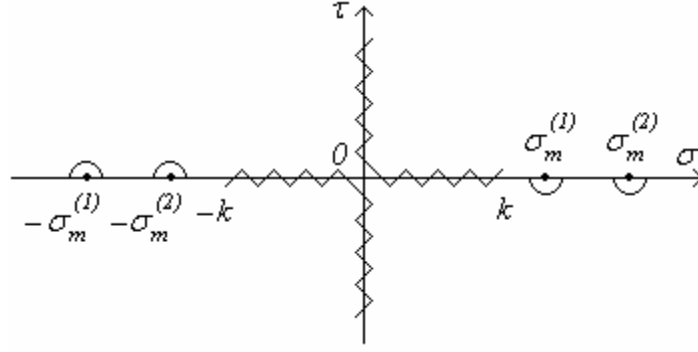
Исследование количества корней $L_1(\sigma)$ графическим способом приведено в [4,5].

Далее определим $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$.

$$W_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_1(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad W_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{W}_2(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma$$

Чтобы удовлетворялись условия уходящей волны, контуры интегрирования должны обходить отрицательные и положительные полюса подынтегральных выражений, соответственно сверху и снизу.

Вычислим $W_2(x, y)$ в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, указанными на фиг.2.



Фиг.2

Разрезами указанным образом в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ функции $L_1(\sigma)$ и $L_2(\sigma)$ не могут иметь комплексных корней. Поскольку, если $\alpha = \alpha_j$ ($j = 1, 2, \dots$) будут чисто комплексными корнями $L_j(\alpha)$ ($j = 1, 2, \dots$), находящимися в первой четверти, то отсюда будет следовать, что точки $\bar{\alpha}_j$ тоже будут корнями $L_j(\alpha)$ ($j = 1, 2, \dots$) $\left(\sqrt{\alpha_j^2 - k_1^2} = \sqrt{\bar{\alpha}_j^2 - k_1^2} \right)$. А это означает, что $W_2(x, y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x \rightarrow +\infty$, которая противоречит поставленной задаче. Очевидно, что функции $L_j(\alpha)$ ($j = 1, 2, \dots$) на мнимой оси не имеют нулей. Тогда замыкая путь интегрирования в верхней полуплоскости в интегралах входящих в $W_2(x, y)$, используя лемму Жордана, получим

$$W_2(x, y) = P(\varphi_0(x, y) - I_1(x, y) - I_2(x, y)) \quad x < 0 \quad (11)$$

где

$$I_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{\left((k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \right)} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau + \\
& + \frac{i}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \right)} - \right. \\
& \left. - \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \right)} \right) \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y e^{i\sigma|x|} d\sigma \\
I_2(x, y) = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{\left((k_1^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \right)} + \right. \\
& + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 + \tau^2}}{\left((k_1^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \right)} \left. \right) \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau + \\
& + \frac{i}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \right)} + \right. \\
& + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin(y_0 - h) \sqrt{k_1^2 - \sigma^2}}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \right)} \left. \right) \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y e^{i\sigma|x|} d\sigma
\end{aligned}$$

$$\text{В случае 1) } \varphi_0(x, y) = -iA_n^{(1)} e^{i\sigma_n^{(1)}|x|} - i \sum_{m=1}^{n-1} \left(A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right)$$

$$A_m^{(2)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2} \right) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2}} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}} y}{\sigma_m^{(2)} \left[k_2^2 - k_1^2 + h \sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2 \right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2} \right) \right) \right]} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2}} h$$

$$A_m^{(1)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2} \right) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2}} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}} y}{\sigma_m^{(1)} \left[k_2^2 - k_1^2 + h \sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2 \right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2} \right) \right) \right]} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2}} h$$

Во втором случае

$$\Phi_0(x, y) = -i \sum_{m=1}^n \left(A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right)$$

Очевидно, что в силу четности задачи по x эти формулы имеют место и при $0 < x < \infty$.

Теперь приступим к определению асимптотических формул при $|x| \rightarrow \infty$. Проводя интегрирование по частям и используя свойства интеграла Фурье, из (11) получены следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} & \text{В случае 1) } \left(\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \neq \frac{(2n-1)\pi}{2} \right) \\ & W_2(x, y) = -iPA_n^{(1)} e^{k\sigma_n^{(1)}|x|} - iP \sum_{m=1}^{n-1} \left(A_m^{(1)} e^{k\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{k\sigma_m^{(2)}|x|} \right) - \\ & - \frac{iPk_1^{3/2}}{4\sqrt{\pi}} (A_1 + A_2) |k_1 x|^{-3/2} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + o\left(|k_1 x|^{-\frac{5}{2}}\right) \quad |x| \rightarrow \infty \quad (12) \\ & A_1 = \sqrt{2k_1} \frac{\cos \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h - \frac{\mu_2}{\mu_1} (y_0 - h) \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \sin \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - k_1^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h} \cos \sqrt{k_2^2 - k_1^2} y \\ & A_2 = \sqrt{2k_1} \frac{\sin \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h + \frac{\mu_2}{\mu_1} (y_0 - h) \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \cos \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - k_1^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h} \sin \sqrt{k_2^2 - k_1^2} y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{В случае, когда } \sqrt{k_2^2 - k_1^2} h = \frac{(2n-1)\pi}{2} \\ & W_2(x, y) = -iPA_n^{(1)} e^{i\sigma_n^{(1)}|x|} - iP \sum_{m=1}^{n-1} \left(A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{iP \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}}{2\sqrt{2\pi}} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2h} y |k_1 x|^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(|k_1 x|^{-\frac{3}{2}}\right)$$

В случае 2) $\left(\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h \neq n\pi\right)$

$$W_2(x, y) = -iP \sum_{m=1}^n \left(A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right) - \frac{iP}{4\sqrt{\pi}} (A_1 + A_2) |k_1 x|^{-\frac{3}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(|k_1 x|^{-\frac{5}{2}}\right)$$

В случае, когда $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h = n\pi$

$$W_2(x, y) = -iP \sum_{m=1}^n \left(A_m^{(1)} e^{i\sigma_m^{(1)}|x|} + A_m^{(2)} e^{i\sigma_m^{(2)}|x|} \right) + \frac{iP(-1)^n}{\sqrt{2\pi}} \cos \frac{n\pi}{h} y |k_1 x|^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(|k_1 x|^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$|x| \rightarrow \infty$

Теперь вычислим $W_1(x, y)$ на комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, показанными на фиг.2, с помощью метода контурного интегрирования.

В итоге получим

$$W_1(x, y) = P \left(\Psi_0(x, y) - I_3(x, y) - I_4(x, y) + I_5(x, y) - \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k_1 r) \right)$$

$y > h$ (13)

где $r = \sqrt{(y - y_0)^2 + x^2}$, и $H_0^{(1)}(k_1 r)$ – функция Ханкеля первого рода [1,6].

$$I_4 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} |2h - y_0 - y|}{(k_1^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} - \right.$$

$$\left. - \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h} \right] \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau|x|} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \left[\frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h} - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \right)} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{\sigma|x|} d\sigma \\
I_3 = & \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{\left((k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \right)} + \right. \\
& + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{\left((k_1^2 + \tau^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \right)} \left. \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau|x|} d\tau + \right. \\
& + \frac{1}{\pi} \int_0^{k_1} \left[\frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \right)} + \right. \\
& + \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)}{\left((k_1^2 - \sigma^2) \cos^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) \sin^2 \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \right)} \left. \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{i\sigma|x|} d\sigma \right] \\
I_5(x, y) = & \frac{P}{2\pi} \left(\int_0^\infty \frac{e^{i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)} e^{-\tau|x|}}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2}} d\tau + \int_0^\infty \frac{e^{-i\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)} e^{-\tau|x|}}{\sqrt{k_1^2 + \tau^2}} d\tau \right) - \\
& - \frac{P}{2\pi} \left(\int_0^{k_1} \frac{e^{i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)} e^{i\sigma|x|}}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}} d\sigma + \int_0^{k_1} \frac{e^{-i\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y)} e^{i\sigma|x|}}{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2}} d\sigma \right), \quad y > h
\end{aligned}$$

$$W_1(x, y) = P(\Psi_0(x, -y) - I_3(x, -y) - I_4(x, -y)), \quad y < -h$$

где $\Psi_0(x, y)$ в случае 1) будет

$$\Psi_0(x, y) = -iB_n^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_n^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_n^{(1)} |x|} - i \sum_{m=1}^{n-1} \left(B_m^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(1)} |x|} + B_m^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(2)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(2)} |x|} \right)$$

В случае когда $\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h = (n-1)\pi$

$$\Psi_0(x, y) = -i \sum_{m=1}^{n-1} \left(B_m^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(1)} |x|} + B_m^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(2)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(2)} |x|} \right)$$

Во втором случае

$$\Psi_0(x, y) = -i \sum_{m=1}^n \left(B_m^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(1)} |x|} + B_m^{(2)} e^{-\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_m^{(2)} |x|} \right)$$

где

$$B_m^{(1)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2} \right) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2}}}{\sigma_m^{(1)} \left[k_2^2 - k_1^2 + h\sqrt{\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\sigma_m^{(1)^2} - k_1^2 \right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(1)^2} \right) \right) \right]}$$

$$B_m^{(2)} = \frac{\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2} \right) e^{-(y_0-h)\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2}}}{\sigma_m^{(2)} \left[k_2^2 - k_1^2 + h\sqrt{\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\sigma_m^{(2)^2} - k_1^2 \right) + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(k_2^2 - \sigma_m^{(2)^2} \right) \right) \right]}$$

Как видно из представления функции $\Psi_0(x, y)$, она экспоненциально убывает по y при $|y| > h$, т.е. ее значения, в основном, сосредоточены на контактных поверхностях $y = \pm h$, иначе говоря, $\Psi_0(x, y)$ является поверхностной или локализованной волной. Отметим также, что волны, соответствующие волновым числам $\sigma_m^{(1)}$, являются волнами Лява. Асимптотическая формула $W_1(x, y)$ при $r_1 \rightarrow \infty$, $(r_1^2 = (y-h)^2 + x^2)$ имеет вид

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2 + A_3) (k_1 r_1)^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{iPe^{i\left(k_1 r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

где $r = r_1 \sqrt{1 - \frac{2y_1(y_0 - h) - (y_0 - h)^2}{r_1^2}}$

$$A_1 = \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left(ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} \operatorname{tg} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} h \right)}$$

$$A_2 = \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left(ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} \operatorname{ctg} \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \cos^2 \theta} h \right)}$$

$$A_3 = \frac{iPe^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi}}$$

А при $y < -h$

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2) \Big|_{\theta=-\theta} \frac{e^{i\left(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_1 r_1}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right), \quad r_1 \rightarrow \infty$$

В случае, когда $k_2 < k_1$, в выражениях $W_1(x, y)$, $W_2(x, y)$ (11), (12), (13), (14) надо поставить $\Phi_0(x, y) = 0$, $\Psi_0(x, y) = 0$, поскольку в этом случае поверхностные волны отсутствуют.

Теперь рассмотрим случай упругого слоя малой толщины, т.е. когда $k_2 h \ll 1$, ($k_1 < k_2$) [7]. Тогда $W_1(x, y)$ и $W_2(x, y)$ определятся из (11), (13), заменив в них $\cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sim 1$, $\sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h \sim \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h$. В итоге получим

$$\begin{aligned}
W_1(x, y) = & -iPB_1^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_1^{(1)} |x|} - \\
& - \frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y)}{(k_1^2 + \tau^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) h^2} \right) e^{-\tau |x|} d\tau - \\
& - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{h \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y - y_0)}{(k_1^2 - \sigma^2) (k_2^2 - \sigma^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) e^{i\sigma |x|} d\sigma - \\
& - \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y - y_0)}{(k_2^2 + \tau^2) (k_1^2 + \tau^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2)^2} \right) \times \\
& \times \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau |x|} d\tau - \\
& - \frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{h \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y - y_0)}{(k_1^2 - \sigma^2) (k_2^2 - \sigma^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\
& \times \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{i\sigma |x|} d\sigma + PI_5(x, y) - \frac{iP}{2} H_0^{(1)}(k, r), \quad y > h
\end{aligned} \tag{14}$$

$$W_1(x, y) = -iPB_1^{(1)} e^{-\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} |y|} e^{i\sigma_1^{(1)} |x|} -$$

$$- \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 + y)}{(k_1^2 + \tau^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) h^2} \right) e^{-\tau |x|} d\tau -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 + y)}{(k_1^2 - \sigma^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) h^2} \right) e^{i\sigma|x|} d\sigma - \\
& -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (2h - y_0 + y)}{(k_2^2 + \tau^2)(k_1^2 + \tau^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2)} \right) \times \\
& \times \sqrt{k_2^2 + \tau^2} h e^{-\tau|x|} d\tau - \tag{15} \\
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{h \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 - y) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (2h - y_0 + y)}{(k_1^2 - \sigma^2)(k_2^2 - \sigma^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\
& \times \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} h e^{i\sigma|x|} d\sigma, \quad y < -h \\
& W_2(x, y) = -iPA_1^{(1)} e^{i\sigma_1^{(0)}|x|} - \\
& -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h) - \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h)}{(k_1^2 + \tau^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2) h^2} \right) \times \\
& \times \cos \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau - \\
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h) + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h)}{(k_1^2 - \sigma^2) + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 - \sigma^2) h^2} \right) \times \\
& \times \cos \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} e^{i\sigma|x|} d\sigma - \\
& -\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + \tau^2} (k_1^2 + \tau^2) h \cos \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 + \tau^2) \sin \sqrt{k_1^2 + \tau^2} (y_0 - h)}{(k_2^2 + \tau^2)(k_1^2 + \tau^2) h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 (k_2^2 + \tau^2)} \right) \times \\
& \times \sin \sqrt{k_2^2 + \tau^2} y e^{-\tau|x|} d\tau -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{iP}{\pi} \int_0^{k_1} \left(\frac{h\sqrt{k_1^2 - \sigma^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} \cos \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h) - \frac{\mu_2}{\mu_1} (k_2^2 - \sigma^2) \sin \sqrt{k_1^2 - \sigma^2} (y_0 - h)}{(k_1^2 - \sigma^2)(k_2^2 - \sigma^2)h^2 + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - \sigma^2)^2} \right) \times \\
& \times \sin \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} y e^{i\sigma|x|} d\sigma \quad (16)
\end{aligned}$$

Здесь $k_1^2 < (\pm \sigma_1^1)^2 < k_2^2$ – нули функции $L_1(\sigma)$ при $hk_2 \ll 1$, а $L_2(\sigma)$ в данном случае не имеет нулей. Причем

$$\begin{aligned}
L_1(\sigma) &= \sqrt{\sigma^2 - k_1^2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 - \sigma^2) \\
L_2(\sigma) &= h\sqrt{\sigma^2 - k_1^2} \sqrt{k_2^2 - \sigma^2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} h (k_2^2 - \sigma^2) \\
\sigma_1^1 &= \frac{\sqrt{2k_2^2 h^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 + 1} - \sqrt{1 + 4h^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)}}{2h^2 \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2}
\end{aligned}$$

Асимптотические формулы для $W_1(x, y)$ и $W_2(x, y)$ получаются из формул (14), (15), (16) и будут иметь вид:

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2 + A_3)(k_1 r_1)^{-\frac{1}{2}} e^{i\left(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{iP e^{i\left(k_1 r - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{2\pi k_1 r}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

$$r_1 \rightarrow \infty, y > h$$

$$W_1(x, y) = (A_1 + A_2)|_{\theta=0} \frac{e^{i\left(k_1 r_1 - \frac{\pi}{4}\right)}}{\sqrt{k_1 r_1}} + O\left((k_1 r_1)^{-\frac{3}{2}}\right), r_1 \rightarrow \infty, y < -h$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left(ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{k_2^2 - k_1^2} \cos^2 \theta \right)} \\
A_2 &= \frac{Pk_1 \sin \theta e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi} \left(ik_1 \sin \theta + \frac{\mu_2}{\mu_1 h} \right)}, \quad A_3 = \frac{iP e^{-ik_1(h-y_0)\sin \theta}}{\sqrt{2\pi}} \\
W_2(x, y) &= -\frac{iP e^{-|h-y_0|\sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2}} \sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} e^{i\sigma_1^{(1)}|x|}}{\sigma_1^{(1)} \left(1 + 2\frac{\mu_2}{\mu_1} h \sqrt{\sigma_1^{(1)2} - k_1^2} \right)} - \frac{iPk_1^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{\pi}} (A_1 + A_2) |k_1 x|^{-\frac{3}{2}} e^{i\left(k_1|x| + \frac{\pi}{4}\right)} +
\end{aligned}$$

$$+O\left(|k_1 x|^{\frac{5}{2}}\right) \quad |x| \rightarrow \infty, \quad |y| < h$$

где

$$A_1 = \sqrt{2k_1} \frac{1 - (y_0 - h)\sqrt{k_2^2 - k_1^2} h}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} h\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)^2}$$

$$A_2 = \sqrt{2k_1} \frac{h\sqrt{k_2^2 - k_1^2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} h(y_0 - h)\sqrt{k_2^2 - k_1^2}}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} h\right)^2 (k_2^2 - k_1^2)} \sqrt{k_2^2 - k_1^2} y$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В.К. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Мир. 1962, 279с.
3. Агаян К., Григорян Э.Х. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого слоя в составное упругое пространство // Материалы науч. конф. "Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред". Изд. "Гитутюн" НАН РА. Ереван, 2005. С.19-23.
4. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М.: Наука, 1982. 335с.
5. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява в системе с пьезоэлектрической подложкой и диэлектрическим слоем. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. №4. С.46-55.
6. Справочник по спец. функциям под ред. Абрамовица. М.: Физматгиз, 1979. 832с.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.

Ереванский
государственный университет

Поступила в редакцию
31.03.2006

УДК 539.3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ
ВОЛНЫ, КОГДА НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОДНО
КАСАТЕЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ РАВНО НУЛЮ

Мгерян Д. Э.

Դ. Հ. Մհերյան

Տարածական մակերևութային ալիքների տարածումը, երբ կիսատարածության
եզրի վրա շոշափողային տեղափոխություններից մեկը հավասար է զրոյի

Դիտարկվում է մակերևութային ալիքների տարածման եռաչափ խնդիր, տրանսվերսալ իզոտրոպ առաձգական կիսատարածությունում: Ենթադրվում է, որ կիսատարածության եզրի վրա զրոյի են հավասար նորմալ լարումը, շոշափող լարումներից մեկը և շոշափող տեղափոխություններից մեկը: Ստացվել է դիսպերսիոն հավասարում: Ստացվել են նաև մակերևութային ալիքի գոյության պայմաններ:

D. H. Mheryan

Three dimensional surface waves propagation, when at the boundary one
of tangential displacements is equal to zero

The problem of propagation of elastic surface waves in a transversely isotropic half – space is considered. At the boundary, the normal component of stresses, one of tangential stresses and one of tangential displacements are equal to zero, are supposed. The dispersion equation is obtained and conditions of existence of surface waves are obtained.

Рассматривается задача распространения упругих поверхностных волн в трансверсально-изотропном полупространстве. Предполагается, что на границе полупространства заданы условия равенства нулю нормального напряжения, одного из касательных напряжений и одного из касательных перемещений. Получено дисперсионное уравнение. Показано, что в этом случае поверхностная волна обладает свойством дисперсии. Установлены также условия существования поверхностных волн.

1. В предыдущих работах рассматривались задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропном полупространстве с двумя вариантами условий на границе полупространства [1] и задача распространения упругих поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде, когда на границе полупространства заданы условия равенства нулю всех трех напряжений [2].

Рассматривается трансверсально-изотропное упругое полупространство. Предполагается, что через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упруго-эквивалентными (плоскости изотропии). Иначе говоря, в каждой точке имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Такое тело можно рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии бесконечно высокого порядка – ось вращения.

Предполагается, что плоскость, ограничивающее полупространство, является плоскостью изотропии. Ось z направлена нормально к плоскости изотропии, а оси

x и y произвольны в этой плоскости. В таком случае полупространство в прямоугольной декартовой координатной системе занимает область

$$(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, 0 \leq z < \infty).$$

Система уравнений, определяющая волновые процессы в этой среде, имеет вид :

$$\begin{aligned} & c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ & + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ & \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + c_{44} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \\ & + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ & c_{44} \Delta_2 w + c_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{13} + c_{44}) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.1)$$

здесь u, v, w – проекции вектора перемещения на оси координат x, y, z , соответственно, C_{ij} – пять упругих независимых констант трансверсально-изотропной среды, ρ – плотность материала, Δ_2 – двумерный оператор Лапласа.

Для касательных проекций u, v по аналогии с задачей плоской деформации [3] вводится преобразование

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \quad (1.2)$$

Отметим, что преобразование (1.2) было использовано также в пространственной задаче статики трансверсально-изотропного пьезоэлектрика [4].

При постановке задачи нахождения поверхностной волны необходимо удовлетворить условиям затухания

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} v = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} w = 0 \quad (1.3)$$

С помощью преобразования (1.2) и с учетом условия затухания (1.3) получается:

$$\begin{aligned} u &= -i[k_1(A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + A_2 e^{-p_2 \Gamma z}) + k_2 B e^{-p_3 \Gamma z}] \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \\ v &= -i[k_2(A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + A_2 e^{-p_2 \Gamma z}) - k_1 B e^{-p_3 \Gamma z}] \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \\ w &= \frac{c_{44} \Gamma}{c_{13} + c_{44}} \left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta \eta)}{p_1} A_1 e^{-p_1 \Gamma z} + \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta \eta)}{p_2} A_2 e^{-p_2 \Gamma z} \right] \times \\ & \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$0 < \eta < \min(1, \alpha_3^{-1}, \theta^{-1}) \quad (1.5)$$

где $\theta = \frac{c_{44}}{c_{11}}, \eta = \frac{\omega^2}{c_2^2 \Gamma^2}, \Gamma^2 = k_1^2 + k_2^2, \alpha_3 = \frac{2c_{44}}{c_{11} - c_{12}}$

$$p_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \left\{ \alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta \pm \sqrt{\left[\alpha_1 - \frac{1}{2}(\alpha_2 + \theta)\eta \right]^2 - \alpha_2(1-\eta)(1-\theta\eta)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$p_3 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} \sqrt{1 - \alpha_3 \eta} \quad (1.6)$$

$$\alpha_1 = \frac{c_{33}c_{11} - c_{13}(c_{13} + 2c_{44})}{2c_{11}c_{44}}, \alpha_2 = \frac{c_{33}}{c_{11}}, c_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, c_2^2 = \frac{c_{44}}{\rho}$$

Получение выражений (1.4) и (1.5) более подробно приводится в [2].

2. Принимается, что на плоскости, ограничивающей полупространство, заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{33} = 0, \sigma_{31} = 0, v = 0 \text{ при } z = 0 \quad (2.1)$$

Граничные условия (2.1) в перемещениях имеют вид:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0, v = 0 \quad (2.2)$$

Подстановка (1.4) в граничные условия (2.2) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных A_1, A_2, B :

$$\begin{aligned} & \left[(1 + \xi^2)(p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)) + \alpha_4 + \alpha_4 \xi^2 \right] A_1 + \\ & + \left[(1 + \xi^2)(p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)) + \alpha_4 + \alpha_4 \xi^2 \right] A_2 = 0 \\ & \left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_1} - \alpha_5 p_1 - \alpha_5 \xi^2 p_3 \right] A_2 + \\ & + \left[\frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_2} - \alpha_5 p_1 - \alpha_5 \xi^2 p_3 \right] A_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\xi = k_2 k_1^{-1}, \alpha_4 = \frac{c_{13}(c_{13} + c_{44})}{c_{33}c_{44}}, \alpha_5 = \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{44}} \quad (2.4)$

3. В частном случае изотропной среды $c_{11} = c_{33} = \lambda + 2\mu, c_{44} = \mu, c_{12} = c_{13} = \lambda$, из (1.6) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, p_1 = \sqrt{1 - \theta\eta} = v_1, p_2 = \sqrt{1 - \eta} = v_2 [2]$. В этом случае система (2.3) приводится к виду:

$$\begin{aligned} (2 - \eta)A_1 + 2A_2 &= 0 \\ (2v_1 v_2 + \xi^2 v_2^2)A_1 + (2 - \eta + \xi^2 v_2^2)A_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Условие равенства нулю детерминанта этой системы после некоторых преобразований имеет вид:

$$R(\xi, \eta) = (2 - \eta)^2 - 4v_1v_2 - \xi^2\eta v_2^2 \quad (3.2)$$

В частном случае $\xi = 0(k_2 = 0)$, уравнение (3.2) совпадает с классическим уравнением Рэлея. Нетрудно проверить, что корню уравнения (3.2) $\eta = 0$ соответствует тривиальное решение. Исключением корня $\eta = 0$ уравнение (3.2) приводится к виду:

$$R(\xi, \eta) = \eta - \frac{4(1 - \theta)\sqrt{1 - \eta}}{\sqrt{1 - \eta} + \sqrt{1 - \theta\eta}} - \xi^2 v_2^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$R(0, \xi) = -(2(1 - \theta) + \xi^2) < 0, \quad R(1, \xi) = 1 > 0 \quad (3.4)$$

Таким образом, при граничных условиях (2.1) поверхностная волна всегда существует в изотропной среде.

В табл.1 приводятся значения безразмерного параметра η , определяющие фазовую скорость поверхностной волны, в зависимости от ξ для коэффициента Пуассона $\nu = 0,25$ ($\theta = 1/3$)

Таблица 1

ξ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	4.0	10.0
η	0.8452	0.8475	0.8537	0.8627	0.8733	0.8843	0.9293	0.9575

При $\xi = 0(k_2 = 0)$ получается известное значение фазовой скорости волны Рэлея. С возрастанием ξ безразмерный параметр фазовой скорости возрастает и стремится к единице при $\xi \rightarrow \infty$.

4. Условие равенства нулю детерминанта системы (2.3) после некоторых преобразований имеет вид:

$$\bar{R}(\eta, \xi) = (p_1 - p_2)\bar{R}_1(\eta, \xi) \quad (4.1)$$

где

$$\bar{R}_1(\eta, \xi) = (1 + \xi^2)[R_1(\eta) + \alpha_5 p_3(p_1 + p_2)p_1 p_2 \xi^2] \quad (4.2)$$

где $R_1(\eta)$ есть соответствующее выражение, приведенное в задаче распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной среде [2], в случае, когда на границе полупространства заданы условия равенства нулю всех трех напряжений [2]. То есть, когда $\xi = 0(k_2 = 0)$, получаются уравнения из [2].

Обозначим:

$$T = \left[\frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_2} - \alpha_5 p_2 - \alpha_5 \xi^2 p_3 \right] : \left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_1} - \alpha_5 p_1 - \alpha_5 \xi^2 p_3 \right]$$

$$A_1 = -TA_2, \quad B = A_2 \xi(1 - T)$$

Следовательно,

$$u = -i[k_1(-TA_2 e^{-p_1 \Gamma z} + A_2 e^{-p_2 \Gamma z}) + k_2 A_2 \xi(1 - T)e^{-p_3 \Gamma z}] \times \exp i(\omega t - k_1 x - k_2 y)$$

$$v = -i[k_2(-TA_2e^{-p_1\Gamma z} + A_2e^{-p_2\Gamma z}) - k_1A_2\xi(1-T)e^{-p_3\Gamma z}] \times \exp i(\omega t - k_1x - k_2y)$$

$$w = \frac{c_{44}\Gamma}{c_{13} + c_{44}} \left[\frac{p_1^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_1} (-T)A_2e^{-p_1\Gamma z} + \frac{p_2^2 - \theta^{-1}(1 - \theta\eta)}{p_2} A_2e^{-p_2\Gamma z} \right] \times$$

$$\times \exp i(\omega t - k_1x - k_2y) \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что если $p_1 = p_2$, то $u \equiv v \equiv w \equiv 0$ (то есть соответствует тривиальное решение), следовательно, параметр η можно найти, решив уравнение

$$\bar{R}_2(\eta, \xi) = R_1(\eta) + \alpha_5 p_3 (p_1 + p_2) p_1 p_2 \xi^2 = 0 \quad (4.4)$$

Значения функции $\bar{R}_2(\eta, \xi)$ на концах интервала $[0, 1]$ имеют вид:

$$\bar{R}_2(0, \xi) = R_1(0) + \alpha_5 p_3 (p_1 + p_2) p_1 p_2 \xi^2$$

$$\bar{R}_2(1, \xi) = R_1(1)$$

Известно, что $R_1(1) < 0$ [2]. Если $R_1(0) = c_{11}c_{33} - c_{13}^2 > 0$ (положительный для тех материалов, которые мы исследуем), то $\bar{R}_2(0, \xi) > 0$.

$$\bar{R}_2(\alpha_3^{-1}, \xi) = R_1(\alpha_3^{-1}) [2].$$

Для Ti (титана) условия затухания – промежуток $(0; \alpha_3^{-1})$. Из $\bar{R}_2(\alpha_3^{-1}, \xi) > 0 \Rightarrow$, что уравнение $\bar{R}_2(\eta, \xi) = 0$ не имеет действительных корней в промежутке $(0; \alpha_3^{-1})$.

Для Be (бериллия) условия затухания – промежуток $(0; \alpha_3^{-1})$. Из $\bar{R}_2(\alpha_3^{-1}, \xi) < 0 \Rightarrow$, что уравнение $\bar{R}_2(\eta, \xi) = 0$ имеет действительный корень в промежутке $(0; \alpha_3^{-1})$.

В табл. 2,3,4 приводятся корни уравнения $\bar{R}_2(\eta, \xi) = 0$ в интервале условия затухания для некоторых трансверсально-изотропных материалов в зависимости от ξ . Характеристики материалов взяты из монографии [5].

Таблица 2

материал	усл. затух. (1.5)	ξ (k_1/k_2)	η
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.0	0.9131
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.2	0.9141
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.4	0.9171
ZnO(окись цинка)	(0,1)	0.8	0.9271
ZnO(окись цинка)	(0,1)	1.0	0.9331
ZnO(окись цинка)	(0,1)	5.0	0.9921
ZnO(окись цинка)	(0,1)	10.0	0.999
ZnO(окись цинка)	(0,1)	100.0	0.99999

Таблица 3

материал	усл. затух. (1.5)	ξ (k_1/k_2)	η
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.0	0.7443
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.2	0.7474
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.4	0.7555
Be(бериллий)	(0;0,8172)	0.8	0.7776
Be(бериллий)	(0;0,8172)	1.0	0.7877
Be(бериллий)	(0;0,8172)	5.0	0.8170
Be(бериллий)	(0;0,8172)	10.0	0.81722
Be(бериллий)	(0;0,8172)	100.0	0.81723

Таблица 4

материал	усл. затух. (1.5)	ξ (k_1/k_2)	η
Ti(титан)	(0;0,7537)	0.0	$\emptyset$
Ti(титан)	(0;0,7537)	0.2	$\emptyset$
Ti(титан)	(0;0,7537)	5.0	$\emptyset$

При $\xi = 0$ получается нам уже известное значение для задачи [2]. С возрастанием ξ безразмерный параметр фазовой скорости возрастает и стремится к 1 для ZnO, а для Be (бериллия) стремится к 0.8172. Для Ti (титана) поверхностная волна не существует, каким бы не было ξ .

Работа выполнена при финансовой поддержке NFSAT

Литература

1. Белубекян В. М., Белубекян М. В. Трехмерная задача поверхностных волн Релея. // Докл. НАН Армении. 2005. Т. 105. N4. С. 362 –369.
2. Белубекян В. М., Мгерян Д. Э. Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т. 59. N2. С. 3-9.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
4. Wang Z., Zheng B. The general solution of the three – dimensional problems in piezoelectric media.// Int. J. Solids and Structures. 1995. Vol. 32. N1. PP. 105 – 115.
5. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.:Наука, 1977. 399 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
25.04.2006

О ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ
ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Хачикян А.С.

Ա.Ս. Խաչիկյան

Հարմոնիկ և բիհարմոնիկ հավասարումների բերվող ոչ դասական եզրային
պայմաններով խնդիրների մասին

Դիտարկվում են առաձգականության տեսության հարմոնիկ և բիհարմոնիկ հավասարումների բերվող խնդիրներ, երբ դիտարկվող տիրույթի մի մասի վրա եզրային պայմանները գերորոշված են, իսկ մնացած մասի վրա նրանք թերորոշված են: Ցույց է տրվում, որ ընդունված մոդելի շրջանակներում իրական ֆիզիկական խնդրի լուծումը հնարավոր չէ կառուցել առանց եզրային պայմանների որոշ լրացման:

A.S. Khachikyan

On the Problems Reduced to Harmonic and Biharmonic Equations with
Nonclassic Boundary Conditions

The problems of elasticity theory reduced to harmonic and biharmonic equations are considered. It is assumed that boundary conditions on the one part of boundaries of the region being under consideration are overdetermined and on the other part they are insufficiently determined. The impossibility of the construction of real problems solutions without of some redefinition of the boundary conditions is demonstrated.

Рассматриваются гармонические и бигармонические задачи теории упругости, когда на части границы рассматриваемой области граничные условия переопределены, а на остальной части границы области они недоопределены. Показывается, что достижение решения истинной физической задачи в рамках принятой модели невозможно без некоторого доопределения граничных условий.

1. Введение

Развитие науки и техники, особенно техники наблюдений и измерений, доступность результатов спутниковых наблюдений, измерений методом GPS, томографии, ультразвуковой диагностики и других методов, часто приводит к новой ситуации в подлежащих исследованию задачах математической физики. Оказывается, что на одной части поверхности исследуемой области могут быть известны больше данных, чем требуется по классическим постановкам краевых задач, а на остальной части поверхности (данных меньше, или краевые условия вовсе не определены. Первые такие задачи рассматривались в связи с определением температуры на недоступных для измерений поверхностях [1]. Такая ситуация создается и при определении напряженного состояния земной коры, когда известны внешняя нагрузка на поверхности в виде атмосферного давления и, благодаря GPS измерениям, перемещения точек поверхности [2]. Такая ситуация возникает и во многих задачах геофизики, электроразведки.

Исторически такие задачи были отнесены к классу “некорректных по Адамару” задач математической физики и даже считались лишенными физического смысла [3]. В дальнейшем были разработаны методы регуляризации, его модификации и аналоги [4 -7], которые, в принципе, помогли преодолеть вычислительные трудности при построении приближенных решений этих задач.

Проблема заключается в том, что, хотя может существовать единственное решение задачи (в определенном классе функций), не существует непрерывной зависимости решений от исходных данных. На этом основании задачу и назвали “некорректной”. В условиях практических задач исходные данные являются результатом интерполяции данных дискретных измерений или реализацией некоторых процессов и всегда известны с определенной (вообще говоря, поддающейся оценке) точностью. Аналитические или численные решения этих задач могут сколь угодно отличаться от их действительного значения. Причем, таких решений, отличающихся от истинного, очевидно, существует неограниченное количество.

Методы регуляризации позволяют строить решения (численные), непрерывно зависящие от исходных функций и, при достаточно малом значении параметра регуляризации, стремящиеся к решению исходной задачи, то есть к решению, удовлетворяющему дифференциальному уравнению и граничным условиям задачи. Однако это не означает, что эти регуляризованные решения так же, как и аналитические решения, не могут сколь угодно отличаться от истинных решений, соответствующих реальным физическим задачам. Поэтому предлагается выбрать метод регуляризации (квазиобращения) исходя из “физических соображений” [6, стр. 315], или выбросить “большие значения” искомой функции на “малой” окрестности границы области [6, стр. 230]. Какие могут быть “физические соображения” и что означают “большие значения” и “малая окрестность” в контексте решения реальной физической задачи неясно (невозможно точно сформулировать).

Рассматриваемые задачи очень разнообразны как в физическом отношении, так и в математическом. Они встречаются и для параболических, и для гиперболических, и для эллиптических уравнений. Мы рассмотрим здесь лишь уравнения эллиптического типа, имея в виду статические задачи теории упругости. Кроме того, мы избегаем строгой математической постановки задач, представляя (эвристически) на примерах суть вопроса.

Ниже мы обсуждаем отношения к искомому решению реальной физической задачи “некорректных по Адамару” аналитических решений задач для гармонических и бигармонических уравнений с неклассическими граничными условиями и соответствующих им регуляризованных решений этих задач. Во всем дальнейшем мы предполагаем, что заданные граничные значения функций таковы, что решения соответствующих задач существуют и единственны в классе L_2 функций и “некорректность” задачи заключается только в отсутствии непрерывной зависимости решений от исходных данных.

2. Построение аналитических решений

Покажем на нескольких примерах, что получение аналитических решений задач с неклассическими граничными условиями для классических областей аналогично известным решениям. В приведенных ниже задачах 1(4 интегралы сходятся в силу сделанных выше предположений о существовании единственных решений этих задач.

Задача 1. Определить гармоническую в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq b$ функцию $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$$\Phi = f(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad y = 0.$$

На границе $y = b$, $-\infty < x < \infty$ граничные условия не определены.

Введя преобразование Фурье и функцию $\Phi(x, y)$ формулами

$$\bar{q}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} q(x) e^{i\lambda x} dx, \quad q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A \operatorname{ch} \lambda y + B \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

и удовлетворяя преобразованным граничным условиям, получим

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\bar{f} \operatorname{ch} \lambda y + \frac{\bar{g}}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda y \right) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Это решение существует согласно сделанным выше предположениям относительно поведения функций $f(x)$, $g(x)$. Можно удостовериться, что при соответствующих граничных условиях это решение согласовано с решением с классическими граничными условиями. Аналогичное рассмотрение имеется в [9] с регуляризацией решения.

Задача 2. Определить гармоническую на полуплоскости $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$ функцию $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$$\Phi = f(x), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \quad x > 0.$$

На части границы полуплоскости $y = 0$, $x < 0$ граничные условия не определены.

Воспользовавшись интегральным преобразованием Меллина и полярными координатами и действуя аналогично, будем иметь

$$\bar{q}(p) = \int_0^{\infty} q(r) r^{p-1} dr, \quad q(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{q}(p) r^{-p} dp$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_L (A \cos p\theta + B \sin p\theta) r^{-p} dp$$

$$\Phi|_{\theta=0} = f(r), \quad A_1 = \bar{f}(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^{p-1} dr$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} = g(r) \quad B_1 = \frac{\bar{g}(p+1)}{p}$$

$$\Phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left[\bar{f}(p) \cos p\theta + \frac{\bar{g}(p+1)}{p} \sin p\theta \right] r^{-p} dp$$

Это решение также существует и единственно согласно сделанным выше предположениям относительно поведения функций $f(x)$, $g(x)$ и известного предположения о положении линии интегрирования (L) .

Задача 3. Определить бигармоническую в полосе $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y \leq b$ функцию напряжений $\Phi(x, y)$ при граничных условиях $u = u_0(x)$, $v = v_0(x)$, $\sigma_{yy} = \sigma_0(x)$, $\tau_{xy} = \tau_0(x)$ при $y = 0$, $-\infty < x < \infty$. На грани $y = b$ граничные условия не определены.

Воспользуемся представлением бигармонической функции тремя гармоническими функциями Папковича-Найбера

$$2GU = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu)\Phi_1, \quad 2GV = -\frac{\partial F}{\partial y} + 4(1-\nu)\Phi_2$$

$$F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2.$$

Причем, одна из трех гармонических функций может быть выбрана произвольно. Следуя [8], примем $\Phi_1 \equiv 0$. Полагая

$$2GU = -\frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}$$

$$2GV = \chi \Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \quad \chi = 3 - 4\nu$$

$$\sigma_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \left[2(1-\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] - y \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-2\nu)\Phi_2 - \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} - y \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right]$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_0 \operatorname{ch} \lambda y + B_0 \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} \frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (A_2 \operatorname{ch} \lambda y + B_2 \operatorname{sh} \lambda y) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

и удовлетворяя граничным условиям, получим

$$A_0 = -2iG\bar{U}_0, \quad B_0 = \frac{(1-2\nu)}{(1-\nu)}G\bar{V}_0 - \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{i\bar{\tau}_0}{\lambda}$$

$$A_2 = \frac{G\bar{V}_0}{1-\nu} - \frac{i\bar{\tau}_0}{2\lambda(1-\nu)}, \quad B_2 = \frac{\bar{\sigma}_0}{2\lambda(1-\nu)} - \frac{iG\bar{U}_0}{1-\nu}$$

Таким образом, неизвестные функции определены. Найденное решение существует при сделанных выше предположениях относительно поведения заданных в виде граничных значений функций. Можно легко проверить, что при соответствующем задании граничных функций это решение совпадает с классическим решением [8].

Задача 4. Определить бигармоническую на полуплоскости $y \geq 0$ функцию напряжений $\Phi(x, y)$ при граничных условиях

$$u = u_0(x), \quad v = v_0(x), \quad \sigma_{yy} = \sigma_0(x), \quad \tau_{xy} = \tau_0(x) \quad \text{при } y = 0, \quad 0 \leq x < \infty.$$

При $y = 0, \quad -\infty < x < 0$ граничные условия не определены.

Воспользуемся интегральным преобразованием Меллина и представлением бигармонической функции Папковича-Найбера. Пользуясь произвольностью одной из функций Папковича-Найбера и следуя [8], примем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}$$

Представляя искомые функции в виде интегралов Меллина, удовлетворяя преобразованным граничным условиям и решая полученную алгебраическую систему, имеем

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\pi r} \int_{(L)} [A_0 \cos(p-1)\theta + B_0 \sin(p-1)\theta] r^{1-p} dp$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [A_1 \cos p\theta + B_1 \sin p\theta] r^{-p} dp$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} [-A_1 \sin p\theta + B_1 \cos p\theta] r^{-p} dp$$

$$A_0 = -\frac{1}{1+\chi} \left[2G\bar{u}_0(p) - \bar{\sigma}_0(p+1) \frac{\chi+1}{p(p-1)} \right]$$

$$A_1 = -\frac{1}{1+\chi} \left[2G\bar{u}_0(p) - \frac{\bar{\sigma}_0(p+1)}{p} \right]$$

$$B_1 = -\frac{1}{1+\chi} \left[\frac{\bar{\tau}_0(p+1)}{p} + 2G\bar{v}_0(p) \right]$$

$$B_0 = -\frac{p+1}{p-1} \bar{v}_0(p) \frac{2G}{1+\chi} + \frac{\bar{\tau}_0(p+1)}{p(p-1)} \frac{\chi-p}{1+p}$$

Относительно существования этого решения можно дословно повторить то, что сказано относительно решений задач 1(3).

3. О регуляризованных решениях

Отсутствие непрерывной зависимости решений от исходных данных создает большие неудобства, особенно при численном решении практических задач. Поэтому были развиты различные методы регуляризации [4-7], позволяющие построить численные решения, непрерывно зависящие от исходных данных.

Рассмотрим, в каком отношении находятся регуляризованные решения с решениями реальной физической задачи.

Задача 5. Пусть имеем прямоугольник

$$-1 < x < 1, \quad 0 < y < y_0$$

Ищем функцию $u(x, y)$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

При граничных условиях

$$u(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = g(x)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – заданные функции.

Задача эта рассмотрена на стр. 242 [6].

Задача 5.1. Пусть при условиях задачи 5 реальному физическому процессу соответствуют точные значения граничных функций

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \log \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 1 \right] \quad (1)$$

$$g_1(x) = -\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{\varepsilon_1}{\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + 1}, \quad \varepsilon_1 \text{ (достаточно малая величина.)}$$

Точное, но “некорректное” решение этой задачи известно

$$u_1(x, y) = \log \left[x^2 + (y-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 \log \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + (y-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

Задача 5.2. Пусть, снова имея условия задачи 5, в результате ошибки измерений граничные условия заданы в виде функций

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \log(x^2 + 1)$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$
(3)

отличающихся от истинных физических значений (1) на малую величину $\varepsilon_0(\varepsilon_1)$, зависящей от точности измерений.

Точное, тоже “некорректное” решение задачи при этих граничных функциях также известно.

$$u_2(x, y) = \log \left[x^2 + (y-1)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$
(4)

Эта последняя задача подробно рассмотрена в [6]. Применением метода квазиобращения, получены численные решения, приближающиеся к $u_2(x, y)$ и непрерывно зависящие от исходных данных.

Подробное численное исследование этой задачи [6] показывает сильную зависимость точности решения от расположения относительно рассматриваемой области (прямоугольник $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq y_0$) точки с логарифмической особенностью.

Однако ясно, что это решение не представляет модель реального физического процесса (2).

Непрерывная зависимость построенного численного решения от исходных данных и точность решения рассматриваются относительно исходных данных (3) и решения (4), а не с истинными граничными данными (1) и описанием реального физического процесса (2). Отметим, что все сказанное останется в силе, если поменять местами (1) и (3).

При достаточно малом значении параметра регуляризации (квазиобращения) решение задачи стремится к решению (3), (4), а не к описанию реального физического процесса (1), (2). Оно может стремиться к решению (1), (2) при стремлении ошибки измерений к нулю, что нереально.

Фактически решение $u_2(x, y)$, которое аппроксимирует регуляризованное численное решение задачи, есть “некорректное” по Адамару аналитическое решение задачи. Ясно также, что варьируя положением и количеством точек с логарифмической особенностью, можно для истинной физической задачи 5.1 построить решения типа (4) в неограниченном количестве.

Таким образом, в обсуждаемых случаях (при существовании единственных решений), регуляризованные решения снимают трудности при численной реализации решения, но не решают проблему построения истинного физического решения и по сути своей равноценны “некорректным” по Адамару аналитическим решениям.

4. Заключение

Приступая к решению задачи с неклассическими граничными условиями, мы можем построить регуляризованные численные решения или построить

аналитическое решение применительно к заданным (неточным) граничным условиям. Эти решения существуют и единственны по предположению, как в приведенных выше примерах, в классе L_2 функций. Вычислительные трудности, связанные с наличием особенностей для численных решений, в принципе, преодолены. В случае же аналитических решений, считаем наличие особенностей возможными, физически оправданными. Их можно интерпретировать как источники, стоки (тепла, жидкости), сосредоточенные силы и моменты, сильные концентрации напряжений и т.д.. Если же по физическим соображениям этих особенностей не должно быть, и если они дают “вклад” в заданные граничные условия в пределах “ошибки измерений”, то они могут быть просто вычтены из решения, при этом граничные условия не должны выходить за пределы известной точности измерений. При аналитических решениях с выделенными особенностями, в этом случае уточняется решение во всей области, а не только в окрестности особой точки, как в случае численных решений.

Понимание того, что регуляризованное решение не есть решение реальной (искомой) физической задачи, приводит к попыткам ее изменений. Существует множество предложений этих изменений: отбрасывание больших (бесконечных) значений в “малой” окрестности, предложение использовать “физические” соображения, предложение перерасчета данных на новый уровень (предложенный геофизиками для гравиметрической задачи).

А другие предложения изменений относятся к ограничению класса непрерывности искомых функций (C_1 , C_2 и т.д.), однако, при этом возникают вопросы о существовании решений и “согласованности” исходных данных. Предложено также измерение вторых производных граничных значений.

Таким образом, можно считать, что аналитические решения (когда они существуют) типа приведенных в п. 2 и регуляризованные численные решения в физическом смысле равносильны. При этом ни один из них не гарантирует совпадение с реальным физическим решением. Каждой реализации или интерполяции дискретных данных физических измерений соответствует “свое” аналитическое решение и каждому алгоритму регуляризации соответствует “свое” решение. В обоих случаях мы можем иметь неограниченное множество разных решений.

При действительной физической реализации следует учесть, что в реальных задачах отклонения от действительных (истинных) решений могут иметь разные причины. Это, в первую очередь, зависит от того, насколько хорошо данная модель описывает исследуемый процесс, насколько верны принятые ограничения относительно среды (однородность, изотропность и т.д.), наличие в области сосредоточенных объектов (источников, стоков, сосредоточенных сил).

Естественным образом задача сводится к вопросу:

- Каким образом должны быть изменены граничные условия (в пределах ошибки измерений), чтобы полученные аналитические или регуляризованные численные решения “приближались” к истинному физическому решению, или

- что еще должно быть задано (измерено, определено), чтобы решения (аналитические, регуляризованные численные) стремились к истинному физическому решению. Очевидно, что это может быть сделано только относительно каждой конкретной физической задачи или класса задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. К вопросу о методах определения температуры поверхности тела. // Журнал выч. мат. и матем. физ. (ВМ и МФ). 1967. Т. 7. № 4. С. 911-914.
2. Арутюнян А.Г., Тоноян В.С., Хачикян А.С. Распределение деформаций в зоне взаимодействия Аравийской и Евразийской плит на основе данных GPS. // Изв. НАН РА. Механика. 2003. Т. 56. № 3. С. 3-13.
3. Лаврентьев М.М. Предисловие к книге [6].
4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
5. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 286 с.
6. Леттес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. М.: Мир, 1970. 336 с.
7. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
9. Иванов В.К. Задача Коши для уравнений Лапласа в бесконечной полосе. // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. №1. С. 131-136.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
01.12.2005

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ВНУТРЕННЕМУ ИЛИ
ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ
РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙ ИЛИ
СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКЕ НА ДРУГОМ КОНТУРЕ

Алексян Д.Р.

Դ.Ր. Ալեքսանյան

Ներքին կամ արտաքին եզրերով ամրակցված օղակաձև սալի կայունության խնդիրը, երբ մյուս եզրի վրա ազդում է ձգող կամ սեղմող հավասարաչափ բաշխված բեռ

Դիտարկված է շրջանային օղակաձև սալի կայունության խնդիրը, երբ սալի եզրերից մեկը միջին հարթության մեջ ամրացված է, իսկ մյուս եզրով սալը ենթարկված է շառավղի ուղղությամբ ձգող կամ սեղմող հավասարաչափ բշխված ուժերի ազդեցության: Սալի նյութի Պուասոնի գործակցից, սալի երկրաչափական պարամետրերից և ազդող ուժերի բնույթից կախված դիտարկված են օղակային սալի հարթ ձևի կայունության, ինչպես նաև կայունության կորուստի հնարավոր դեպքերը: Վերջին դեպքում որոշված են սալի ընդլայնական տեղափոխությունները:

D.R. Aleksanyan

The stability problem of the circular ring plate jammed on internal or external contours under the evenly distributed stretching or compressing load influences on the other contour.

Рассмотрена задача устойчивости круговой кольцевой пластинки, когда одна из границ пластинки зашкреплена в срединной плоскости, а другая граница подвержена действию равномерно распределенных растягивающих или сжимающих радиальных сил.

В зависимости от значения коэффициента Пуассона материала пластинки, геометрических параметров пластинки и характера действующих сил рассмотрены возможные случаи устойчивости и также случаи потери плоской формы кольцевой пластинки. В последнем случае определены поперечные перемещения пластинки.

Рассматривается однородная кольцевая пластинка толщиной h , внутренний контур $r = c$ которой (или внешний $r = a$) зашкреплен, а другой контур нагружен равномерно распределенной растягивающей или сжимающей силой P в срединной плоскости пластины.

1. Единственное отличное от нуля составляющее вектора перемещения и радиального направления осесимметричного плоского напряженного состояния и эквивалентные напряжения усилия определяются формулами [1-2]

$$u = c_1 r + \frac{c_2}{r}$$
$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) \quad c \leq r \leq a \quad (1.1)$$
$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right), \quad N_{r\theta} = 0$$

где E и ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала пластинки.

На контурах $r = c$ и $r = a$ имеются следующие граничные условия:

$$U|_{r=c} = 0, \quad N_r|_{r=a} = P_2 \quad (1.2)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), на основании (1.1) для внутренних усилий получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} N_r &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[c_1(1+\nu) - \frac{c_2}{r_2}(1-\nu) \right] = \frac{P_2}{1+\ell^2\nu^*} \left(1 + \nu^* \frac{c^2}{r^2} \right) \\ N_\theta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[c_1(1+\nu) + \frac{c_2}{r_2}(1-\nu) \right] = \frac{P_2}{1+\ell^2\nu^*} \left(1 - \frac{\nu^* c^2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$\ell = \frac{c}{a} < 1, \quad \nu^* = \frac{1-\nu}{1+\nu} < 1$$

Очевидно, что при $P_2 > 0$, когда внутренние усилия положительны, плоская форма равновесной пластинки устойчива. В случае $P_2 < 0$ внутренние усилия отрицательны и возможна потеря плоской формы пластинки.

При $P_2 = -P$, $P > 0$ поперечное перемещение пластинки определяется из уравнения

$$\Delta \Delta w + \frac{P}{(1+\ell^2\nu^*)D} \left[\left(1 + \frac{\nu^* c^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{c^2}{r^2} \left(1 - \frac{\nu^* c^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] = 0 \quad (1.4)$$

где D – цилиндрическая жесткость

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$$

или обозначая

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{P}{(1+\ell^2\nu^*)D}, \quad d^2 = \nu^* c^2 \\ \Delta \Delta w + \beta^2 \left[\left(1 + \frac{d^2}{r^2} \right) \frac{dw}{dr} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{d^2}{r^2} \right) \frac{dw}{dr} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Замена переменной $\beta r = x$ приводит к уравнению

$$\Delta_x \Delta_x w + \left(1 + \frac{\beta^2 d^2}{x^2} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \left(1 - \frac{\beta^2 d^2}{x^2} \right) \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} = 0 \quad (1.6)$$

где

$$\Delta_x = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx}$$

Обозначая $w'(x) = z(x)$, уравнение (1.6) можно представить в виде

$$x^3 z''' + 2x^2 z'' - x(\xi^2 - x^2)z' + (\xi^2 + x^2)z = 0 \quad (1.7)$$

где

$$\xi^2 = 1 - \beta^2 d^2$$

После некоторых преобразований получим

$$x \left[x^2 z'' + xz' - (\xi^2 - x^2)z \right] - (x^2 z'' + xz' - (\xi^2 - x^2)z) = 0 \quad (1.8)$$

Интегрируя (1.8), получим

$$x^2 z'' + xz' - (\xi^2 - x^2)z = q_o x \quad (1.9)$$

общее решение которого представим в виде [3]

$$z = C_1(x)J_\xi(x) + C_2(x)Y_\xi(x) \quad (1.10)$$

где $J_\xi(x)$ и $Y_\xi(x)$ – функции Бесселя первого и второго родов, а $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются методом вариации произвольных постоянных.

Для перемещения $w(x)$ получим

$$w = \int [\bar{C}_1 J_\xi(x) + \bar{C}_2 Y_\xi(x)] dx + \\ + \frac{\pi q_o}{2} \int [Y_\xi(x) \int J_\xi(x) dx - J_\xi(x) \int Y_\xi(x) dx] dx + C_o \quad (1.11)$$

2. В случае, когда внешний контур пластинки $r = c$ нагружен равномерно распределенной нагрузкой P_1 , имеем

$$U|_{r=a} = 0, \quad N_r|_{r=c} = P_1 \\ N_r = \frac{P_1}{1 + \bar{\ell}^2 \nu^*} \left(1 + \frac{\nu^* a^2}{r^2} \right), \quad c \leq r \leq a \\ N_\theta = \frac{P_1}{1 + \bar{\ell}^2 \nu^*} \left(1 - \frac{\nu^* a^2}{r^2} \right), \quad N_{r\theta} = 0 \quad (2.1)$$

где

$$\bar{\ell} = \frac{a}{C} > 1$$

Из (2.1) следует, что при $P_1 > 0$ $N_r > 0 \quad \forall r \in [c, a]$, а N_θ может быть знакопеременным в зависимости от значений параметров $c, a, a^2 \nu^*$.

а) Если $a^2 \nu^* < c^2$, то $r^2 - a^2 \nu^* > 0$ для $\forall r \in [c, a]$, т. е. пластинка достаточно “узкая”, тангенциальное усилие $N_\theta > 0$ и потеря устойчивости пластинки невозможны.

б) Если $c^2 < a^2 \nu^* < a^2$, усилие $N_\theta < 0$, при $c^2 < r^2 < a^2 \nu^*$, а при $a^2 \nu^* < r^2 < a^2$ $N_\theta > 0$, т. е. в окрестности внутреннего и внешнего контуров возникают зоны сжатия и растяжения, что указывает на возможность потери устойчивости плоской формы пластинки.

Из (2.1) следует также, что при $P_1 < 0$ $N_r < 0 \quad \forall r \in [c, a]$, а N_θ может быть знакопеременным:

$$\text{а) если } a^2 \nu^* < c^2, \text{ то } r^2 - a^2 \nu^* > 0 \quad \forall r \in [c, a], \quad N_\theta < 0$$

б) если $c^2 < a^2 v^* < a^2$ $N_\theta > 0$ при $c^2 < r^2 < a^2 v^*$, а при $a^2 v^* < c^2 < a^2$ $N_\theta < 0$.

Поперечное перемещение пластинки w при $P_1 > 0$ удовлетворяет уравнению

$$D\Delta w = \frac{P_1}{1 + \bar{\ell}^2 v^*} \left[\left(1 + \frac{v^* a^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1 - \frac{a^2 v^*}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right] \quad (2.2)$$

$$(P_1 > 0, \quad c \leq r \leq a, \quad c^2 < a^2 v^* < a^2)$$

Уравнение (2.2) представим в виде

$$\Delta \Delta w - \beta_1^2 \left(1 + \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} - \left(1 - \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0 \quad (2.3)$$

где

$$\beta_1^2 = \frac{P_1}{(1 + \bar{\ell}^2 v^*) D}, \quad d_1^2 = v^* a^2$$

После замены переменной $\beta_1 r = x_1$ уравнение (2.3) примет вид

$$\Delta_x \Delta_x w - \left(1 + \frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2} \right) \frac{d^2 w}{dx_1^2} - \left(1 - \frac{\beta_1^2 d_1^2}{x_1^2} \right) \frac{1}{x_1} \frac{dw_1}{dx_1} = 0 \quad (2.4)$$

Обозначая $w'(x_1) = z(x_1)$, получим

$$x_1 [x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z]' - [x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z] = 0 \quad (2.5)$$

где

$$\eta^2 = 1 + \beta_1^2 d_1^2$$

Интегрируя (2.5), получим

$$x_1^2 z'' + x_1 z' - (\eta^2 + x_1^2) z = C x_1 \quad (2.6)$$

общее решение которого представим в виде

$$z = C_1(x_1) I_\eta(x_1) + C_2(x_1) K_\eta(x_1) \quad (2.7)$$

где $I_\eta(x_1)$, $K_\eta(x_1)$ – цилиндрические функции мнимого аргумента с вещественным индексом η .

Для поперечного перемещения w получим

$$w = \bar{C}_o + \int [\bar{C}_1 I_\eta(x_1) + \bar{C}_2 K_\eta(x_1)] dx_1 + \\ + C \int [I_\eta(x_1) \int K_\eta(x_1) dx_1 - K_\eta(x_1) \int I_\eta(x_1) dx_1] dx_1 \quad (2.8)$$

В случае сжимающей внешней нагрузки $P_1 < 0$ $w(r)$ удовлетворяет уравнению

$$D\Delta \Delta w + \frac{|P_1|}{1 + \bar{\ell}^2 v^*} \left[\left(1 + \frac{v^* a^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{dr^2} + \left(1 - \frac{v^* a^2}{r^2} \right) \frac{dw}{dr} \right] = 0$$

или

$$\Delta \Delta w + \beta_1^2 \left[\left(1 + \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{d^2 w}{d r^2} + \left(1 - \frac{d_1^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{d w}{d r} \right] = 0 \quad (2.9)$$

где

$$\beta_1^2 = \frac{|\bar{P}_1|}{(1 + \bar{\ell}^2 \nu^*) D} \quad d_1 = a^2 \nu^*$$

Полученное уравнение можно привести к виду

$$x_1^3 z'' + 2x_1^2 z' - x_1 z' + z + x_1^3 z' + \beta_1^2 d_1^2 x_x z' + x_1^2 z - \beta_1^2 d_1^2 x_x z = 0 \quad (2.10)$$

где

$$x_1 = \beta_1 r, \quad z = w'$$

После некоторых преобразований получим уравнение

$$x_1 \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\xi_1^2 - x_1^2) z \right]' - \left[x_1^2 z'' + x_1 z' - (\xi_1^2 - x_1^2) z \right] = 0 \quad (2.11)$$

где

$$\xi_1^2 = 1 - \beta_1^2 d_1^2$$

Интегрируя (2.11), будем иметь

$$x_1^2 z'' + x_1 z' - (\xi_1^2 - x_1^2) z = \bar{H}_0 x_1 \quad (2.12)$$

Общее решение (2.12) представим в виде

$$z = C_1(x_1) J_{\xi_1}(x_1) + C_2(x) Y_{\xi_1}(x_1) \quad (2.13)$$

где $J_{\xi_1}(x_1)$; $Y_{\xi_1}(x_1)$ – функции Бесселя первого и второго родов, $C_1(x_1)$, $C_2(x_1)$ определяются методом вариации постоянных.

Для прогиба w получим формулу

$$w = \int \left[C_1 J_{\xi_1}(x_1) + C_2 Y_{\xi_1}(x_1) \right] dx_1 + \frac{\pi H_o}{2} \int \left[Y_{\xi_1}(x_1) \int J_{\xi_1}(x_1) dx_1 - J_{\xi_1}(x_1) \int Y_{\xi_1}(x_1) dx_1 \right] dx_1 + E_o \quad (2.14)$$

Для функции $w(x_1)$ рассмотрим следующие случаи граничных условий:

1. Контур $r = a$ зашцеилен , а контур $r = c$ свободен:

$$w|_{r=a} = 0, \quad \frac{dw}{dr}|_{r=a} = 0$$

$$M_r|_{r=c} = 0, \quad Q_r|_{r=c} = 0$$

2. Контур $r = a$ шарнирно закреплен, а контур $r = c$ свободен.

В этом случае только второе из уравнений (2.15) заменяется условием $M_r = 0$ при $r = a$, а другие остаются без изменения.

Изгибающие моменты и поперечные силы выражаются при помощи функции прогиба w формулами

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{1}{2} \frac{dw}{dr} \right), \quad Q_r = -D \frac{d}{dr} (\Delta w) \quad (2.16)$$

Используя обозначение $\beta_1 r = x_1$ и $w'(x) = z(x_1)$ представим (2.16) в виде [4]

$$M_r = -D \beta_1^2 \left[z' + \frac{1}{x_1} z \right], \quad Q_r = -D \beta_1^3 \left[z'' + \frac{1}{x_1} z' - \frac{1}{x_1^2} z \right] \quad (2.17)$$

Соответственно с этим граничные условия (2.15) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} w|_{x_1=\beta_1 a} &= 0, \quad z|_{x_1=\beta_1 a} = 0 \\ x_1 z' + \nu z|_{x_1=\beta_1 c} &= 0, \quad x_1^2 z'' + x_1 z' - z|_{x_1=\beta_1 c} = 0 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Функции $z(x_1)$ и $w(x_1)$ удобно представить в виде

$$\begin{aligned} z(x_1) &= C_1 J_{\xi_1}(x_1) + C_2 Y_{\xi_1}(x_1) + \frac{\pi H_o}{2} \left[Y_{\xi_1}(x_1) \int_{\beta_1 a}^{x_1} J_{\xi_1}(x_2) dx_2 - \right. \\ &\quad \left. - J_{\xi_1}(x_1) \int_{\beta_1 a}^{x_1} Y_{\xi_1}(x_2) dx_2 \right] \\ w(x_1) &= \int_{\beta_1 a}^{x_1} \left\{ C_1 J_{\xi_1}(x) + C_2 Y_{\xi_1}(x) + \frac{\pi H_o}{2} \left[Y_{\xi_1}(x) \int_{\beta_1 a}^x J_{\xi_1}(x_2) dx_2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - J_{\xi_1}(x) \int_{\beta_1 a}^x Y_{\xi_1}(x_2) dx_2 \right] \right\} dx + E_o \end{aligned} \quad (2.19)$$

Удовлетворив граничным условиям (2.18), на основе (2.19) для неопределенных постоянных C_1, C_2, E_o, H_o получим следующую систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} E_o &= 0 \\ C_1 J_{\xi_1}(\beta_1 a) + C_2 Y_{\xi_1}(\beta_1 a) &= 0 \\ C_1 J'_{\xi_1}(\beta_1 c) + C_2 Y'_{\xi_1}(\beta_1 c) + \frac{\pi H_o}{2} \left[Y'_{\xi_1}(\beta_1 c) \int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} J'_{\xi_1}(x_2) dx_2 - \right. \\ &\quad \left. - J'_{\xi_1}(\beta_1 c) \int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} Y_{\xi_1}(x_2) dx_2 \right] + \frac{H_o \nu}{\beta_1^2 a^2 (1 + \ell^2 \nu^*)} = 0 \end{aligned}$$

$$C_1 J_{\xi_1}(\beta_1 c) + C_2 Y_{\xi_1}(\beta_1 c) + \frac{\pi H_o}{2} \left[Y_{\xi_1}(\beta_1 c) \int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} J_{\xi_1}(x_2) dx_2 - \right. \\ \left. - J_{\xi_1}(\beta_1 c) \int_{\beta_1 a}^{\beta_1 c} Y_{\xi_1}(x_2) dx_2 \right] - \frac{H_o}{\beta_1 c (1 + \bar{\ell}^2 \nu^*)} = 0 \quad (2.20)$$

Для второго случая граничных условий будем иметь аналогичную систему уравнений относительно постоянных C_1 , C_2 , E_o , H_o , которую можно получить из (2.20), заменив в ней второе уравнение, третьим уравнением и заменив $\beta_1 c$ на $\beta_1 a$.

Из условия существования нетривиального решения системы (2.20) получим уравнение, определяющее интересующие нас критическое значение параметра рассматриваемой задачи устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1991. 334с.
2. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. 807с.
3. Ватсон Г. Теория бесселевых функций М.: Гостехиздат, 1949.
4. Хачатрян А. А. Об устойчивости кольцевой пластинки под действием растягивающих сил, приложенных по внутреннему контуру. // Изв. НАН Армении. Механика. 1997. Т. 50. №2. С.46-53.

Русско-Армянский (Славянский)
Государственный университет (РАУ)

Поступила в редакцию
31.03.2006

УДК 539.3

**ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА ТИПА ЛЯВА ДЛЯ СЛОЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ
НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО ТОЛЩИНЕ**

Мхитарян А.М., Погосян Н.Д., Терзян С.А.

Ա.Մ. Մխիթարյան, Ն.Զ. Պողոսյան, Ս.Ա. Թերզյան

**Լյավի տիպի մակերևութային ալիքն ըստ հաստության էքսպոնենցիալ անհամասեռ շերտի
համար**

Հետազոտվում է մակերևութային լայնական առաձգական ալիքների տարածման բնույթն անհամասեռ շերտ-կիսատարածություն համակարգում: Ուսումնասիրվում են մակերևութային ալիքների գոյության պայմանները:

A.M. Mkhitarian, N.D. Poghosyan, S.A. Terzyan

The Love Type Surface Wave for the Layer with Exponential Non-Homogeneity along the Thickness

The propagation character of the surface shear elastic waves in the system of non-homogeneous layer-semispace is investigated. The conditions of the surface waves existence are determined.

Исследуется характер распространения поверхностных сдвиговых упругих волн в системе неоднородный слой–полупространство. Устанавливаются условия существования поверхностных волн.

Задаче распространения поверхностных сдвиговых волн типа Лява посвящены многочисленные статьи. Из них непосредственную связь с настоящей работой имеют [1-4].

1. Пусть упругое полупространство занимает область $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$, $-\infty < z < \infty$. Полупространство скреплено со слоем, занимающим область $-\infty < x < \infty$, $-h \leq y < 0$. Рассматривается задача антиплоской деформации, т.е. вектор упругих перемещений представляется в виде

$$\bar{u} = [0, 0, w(x, y, t)] \quad (1.1)$$

Далее величины, относящиеся к слою, будут отмечены индексом 1, а величины, относящиеся к полупространству, – индексом 2.

Предполагается, что модуль сдвига и плотность слоя меняются по толщине по закону

$$\rho = \rho_1 e^{\alpha \cdot y}, \quad \mu = \mu_1 e^{\alpha \cdot y} \quad (1.2)$$

В этом случае уравнение распространения чисто сдвиговых волн в слое имеет вид

$$c_{t1}^2 (\Delta w_1 + \alpha \frac{\partial w_1}{\partial y}) = \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad c_{t1}^2 = \frac{\mu_1}{\rho_1} \quad (1.3)$$

Уравнением волн сдвига в полупространстве с постоянными модулем сдвига μ_2 и плотностью ρ_2 будет

$$c_{t2}^2 \Delta w_2 = \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \quad c_{t1}^2 = \frac{\mu_2}{\rho_2} \quad (1.4)$$

На границе контакта слоя и полупространства принимаются условия непрерывности перемещения и касательного напряжения

$$w_1 = w_2, \quad \sigma_{yz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(2)} \quad (1.5)$$

$$\text{или, с учетом закона Гука, } \mu_1 \partial w_1 / \partial y = \mu_2 \partial w_2 / \partial y \text{ при } y = 0. \quad (1.6)$$

На внешней границе слоя задаются условия упругого закрепления

$$w_1 + \beta \partial w_1 / \partial y = 0 \text{ при } y = -h \quad (1.7)$$

Из (1.7) при $\beta = 0$ получается условие закрепления, а при $\beta \rightarrow \infty$ – условие свободной от нагрузки внешней границы слоя.

Требуется найти решение уравнений (1.3), (1.4), удовлетворяющее граничным условиям (1.6), (1.7) и условию затухания

$$\lim_{y \rightarrow \infty} w_2 = 0 \quad (1.8)$$

В частном случае $\beta \rightarrow \infty, \alpha = 0$, приведенная задача совпадает с классической задачей Лява [5].

2. Решение уравнений (1.3) и (1.4) представляются в виде гармонических волн, распространяющихся по направлению координаты x . В таком случае общее решение уравнения (1.3) будет иметь вид

$$w_1 = (A_1 e^{kp_1 y} + B_1 e^{kp_2 y}) \exp i(\omega t - kx) \quad (2.1)$$

$$\text{где} \quad p_{1,2} = -\frac{\alpha}{2k} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4k^2} - \theta \eta + 1} \quad (2.2)$$

Решением же уравнения (1.4), удовлетворяющего условию затухания (1.8), будет

$$w_2 = A_2 e^{-k\sqrt{1-\eta}y} \exp i(\omega t - kx) \quad (2.3)$$

В (2.2) и (2.3) использованы следующие обозначения:

$$\eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_{t2}^2}, \quad \theta = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2} \quad (2.4)$$

Для того чтобы решение (2.3) было затухающим, достаточно выполнение условия

$$0 < \eta < 1 \quad (2.5)$$

Подстановка (2.1) и (2.3) в граничные условия (1.6), (1.7) приводит к следующей системе однородных алгебраических уравнений относительно производных A_1, B_1, A_2 :

$$\begin{aligned} A_1 + B_1 &= A_2, \quad p_1 A_1 + p_2 B_1 = -\gamma \sqrt{1-\eta} A_2 \\ (1 + k\beta p_1) A_1 e^{-kp_1 h} + (1 + k\beta p_2) B_1 e^{-kp_2 h} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{где} \quad \gamma = \mu_2 / \mu_1 \quad (2.7)$$

Равенство нулю детерминанта системы (2.6) приводит к уравнению, опреде-

ляющему фазовую скорость η поверхностной волны

$$-(1 + k\beta p_1)(\gamma\sqrt{1-\eta} + p_2)e^{-kp_1h} + (1 + k\beta p_2)(\gamma\sqrt{1-\eta} + p_1)e^{-kp_2h} = 0 \quad (2.8)$$

Уравнение (2.8) после некоторых преобразований и при условии

$$\chi^2 = \theta\eta - 1 - \frac{\alpha^2}{4k^2} > 0 \quad (2.9)$$

принимает следующий вид:

$$\operatorname{tg} \chi kh = - \frac{2\chi(1 - k\beta\gamma\sqrt{1-\eta})}{2[\gamma\sqrt{1-\eta} + k\beta(\theta\eta - 1)] - \alpha k^{-1}(1 + k\beta\gamma\sqrt{1-\eta})} \quad (2.10)$$

В частном случае $\beta \rightarrow \infty$, $\alpha = 0$ из (2.10) получается общеизвестное уравнение задачи Лява

$$\operatorname{tg} \sqrt{\theta\eta - 1} kh = \frac{\gamma\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{\theta\eta - 1}} \quad (2.11)$$

Если же $\beta = 0$, $\alpha = 0$, то из (2.10) получается дисперсионное уравнение задачи Лява в случае, когда внешняя граница слоя закреплена

$$\operatorname{tg} \sqrt{\theta\eta - 1} kh = - \frac{\sqrt{\theta\eta - 1}}{\gamma\sqrt{1-\eta}} \quad (2.12)$$

Из (2.11) и (2.12) очевидно, что при $\theta\eta < 1$, или с учетом (2.5), $\theta \leq 1$, поверхностные волны не существуют, т.е. условием существования волн Лява является условие $C_{t_1}^2 < C_{t_2}^2$

3. В частном случае, когда внешняя граница слоя свободна ($\beta \rightarrow \infty$), уравнение (2.10) приводится к виду

$$\operatorname{tg} \chi kh = \frac{\chi\gamma\sqrt{1-\eta}}{\theta\eta - 1 - \alpha(2k)^{-1}\gamma\sqrt{1-\eta}} \quad (3.1)$$

Уравнение (3.1) определяет множество мод фазовой скорости в зависимости от kh . Начало каждой моды определяется равенством $n\pi$ аргумента функции также при $\eta = 1$ [6].

$$(kh)_n = \sqrt{(\theta - 1)^{-1}[(n\pi)^2 + (\frac{\alpha h}{2})^2]} \quad (3.2)$$

При этом каждая мода при $kh \rightarrow \infty$ стремится к значению $\eta = 1/\theta$, что следует из равенства нулю знаменателя правой части уравнения (3.1). Согласно (3.2), поверхностная волна указанного типа существует при условии $\theta > 1$.

В табл. 1 приводятся значения фазовой скорости первой моды ($n = 0$) в зависимости от параметров

$$\xi = kh, \quad \varepsilon = \alpha h/2 \quad (3.3)$$

В частном случае $\theta = 2$, $\gamma = 1$.

Из табл. 1 видно, что неоднородность $\alpha > 0$ ($\varepsilon > 0$) приводит к уменьшению параметра η , характеризующего фазовую скорость, т.е. к усилению локализации поверхностной волны. В случае $\varepsilon = 0.2$ корень $\eta = 1$ появляется при $\xi = 0.2$.

Таблица 1.

Зависимость параметра фазовой скорости β от параметров длины волны ξ и
 неоднородности $\varepsilon(\theta = 2)(\gamma = 1)$ при $\xi = 0.2$

$\xi \backslash \varepsilon$	0	0.1	0.5	0.8	1.0	1.5	(
0	1	0.99	0.856	0.766	0.723	0.650	0.05
- 0.1	–	1	0.830	0.747	0.706	0.635	0.5
- 0.2	–	–	0.821	0.731	0.690	0.625	0.5

Таким образом, моды поверхностных волн, определяемые уравнением (3.1), является обобщением волн Лява в случае неоднородного слоя вида (1.2). Однако, кроме указанных мод возможна и дополнительная мода, обусловленная наличием неоднородности.

Рассмотрим случай

$$\chi^2 < 0 \quad (3.4)$$

При условии (3.4) уравнение (3.1) принимает вид

$$\operatorname{th} \sqrt{\varepsilon^2 - (\theta\eta - 1)\xi^2} = \frac{\gamma\sqrt{1-\eta}\sqrt{\varepsilon^2 - (\theta\eta - 1)\xi^2}}{(\theta\eta - 1)\xi + \varepsilon\gamma\sqrt{1-\eta}} \quad (3.5)$$

Как было указано ранее, в случае $\varepsilon = 0$ уравнение (3.5) не имеет действительного решения. Однако при $\varepsilon \neq 0$ уравнение (3.5) имеет действительный корень. Из неравенств (2.5) и (3.4) нетрудно получить следующее необходимое условие существования корня уравнения (3.5):

$$\theta > 1 + \varepsilon^2 \xi^{-2} \quad (3.6)$$

Условие (3.6) можно оформить и другими способами. При заданных θ и ξ параметр, характеризующий неоднородность (ε), должен удовлетворять условию

$$|\varepsilon| < \xi\sqrt{\theta - 1} \text{ или } |\alpha| < 2k < \sqrt{\theta - 1} \quad (3.7)$$

При заданных θ и ε параметр, характеризующий длину волны, должен удовлетворять условию

$$\xi > |\varepsilon|(\theta - 1)^{-1/2} \text{ или } 2k > |\alpha|(\theta - 1)^{-1/2} \quad (3.8)$$

В табл. 2 приводятся значения безразмерного параметра фазовой скорости η дополнительной моды, соответствующей уравнению (3.5), в частном случае $\theta = 2, \gamma = 1$.

Таблица 2.

Зависимость η для дополнительной моды от ξ и ε ($\theta = 2, \gamma = 1$)

$\xi \backslash \varepsilon$	0	0.1	0.2	0.5	0.8	1.0	1.5	∞
-0.1	—	1	0.625	0.520	0.508	0.505	0.502	0.5
-0.2	—	—	1	0.580	0.531	0.520	0.500	0.500

Как видно из табл. 2, приведенные численные результаты согласуются с необходимыми условиями (3.7).

Из неравенства (3.6) следует, что поверхностная волна при $\theta = 1$ не существует. В частности, если функции модуля сдвига и плотности (1.2) непрерывны на границе контакта $y = 0$ ($\theta = 1, \gamma = 1$ или $\mu_1 = \mu_2, \beta_1 = \beta_2$), то поверхностная волна невозможна. Доказательство этого результата для общего случая положительных, монотонных функций модуля сдвига и плотности приводится в [4].

4. Пусть внешняя граница слоя закреплена. Дисперсионное уравнение задачи

получается из уравнения (2.10) подстановкой $\beta = 0$ с учетом (2.9) и обозначений (3.3)

$$\operatorname{tg} \sqrt{(\theta\eta-1)\xi^2 - \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{(\theta\eta-1)\xi^2 - \varepsilon^2}}{\gamma\xi\sqrt{1-\eta-\varepsilon}} \quad (4.1)$$

В случае $\Pi=0$ (для однородного слоя) уравнение (4.1) имеет решение

$$\eta = \theta^{-1} \quad (4.2)$$

Соответствующее решение для неоднородного слоя

$$\eta = \theta^{-1} (1 + \varepsilon^2 \xi^{-2}) \quad (4.3)$$

существенно зависит от параметра ξ и не для всех ξ удовлетворяет условию затухания (2.5). Решение (4.3) будет удовлетворять условию затухания, если параметр, характеризующий длину волны, удовлетворяет условию

$$\xi > |\varepsilon|(\theta-1)^{-1} \quad (4.4)$$

Другое существенное отличие от случая $\Pi=0$ состоит в определении начала моды в зависимости от параметра ξ . Из (4.1) следует, что обобщение на случай неоднородного слоя возможно только при условии $\varepsilon < 0$ в виде

$$(kh)_n = \frac{1}{\sqrt{\theta-1}} \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)^2 + \varepsilon^2 \left(1 + \frac{\theta}{\gamma^2}\right)} \quad (4.5)$$

Наконец, в случае $\chi^2 < 0$ уравнение (4.1) приводится к виду

$$\operatorname{th} \sqrt{\varepsilon^2 - (\theta\eta-1)\xi^2} = -\frac{\sqrt{\varepsilon^2 - (\theta\eta-1)\xi^2}}{\gamma\xi\sqrt{1-\eta-\varepsilon}} \quad (4.6)$$

Чтобы уравнение (4.6) имело решение, очевидно, необходимо выполнение условия $\varepsilon < 0$. Если использовать приближение для случая малого аргумента функции th , то можно получить условие существования в виде

$$\varepsilon < -1 \quad (4.7)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Mangin G.A. Elastic Surface Waves with Transverse Horizontal Polarization // Advances in Applied Mechanics. 1983. V.23. P.373-374.
2. Белубекян М.В. Об условиях существования волн Лява с неоднородным слоем // Изв. АН Армении. Механика. 1991. Т.44. № 3. С.7-10.
3. Саакян С.Г., Варданян И.А. Сдвиговые поверхностные волны в некоторых вертикально-неоднородных упругих средах // Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. № 1. С.40-44.
4. Белубекян М.В., Казарян К.Б. К вопросу существования ПСВ в неоднородном упругом полупространстве // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. № 1. С.6-12.
5. Новацкий В. Теория упругости // М.: Мир, 1975. 872с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
01.06.2006

УДК 539.3

**EXCITATION OF SHEAR WAVES IN A PIEZOCERAMIC
LAYER WITH A TUNNEL CAVITY BY A SYSTEM
OF SURFACE ELECTRODES
D.I. Bardzokas, M.L. Filshtinsky**

Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի

Մակերևութային էլեկտրոդների համակարգի միջոցով թունելային խոռոչով պլեզոկերամիկ շերտում
սահմանափակված ալիքների գրգռումը

Հոդվածում կառուցվում է համալուծ էլեկտրոդառաձգական դաշտի էլեկտրական տատանումների
ժամանակ մասնակիորեն էլեկտրոդավորված թունելային խոռոչով շերտում ներդաշնակ
տատանումների հետազոտության ավգորիթ: Բերվում է թվային օրինակ:

**Д.И. Бардзокас, М.Л. Фильштинский
ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН СДВИГА В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ СЛОЕ
С ТУННЕЛЬНОЙ ПОЛОСТЬЮ ПОСРЕДСТВОМ СИСТЕМЫ
ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ**

В данной статье строится алгоритм исследования гармонических колебаний слоя с частично
электродированной туннельной полостью во время электрических колебаний сопряженного
электроупругого поля. Приводится численный пример.

Abstract

An antiplane stationary dynamic problem of electroelasticity for a piezoceramic layer weakened by a tunnel
cavity with a system of active surface electrodes is studied. Using Green's function for a homogeneous
piezoceramic layer integral representations of the solutions automatically satisfying the boundary conditions on its
bases and also the conditions of radiation at infinity are constructed. Allowing for these representations the
boundary problem of electroelasticity is reduced to a system of singular integrodifferential equations of the second
kind with resolvent kernels. Results of parametric investigations characterizing the behaviour of the components of
the electroelastic field on the cavity surface in the area of a piecewise-homogeneous layer are given.

An antiplane stationary dynamic problem of electroelasticity for a piezoceramic layer weakened by a tunnel
cavity with a system of active surface electrodes is studied. Using Green's function for a homogeneous
piezoceramic layer integral representations of the solutions automatically satisfying the boundary conditions on its
bases and also the conditions of radiation at infinity are constructed. Allowing for these representations the
boundary problem of electroelasticity is reduced to a system of singular integrodifferential equations of the second
kind with resolvent kernels. Results of parametric investigations characterizing the behaviour of the components of
the electroelastic field on the cavity surface in the area of a piecewise-homogeneous layer are given.

1. Introduction

Many actual scientific and technological problems of modern engineering are
connected with the investigations of the process of propagation of waves in piezoelectrics
and with the definition of dynamic strength in the vicinity of inhomogeneities of various
types. To solve these problems it is necessary to use modern mathematical means and, in
particular, methods and approaches of the dynamic theory of elasticity. Development of
these methods is reflected in monographs [1-5] which appeared during the last decades.

In piezoelectric media with inhomogeneities the interchange of electric and
mechanical fields may bring to electric, mechanical or mixed electromechanical fracture.
The edges of the electrodes are the sources of concentration of the components of the
electroelastic field and, hence in these areas there may emerge microcracks or a break-
down (Bardzokas et al. [6]). Some aspects of the mechanics of fracture of piezoceramic
bodies are considered in [7,8].

In the given article an algorithm for investigation of harmonic oscillations of a layer with a partially electroded tunnel cavity during the electric oscillation of a conjugated electroelastic field is constructed. Numerical examples are given.

2. Statement of the problem

In Cartesian coordinates $Ox_1x_2x_3$ consider a piezoceramic layer $(0 \leq x_1 \leq a, -\infty < x_2 < \infty, -\infty < x_3 < \infty)$ weakened by a tunnel along axis x_3 opening, the cross-section of which is limited by smooth contour C (Fig. 1a). Assume that the bases of the layer are free of forces and bounded with vacuum (the direction of polarization of the ceramics is parallel to axis x_3). On the surface of the opening free from mechanical stresses $2n$ infinite in the direction of axis x_3 thin electrodes with prescribed differences of the electric potential are located, and the non-electroded areas of the opening are bounded with vacuum (air). The boundaries of k -th electrode are determined by quantities β_{2k-1} and β_{2k} ($k = \overline{1, 2n}$), and the electric potential on it is given by quantity $\phi_k^* = \text{Re}(\Phi_k^* e^{-i\omega t})$ (t is the time, ω is the circular frequency). Location of the electrodes and configuration of the cavity cannot be fully arbitrary; the demanded requirements will be given below.

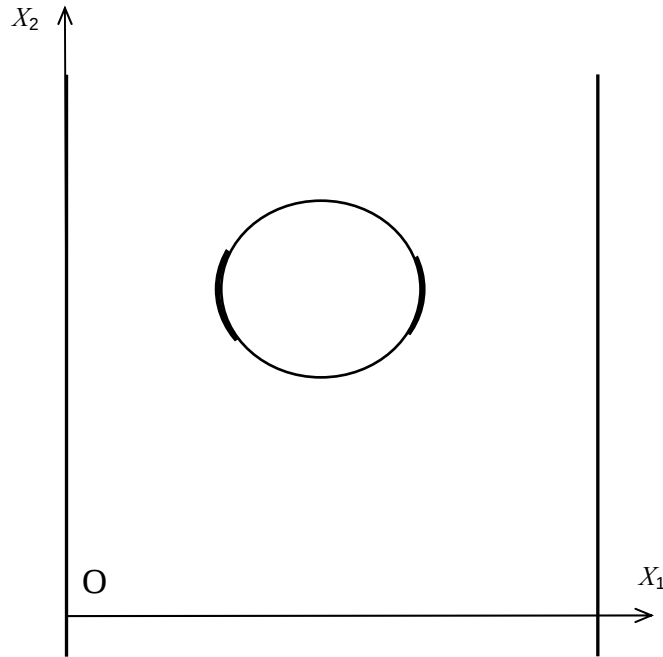


Fig. 1a

In the given conditions in a piecewise-homogeneous layer an electroelastic field corresponding to the state of antiplane deformation occurs. The full system of differential equations in a quasistatic approximation includes the following relations [5] equations of movement

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_2 \sigma_{23} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

constitutive equations of the medium

$$\sigma_{m3} = c_{44}^E \partial_m u_3 - e_{15} E_m, \quad D_m = e_{15} \partial_m u_3 + \varepsilon_{11}^E E_m \quad (m = 1, 2) \quad (2.2)$$

and equations of electrostatics

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (2.3)$$

In (2.1)-(2.3) σ_{m3} are the components of the stress tensor, u_3 is the component of the displacement vector in the direction of axis x_3 ; $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ are the vectors of strength and induction of the electric field; ϕ is the electrical potential; c_{44}^E, e_{15} and ε_{11}^E is the shear modulus measured at the constant value of the electric field; piezoelectric constant and dielectric permittivity measured at fixed deformations, respectively; ρ is the mass density of the material.

The system of equations (2.1)-(2.3) must be reduced to differential equations referring to displacements u_3 and electric potential ϕ :

$$e_{15} \nabla^2 u_3 - \varepsilon_{11}^E \nabla^2 \phi = 0 \quad (2.4)$$

From (2.4) we have the equivalent set of equations

$$\begin{aligned} \nabla^2 u_3 - c^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \quad \nabla^2 F = 0 \\ \phi &= \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 + F, \quad c = \sqrt{\frac{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)}{\rho}}, \quad k_{15} = \frac{e_{15}}{\sqrt{c_{44}^E \varepsilon_{11}^E}} \end{aligned} \quad (2.5)$$

where c is the velocity of a shear wave in a piezoceramic medium, k_{15} is the factor of an electro-mechanical coupling [4].

Mechanical and electric quantities allowing for (2.2), (2.3) and (2.5) may be expressed through functions u_3 and F by formulas

$$\sigma_{13} - i\sigma_{23} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \left[c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right], \quad (2.6)$$

$$D_1 - iD_2 = -2 \varepsilon_{11}^E \frac{\partial F}{\partial z}, \quad E_1 - iE_2 = -2 \frac{\partial}{\partial z} \left(F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 \right), \quad z = x_1 + ix_2$$

Assuming $u_3 = \operatorname{Re}(u_3 e^{-i\omega t})$, $\phi = \operatorname{Re}(\Phi e^{-i\omega t})$ and $F = \operatorname{Re}(F e^{-i\omega t})$ we will write down equations (2.5) referring to the amplitude quantities as follows

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0, \quad \nabla^2 F^* = 0, \quad \Phi = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} U_3 + F^*, \quad \gamma = \frac{\omega}{c} \quad (2.7)$$

where γ is the wave number.

Mechanical and electric boundary conditions on the surface of the cavity allowing for (2.5), (2.6) we represent in the following form

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left\{ c_{44}^E (1 + k_{15}^2) u_3 + e_{15} F \right\} &= 0 \quad \text{on } C \\ \phi &= F + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}^E} u_3 = \phi^*(\zeta, t), \quad \zeta \in C_\phi \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$D_n = -\mathfrak{D}_{11}^\varepsilon \frac{\partial F}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C \setminus C_\phi$$

Here C_ϕ is the part of contour C corresponding to the electroded surface of the cavity; operator $\partial/\partial n$ designates the derivative over normal to contour C .

Mechanical and electric boundary conditions on the bases of the layer may formally be represented as

$$\sigma_{13} = 0, \quad D_1 = 0 \quad (x_1 = 0, a) \quad (2.9)$$

Thus, the boundary problem of electroelasticity is reduced to the determinations of functions U_3 and F^* from differential equations of Helmholtz and Laplace (2.7), boundary conditions (2.8), (2.9) and conditions at infinity.

3. Green's function for a piezoceramic layer

To solve the stated problem it is expedient to have integral representations of the solution automatically satisfying the boundary conditions (2.9), and the conditions of radiation at infinity. To this purpose let us construct a Green's function for a homogeneous piezoceramic layer.

Boundary problems (2.7), (2.9) allowing for relations (2.6) may be written down as follows

$$\nabla^2 U_3 + \gamma^2 U_3 = 0; \quad \partial_1 U_3 = 0 \quad (x_1 = 0, a) \quad (3.1)$$

$$\nabla^2 F = 0; \quad \partial_1 F^* = 0 \quad (x_1 = 0, a) \quad (3.2)$$

We find Green's function corresponding to problems (3.1), (3.2) in the form of [16]:

$$\begin{aligned} G(\zeta, z) &= \sum_{v=0}^{\infty} b_v (x_2 - \xi_2) \cos \alpha_v \xi_1 \cos \alpha_v x_1 \\ E(\zeta, z) &= \sum_{v=1}^{\infty} d_v (x_2 - \xi_2) \cos \alpha_v \xi_1 \cos \alpha_v x_1 \\ \nabla^2 G + \gamma^2 G &= \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2), \quad \alpha_v = \frac{\pi v}{a} \\ \nabla^2 E &= \delta(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) = \delta(x_1 - \xi_1) \delta(x_2 - \xi_2) \\ z &= x_1 + ix_2, \quad \zeta = \xi_1 + i\xi_2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

where $\delta(x)$ is $2a$ periodical Dirac δ -function.

Applying the representation

$$\delta(x_1 - \xi_1) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a} \sum_{v=1}^{\infty} \cos \alpha_v \xi_1 \cos \alpha_v x_1 \quad (3.4)$$

dividing the variables in equations (3.1), (3.2) and then using the procedure of determination of the fundamental solution of a common differential equation we find that

$$b_v = -\frac{1}{a\lambda_v} e^{-\lambda_v(x_2 - \xi_2)}, \quad b_0 = \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\gamma|x_2 - \xi_2|}$$

$$d_v = -\frac{1}{a\alpha_v} e^{-\alpha_v(x_2 - \xi_2)}, \quad d_0 = 0, \quad \lambda_v = \begin{cases} \sqrt{\alpha_v^2 - \gamma^2}, & \gamma < \alpha_v \\ -i\sqrt{\gamma^2 - \alpha_v^2}, & \gamma > \alpha_v \end{cases} \quad (v = 1, 2, \dots) \quad (3.5)$$

The series for functions $E(\zeta, z)$ in (3.3) allowing for (3.5) may be easily summed up by using equation [10]

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m|x|}}{m} \cos my = \frac{|x|}{2} - \frac{1}{2} \ln [2(\operatorname{ch} x - \cos y)] \quad (3.6)$$

and has the following form

$$E(\zeta, z) = -\frac{|x_2 - \xi_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right|$$

$$\bar{z} = x_1 - ix_2 \quad (3.7)$$

To separate the main part of function $G(\zeta, z)$ we will write down Green's function G_0 of the prime operator in Helmholtz equation (3.1). Summing up the corresponding series and using (3.6) we obtain

$$G_0 = -\frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} a_m(x_1, \xi_1) e^{-\alpha_m|x_2 - \xi_2|} = -\frac{|x_2 - \xi_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right|$$

$$a_m(x_1, \xi_1) = \frac{\cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1}{\alpha_m}. \quad (3.8)$$

Due to (3.3), (3.5), (3.8) we represent function $G(\zeta, z)$ in its final form

$$G(\zeta, z) = G_0 + G_1, \quad G_1 = \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\gamma|x_2 - \xi_2|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m(x_2 - \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m x_1 \quad (3.9)$$

$$c_m(x_2 - \xi_2) = \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m|x_2 - \xi_2|} - \frac{1}{\alpha_m} e^{-\alpha_m|x_2 - \xi_2|} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Thus, function $E(\zeta, z)$ and $G(\zeta, z)$ determined by formulas (3.7)-(3.9) are Green's functions of boundary problem (3.1), (3.2) for a piezoceramic layer. The conditions of radiation in problem (3.1) and damping in problem (3.2) are satisfied. After separation of the main singularity in (3.3) the common term of series in (3.9) decays at point $z = \zeta$ as m^{-3} .

4. Singular Integrodifferential Equations of a Boundary Value Problem

Applying the above constructed Green's functions we will write down the integral representations of the solutions in the following form

$$U_3(x_1, x_2) = \int_C p(\zeta) G(\zeta, z) ds, \quad F^*(x_1, x_2) = \int_C f(\zeta) \frac{\partial E(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} ds, \quad \zeta \in C \quad (4.1)$$

Here ds is the element of the arc length of contour C . Representations (4.1) satisfy differential equations (2.7), boundary conditions (2.9) on the bases of the layer and the conditions of radiation at infinity.

Allowing for expressions (3.7) the representation for function $F^*(x_1, x_2)$ is transformed into the form

$$F^*(x_1, x_2) = \int_C f(\zeta) K(\zeta, z) ds$$

$$K(\zeta, z) = \frac{\sin \psi}{2a} \operatorname{sign}(x_2 - \xi_2) + \frac{1}{4a} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right] \right\} \quad (4.2)$$

Here $\psi = \psi(\zeta)$ is the angle between the normal to contour C and axis Ox_1 , at point $\zeta \in C$.

Expanding into simple fractions [10]

$$\operatorname{ctg} \pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 - m^2}$$

and using Sohotsky-Plemmelj formulas [11] we find the expressions for the limiting values of the integrals with a kernel of Hilbert type at $z \rightarrow \zeta_0 \in C$ appearing in (4.2).

$$\left\{ \int_C f(\zeta) \operatorname{ctg} \frac{\pi(z - \zeta)}{2a} d\zeta \right\}^{\pm} = \mp 2iaf(\zeta_0) + \int_C f(\zeta) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2a} d\zeta,$$

$$\left\{ \int_C f(\zeta) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{z} - \bar{\zeta})}{2a} d\bar{\zeta} \right\}^{\pm} = \pm 2iaf(\zeta_0) + \int_C f(\zeta) \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta}_0 - \bar{\zeta})}{2a} d\bar{\zeta}. \quad (4.3)$$

Differentiating function $F^*(x_1, x_2)$ in (4.1) we find

$$\frac{\partial F^*}{\partial z} = \frac{\pi}{16a^2} \int_C f(\zeta) \left\{ e^{i\psi} \sec^2 \frac{\pi(\zeta - z)}{2a} - e^{-i\psi} \sec^2 \frac{\pi(\bar{\zeta} + z)}{2a} \right\} ds,$$

$$\frac{\partial F^*}{\partial \bar{z}} = \frac{\pi}{16a^2} \int_C f(\zeta) \left\{ e^{-i\psi} \sec^2 \frac{\pi(\bar{\zeta} - \bar{z})}{2a} - e^{i\psi} \sec^2 \frac{\pi(\zeta + \bar{z})}{2a} \right\} ds. \quad (4.4)$$

At $z \rightarrow \zeta_0 \in C$ the integrals in (4.4) become divergent. In order to regulate them it is necessary to carry out the integration by parts allowing for the conditions of periodicity of function $f(\zeta)$.

Substituting the limiting values of functions (4.1) and their derivatives at $z \rightarrow \zeta_0 \in C$ into boundary conditions (2.8) allowing for (4.3) we come to the system of singular integrodifferential equations of the second kind

$$p(\zeta_0) + \int_C p(\zeta) g_1(\zeta, \zeta_0) ds + \int_C f'(\zeta) g_2(\zeta, \zeta_0) ds = N_1(\zeta_0)$$

$$-\frac{1}{2} f(\zeta_0) + \int_C \{ p(\zeta) g_3(\zeta, \zeta_0) + f(\zeta) g_4(\zeta, \zeta_0) \} ds = N_2(\zeta_0), \quad \zeta \in C_{\phi} \quad (4.5)$$

$$\int_C f'(\zeta) g_5(\zeta, \zeta_0) ds = 0, \quad \zeta_0 \in C \setminus C_{\phi}$$

where kernels g_m ($m=1,2,\dots,5$) and the right parts are determined by expressions

$$\begin{aligned}
g_1(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{2a} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi_0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 - \zeta)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta_0 + \bar{\zeta})}{2a} \right] \right\} + P_1 e^{i\psi_0} + P_2 e^{-i\psi_0} \\
g_2(\zeta, \zeta_0) &= \frac{2e_{15}}{c_{44}^E (1 + k_{15}^2)} g_5(\zeta, \zeta_0) \\
g_3(\zeta, \zeta_0) &= \frac{e_{15}}{\mathfrak{A}_{11}^\varepsilon} \left\{ -\frac{|\xi_{20} - \xi_2|}{2a} + \frac{1}{2\pi} \ln \left| 4 \sin \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} \sin \frac{\pi(\zeta + \bar{\zeta}_0)}{2a} \right| + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2ia\gamma} e^{i\gamma|\xi_{20} - \xi_2|} - \frac{1}{a} \sum_{m=1}^{\infty} c_m (\xi_{20} - \xi_2) \cos \alpha_m \xi_1 \cos \alpha_m \xi_{10} \right\} \\
g_4(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{4a} \operatorname{Re} \left\{ e^{i\psi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta + \bar{\zeta}_0)}{2a} \right] \right\} + \frac{\sin \psi}{2a} \operatorname{sign}(\xi_{20} - \xi_2) \\
g_5(\zeta, \zeta_0) &= \frac{1}{4a} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} \right] \right\} \\
P_1 &= S - \frac{1}{a} (A_0 - iB_0), \quad P_2 = -S - \frac{1}{a} (A_0 + iB_0) \\
S &= \frac{1}{2ia} \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_{20}) (1 - e^{i\gamma|\xi_2 - \xi_{20}|}) \\
A_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{1k} \alpha_k \cos \alpha_k \xi_1 \sin \alpha_k \xi_{10}, \quad B_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{0k} \operatorname{sign}(\xi_{20} - \xi_2) \cos \alpha_k \xi_1 \cos \alpha_k \xi_{10} \\
\beta_{mk} &= \frac{1}{\alpha_k^m} e^{-\alpha_k |\xi_2 - \xi_{20}|} - \frac{1}{\lambda_k^m} e^{-\lambda_k |\xi_2 - \xi_{20}|} \\
c_m(\xi_{20} - \xi_2) &= \frac{1}{\lambda_m} e^{-\lambda_m |\xi_{20} - \xi_2|} - \frac{1}{\alpha_m} e^{-\alpha_m |\xi_{20} - \xi_2|} \quad N_1(\zeta_0) = 0, \quad N_2(\zeta_0) = \Phi^*(\zeta_0) \\
\psi &= \psi(\zeta), \quad \psi_0 = \psi(\zeta_0), \quad \zeta, \zeta_0 \in C
\end{aligned}$$

Here $\Phi^*(\zeta_0)$ is the piecewise-constant function determining the value of the electric potential on the system of electrodes. Kernels $g_2(\zeta, \zeta_0)$, $g_5(\zeta, \zeta_0)$ are singular (Hilbert type), the remaining kernels may have not more than light singularities on the assumption that contour C is smooth.

It should be noted here that originating in the process of oscillation reflected from boundary $x_1 = 0$ and $x_1 = a$ shear waves cause the appearance of additional charges on active electrodes. Therefore the configuration of the cavity cross-section, its location and also position of pair electrodes (supplied from a separate generator) should have a certain symmetry in relation to the bases of the layer, i.e. the brought on the given electrodes

charges by an absolute quantity were similar. If this requirement is not satisfied system (4.5) becomes unsolvable.

Calculating functions $p(\zeta)$ and $f(\zeta)$ out of system (4.5) by formulas (2.6) using integral representations (4.1) it is possible to determine all the components of the electroelastic field in the layer.

Let us find the expression for the amplitude of density distribution of electric charges $q_k(\beta)$ on k -th electrode. Introducing the parameterization of contour C with the help of equation $\zeta = \zeta(\beta)$ ($0 \leq \beta \leq 2\pi$) and taking into account the fact that the surface of the opening is in contact with vacuum we write

$$q_k(\beta) = D_n^{(k)}(\beta), \beta_{2k-1} < \beta < \beta_{2k} \quad (k = \overline{1, 2n}) \quad (4.6)$$

Here $D_n^{(k)}(\beta)$ is the amplitude of the normal component of the vector of electric induction on k -th electrode.

Due to (2.6), (4.1), (4.6) we find

$$q_k(\beta_0) = -\frac{\varepsilon_{11}^e}{4a} \int_C f'(\zeta) \operatorname{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} \right] \right\} ds, \zeta_0 \in C_{\phi_k} \quad (4.7)$$

where C_{ϕ_k} is a part of contour C on which k -th electrode is located.

Integrating expression (4.7) on the variable β_0 in the limits from β_{2k-1} to β_{2k} , we obtain the amplitude value of summed charge Q_k of k -th electrode referring to the unit of its length. The current flowing through the given electrode and equal to the conduction current in the generator circuit may be determined by the formula

$$I_k(t) = \operatorname{Re} \left\{ i\omega e^{-i\omega t} \int_{\beta_{2k-1}}^{\beta_{2k}} q_k(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \right\}, \quad s'(\beta_0) = \frac{ds}{d\beta_0}. \quad (4.8)$$

5. A direct piezoelectric effect in a layer with a partially electroded tunnel cavity

Let us use the above described approach to the situation when a piezoceramic layer with a tunnel opening is used as a generator of electric energy. In this case consider as mechanical excitation two plane monochromic shear waves propagating in positive and negative directions of axis x_2 and accordingly having the following values of displacement amplitude u_3 and electric potential ϕ

$$U_3^{(1)} = \tau_1 e^{-i\gamma x_2}, U_3^{(2)} = \tau_2 e^{i\gamma x_2}, \quad \Phi^{(j)} = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} U_3^{(j)} \quad (j = 1, 2) \quad (5.1)$$

For definiteness assume that the cross-section of the cavity has a vertical axis of symmetry and on its surface two symmetrically located continuous electrodes (Fig. 1b) are placed. To obtain the difference of electrical potentials $2V(t)$ in the process of the medium deformation it is necessary to have electric charges of different signs on the electrode platings which require the matching of displacement amplitudes in monochromatic waves. Therefore in (5.1) it is necessary to assume $\tau_1 = -\tau_2 = \tau$.

The generating energy is used in the outer electric circuit closing the electrodes and as a model may be represented by losses on an element with conductivity Y (Fig. 1b). In this

case the unknowns are the values of the potential differences on electrodes $2V(t)$ and, the current in circuit $I(t)$ as well. To obtain the electric boundary condition of the considered problem it is necessary to apply Ohm's law to the outer circuit

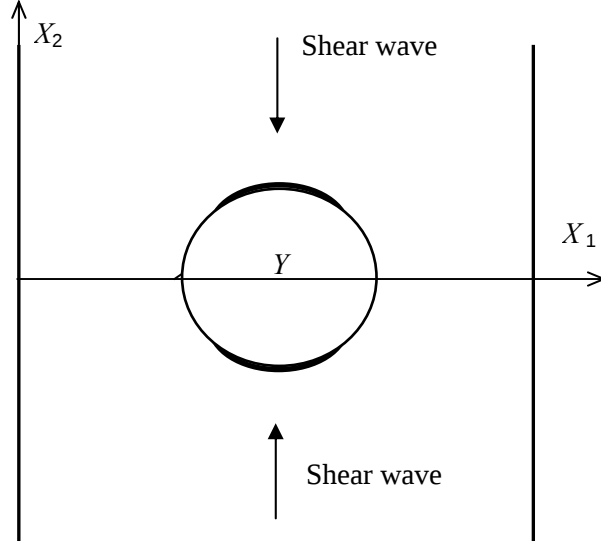


Fig. 1b

$$I(t) = 2YV(t). \quad (5.2)$$

Here solution of the boundary problem consists of prescribing on the electrodes the difference of electric potentials $2V(t)$, i.e. invoking of boundary conditions (2.8) under the action of harmonic waves. Thus, from equations (4.7), (4.8) and (5.2) we may determine the unknown amplitude of potential $V(t)$ on the electrode

$$V^*(\omega) = \frac{i\tau\omega \mathfrak{A}_{11}^\varepsilon B_1}{2Y - i\omega \mathfrak{A}_{11}^\varepsilon B_2}, \quad B_m = \int_{\beta_1}^{\beta_2} A_m(\beta_0) s'(\beta_0) d\beta_0 \quad (m=1,2) \quad (5.3)$$

$$A_m(\beta_0) = -\frac{1}{4a} \int_C f'_m(\zeta) \operatorname{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \left[\operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} + \operatorname{ctg} \frac{\pi(\bar{\zeta} + \zeta_0)}{2a} \right] \right\} ds$$

Here function $f_m(\zeta)$ ($m=1,2$) is the “standard” solution of system (4.5) according to the right parts

$$N_1^{(1)}(\zeta_0) = 4i\gamma \cos \gamma \xi_{20} \sin \psi_0, \quad N_2^{(2)}(\zeta_0) = \frac{2ie_{15}}{\mathfrak{A}_{11}^\varepsilon} \sin \gamma \xi_{20} \quad (5.4)$$

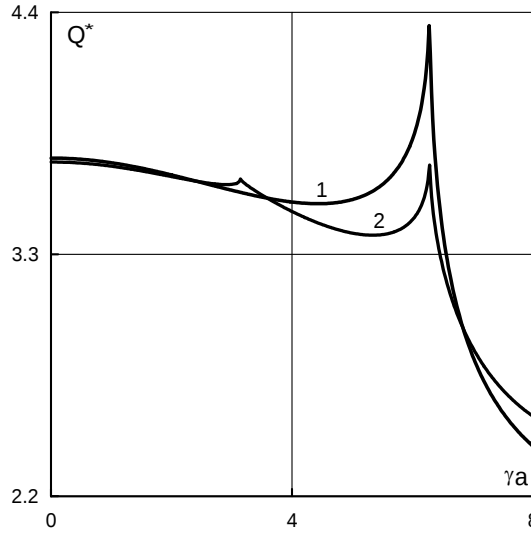
$$N_1^{(2)}(\zeta_0) = 0, \quad N_2^{(2)}(\zeta_0) = \begin{cases} 1, \beta_1 < \beta_0 < \beta_2 \\ -1, \beta_3 < \beta_0 < \beta_4 \end{cases} \quad \zeta_0 = \xi_{10} + i\xi_{20} \in C$$

where quantities β_k ($k=1,4$) prescribe the location of the electrodes.

From formulas (5.3) we have two limiting cases for interrupted ($Y = 0$) and short ($Y \rightarrow \infty$) circuit, respectively. In the first case the summed charge on the electrodes is not changed in the process of the medium deformation and in the second case it is obvious that $V(t) = 0$.

6. Examples of calculations

As a first example we consider a layer from ceramics *PZT* – 4 [12] with circular radius R excited by two electrodes, the centers of which are located on its vertical diameter ($\beta_1 = 5\pi/14, \beta_2 = 9\pi/14, \beta_3 = 19\pi/14, \beta_4 = 23\pi/14$). The system of integrodifferential equations (4.5) was solved numerically by the scheme of the method of quadratures (see Appendix A). The number of interpolation nodes on the cross-section contour of the opening was assumed to be $N = 151, 201$ and 251 ; the further increase of



parameter N practically did not influence the accuracy of the obtained results.

Fig. 2.

For the considered case in Fig. 2 the change of quantity $Q^* = \left| Q / (\epsilon_{11}^e \Phi^*) \right|$, which characterizes the amplitude of summed electric charge Q on the electrode with respect to normalized wave number γa ($2\Phi^*$ is the difference of the amplitude of electric potential on the electrodes) is shown. Curve 1 corresponds to the opening displaced from the symmetry axis of the layer at a distance of $0.1a$; curve 2 is to be constructed symmetrical located opening ($R/a = 0.1$). It is seen that in the first case due to the inertial effect the quantity Q^* may exceed its static analogue by 16%. It should be noted now that by continuing the wave number γ across values $\alpha_m = m\pi/a$ ($m = 1, 2, \dots$), an instability of the solution due to the emergency of a new running wave moving the energy along the waveguide from inhomogeneity to infinity is observed. This circumstance ensures a

characteristic “beakwise” form of the curves in the vicinity of points $\gamma = \pi$ and $\gamma = 2\pi(a = 1)$.

If the centers of two active electrodes lie on the lateral diameter of symmetrically located openings ($\beta_1 = -\pi/7, \beta_2 = \pi/7, \beta_3 = 6\pi/7, \beta_4 = 8\pi/7$) we have a quite different picture. Here (Fig. 3) the phenomenon of resonance is observed. The values of normalized wave numbers corresponding to the first and second natural frequencies of oscillations are equal: $\gamma_{(1)}a \approx 2.95$ and $\gamma_{(2)}a \approx 8.69$. The antiresonance frequency, when the current in the generator circuit is equal to zero, is $\gamma_{(1)}^*a \approx 3.1$. In the process of calculations we assumed $R/a = 0.1$.

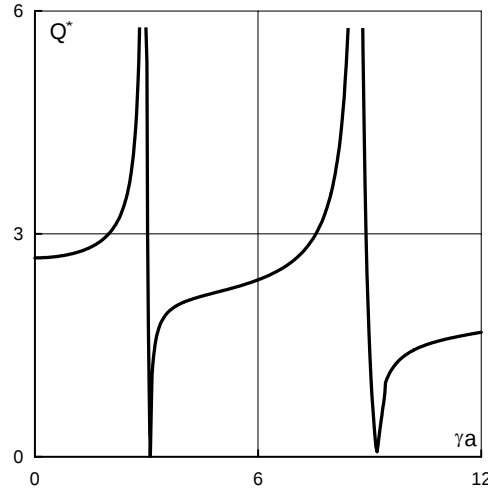


Fig. 3.

The analysis of the results shows that more effective electroacoustic transformation of energy in the considered frequency interval is observed when the area of the electroded plating is smaller.

7. Concluding Remarks

The represented approach to the solution of the mixed stationary dynamic problem of electroelasticity permits to investigate the influence of the inertial effect on the behaviour of the components of an electric field in a layer with an opening of rather arbitrary configuration for different number of electrodes and their disposition. For the numerical solution of the system of integrodifferential equations (4.5) by the prescribed scheme of the method of quadratures due to the fact that some of its kernels undergo fractures, and the densities have root singularities on the edges of electrodes, in order to reach the satisfactory

accuracy it is necessary to use a considerable number of the nodes subdivision of the cavity contour section which yields an increase of the computation time. Nevertheless, the considered seems to be universal, permitting to investigate various variants of electric excitation of conjugated fields without any basic change of the algorithm.

From the given results it follows that in the condition of the inverse piezoelectric effect the distribution of the displacement in a layer considerably depends on the frequency of harmonic loading, the configuration of the transverse section of the tunnel cavity, and the prescribed in the system of electric potentials electrodes. In case of an antiplane deformation the stresses of a longitudinal shear on a surface free from mechanical loading do not have singularities on the edges of the electrodes [6]. The numerical investigation proceeding from the presently constructed algorithm, confirms it.

System (4.5) may be generalized to the case of several tunnel openings C_m ($m = \overline{1, n}$), if we assume $p(\zeta) = \{p_m(\zeta), \zeta \in C_m\}$, $f(\zeta) = \{f_m(\zeta), \zeta \in C_m\}$, $C = \bigcup_{m=1}^n C_m$. The configuration of the openings, their location and the position of the pair surface electrodes warrant its solvability.

Appendix A

Consider one of the methods of numerical implementation of the system (4.5). Let us build the interpolating Lagrange polynomial for the sought-for functions $p(\zeta)$ and $f'(\zeta)$ in of the nodes $\beta_j = 2\pi(j-1)/N$ ($j = \overline{1, N}$). Such a polynomial has the form [13]

$$L_N[\{p_*, f_*'\}; \beta] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \{p_j^0, f_j^0\} \sin \frac{N(\beta_j - \beta)}{2} \operatorname{cosec} \frac{\beta_j - \beta}{2} \quad (A1)$$

$$p(\zeta) = p_*(\beta), p_j^0 = p_*(\beta_j), f(\zeta) = f_*(\beta), f_j^0 = f'_*(\beta_j)$$

It must be mentioned here that formulas (A1) are valid for odd numbers of the node division of the contour C .

Integration of the formula (A1) for function $f'_*(\beta)$ using the equation [19]

$$\int \frac{\sin(2m+1)x}{\sin x} dx = 2 \sum_{k=1}^m \frac{\sin 2kx}{2k} + x$$

leads to the following expression for the function $f'_*(\beta)$

$$M_N[f'_*(\beta); \beta] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j^0 \Omega_j(\beta) + A$$

$$\Omega_j(\beta) = -2 \sum_{k=1}^{\frac{N-1}{2}} \frac{\sin k(\beta_j - \beta) - \sin k\beta_j}{k} + \beta \quad (A2)$$

The constant A must be determined from the conditions of the periodicity of the function $f_*(\beta)$ which due to (A2) has the following form

$$\sum_{j=1}^N f_j^0 = 0 \quad (\text{A3})$$

Applying (A2) we also find the quadrature formula

$$\int_0^{2\pi} f_*(\beta) G(\beta, \beta^*) d\beta = \frac{2\pi}{N^2} \sum_{j=1}^N f_j^0 \sum_{m=1}^N \Omega_{jm} G(\beta_m, \beta^*) + A \frac{2\pi}{N} \sum_{m=1}^N G(\beta_m, \beta^*) \quad (\text{A4})$$

where $\Omega_{jm} = \Omega_j(\beta_m)$. In the node collocations $\beta_\ell^* = \pi(2\ell - 1)/N$ ($\ell = \overline{1, N}$) the polynomial (A1) has the following value at odd values of N

$$L_N[p_*(\beta); \beta_\ell^*] = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N p_j^0 (-1)^{\ell+j} \operatorname{cosec} \frac{\beta_\ell^* - \beta_j}{2} \quad (\ell = \overline{1, N}). \quad (\text{A5})$$

For the singular integral in (4.5) the formula is analogous to the formula for calculating regular integrals [14]

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f'_*(\beta_j) \operatorname{Im} \left\{ e^{i\psi_0} \operatorname{ctg} \frac{\pi(\zeta - \zeta_0)}{2a} \right\} d\beta = \\ & = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=1}^N f_j^0 \operatorname{Im} \left\{ e^{i\psi_0(\rho_\ell^*)} \operatorname{ctg} \frac{\pi[\zeta(\beta_j) - \zeta_0(\beta_\ell^*)]}{2a} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

Now, substituting the integrals in (4.5) by finite sums of the formulas (A.4), (A.6) and using the equalities (A.2), (A.3) and (A.5) we arrive to a system $2N + 1$ of the algebraic equations related to the values of the functions $p(\zeta)$ and $f'(\zeta)$ at the nodes of the interpolation $\beta_j(j = \overline{1, N})$ and the constant A .

The work was carried out in the framework of an agreement on scientific cooperation between the National Technical University of Athens and the Institute of Mechanics, National Academy of Sciences (NAS) of Armenia.

References

1. Nowacki W. Electromagnetic effects in solid bodies. - M.: Mir, 1986. - 160 p. [in Russian].
2. Maugin G.A. Continuum mechanics of electromagnetic solids. - Amsterdam - New York: North - Holland, 1988. - 588 p.
3. Sih G.C. (ed.) Elastodynamic crack problems. - Leyden: Noordhoff, 1977.
4. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. Electroelasticity. (Mechanics of coupled fields in construction elements, Vol. 5). - Kyiv, Naukova Dumka, 1989. - 280 p. [in Russian].
5. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. Electromagnetoelasticity. New York: Gordon and Breach, 1988.
6. Bardzokas D, Kudryavtsev B.A., Senik N.A. Criteria of electromechanical fracture of piezoelectrics initiated by electrode edges. - Strength of Materials, 1994, No. 7, pp. 510-513 [in Russian].
7. Parton V.Z. Fracture mechanics for piezoelectric materials. - Acta Astronautica, 1976, Vol. 3, No 9-10, pp. 671-683.
8. Suo Z, Kuo C.M.; Barnett D.M., Willis J.R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics. - J. Mech. Phys. Solids, 1992, No. 40, pp. 739-765.
9. Parton V.Z., Filstinsky M.L. Dynamic problem of electroelasticity for a layer and a half layer with tunnel openings. Izv. Of Rus. Ac. Sci. Mech. Solid Bodies. 1993. No. 5. - p. 82-88 [in Russian].
10. Prudnikov A.P., Brychkov Y.A., Marychev O.I. Integrals and series. M.: Nauka, 1981, 799p. [In Russian]
11. Muskhelishvili N.I., Singular Integral Equations. Moscow, Nauka., 1968, 511 p. [in Russian].
12. Berlincourt D.A., Curran D.R., Jaffe H. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their functions as transducers. In: Physical acoustics, V.1, Part A. Edited by W.P. Mason. Academic Press, New-York, 1964.
13. Ivanov V.V. Theory of approximation methods and its application to the numerical solution of singular integral equations - K: Nauk. Dumka. 1968-288 p [in Russian].
14. Panasyuk V.V., Savruk M.P., Nazarchuk Z.T. Method of singular integral equations in two-dimensional diffraction problems. - Kyiv, Naukova Dumka, 1984, p. 344. [In Russian].

National Technical University of Athens, Greece.
 Sumy State University, Ukraine.

Received
 18.05.2006

УДК 539.3

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ
РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
И ПЬЕЗОМАГНИТНЫХ СРЕД

Гараков В.Г., Даноян З.Н.

Վ.Գ. Գարակով, Զ.Ն. Դանոյան

Էլեկտրաառաձգական ալիքների անդրադարձումը և բեկումը պլեզոէլեկտրիկ
և պլեզոմագնետիկ միջավայրերի բաժանման եզրում

Աշխատանքում քննարկվում է էլեկտրաառաձգական 6mm կամ 4mm համաչափությամբ միջավայրի ծավալից նրա և պլեզոմագնետիկական նույն համաչափությամբ միջավայրի բաժանման եզրին ընկնող հարթ էլեկտրաառաձգական ալիքի անդրադարձումը և բեկումը: Ցույց է տրվում, որ ընկնող ալիքը փոխադրելով պլեզոմագնետիկ միջավայրի հետ առաջ է բերում՝ էլեկտրաառաձգական անդրադարձող համասեռ էլեկտրաառաձգական ալիք և ուղեկցող անհամասեռ էլեկտրամագնիսատատիկ մակերևութային ալիք և պլեզոմագնետիկ միջավայրում՝ բեկված համասեռ մագնիսատատիկ ալիք և ուղեկցող անհամասեռ էլեկտրա-մագնիսատատիկ մակերևութային ալիք:

V.G. Garakov, Z.N. Danoyan

Reflection and refraction of electroelastic waves at the interface
of piezoelectric and piezomagnetic solids

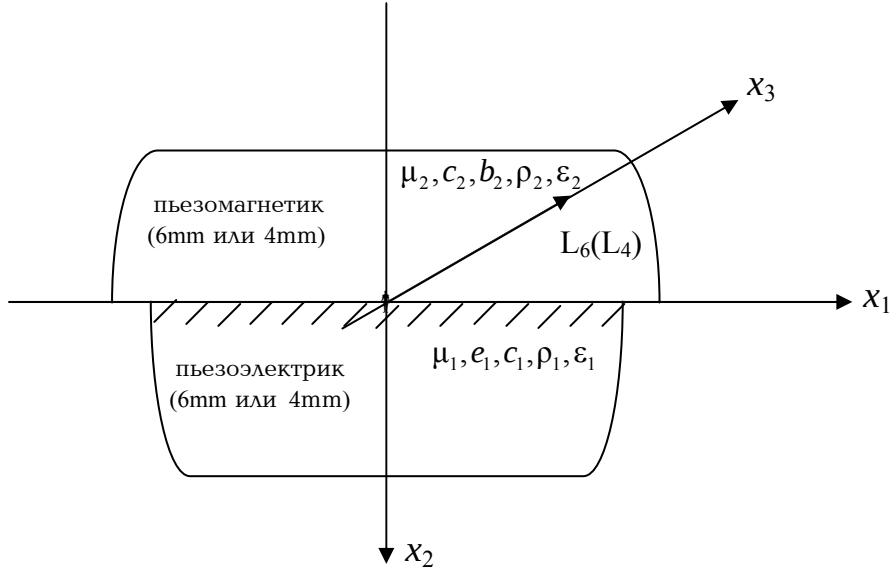
In the paper reflection and refraction of plane electroelastic wave is discussed at the interface of piezoelectric and piezomagnetic solids with symmetry 6mm or 4mm. It is shown that the incident wave interacting with the piezomagnetic medium generates in the piezoelectric a reflected homogeneous electroelastic wave and any attendant nonhomogeneous electro-magnetostatic surface wave and in the piezomagnetic a refracted homogeneous magnetoelastic wave and an attendant nonhomogeneous electromagnetostatic surface wave.

В работе обсуждается отражение и преломление плоской электроупругой волны от границы раздела пьезоэлектрика и пьезомагнетика с симметриями 6mm или 4mm. Показывается, что падающая волна, взаимодействуя с пьезомагнитной средой, вызывает в пьезоэлектрике отраженную однородную электроупругую волну и сопутствующую неоднородную электро-магнитостатическую поверхностную волну и в пьезомагнетике преломленную однородную магнитоупругую волну и сопутствующую неоднородную электро-магнитостатическую поверхностную волну.

1. Электроупругие волны в пьезоэлектриках рассмотрены во многих работах [1-4], магнитоупругие волны в пьезомагнетиках – в работах [5-7], в работе [8] исследован вопрос существования сдвиговых электро-магнитоупругих поверхностных волн на границе раздела системы пьезоэлектрик-пьезомагнетик. В настоящей работе рассматривается задача отражения и преломления электроупругих волн на границе раздела системы пьезоэлектрик-пьезомагнетик.

Пусть в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ упругая пьезоэлектрическая среда занимает область $x_2 > 0$, которая вдоль границы $x_2 = 0$ жестко связана с пьезомагнитной средой, занимающей область $x_2 < 0$. В силу пьезоэлектрического и пьезомагнитного эффектов упругие возмущения связываются с магнитными и электрическими возмущениями и в слоистой среде распространяются связанные

электро-магнитоупругие возмущения. Предполагается, что обе среды обладают гексагональной симметрией класса 6mm (или тетрагонального класса 4mm), главные оси симметрии которых имеют направление оси Ox_3 . Ось Ox_1 направлена вдоль границы раздела сред (фиг.1).



Фиг.1

Задачу будем описывать квазистатическим приближением [4]. Предполагается, что слоистая система находится в условиях антиплоской деформации и все характеристики электромагнитного и упругого полей зависят от координат x_1 и x_2 и от времени t будем иметь зависимости:

$$u_1 = u_2 \equiv 0, \quad u_3 = u(x_1, x_2, t), \quad \varphi = \varphi(x_1, x_2, t), \quad \psi = \psi(x_1, x_2, t), \quad (1.1)$$

где φ и ψ – потенциалы электрического и магнитного полей соответственно:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad \vec{H} = -\text{grad}\psi \quad (1.2)$$

$\vec{E}$ – вектор напряженности электрического поля, $\vec{H}$ – вектор напряженности магнитного поля.

Согласно [4,8], с учетом (1.2), из уравнений и соотношений электроупругости пьезоэлектрических сред и магнитоупругости пьезомагнитных сред получаем следующие уравнения и граничные условия:

1. Уравнения в области $x_2 > 0$ (в пьезоэлектрической среде):

$$\begin{aligned} c_1 \Delta u_1 - \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + e_1 \Delta \varphi_1 &= 0 \\ 4\pi e_1 \Delta u_1 - \varepsilon_1 \Delta \varphi_1 &= 0 \\ \Delta \psi_1 &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

где плотность, упругие и пьезоэлектрические модули и диэлектрическая проницаемость обозначены:

$$\rho_1, c_{44}^{(1)} = c_1, e_{15}^{(1)} = e_1, \varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_1 \quad (1.4)$$

2. Уравнения в области $x_2 < 0$ (в пьезомагнитной среде):

$$\begin{aligned} c_2 \Delta u_2 - \rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + b_2 \Delta \psi_2 &= 0 \\ 4\pi b_2 \Delta u_2 - \mu_2 \Delta \psi_2 &= 0 \\ \Delta \varphi_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где плотность, упругие и пьезомагнитные модули и магнитная проницаемость обозначены:

$$\rho_2, c_{44}^{(2)} = c_2, b_{15}^{(2)} = b_2, \mu_{22}^{(2)} = \mu_2 \quad (1.6)$$

3. Граничные условия на поверхности раздела сред $x_2 = 0$:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \\ -\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + 4\pi e_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \\ -\mu_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + 4\pi b_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} &= -\mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} \\ c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} &= c_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где обозначены:

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \varepsilon_2, \mu_{11}^{(1)} = \mu_1 \quad (1.8)$$

Величины с индексом «1» относятся к пьезоэлектрику, а с индексом «2» – к пьезомагнетику.

2. Рассмотрим решения граничной задачи (1.3), (1.5), (1.7) в виде плоских волн. Вначале введем следующие новые переменные:

$$\begin{aligned} \varphi'_1 &= \varphi_1 - \bar{e}_1 u_1, \quad \bar{e}_1 = 4\pi e_1 / \varepsilon_1 \\ \psi'_2 &= \psi_2 - \bar{b}_2 u_2, \quad \bar{b}_2 = 4\pi b_2 / \mu_2 \end{aligned} \quad (2.1)$$

При указанных заменах уравнения для u_1 и φ'_1 и u_2 и ψ'_2 разделяются и принимают вид:

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \bar{c}_1 \Delta u_1, \quad \Delta \varphi'_1 = 0, \quad \Delta \psi_1 = 0 \quad (2.2)$$

где обозначены:

$$\bar{c}_1 = c_1 (1 + \chi_1^2), \quad \chi_1^2 = e_1 \bar{e}_1 / c_1 \quad (2.3)$$

$$\rho_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \bar{c}_2 \Delta u_2, \quad \Delta \psi'_2 = 0, \quad \Delta \varphi_2 = 0 \quad (2.4)$$

где обозначены:

$$\bar{c}_2 = c_2 (1 + \chi_2^2), \quad \chi_2^2 = b_2 \bar{b}_2 / c_2 \quad (2.5)$$

Подставляя значения φ_1 и ψ_2 из (2.1) в граничные условия (1.7), получим:

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_2, \quad \bar{c}_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + e_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_2} = \bar{c}_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + b_2 \frac{\partial \psi'_2}{\partial x_2} \\
\varphi'_1 + \bar{e}_1 u_1 &= \varphi_2, \quad \psi_1 = \psi'_2 + \bar{b}_2 u_2 \\
\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x_2} &= \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad \mu_2 \frac{\partial \psi'_2}{\partial x_2} = \mu_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Подставляя в уравнения (2.2)

$$u_1 = \tilde{u}_1 e^{i(p x_1 + q_1 x_2 - \omega t)}, \quad \varphi'_1 = \tilde{\varphi}'_1 e^{i(p x_1 + q_2 x_2 - \omega t)}, \quad \psi_1 = \tilde{\psi}_1 e^{i(p x_1 + q_3 x_2 - \omega t)} \tag{2.7}$$

получим:

$$\begin{aligned}
\left[\bar{c}_1 (p^2 + q^2) - \rho_1 \omega^2 \right] \tilde{u}_1 &= 0 \\
(p^2 + q^2) \tilde{\varphi}'_1 &= 0, \quad (p^2 + q^2) \tilde{\psi}'_1 = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где p и q – продольное и поперечное волновые числа, а ω – частота плоской волны. Из (2.8) имеем:

$$q_1^2 = \frac{\omega^2}{s_1^2} - p^2, \quad q_2^2 = -p^2, \quad q_3^2 = -p^2 \tag{2.9}$$

где обозначено:

$$s_1^2 = \left(\frac{\omega}{k_1} \right)^2 = \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = \frac{c_1 (1 + \chi_1^2)}{\rho_1} \tag{2.10}$$

В соотношениях для всех парциальных волн продольные волновые числа ρ и частоты ω выбраны одинаково, что следует из граничных условий, которые должны выполняться в любой точке границы $x_2 = 0$ и в любой момент времени t . Ясно, что s_1 является фазовой скоростью распространения электроупругих волн в пьезоэлектрике. Для объемных (однородных) электроупругих волн имеем:

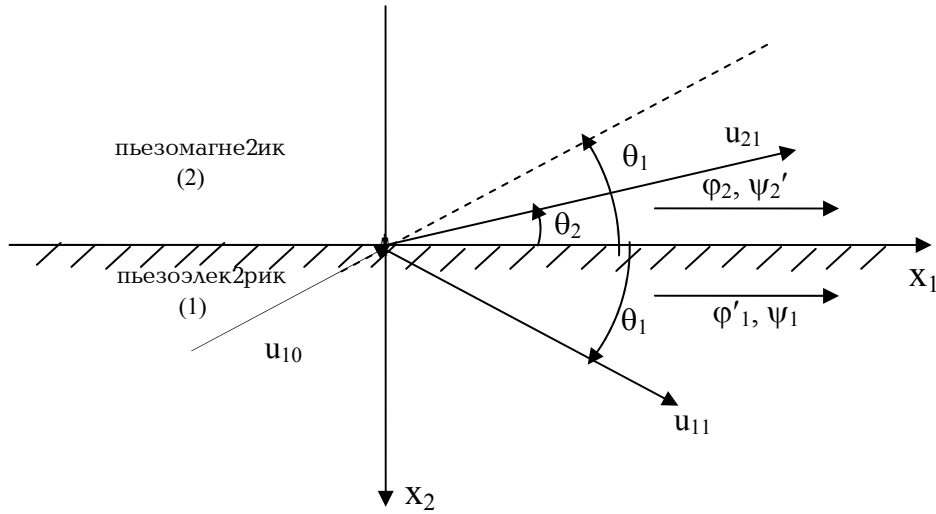
$$q_1 = \mp q_{10} = \mp \sqrt{\frac{\omega^2}{s_1^2} - p^2} \tag{2.11}$$

Пусть θ_1 обозначает угол скольжения падающей волны, т.е. угол между волновым вектором $\vec{k}_1(p, q)$ и положительным направлением оси Ox_1 (фиг.2).

Тогда будем иметь

$$p = k_1 \cos \theta_1, \quad q_1 = -k_1 \sin \theta_1 = -p \operatorname{tg} \theta_1 = -q_{10} \tag{2.12}$$

где $k_1 = \sqrt{p^2 + q_1^2}$ – волновое число, q_{10} определяется по (2.11). Следовательно, $q_1 = -q_{10}$ – поперечное волновое число падающей волны, а $q_1 = q_{10}$ – зеркально отраженной (фиг.2).



Фиг. 2

Второе и третье соотношения из (2.9) определяют поперечные волновые числа электростатических и магнитостатических колебаний в пьезоэлектрике

$$q_2 = \pm i|p|, \quad q_3 = \pm i|p| \quad (2.13)$$

Этим значениям волновых чисел соответствуют неоднородные плоские волны, которые распространяются по направлению оси Ox_1 вдоль границы раздела сред.

Эти решения имеют физический смысл при верхних знаках в (2.13) и экспоненциально убывают вглубь пьезоэлектрика с удалением от границы (при нижних знаках решения нарастают вглубь пьезоэлектрика и должны быть отброшены). Таким образом, неоднородные электро-магнитостатические колебания в пьезоэлектрике фактически существуют лишь в некотором слое, примыкающем к поверхности раздела и распространяются вдоль границы раздела. По этой причине они называются сопутствующими поверхностными волнами (СПВ) [4]. Таким образом, падение электроупругой волны из объема пьезоэлектрической среды на границу раздела сопровождается возникновением зеркально отраженной электроупругой волны и сопутствующей поверхностной электро-магнитостатической волны. Следовательно, в пьезоэлектрике волновое поле будет складываться из вышеуказанных волн:

$$u_1 = u_{10} + u_{11}, \quad \varphi_1 = \varphi'_1 + \bar{e}_1(u_{10} + u_{11}), \quad \psi_1 = \psi_1 \quad (2.14)$$

где

$$\begin{aligned} u_{10} &= \tilde{u}_{10} e^{i(px_1 + q_{10}x_2 - \omega t)}, \quad u_{11} = \tilde{u}_{11} e^{i(px_1 - q_{10}x_2 - \omega t)} \\ \varphi'_1 &= \tilde{\varphi}'_1 e^{i(px_1 - \omega t)} e^{-|p|x_2}, \quad \psi_1 = \tilde{\psi}_1 e^{i(px_1 - \omega t)} e^{-|p|x_2} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Вторая формула из (2.14) показывает, что электростатическое поле в пьезоэлектрике складывается из электрических полей падающей, зеркально отраженной и сопутствующей поверхностной волн.

Аналогично исследуется волновой процесс в пьезомагнетике (в области $x_2 < 0$). Волновое поле складывается из преломленной и электро-магнитостатической волн:

$$u_2 = u_{21}, \quad \psi_2 = \psi'_2 + \bar{b}_2 u_{21}, \quad \varphi_2 = \varphi_2 \quad (2.16)$$

где

$$\begin{aligned} u_{21} &= \tilde{u}_{21} e^{i(p x_1 + q_{20} x_2 - \omega t)} \\ \psi'_2 &= \tilde{\psi}'_2 e^{i(p x_1 - \omega t)} e^{|p| x_2} \\ \varphi_2 &= \tilde{\varphi}_2 e^{i(p x_1 - \omega t)} e^{|p| x_2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$q_{20} = \sqrt{\frac{\omega^2}{s_2^2} - p^2} \quad s_2^2 = \left(\frac{\omega}{k^2} \right)^2 = \bar{c}_2 / \rho_2 \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} p &= k_2 \cos \theta_2, \quad q_2 = -k_2 \sin \theta_2 = -p \operatorname{tg} \theta_2 = -q_{20} \\ k_2^2 &= p^2 + q_2^2 \end{aligned}$$

S_2 – фазовая скорость распространения магнитоупругих объемных волн в пьезомагнетике, k_2 – волновое число преломленной волны, θ_2 – угол скольжения этой волны.

Как следует из (2.16), в пьезомагнетике магнитостатическое поле складывается из магнитных полей преломленной и сопутствующей поверхностной волн.

Неизвестные амплитуды $\tilde{u}_{11}, \tilde{\varphi}'_1, \tilde{\psi}_1, \tilde{u}_{21}, \tilde{\psi}'_2, \tilde{\varphi}_2$ (а также амплитуды $\tilde{\varphi}_{10} = \bar{e}_1 \tilde{u}_{10}$, $\tilde{\varphi}_{11} = \bar{e}_1 \tilde{u}_{11}$, $\tilde{\psi}_{21} = \bar{b}_2 \tilde{u}_{21}$) находятся при удовлетворении граничных условий (2.6):

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{10} + \tilde{u}_{11} &= \tilde{u}_{21}, \quad \tilde{\psi}_1 = \tilde{\psi}'_2 + \bar{b}_2 \tilde{u}_{21} \\ i \bar{c}_1 q_{10} (\tilde{u}_{11} - \tilde{u}_{10}) + e_1 |p| \tilde{\varphi}'_1 &= i \bar{c}_2 q_{20} \tilde{u}_{21} - b_2 |p| \tilde{\psi}'_2 \\ \tilde{\varphi}'_1 + \bar{e}_1 (\tilde{u}_{10} + \tilde{u}_{11}) &= \tilde{\varphi}_2 \\ \varepsilon_1 \tilde{\varphi}'_1 &= -\varepsilon_2 \tilde{\varphi}_2, \quad \mu_1 \tilde{\psi}_1 = -\mu_2 \tilde{\psi}'_2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Решая систему (2.19) и принимая во внимание (2.12) и (2.18), приходим к следующему результату:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\tilde{u}_{11}}{\tilde{u}_{10}} = \frac{\sin \theta_1 - r \sin \theta_2 + i \chi |\cos \theta_1|}{\sin \theta_1 + r \sin \theta_2 - i \chi |\cos \theta_1|} \\ T &= \frac{\tilde{u}_{21}}{\tilde{u}_{10}} = 1 + R = \frac{2 \sin \theta_1}{\sin \theta_1 + r \sin \theta_2 - i \chi |\cos \theta_1|} \\ \tilde{\varphi}'_1 &= -\frac{\varepsilon_2 \bar{e}_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} T \tilde{u}_{10}, \quad \tilde{\psi}_1 = \frac{\mu_2 \bar{b}_2}{\mu_1 + \mu_2} T \tilde{u}_{10} \\ \tilde{\varphi}_2 &= \frac{\varepsilon_1 \bar{e}_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} T \tilde{u}_{10}, \quad \tilde{\psi}'_2 = -\frac{\mu_1 \bar{b}_2}{\mu_1 + \mu_2} T \tilde{u}_{10} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Здесь приняты обозначения:

$$r = \frac{\bar{c}_2 k_2}{\bar{c}_1 k_1} = \sqrt{\frac{\bar{c}_2 \rho_2}{\bar{c}_1 \rho_1}} \quad (2.21)$$

$$\chi = \frac{\varepsilon_2 e_1 \bar{e}_1}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \bar{c}_1} + \frac{\mu_1 b_2 \bar{b}_2}{(\mu_1 + \mu_2) \bar{c}_1}$$

Легко можно найти также амплитуды потенциалов $\Phi_{10}, \Phi_{11}, \Psi_{21}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{10} &= \bar{e}_1 \tilde{u}_{10}, \quad \tilde{\Phi}_{11} = \bar{e}_1 \tilde{u}_{11} = \bar{e}_1 R \tilde{u}_{10} \\ \tilde{\Psi}_{21} &= \bar{b}_2 \tilde{u}_{21} = \bar{b}_2 T \tilde{u}_{10} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Таким образом, при падении электроупругой волны из пьезоэлектрика на границу раздела с пьезомагнетиком возникают: в пьезоэлектрике – зеркально отраженная электроупругая волна, в пьезомагнетике – преломленная магнитоупругая волна, в обеих средах в некотором слое, примыкающем к поверхности раздела – поверхностная электромагнитостатическая волна.

Обсудим полученные результаты. Углы скольжения падающей и преломленной волн связаны соотношением:

$$\cos \theta_2 = S_2 S_1^{-1} \cos \theta_1 \quad (2.23)$$

где величина S_2/S_1 играет роль показателя преломления. При $\theta_2 = 0$ получаем соотношение, определяющее критический угол скольжения падающей волны:

$$\cos \theta_1^* = \frac{S_1}{S_2} \quad \text{или} \quad \theta_1^* = \arccos \frac{S_1}{S_2} \quad (2.24)$$

Так как $\cos \theta_1^*$ не может быть больше единицы, то должно быть $S_1 < S_2$. При углах скольжения падающей волны, больших критического, должно иметь место полное внутреннее отражение, т.е. коэффициент отражения R по модулю равен единице. Как видно из (2.24), оба пьезоэффекта меняют величину критического угла θ_1^* постольку, поскольку перенормируют скорости электроупругих и магнитоупругих волн.

Другая особенность задачи состоит в том, что коэффициенты отражения и преломления – комплексные величины даже при углах скольжения, меньших критического угла скольжения θ_1^* . Это означает, что на границе отраженная и преломленная волны сдвинуты по фазе относительно падающей волны. Если показатель преломления меньше единицы, то условия прозрачности существенно ужесточаются по сравнению с условиями чисто упругой задачи, так как коэффициент отражения R при наличии пьезоэффектов – комплексная величина и должны обращаться в нуль одновременно его действительная и мнимая части. Можно также исследовать вопрос об усилении электромагнитного поля вблизи границы раздела сред.

Аналогично можно решать задачу отражения и преломления, когда из пьезомагнетика, занимающего область $x_2 > 0$, на границу раздела $x_2 = 0$ падает плоская магнитоупругая волна. Более того, решение этой задачи можно построить, непосредственно исходя из решения предыдущей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде. //Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1985. Т.38. N1. С.12-19.
2. Белубекян М.В., Белубекян В.М. О сдвиговой волне, локализованной вдоль движущейся границы раздела пьезоэлектриков. //Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. N3-4. С.78-82.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Манукян Г.А. Поведение мод сдвиговых волн Лява в пьезоэлектрических подложках с диэлектрическим слоем. //Материалы Всесоюз. науч. семинара. Ереван: 1991. С.49-54.
4. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука. 1982. 240с.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Гараков В.Г. Распространение магнитоупругих волн в пьезомагнитном полупространстве. //Материалы III Всесоюз. симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: Изд. ЕГУ. 1984. С.22-25.
6. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Гараков В.Г. Сдвиговые поверхностные магнитоупругие волны в анизотропном пьезомагнитном полупространстве. //Материалы II Всесоюз. Н-Т-К «Прочность, жесткость и технологичность изделий из композиционных материалов». Ереван: Изд. ЕГУ. 1984. Т.1. С.92-96.
7. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н., Саноян Л.А. Отражение сдвиговых магнитоупругих волн от свободной границы пьезомагнитного полупространства. //Механика, межвуз. сб. науч. трудов. вып. 5. Ереван. 1986. С.102-109.
8. Даноян З.Н., Гараков В.Г. Существование сдвиговых поверхностных волн на границе раздела пьезоэлектрик-пьезомагнетик. //Материалы IV симпозиума «Теоретические вопросы магнитоупругости». Ереван: Изд. ЕГУ. 1989. С.67-72.

Институт механики
НАН Армении

Поступила в редакцию
14.09.2005

УДК 539.3

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ И ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО
ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМ В ПОЛЕ
ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ**

Адамян В.Г., Манандян Л.Т.

**Կենտրոնական ուժի դաշտում պարաբոլական և հիպերբոլական ուղեծրով շարժվող
կետի դիրքի և ժամանակի որոշումը
Վ.Տ. Ադամյան, Լ.Գ. Մանանդյան**

Աշխատանքում բերված պարզ ալգորիթմի միջոցով որոշվում է պարաբոլական և հիպերբոլական ուղեծրով շարժվող կետի դիրքը և ժամանակը:

**Determination of Position and Time of the Point Moving in the Central Power
Field over Parabolic and Hyperbolic Orbit
V.G. Adamyan, L.T. Manandyan**

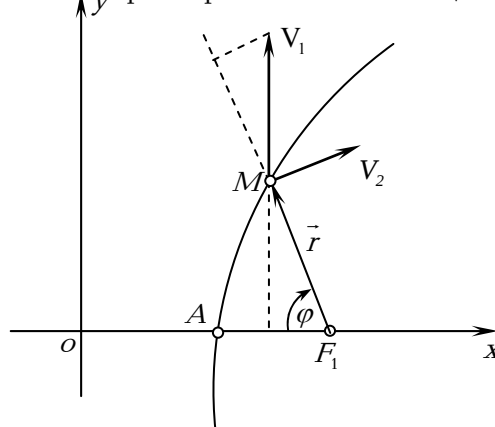
The following work is about the determination of position and time of the point moving over in the central power field over parabolic and hyperbolic orbit through algorithm.

В работе предлагается простой алгоритм для определения положения точки и времени при движении по параболической и гиперболической орбитам.

В работах [1], [2], где рассмотрено движение точки под действием центральной силы, указано, что скорость точки при параболическом и гиперболическом движении можно представить в виде двух слагаемых следующим образом: слагаемое V_1 перпендикулярно к большой оси параболической или гиперболической орбиты, постоянно по модулю и по направлению, а V_2 перпендикулярно к радиусу-вектору, постоянно по модулю (фиг.1).

Представление скорости в таком виде и движение точки по разным орбитам при помощи простых механизмов в работе предлагается простой алгоритм, с помощью которого можно определить положение точки и время.

В этом случае радиальное и трансверсальное составляющие будут [3]:



Фиг. 1

$$V_r = V_1 \sin \varphi = \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

$$V_T = V_1 \cos \varphi + V_2 = r \frac{d\varphi}{dt} \quad (2)$$

Из уравнения (1) и (2) получим

$$\frac{dr}{r} = \frac{\sin \varphi}{K + \cos \varphi} d\varphi, \quad K = \frac{V_2}{V_1} \quad (3)$$

Интегрируя уравнение (3), получим $\int \frac{dr}{r} = \int \frac{\sin \varphi}{K + \cos \varphi} d\varphi$, и учитывая начальные условия $\varphi = 0$, $r = r_0$, получим

$$r = \frac{r_0(K + 1)}{K + \cos \varphi} \quad (4)$$

1. Случай движения по параболической орбите.

Подставляя значения $K = 1$, т.е. $V_1 = V_2$, в уравнение (4), будем иметь:

$$r = \frac{2r_0}{1 + \cos \varphi} \quad (5)$$

При $\varphi = 0$ точка находится в положении P_0 (вершина параболы).

Из уравнения (2) имеем:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V_1 \cos \varphi + V_2}{r} \quad (6)$$

Из уравнения (6), учитывая (5), получим

$$\int_0^t dt = \frac{1}{V_1} \int_0^\varphi \frac{2r_0}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi \quad (7)$$

Для вычисления интеграла обозначим $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = z$, тогда $\cos \varphi = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}$,

$d\varphi = \frac{2dz}{1 + z^2}$ и после несложных преобразований, вычисляя интеграл, найдем:

$$t = \frac{r_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} \right)}{V_1} \bigg|_0^\varphi \quad (8)$$

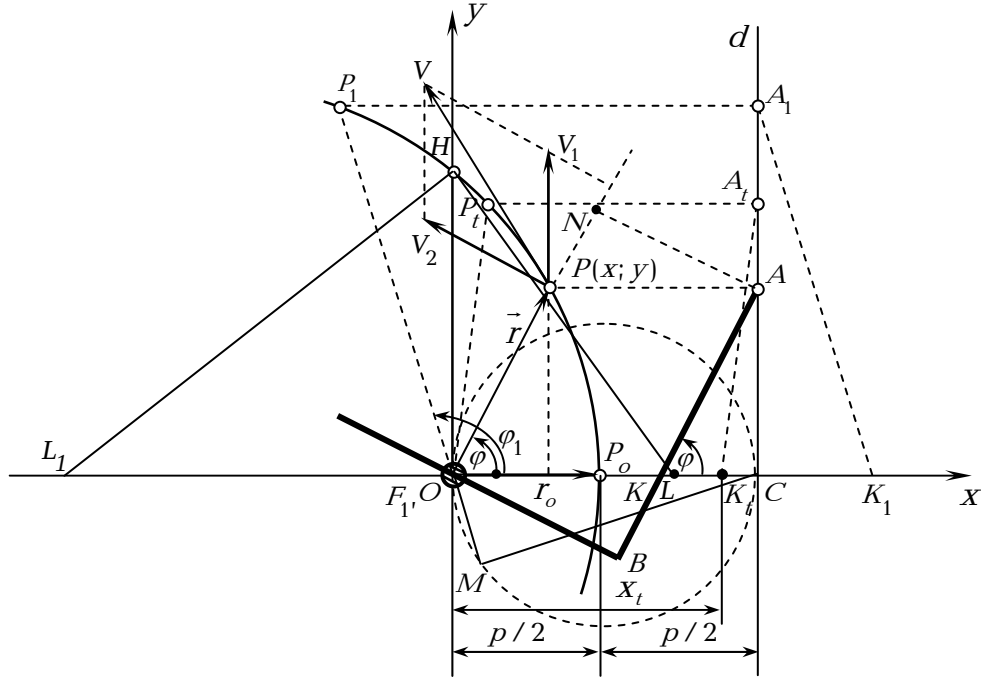
В пределах $0 - \pi/2$ получим

$$T = \frac{4r_0}{3V_1} \quad (9)$$

Отметим, что уравнение (8) – это уравнение равномерного движения, так как V_1 постоянна по модулю.

Из уравнения (8) определение времени в зависимости от угла φ несколько затруднено, поэтому для решения задачи мы предлагаем другой более простой алгоритм.

Для описания алгоритма рассмотрим следующую задачу.



Фиг. 2

Прямой жесткий угол ABO движется в своей плоскости так, что конец A скользит по директрисе d параболы (фиг.2), а сторона BO все время проходит через шарнир O , лежащий на оси x на расстоянии p от директрисы. Поместив начало координат в точке O (фокус F_1 совпадает с точкой O) и, принимая $AB = OC = p$, покажем, что геометрическое место точек мгновенных центров скоростей прямого угла представляет собой параболу. Если из точек прямого угла A и O опустить перпендикуляры к скоростям этих точек, получим положение мгновенного центра скоростей. Определим теперь координаты точки P :

$$x = AK \cos \varphi; \quad y = AK \sin \varphi \quad (OP = AK) \quad .$$

$$\text{Из } \triangle AKC \quad \cos \varphi = \frac{KC}{AK} = \frac{KC}{p - KC}, \text{ так как } \triangle AKC = \triangle OKB, \quad KC = KB,$$

$$\text{откуда } KC = \frac{p \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \text{ а } AK = \frac{KC}{\cos \varphi} = \frac{p}{1 + \cos \varphi}.$$

Тогда координаты точки P будут:

$$x = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \cos \varphi, \quad y = \frac{p}{1 + \cos \varphi} \sin \varphi \quad (10)$$

Исключая теперь φ из (10) и имея в виду, что $\cos \varphi = \frac{x}{p-x}$,

$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{(p-x)^2}}$, получим

$$y^2 = -2p \left(x - \frac{p}{2} \right) \quad (11)$$

Уравнение (11) – это уравнение параболы с вершиной в точке $P_0(p/2; 0)$, где p – параметр параболы, ветви которой направлены влево. Рассмотренная задача дает возможность легко определить положение точки в зависимости от угла φ и времени t .

Допустим, что радиус-вектор повернулся на угол φ . Из точки O по направлению радиуса-вектора откладываем отрезок величиной p , получим точку N , откуда опустим перпендикуляр к радиусу-вектору ON до пересечения с директрисой d , получим точку A . Из точки A опустим перпендикуляр к директрисе до пересечения с радиусом-вектором, получим положение точки P . Следует отметить, что ромб $OPAK$ – это ромб движения [2].

Положение точки в зависимости от угла φ можно определить также другим путем. Уравнение (5) можно написать так:

$$r = \frac{(2r_0)^2}{2r_0 + 2r_0 \cos \varphi} \quad \text{или} \quad (2r_0)^2 = r(2r_0 + 2r_0 \cos \varphi) \quad (12)$$

Если возьмем прямоугольный треугольник высотой $OH = 2r_0$, тогда отрезки на гипотенузе будут r и $2r_0 + 2r_0 \cos \varphi$.

Допустим, что радиус-вектор повернулся на угол φ_1 (фиг.2), из точки P_0 с радиусом r_0 проведем окружность, тогда из $\triangle OMC$ $OM = 2r_0 \cos \varphi_1$. Из точки C отложим отрезок, равный отрезку OM , получим точку L ($OL = 2r_0 - 2r_0 \cos \varphi_1$, так как угол φ_1 тупой). Соединив точку L с точкой H и из точки H , опустив перпендикуляр к прямой LH до пересечения с осью x , получим точку L_1 . Отрезок OL_1 на основании (12) представляет собой модуль радиуса-вектора. Из точки F_1 отложим величину отрезка OL_1 по направлению радиуса - вектора, получим положение точки P_1 , а ромб $OP_1A_1K_1$ – это ромб движения.

Теперь получим положение точки в зависимости от времени t . Как отмечалось, уравнение (8) – это уравнение равномерного движения. За время

$$T = \frac{4r_0}{3V_1} \text{ радиус-вектор повернется на угол } \pi/2, \text{ т.е. из положения } OP_0$$

переходит в положение OH . В это же время радиус-вектор по величине

изменится на величину $P/2$, следовательно, отрезок $P/2$ можно принимать как отрезок времени. Поэтому

$$\mu_t = \frac{4}{3V_1} \left[\frac{\text{сек}}{\text{м}} \right] \quad (13)$$

Допустим нужно определить положение точки в момент времени t . Для этого из точки O отложим отрезок $x_t = OK_t = \frac{t}{\mu_t} = \frac{3V_1 t}{4}$, получим точку K_t . Из точки K_t проведем дугу с радиусом x_t до пересечения с директрисой d , получим точку A_t . Направление $K_t A_t$ - это направление радиуса-вектора $OP_t (OP_t = K_t A_t)$, т.е. мы фактически построили ромб движения - $OK_t A_t P_t$.

Таким образом, если нам известно время движения или угол поворота радиуса-вектора, то по описанному алгоритму можно найти положение точки. Если известна дальность точки от фокуса F_1 , т.е. величина радиуса-вектора, то умножив это расстояние на масштаб времени, получим время движения.

2. Случай движения по гиперболической орбите.

Подставляя значения $K = \frac{V_2}{V_1} = \frac{a}{c} < 1$ (где точки $A_1(a; 0), A_2(-a; 0)$ - вершины гиперболы, а точки $F_1(c; 0), F_2(-c; 0)$ - фокусы гиперболы), $r_0 = c - a$ в уравнение (4), будем иметь:

$$r = \frac{c^2 - a^2}{a + c \cos \varphi} \quad (14)$$

При $\varphi = 0$ точка находится в положении A_1 , где $r = r_0 = c - a$ (фиг.3).

Подставляя значение r в уравнение (6) и интегрируя, получим

$$\int_0^t dt = \frac{\int_0^\varphi \frac{r_0(K+1)}{(K + \cos \varphi)^2} d\varphi}{V_1} \quad (15)$$

$$tV_1 = \frac{r_0(K+1)}{K^2} \left(\frac{\varepsilon \sin \varphi}{(\varepsilon^2 - 1)(1 + \cos \varphi)} - \frac{1}{\varepsilon^2 - 1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ln \frac{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1 - \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right) \bigg|_0^\varphi \quad (16)$$

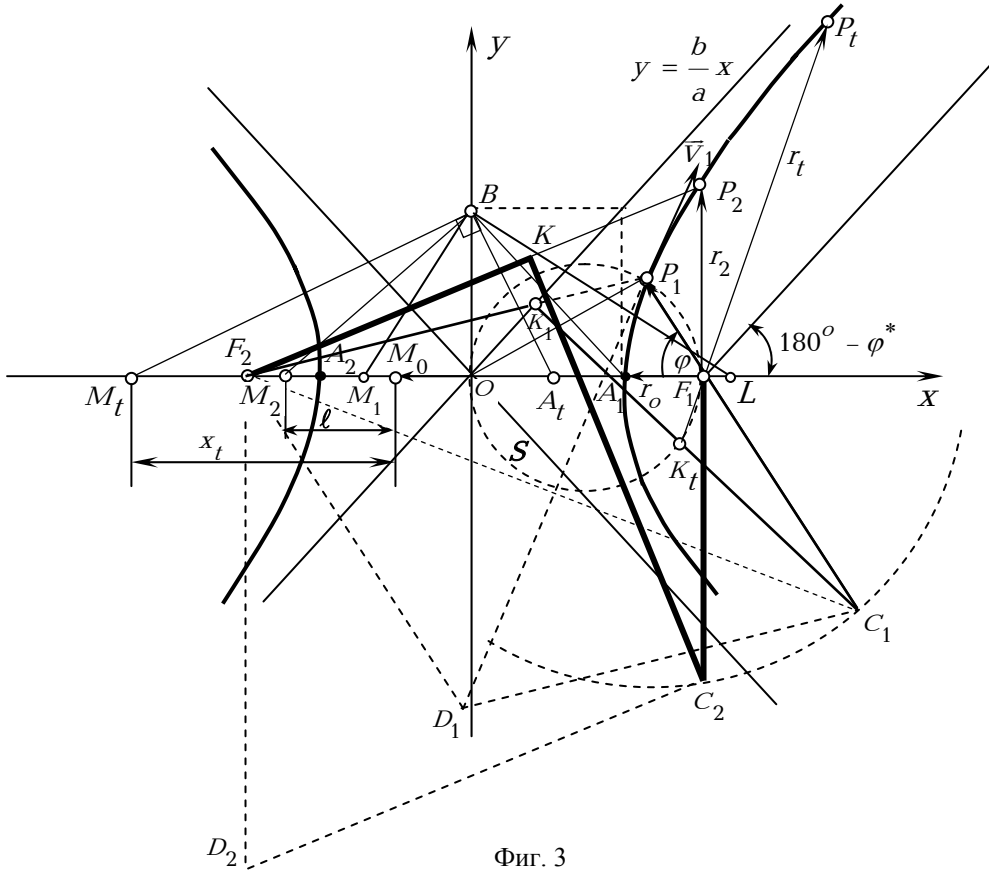
Подставляя значение r_0, K в уравнение (15), в пределах $0 - \pi/2$ получим

$$TV_1 = c \left(\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right) \quad (17)$$

где $\varepsilon = \frac{c}{a}$.

Из уравнения (15) определение времени в зависимости от угла φ несколько затруднено, поэтому для решения задачи мы предлагаем другой, более простой алгоритм. Отметим, что уравнение (16) - это уравнение равномерного движения,

так как V_1 постоянна по модулю. Для описания алгоритма рассмотрим следующую задачу. Покажем, что геометрическое место точек мгновенных центров скоростей звена KC_2 -антипараллелограмма $F_2KC_2F_1$ (фиг.3),



Фиг. 3

поставленного на большое звено $F_2F_1 = KC_2 = 2c$, а $F_2K = C_2F_1 = 2a$ представляет собой гиперболу. Действительно, $P_2F_2 - P_2F_1 = 2a$, так как $P_2K = P_2F_1$.

Рассмотренная задача дает возможность легко определить положение точки в зависимости от угла φ и времени t .

Допустим, радиус-вектор повернулся на угол φ . Из точки C_1 проведем дугу с радиусом $2c$, а из точки F_2 – дугу с радиусом $2a$, которые пересекаются в точке K_1 . Соединяя точку F_2 с точкой K_1 и продолжая до пересечения прямой F_1C_1 , т.е. по направлению радиуса-вектора, получим положение точки P_1 . Следует отметить, что ромб $F_2P_1C_1D_1$ – это ромб движения, где направление диагонали P_1D_1 будет направлением скорости V_{p1} в точке P_1 [2]. Положение точки в зависимости от угла φ можно определить также другим путем. Уравнение (5) можно написать так:

$$b^2 = r(a + c \cos \varphi) \quad (18)$$

Если возьмем прямоугольный треугольник высотой b ($b^2 = c^2 - a^2$), тогда отрезки на гипотенузе будут r и $a + c \cos \varphi$.

Проведем окружность S с диаметром c (фиг.3), тогда из $\square OP_1F_1$ $F_1P_1 = c \cos \varphi$. Из точки A_1 отложим отрезок, равный отрезку F_1P_1 , получим точку L ($OL = a + c \cos \varphi$). Соединяя точку L с точкой B и из точки B , опуская перпендикуляр к прямой BL до пересечения с осью x , получим точку M_1 . Отрезок OM_1 на основании (18) представляет собой модуль радиуса-вектора. Из точки F_1 отложим величину отрезка OM_1 по направлению радиуса-вектора, получим положение точки P_1 , а ромб $F_2P_1C_1D_1$ – это ромб движения.

Теперь получим положение точки в зависимости от времени t . Как отмечалось, уравнение (15) – это уравнение равномерного движения. За время

$$T = \frac{c}{V_1} \left[\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right] \text{ радиус-вектор повернется на угол } \frac{\pi}{2}, \text{ т.е. из}$$

положения F_1A_1 переходит в положение F_1P_2 . В это же время радиус-вектор по

$$\text{величине изменится на величину } \ell = M_0M_2 = \frac{c^2 - a^2}{a} - (c - a) = c(\varepsilon - 1),$$

следовательно, отрезок ℓ можно принимать как отрезок времени. Поэтому

$$\text{масштаб времени будет } c(\varepsilon - 1)\mu_t = \frac{c}{V_1} \left[\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right],$$

$$\mu_t = \frac{1}{V_1(\varepsilon - 1)} \left[\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right] \left[\frac{cek}{M} \right] \quad (19)$$

$$\text{Имея в виду, что } \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1} - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{(\varepsilon - 1)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right) = 1, \text{ график масштаба времени}$$

в зависимости от ε будет (см.фиг. 4).

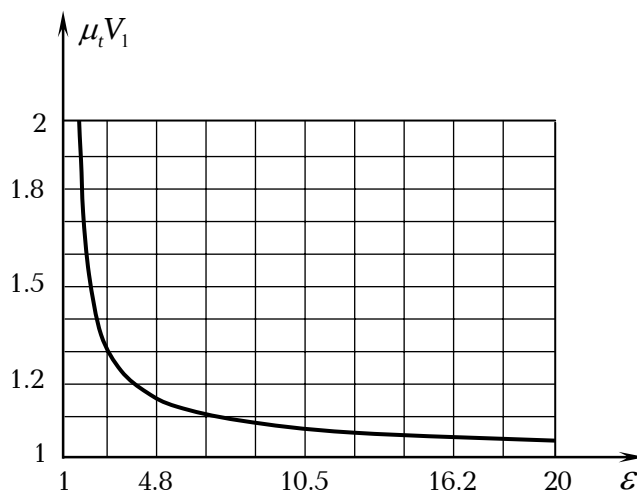
Допустим, нужно определить положение точки в момент времени t . Для этого из точки M_0 отложим отрезок

$$x_t = M_0M_t = \frac{t}{\mu_t} = \frac{tV_1(\varepsilon - 1)}{\left[\varepsilon - \ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1}) / \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \right]}$$

$$x_t = M_0M_t = \frac{t}{\mu_t} = \frac{tV_1(\varepsilon - 1)}{\left(\varepsilon - \frac{\ln(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 1})}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \right)}, \text{ получим точку } M_t \text{ и радиус-}$$

вектор точки $r_t = OM_t$ в момент времени t . Соединяя точку M_t с точкой B и из точки B опуская перпендикуляр к прямой BM_t до пересечения с осью x , получим точку A_t , а отрезок $A_1A_t = c \cos \varphi$. Из точки F_1 проведем дугу с

радиусом A_1A_t до пересечения с окружностью S , получим точку K_t . Соединяя точку F_1 с точкой K_t , получим, что F_1K_t будет направлением радиуса-вектора (фиг. 4). Из точки F_1 по направлению F_1K_t , подставляя отрезок, равный OM_t , получим положение точки P_t в момент времени t . Отметим, что значение угла $\varphi = \varphi^*$, $\cos \varphi^* = -\frac{a}{c}$, при котором расстояние точки от фокуса неограниченно увеличивается ($r \rightarrow \infty$), определяет асимптотическое направление гиперболической траектории.



Фиг. 4.

Таким образом, если нам известно время движения или угол поворота радиуса-вектора, то по описанному алгоритму можно найти положение точки. Если известна дальность точки от фокуса F_1 , т.е. величина радиуса-вектора, то при умножении этого расстояния на масштаб времени получим время движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рой А. Движение по орбитам. М.: Мир, 1981. 544с.
2. Адамян В.Г. Альмагест-2. Геометрическая теория гравитации. Ереван: 2004. 222с.
3. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. М.: 1965. 467с.

ГИУА Гюмрийский филиал,
кафедра прикладной механики

Поступила в редакцию
16.01.2006

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ЛИСТОВОГО МОЛИБДЕНА
ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ С УЧЕТОМ
ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ

Назарян Э. А., Аракелян М. М.

Է.Ա. Նազարյան, Մ.Մ. Առաքելյան

Հարթ լարվածային վիճակում թերթային մոլիբդենի լարումները և դեֆորմացիաները հաշվի առնելով դեֆորմացիոն ամրացումը

Ապացուցված է, որ թերթային նյութի միառանգ կամ երկառանգ լարված վիճակների փորձարկումների ընթացքում չափվող դեֆորմացիայի բաղադրիչները իրենցից ներկայացնում են դեֆորմացիաների տարածության մեջ որոշակի վեկտոր-ֆունկցիայի պրոեկցիաներ: Հաստատված է, որ վեկտոր-ֆունկցիայի մոդուլը հավասար է էֆեկտիվ դեֆորմացիայի (դեֆորմացիաների ինտենսիվություն) մեծությանը, իսկ նրա փոփոխությունը նկարագրում է նախապատրաստվածքի դիտարկվող էլեմենտում վերջավոր դեֆորմացիաների կուտակման օրինաչափությունները: Վեկտոր-ֆունկցիայի ուղղությունը միարժեք որոշվում է լարված վիճակով և կախված լարումների հարաբերությունից կարող է փոփոխվել 0-ից 360° սահմաններում: Լարված վիճակների փոփոխություններով հնարավոր է դառնում կառավարել դեֆորմացիաների կուտակման բնույթը: Այսպիսով հնարավոր է իրականացնել 2-5% հարաբերական երկարացում ունեցող թերթային մոլիբդենի խոր արտաձգում, ապահովելով 60-80% դեֆորմացիայի աստիճաններ:

E.A.Nazaryan, M.M. Arakelyan

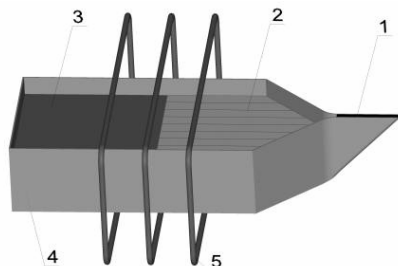
Stresses and strains of sheet molybdenum at the plane strain in the case of strain hardening.

Based on this scientifically established concept, the head of the project has provided in previous works that the magnitude of component deformation, usually measured in single or biaxial exertion conditions during test, represent a projection of some vector-function in the deformation space. It is established that the module of the vector-function is numerically equal to the size of the effective deformation (intensive deformation), while its change describes the character of accumulation of the total deformation in the element under consideration and its initial blank. The direction of the vector-function is unambiguously determined by the scheme of stress condition and, depending on it, can take any value between 0 and 360 degrees. Thus it is possible to manage the character of accumulation of deformation by changing the scheme of stress condition. Thereby it is possible to realize the process of deep drawing of molybdenum sheet with levels of deformation up to 60-80%, with an initial expansion lengthening characteristic of molybdenum sheet being no more than 2-5%.

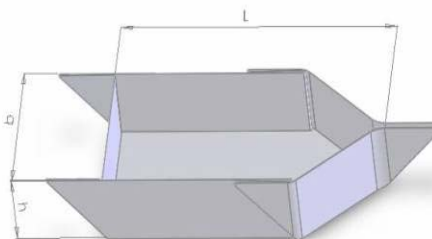
Доказано, что величины компонент деформаций, обычно измеряемые при испытаниях листового материала в одноосном либо двухосном напряженных состояниях, представляют собой в пространстве деформаций проекции некоторой вектор-функции. Установлено, что модуль вектор-функции численно равен величине эффективной деформации (интенсивность деформаций), а его изменение описывает характер накопления итоговой деформации в рассматриваемом элементе исходной заготовки. Направление вектор-функции однозначно определяется схемой напряженного состояния и в зависимости от этого может принимать любые значения от 0 до 360°. Становится возможным управление характером накопления деформаций путем изменения схемы напряженного состояния. Тем самым, становится возможной реализация процесса глубокой вытяжки листового молибдена со степенями деформации 60-80% при исходной величине относительного удлинения листового молибдена не более 2-5%.

Введение

Одним из перспективных методов выращивания оптически прозрачных тугоплавких монокристаллов является метод горизонтально направленной кристаллизации (метод Багдасарова), сущность которого заключается в следующем [1] фиг. 1, (1 – затравка, 2 – кристалл, 3 – расплав, 4 – контейнер, 5 – нагреватель).



Фиг.1



Фиг. 2

В контейнер, имеющий форму лодочки, помещают кристаллизующее вещество, расплавляют его путём перемещения контейнера сквозь зону нагрева и закристаллизовывают. Процесс выращивания тугоплавких монокристаллов характеризуется критическими по величине и градиенту значениями температур, достигающими соответственно 2000°C и $100^{\circ}\text{C}/\text{мм}$, чем и обусловлено применение листового молибдена для изготовления контейнеров.

В настоящее время контейнеры в форме лодочек изготавливают из металлокерамического листового молибдена толщиной 0,5мм методом изгиба с применением пламенного нагрева (фиг.2).

Существующая конструкция и технология изготовления контейнеров имеет ряд недостатков, препятствующих образованию требуемого фронта кристаллизации и получению высококачественных монокристаллов.

1. При перемещении контейнера с расплавом через зону температурного градиента происходит искажение фронта кристаллизации, связанное с переменным теплообменом между расплавом и стенками контейнера.
2. В угловых участках выращенные кристаллы перенапряжены и при охлаждении часто растрескиваются. Практика показывает, что в результате этого эффективность процесса снижается на 30-40%.
3. При пламенном нагреве происходит окисление листового молибдена, что приводит к образованию микротрещин и утечке расплава.
4. Способ изготовления контейнеров нетехнологичен и имеет большую трудоемкость изготовления.

Анализ различных аспектов процесса горизонтально направленной кристаллизации показывает, что проблема повышения качества монокристаллов и эффективность производства в основном связаны с технологическим уровнем изготовления контейнеров.

Контейнеры в форме лодочек представляют собой тонкостенные неосесимметричные оболочки, основным технологическим процессом изготовления которых является глубокая вытяжка.

Однако низкие показатели штампуемости листового молибдена не позволяют применять традиционные методы глубокой вытяжки.

Целью настоящей работы является исследование механических свойств и технологических характеристик листового молибдена в условиях одноосного и двухосного напряженных состояний и разработка на этой основе новой технологии глубокой вытяжки контейнеров, обеспечивающей оптимальные условия протекания физической кинетики на фронте роста.

Напряжения и деформации при пластическом формоизменении осесимметричных тонкостенных оболочек и их представление

При пластическом формоизменении осесимметричных тонкостенных оболочек из листового металла в качестве исходной удобно рассматривать срединную поверхность, делящую толщину материала пополам. В данной работе использованы системы прямоугольных координат с осью z , проходящей в направлении толщины по нормали к срединной поверхности; осью ρ , проходящей в меридиональном направлении и совпадающей с касательной к линии пересечения срединной поверхности с меридиональной плоскостью, и осью θ , проходящей в окружном направлении и перпендикулярной к обеим осям z и ρ . Принимается, что касательные напряжения на контактных поверхностях заготовки и инструмента малы по сравнению с нормальными напряжениями и ими можно пренебречь, а радиусы кривизны в меридиональном и окружном направлениях намного больше толщины материала. При таких допущениях главные напряжения в процессе формоизменения совпадают с главными осями скоростей (приращений) деформаций и справедливо применение безмоментной теории оболочек.

В рамках принятых допущений уравнения связи напряжений и скоростей (приращений) деформаций можно представить в виде

$$\frac{\sigma_\rho - \sigma_z}{\sigma_\theta - \sigma_z} = \frac{d\varepsilon_\rho - d\varepsilon_z}{d\varepsilon_\theta - d\varepsilon_z} \quad (1)$$

где σ_ρ , σ_θ , σ_z – напряжения, действующие соответственно в меридиальном, окружном и перпендикулярном к толщине направлениях, а $d\varepsilon_\rho$, $d\varepsilon_\theta$, $d\varepsilon_z$ – компоненты приращений деформаций в тех же направлениях.

В условиях больших пластических деформаций металлы практически несжимаемы и на любом этапе формоизменения приращения главных деформаций удовлетворяют условию постоянства объема.

$$d\varepsilon_\rho + d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_z = 0 \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) для плоского напряженного состояния ($\sigma_z \approx 0$) следует

$$\frac{ds}{s} = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\theta}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} \frac{d\rho}{\rho} \quad (3)$$

где $d\varepsilon_z = \frac{ds}{s}$, $d\varepsilon_\theta = \frac{d\rho}{\rho}$, s – текущая толщина элемента заготовки; ds – изменение толщины элемента с координатой ρ при его перемещении в очаге пластических деформаций на $d\rho$.

Уравнение равновесия элемента осесимметричной оболочки с учетом изменения толщины имеет вид

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \sigma_\rho \left(1 + \frac{\rho ds}{s d\rho} \right) - \sigma_\theta = 0 \quad (4)$$

Из совместного решения уравнений (3) и (4) с использованием условия пластичности Мизеса для плоского напряженного состояния

$$\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_s^2 \quad (5)$$

следует

$$\rho \frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{2\sigma_s^2}{\sigma_\rho - 2\sigma_\theta} = 0 \quad (6)$$

Уравнение (6) можно интегрировать в частных случаях ($\sigma_s = \text{const}$) и выразить зависимость меридионального напряжения от координаты в виде неявной функции. Попытки интегрировать уравнение (6) с учетом деформационного упрочнения, связаны с принятием дальнейших упрощающих допущений, основным из которых является принятие постоянства толщины деформируемого материала. Такое допущение равносильно утверждению, что пластическое формоизменение листового металла происходит в условиях плоской деформации, что в принципе, исключает возможность решения задач, в которых реализуется пластическое плоское напряженное состояние.

Из условия постоянства объема (2) следует, что приращения деформаций взаимосвязаны и могут быть представлены в двумерной системе координат на плоскости. В качестве такой плоскости рассмотрим π -плоскость цилиндра пластичности, где начало координат соответствует состоянию заготовки до деформирования, а геометрическое место точек, соответствующих последовательным деформированным состояниям, представляет собой путь деформации. При этом радиальные пути деформаций соответствуют пропорциональному изменению главных деформаций во времени. В общем случае текущие конечные деформации представляют собой проекции вектор-функции $\bar{\varepsilon}_i$ на координатные оси, а путь деформации описывается вектор-функцией $\bar{\varepsilon}_i(\rho)$ (ρ – некоторый параметр времени), скорости деформации $d\bar{\varepsilon}_i/d\rho$ совпадают с касательной к пути деформации.

Модуль текущей величины $d\varepsilon_i$ численно равен интенсивности приращений деформаций [2].

$$|d\bar{\varepsilon}_i| = d\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d\varepsilon_\rho^2 + d\varepsilon_\rho d\varepsilon_\theta + d\varepsilon_\theta^2} \quad (7)$$

Приращения главных деформаций могут быть представлены в тригонометрической форме, удовлетворяющей условиям (2) и (7)

$$d\varepsilon_\rho = d\varepsilon_i \cos \varphi; d\varepsilon_\theta = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 2\pi/3); d\varepsilon_z = d\varepsilon_i \cos(\varphi + 4\pi/3) \quad (8)$$

где φ представляет собой угол вида деформированного состояния и может меняться в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Из совместного решения (1), (2) и (8) устанавливаются зависимости меридиональных и окружных напряжений от угла вида деформированного состояния.

$$\sigma_\rho = \sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6); \sigma_\theta = -\sigma_s \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \varphi \quad (9)$$

удовлетворяющие условию пластичности Мизеса (5).

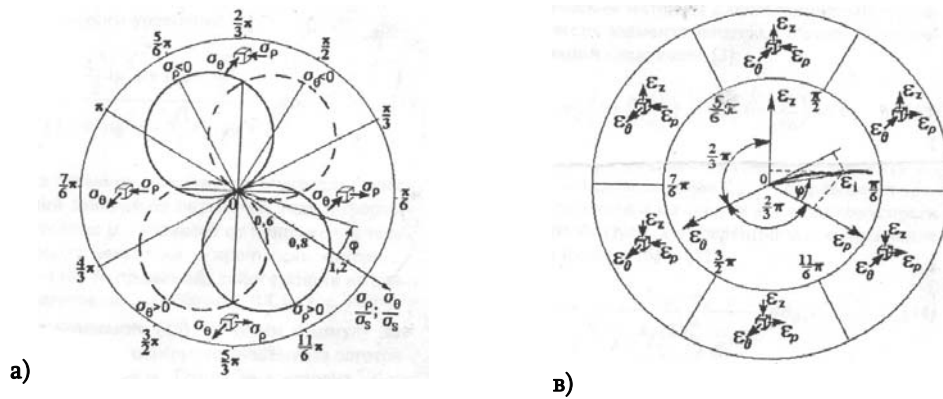
Зависимости (10) представляют собой окружности радиусом $\sigma_s/\sqrt{3}$, центры которых находятся на линиях $\varepsilon_\rho = 0$, $\varepsilon_\theta = 0$ и проходят через начало координат. С учетом зависимостей (9) и условий (3), (8) уравнение равновесия (6) можно преобразовать и представить на π -плоскости в достаточно простой форме:

$$d\sigma_\rho = \sigma_s d\varepsilon_i \quad (10)$$

Таким образом, система уравнений, характеризующих пластическое формоизменение осесимметричных тонкостенных оболочек, отображается на π -плоскости в виде линейной зависимости между скоростями изменения меридионального напряжения и интенсивности деформаций. Коэффициентом пропорциональности в (10) является истинное напряжение текучести деформируемого материала, которое в условиях холодной деформации удобно представить в виде степенной зависимости от величины накопления деформации

$$\sigma_s = A\varepsilon_i^n \quad (11)$$

На фиг.3 представлены взаимосвязанные напряженные (а) и деформированные (в) состояния осесимметричной оболочки, которые в принципе возможно реализовать при плоском напряженном состоянии [2].



Фиг. 3

Для облегчения интерпретации полученных результатов начало отсчета совмещено с осью ε_ρ , а увеличение угла φ принято против часовой стрелки. При изменении $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ радиальные лучи делят π -плоскость на 12 секторов с центральными углами, равными $\pi/6$.

Если путь деформации совпадает с осью ε_ρ , то ε_ρ – деформация растяжения (положительная), а ε_θ и ε_z – деформации сжатия (отрицательные), численно равные $\varepsilon_\rho/2$, поэтому деформированное состояние такое же, как в образце, испытываемом на растяжение вдоль оси ε_ρ . Этот тип деформации можно назвать чистым растяжением. Если путь деформации противоположен по направлению оси ε_ρ ($\varphi = \pi$), то деформация изменяет знак на обратный и соответствует чистому сжатию, поскольку в этом случае ε_θ и ε_z – деформации растяжения (положительные), численно равные $\varepsilon_\rho/2$. Вдоль путей деформации $\varphi = \pi/6$ и $\varphi = 7\pi/6$, компонента деформации $\varepsilon_z = 0$, а ε_ρ и ε_θ равны по величине и противоположны по знаку, то есть имеет место чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости ρ, θ . Аналогичные рассуждения допустимы, очевидно, и вдоль осей ε_θ и ε_z , а также в обратных и перпендикулярных к ним направлениях. Таким образом, пути деформации с углами - $\varphi = \pi/6$, $\varphi = \pi/2$, $\varphi = 5\pi/6$, $\varphi = 7\pi/6$, $\varphi = 3\pi/2$ и $\varphi = 11\pi/6$ соответствуют чистому сдвигу или плоской деформации.

Пути деформации с углами - $\varphi = 0$, $\varphi = 2\pi/3$ и $\varphi = 4\pi/3$ соответствуют чистому растяжению, а пути деформации с углами - $\varphi = \pi/3$, $\varphi = \pi$ и $\varphi = 5\pi/3$ – чистому сжатию.

При изменении угла вида деформируемого состояния в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ вектор-функция $\overline{\varepsilon_i}$ (р) поочередно становится либо параллельной, либо перпендикулярной к координатным осям ε_ρ , ε_θ и ε_z , вследствие чего компоненты деформации по этим осям изменяются в пределах от единицы до нуля.

Глубокая вытяжка цилиндрических деталей

Легко показать, что все типы деформаций при глубокой вытяжке цилиндрической детали полностью характеризуются лучами, занимающими одну треть системы координат $5\pi/3 \leq \varphi \leq \pi/3$, представленной на фиг. 3.

При глубокой вытяжке краевой элемент исходной заготовки деформируется в условиях простого сжатия в окружном направлении ($\varphi = \pi/3$) на всем протяжении процесса формоизменения, а ε_ρ и ε_z – деформации растяжения,

численно равные $\varepsilon_\theta/2$. У торца пуансона, на оси симметрии радиальные и окружные напряжения равны (растягивающие), а путь деформации соответствует направлению $\varphi = 5\pi/3$. Область в интервале $\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$ соответствует увеличению исходной толщины заготовки, а область $11\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6$ соответствует уменьшению исходной толщины заготовки. Имеют место два линейных сжатия – $\varphi = \pi/3$ и $\varphi = 5\pi/3$ в окружном направлении и по толщине, две плоские деформации – $\varphi = \pi/6$ и $\varphi = 11\pi/6$ и одно линейное растяжение – $\varphi = 0$. В начальной стадии процесса вытяжки материал испытывает двухосное растяжение в плоскости ρ, θ , в результате чего в направлении $\varphi = 5\pi/3$ наблюдается равномерное утонение.

В некоторых элементах фланца радиальное растягивающее напряжение становится равным по величине окружному сжимающему напряжению, в результате чего происходит чистый сдвиг или плоская деформация в плоскости ρ, θ ($\varphi = \pi/6$). По мере сокращений края фланца разные элементы попадают в зону плоской деформации, поэтому формоизменение заготовки носит явно выраженный немонотонный характер.

По мере увеличения высоты вытягиваемой детали, вследствие наличия пуансона, предотвращающего сокращение в окружном направлении ($\varepsilon_\theta = 0$), пути деформации занимают область $11\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3$.

Представление уравнений пластического плоского напряженного состояния на π -плоскости позволяет без дальнейших упрощающих допущений рассматривать задачи деформирования осесимметричных оболочек при взаимосвязанном и самоорганизованном изменении толщины и деформационного упрочнения.

Интегрируя (10) с учетом степенной зависимости истинного напряжения от величины накопленной деформации (11) имеем:

$$\sigma_\rho = \frac{A}{n+1} \varepsilon_i^{n+1} + C \quad (12)$$

где постоянная интегрирования находится из граничного условия, по которому для краевого элемента заготовки $\varepsilon_i = \varepsilon_{\pi/3}$, $\varphi = \pi/3$ и $\sigma_\rho = 0$ (краевой элемент деформируется в условиях линейного сжатия на протяжении всего процесса формоизменения).

Приравнявая выражения для меридиональных напряжений (10) и (12), получим:

$$\left| \varepsilon_i^{n+1} - \varepsilon_{\pi/3}^{n+1} \right| = (1+n) \varepsilon_i^n \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\varphi + \pi/6), \quad (13)$$

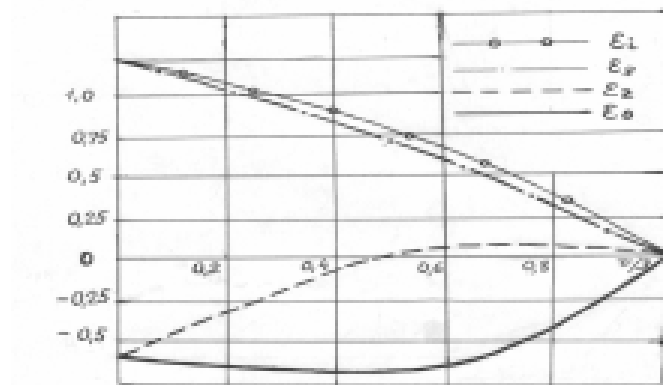
Результаты проведенного анализа позволяют по-новому рассмотреть процесс деформирования фланца при глубокой вытяжке, разделив его на два этапа.

На первом этапе по мере опускания пуансона происходит образование очага пластических деформаций от внутренней границы к внешней, при этом элементы заготовки в радиальном направлении растягиваются. Наибольший размер пластической зоны зависит от параметра деформационного упрочнения и определяется зависимостью:

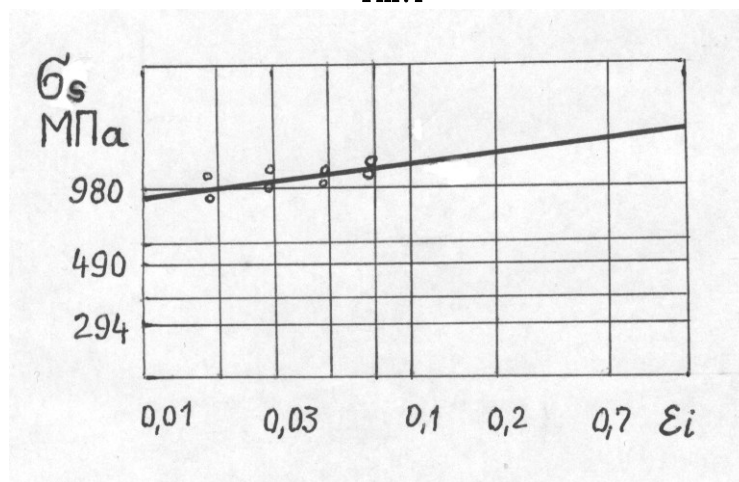
$$\frac{R_0}{r_0} = \exp \left[(1+n) \left(1/4 + \sqrt{3\pi}/9 \right) \right] \quad (14)$$

где R_0 и r_0 - соответственно радиусы исходной заготовки и матрицы.

На фиг. 4 представлены графики изменения интенсивности и компонент деформации для первого этапа деформирования $\left(\varepsilon_{\pi/3} = 0 \right)$ при изменении параметра деформированного состояния в диапазоне $0 \leq \varphi \leq \pi/3$ и $n=0,2$.



Фиг.4



Фиг.5

Из этих графиков следует, что на начальном этапе деформирования вблизи внешнего контура образовывается некоторая зона утолщения, свидетельствующая о том, что усилие прижима воспринимается некоторой кольцевой зоной до начала перемещения края фланца.

Методика и результаты экспериментальных исследований

Эксперименты проводили на листовом молибдене толщиной 0,5 мм и 99,9% химической чистоты, при содержании примесей в массовых долях не более: Al – 0,004, Fe – 0,01, Ni – 0,005, Si – 0,01, C – 0,01, O₂ – 0,008, Ca – 0,005.

Для определения зависимостей истинных напряжений от истинных деформаций, из листового молибдена вырезались образцы размерами 50x5x0,5 мм для испытания на одноосное растяжение [4]. Рассчитывали предел прочности σ_b и полное относительное удлинение δ .

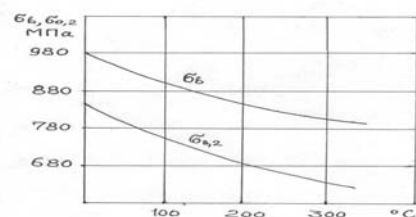
Скорость деформирования во всех испытаниях составляла 0,015 м/сек. По результатам испытаний строилась в логарифмических координатах зависимость σ_s от логарифмической деформации $\varepsilon_i = l_n F_0 / F$, где F_0 и F – начальная и текущая площади поперечного сечения соответственно. Прямолинейный характер графика позволяет аппроксимировать зависимость $\sigma_s - \varepsilon_i$ степенной функцией (11) (фиг. 5).

Для листового молибдена $A=1080$ МПа; $n=0,048$. Величины A и n определены графически следующим образом: n – угловой коэффициент прямой $\sigma_s = \sigma_s(\varepsilon_i)$ в логарифмических координатах, A – значение истинного напряжения при $\varepsilon_i = 1$ или $A = \sigma_s$ при $\varepsilon_i = 1$.

Механические свойства листового молибдена рассчитывались по известным соотношениям $\sigma_b = A \cdot n^n \cdot \exp n$ и $\delta = \exp n - 1$ ($\sigma_b = 980$ МПа; $\delta \approx 5\%$).

Способность листового молибдена к глубокой вытяжке определяли методом вытяжки цилиндрической детали по величине предельного коэффициента вытяжки $m = d/D$, где D – наибольший диаметр заготовки, не разорвавшейся при испытании, d – средний диаметр детали после вытяжки.

Листовой молибден при температуре 20°С, в зависимости от содержания примесей и степени предварительной деформации, может быть как пластичным, так и хрупким. Несмотря на то, что молибден является тугоплавким металлом, его механические свойства существенно изменяются при сравнительно небольшом увеличении температуры [1] (фиг 6).

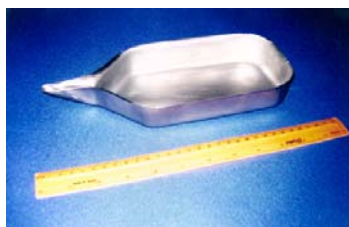


Фиг. 6



Фиг. 7

В связи с тем, что листовой молибден обладает большой теплопроводностью и малой теплоемкостью, он нагревается и остывает быстрее, чем сталь, поэтому в экспериментах нагревали также матрицу. Эксперименты проводили на штампе с нагревателем и регулируемым прижимом при разных скоростях деформирования. Усилие прижима создавалось посредством резинового буфера, который был вынесен из зоны нагрева. Регулированием удельного усилия прижима в пределах $4 \div 6$ МПа предотвращали образование гофр. Исследовали влияние дифференциального нагрева на предельный коэффициент вытяжки за счет теплопередачи от матрицы к периферийной части фланца и охлаждения пуансона. Установлено, что увеличение степени формоизменения достигается вследствие снижения сопротивления деформированию фланца при сохранении исходной прочности в опасном сечении [5]. Испытания на вытяжку проводили на универсальной испытательной машине усилием 350 КН с возможностью регулирования скорости деформирования в диапазоне 0,002-0,015 м/сек. Стабильно качественные детали получали при $m=0,6$ и диаметре матрицы 40 мм (фиг.7). Наиболее эффективными смазками при глубокой вытяжке листового молибдена с нагревом до 350 °C являются водные графитовые препараты.



Фиг.8



Фиг. 9

Эти препараты наносили на нагретую заготовку. Смазка быстро высыхала и оставляла сухую тонкую пленку графита, которая удерживалась на заготовке в процессе вытяжки.

Контур оптимальной заготовки для вытяжки контейнеров определяли экспериментальным методом последовательных приближений до получения изделия одинаковой высоты по периметру при исключении возможности перенапряжения в опасном сечении. На фиг. 8 показан контейнер в форме лодочки размерами 100x215x45мм, полученный глубокой вытяжкой из листового молибдена толщиной 0,5мм с коэффициентом вытяжки в угловых участках $m=0,5$

при угловом радиусе 30мм. На фиг. 9 показан контейнер с выращенным монокристаллом лейкосапфира.

Выводы:

1. Разработан новый аналитический метод исследования напряженно-деформированного состояния при формоизменении осесимметричных тонкостенных оболочек, основанный на анализе путей деформаций в π - плоскости цилиндра пластичности.
2. Показана возможность теоретического анализа немонотонных процессов деформирования при взаимосвязанном и самоорганизованном изменении толщины и деформационного упрочнения.
3. Установлено, что пути деформации при формоизменении осесимметричных тонкостенных оболочек в общем случае являются криволинейными и могут оставаться прямыми только для краевых элементов, свободных от действия меридиональных напряжений.
4. Установлено, что величины компонент деформаций, обычно измеряемые при испытаниях листового металла в одноосном либо двухосном напряженных состояниях, представляют собой в π - плоскости проекции некоторой вектор-функции (эффективной деформации) и не могут служить характеристиками штампуемости листового металла.
5. Установлено, что для увеличения допустимых степеней деформации и стабилизации качества изделий вытянутых из листового молибдена целесообразно применение дифференциального нагрева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдасаров Х.С. Высокотемпературная кристаллизация из расплава. М.: Физматлит. 2004.160 с.
2. Назарян Э.А., Константинов В.Ф. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки.// Вестник Машиностроения. 1999. № 2. С. 35-41.
3. Назарян Э.А., Аракелян М.М. Предельное формоизменение при деформировании осесимметричных оболочек.// Заготовительные производства в машиностроении. 2004 .№ 5. С. 24-27.
4. Назарян Э.А., Аракелян М.М. О технологических свойствах листового молибдена.// Изв. НАН РА и Государственного Инженерного Университета Армении, сер. техн. наук, 2003. Т. LVI. № 1.С. 36-39.
5. Назарян Э.А., Аракелян М.М. Способ изготовления контейнеров для выращивания монокристаллов. Патент Республики Армения. № 1502A2 от 26.01.2004.

Академия Проблем Качества РА
Ереванский Государственный Университет

Поступила в редакцию
22.03.2006

С О Д Е Р Ж А Н И Е
59 тома 2006 г. «Изв.НАН Армении, Механика»

1. **Аветисян А.Г., Нерсисян Г.Г., Саргсян А.М.** – О решении четырех краевых задач электроупругости для тонкого пьезоэлектрического клина..... 3–27
2. **Аветисян А.С., Алексанян Д.Р.**– Об одной задаче устойчивости круговой кольцевой пластинки под действием равномерно распределенной по внутреннему и внешнему контурам нормальной нагрузки 3–13
3. **Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Саакян А.В** – Асимптотическое решение смешанной краевой задачи для пятислойной изотропной термоупругой полосы и некоторое приложение..... 2–17
4. **Адамян В.Г., Манандян Л.Т.**– Определение положения точки и времени при движении по параболической и гиперболической орбите в поле центральной силы 4–66
5. **Акопян В.Н., Даштоян Л.Л.**– Об одной осесимметричной задаче для составного пространства, ослабленного полубесконечной кольцеобразной трещиной 1–3
6. **Акопян В.В., Кабалян Л.Ю., Кабалян Ю.К., Карапетян К.А.**– Механические свойства эбонитовых композитов, модифицированных минеральными наполнителями 3–73
7. **Алексанян Д.Р.**–Устойчивость защемленной по внутреннему или внешнему контуру кольцевой пластинки при равномерно распределенной растягивающей или сжимающей нагрузке на другом контуре 4–32
- **Алексанян Д.Р.**– см. № 2
- **Аракелян М.М.**– см. № 30
8. **Арустамян А.М.** – Численно-аналитическое решение задачи динамической устойчивости изотропной прямоугольной пластинки ..2–24
9. **Асатрян В.М., Баблоян А.А.**– Асимптотические формулы для корней функции Вебера 3–3
- **Баблоян А.А.**– см. № 9
10. **Багдасарян З.Р., Белубекян М.В.**– Влияние поперечных сдвигов при изгибе пластинки силами, приложенными на свободном краю.....1–19
11. **Бардзокас Д.И., Фильштинский М.Л** – Возбуждение волн сдвига в пьезокерамическом слое с туннельной полостью посредством системы поверхностных электродов 4–44

12. Белубекян В.М., Мгерян Д.Э – Пространственная задача распространения поверхностных волн в трансверсально-изотропной упругой среде 2–3
- Белубекян М.В.– см. № 10
13. Берберян А.Х.– Просачивание электроупругой сдвиговой волны через зазор между пьезоэлектрическими кристаллами кубической и гексагональной симметрии (классы 23 и 6 *mm*) 1–52
14. Валесян С.Ш.– Исследование влияния старения на прочностные и деформационные свойства гетинакса 1–72
15. Ванян Л.А.– Устойчивость безмоментной цилиндрической оболочки-мембраны в сверхзвуковом потоке газа 2–34
16. Варданян С.В.– Пластическое течение быстровращающейся конической трубы при условии полной пластичности 3–21
17. Восканян А.Р., Григорян Э.Х.– Установившиеся колебания упругого пространства с упругим бесконечным слоем 4–3
18. Габриелян М.С., Мазманиян Л.А.– Об оптимальном управлении колебательных движений пологих оболочек двоякой постоянной кривизны в конфликтных ситуациях 2–78
19. Гараков В.Г., Даноян З.Н.– Отражение и преломление электроупругих волн на границе раздела пьезоэлектрических и пьезомагнитных сред .4–58
20. Геворкян А.В.– Волновые уравнения в конечно-проводящей среде 1–59
- Геворкян Р.С.– см. № 3
- Григорян Э.Х.– см. № 18
21. Гнуни В.Ц.– Устойчивость балки с двумя произвольно, но симметрично расположенными опорами при действии следящей нагрузки 1–25
22. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А.–Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем (Исследование характеристического уравнения – Часть I) 2–43
23. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. –Поверхностные электроупругие волны Лява в слоистой системе с пьезоэлектрической подложкой и мягким диэлектрическим слоем (Исследование характеристического уравнения – Часть II) 3–34
- Даноян Н.З.– см. №№ 20, 23, 24
- Даштоян Л.Л.– см. № 5
24. Егиазарян Т.А.– Осесимметричный изгиб круглых пластин, ослабленных монетообразной трещиной 2–57
- Кабалян Л.ю.– см.№ 6
- Кабалян ю.К.– см. № 6
- Казарян А.Н.– см. № 37

- **Карапетян К.А.**– см. № 6
- **Мазманиян Л.А.**– см. № 19
- **Манандян Л.Т.**– см. № 4
- **Манукян Г.А.**– см. №№ 23, 24
- 25. **Мгерян Д.Э.**– Распространение пространственной поверхностной волны, когда на границе полупространства одно касательное перемещение равно нулю 4–18
- **Мгерян Д.Э.**– см. № 12
- 26. **Мирзоян Е.С.**–О напряженном состоянии наследственно стареющей вязкоупругой плоскости с коллинеарной системой жестких включений 1–37
- 27. **Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.**– К устойчивости консольного стержня при следящей силе 1–31
- 28. **Мхитарян А.М., Погосян Н.Д., Терзян С.А.**– Поверхностная волна типа Лява для слоя с экспоненциальной неоднородностью по толщине4–39
- 29. **Назарян Э.А., Аракелян М.М.**– Напряжения и деформации листового молибдена при плоском напряженном состоянии с учетом деформационного упрочнения 4–74
- **Нерсисян Г.Г.**– см. №№ 1, 28
- 30. **Оганян Г.Г.**– Нелинейные свободные пульсации газового пузырька в несжимаемой жидкости 2–62
- 31. **Оганян Г.Г., Саакян С.Л.**– О вынужденных нелинейных пульсациях сферического газового пузырька в несжимаемой жидкости 3–56
- 32. **Петросян Г.Л., Хачатрян Г.Г.**– Моделирование процесса прессования и волочения биметаллических заготовок с пористой сердцевиной через коническую матрицу с помощью компьютера 2–92
- 33. **Погосян Н.Д.**– Отражение плоских упругих волн в однородном изотропном волноводе 2–10
- **Погосян Н.Д.**– см. № 29
- **Саакян А.В.**– см. № 3
- 34. **Саакян Г.С., Саакян С.Г.**– Антиплоская задача распространения волн в анизотропном неоднородном упругом полупространстве, обладающем одной плоскостью упругой симметрии 1–11
- **Саакян С.Г.**– см. № 35
- **Саакян С.Л.**– см. № 32
- **Саргсян А.М.**– см. № 1
- 35. **Саркисян К.Г.**– О сдвиговых колебаниях пьезоэлектрического полупространства, на граничной поверхности которого прикреплен диэлектрический упругий слой малой толщины с кусочно-постоянным упругим коэффициентом 3–45

36. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н., Казарян А.Н.– Анизотропия деформативных свойств композитных материалов при различных случаях циклического нагружения 2-86
37. Саркисян Н.Е., Саркисян Н.Н.– Разрушение волокнистых композитных материалов при длительном циклическом деформировании 3-80
 - Саркисян Н.Н.– см. №№ 37, 38
 - Симонян А.М.– см. № 15
38. Степанов И.А.– Вычисление средней ширины шероховатого зазора или канала со сложной формой поверхности 1-77
 - Терзян С.А.– см. № 29
39. Туманян Р.С.– Передача нагрузки от кольцеобразного стрингера к упругой бесконечной пластине с учетом ползучести 1-45
 - Фильштинский М.Л.– см. № 11
 - Хачатрян Г.Г.– см. № 33
40. Хачикян А.С.– О гармонических и бигармонических задачах для уравнений с неклассическими граничными условиями 4-24
41. Худаяров Б.А.– Математическое моделирование флаттера вязкоупругих пластин и цилиндрических панелей 1-62
42. Худаяров Б.А.– Расчет на флаттер вязкоупругих трехслойных цилиндрических панелей 2-72
43. Шемян А.Л.– Контактное взаимодействие цилиндра и втулки в режиме граничного трения 3-66

Содержание

- | | | |
|---|----|---|
| Ա.Ռ.Ոսկանյան, Է.Ն.Գրիգորյան
Առաձգական անվերջ շերտով առաձգական տարածության հաստատված տատանումները | 3 | Воскрянян А.Р., Григорян Э.Х.
УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ УПРУГОГО ПРОСТРАНСТВА С УПРУГИМ БЕСКОНЕЧНЫМ СЛОЕМ |
| Դ. Հ. Մհերյան
Տարածական մակերևութային ալիքների տարածումը, երբ կիսատարածության եզրի վրա շոշափողային տեղափոխություններից մեկը հավասար է զրոյի | 18 | Мгерян Д. Э.
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ, КОГДА НА ГРАНИЦЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ОДНО КАСАТЕЛЬНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ РАВНО НУЛЮ |
| Ա.Ս. Խաչիկյան
Հարմոնիկ և բիհարմոնիկ հավասարումների բերվող ոչ դասական եզրային պայմաններով խնդիրների մասին | 24 | Хачикян А.С.
О ГАРМОНИЧЕСКИХ И БИГАРМОНИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕКЛАССИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ |
| Դ.Ռ. Ալեքսանյան
Ներքին կամ արտաքին եզրերով ամրակցված օղակաձև սալի կայունության խնդիրը, երբ մյուս եզրի վրա ազդում է ձգող կամ սեղմող հավասարաչափ բաշխված բեռ | 32 | Алексанян Д.Р.
УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ВНУТРЕННЕМУ ИЛИ ВНЕШНЕМУ КОНТУРУ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ РАСТЯГИВАЮЩЕЙ ИЛИ СЖИМАЮЩЕЙ НАГРУЗКЕ НА ДРУГОМ КОНТУРЕ |
| Ա.Մ. Մխիթարյան, Ն.Զ. Պողոսյան, Ս.Ա. Թերզյան
Լյավի տիպի մակերևութային ալիքն ըստ հաստության էքսպոնենցիալ անհամասեռ շերտի համը | 39 | Мхитарян А.М., Погосян Н.Д., Терзян С.А.
ПОВЕРХНОСТНАЯ ВОЛНА ТИПА ЛЯВА ДЛЯ СЛОЯ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПО ТОЛЩИНЕ |
| Դ.Ի. Բարձոկաս, Մ.Լ. Ֆիլշտինսկի
Մակերևութային էլեկտրոդների համակարգի միջոցով թունելային խոռոչով պլեզոկերամիկ շերտում սափքի ալիքների զրգումը | 44 | D.I. Bardzokas, M.L. Filshinsky
EXCITATION OF SHEAR WAVES IN A PIEZOCERAMIC LAYER WITH A TUNNEL CAVITY BY A SYSTEM OF SURFACE ELECTRODES |
| Վ.Գ. Գարակով , Զ.Ն. Դանոյան
Էլեկտրաառաձգական ալիքների անդրադարձումը և բեկումը պլեզոկերամիկ և պլեզոմագնետիկ միջավայրերի բաժանման եզրում | 58 | Гараков В.Г., Даноян З.Н.
ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И ПЬЕЗОМАГНИТНЫХ СРЕД |
| Վ.Տ. Ադամյան, Լ.Գ. Մանանդյան
Կենտրոնական ուժի դաշտում պարաբոլական և հիպերբոլական ուղեծրով շարժվող կետի դիրքի և ժամանակի որոշումը | 66 | Адамян В.Г., Манандян Л.Т.
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТОЧКИ И ВРЕМЕНИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ОРБИТАМ В ПОЛЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ |
| Է.Ա. Նազարյան, Մ.Մ. Առաքելյան
Հարթ լարվածային վիճակում թերթային մոլիբդենի լարումները և դեֆորմացիաները | 74 | Назарян Э. А., Аракелян М. М.
НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ ЛИСТОВОГО МОЛИБДЕНА ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ |

հաշվի առնելով դեֆորմացիոն ամրացումը

**СОСТОЯНИИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИОННОГО
УПРОЧНЕНИЯ**

**“ՀՀ ԳԱԱ տեղեկագիր Մեխանիկա”
2006թ. 59 հատորի
ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ**

83

С О Д Е Р Ж А Н И Е
59 тома 2006 г. “Изв. НАН Армении, Механика”