

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ  
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCE OF ARMENIA

---

---

ISSN 0321-1339

**Չ Ե Կ Ո Ւ Յ Ց Ն Ե Ր**  
**Д О К Л А Д Ы**  
**R E P O R T S**

2023

---

Երևան

Երևան

Yerevan

ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ՀԱՆՐԱՊԵՏՈՒԹՅԱՆ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ

# ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ

ՀԱՏՈՐ 123

№ 3-4

---

ՀՀ ԳԱԱ «ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆ» ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ  
ԵՐԵՎԱՆ 2023

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ  
АРМЕНИЯ  
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA

**ДОКЛАДЫ**  
**REPORTS**

**ТОМ** **123**  
**VOLUME**

№ 3-4

---

ИЗДАТЕЛЬСТВО "ГИТУТЮН" НАН РА  
ЕРЕВАН 2023

*Հիմնադրվել է 1944 թ.: Լույս է տեսնում տարին 4 անգամ*  
*Основан в 1944 г. Выходит 4 раза в год*  
*Founded in 1944. Published quarterly*

**Գլխավոր խմբագիր՝** ակադեմիկոս Ռ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

**Խմբագրական խորհուրդ՝** ակադեմիկոս Գ. Ե. ԲԱԴԴԱՍԱՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Լ. Ա. ԹԱՎԱԴՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթ. անդամ Ռ. Մ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, ակադեմիկոս Է. Մ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Լ. Ռ. ՄԱՆՎԵԼՅԱՆ (գլխ. խմբագրի տեղակալ), ակադեմիկոս Յու. Հ. ՇՈՒԿՈՒՐՅԱՆ, ակադեմիկոս Յու. Մ. ՍՈՒՎԱՐՅԱՆ, Գ.Ա.ԱԲՐԱՎՅԱՆՅԱՆ (պատ. քարտուղար)

**Главный редактор** академик Р. М. МАРТИРОСЯН

**Редакционная коллегия:** чл.-кор. НАН РА Р. М. АРУТЮНЯН, академик Г. Е. БАГДАСАРЯН, академик Э. М. КАЗАРЯН, чл.-кор. НАН РА Л. Р. МАНВЕЛЯН (зам. главного редактора), академик Ю. М. СУВАРЯН, академик Л. А. ТАВАДЯН, академик Ю. Г. ШУКУРЯН, Г. А. АБРАМЯН (отв. секретарь)

**Editor-in-chief** academician R. M. MARTIROSYAN

**Editorial Board:** corresponding member of NAS RA R. M. AROUTIOUNIAN, academician G. E. BAGDASARIAN, academician E. M. KAZARYAN, corresponding member of NAS RA L. R. MANVELYAN (associate editor), academician Yu. H. SHOUKOURIAN, academician Yu. M. SUVARYAN, academician L. A. TAVADYAN, G. A. ABRAHAMYAN (executive secretary)

*Խմբագրության հասցեն՝* 0019, Երևան 19, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24գ

*Адрес редакции:* 0019, Ереван 19, просп. Маршала Баграмяна 24г

*Communication links:* address – 24g Marshal Bagramian Ave., Yerevan, 0019, Armenia

*Phone:* (37410)56-80-67 *URL:* <http://elib.sci.am> *e-mail:* [rnas@sci.am](mailto:rnas@sci.am)

---

© НАН РА. Президиум. 2023

© Издательство “Гитутюн”

НАН РА. 2023

Հայաստանի ԳԱԱ Ձեկույցներ

Հատոր 123, N 2, 2023

Խմբագիր՝ Ա. Սահակյան  
Համակարգչային էջադրումը՝ Վ. Պապյանի

Հրատ. պատվեր N 1259  
Ստորագրված է տպագրության  
26.06..23

Ծավալը՝ 5 տպ. մամուլ: Տպաքանակը՝ 150: Գինը՝ պայմանագրային:

ՀՀ ԳԱԱ տպարան  
Երևան, Մարշալ Բաղրամյան պող. 24

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

### ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ

<i>Լ. Ա. Խաչատրյան, Բ. Ս. Նահապետյան</i> – Էներգիայի և հավանականության երկակիությունը վիճակագրական ֆիզիկայի վերջավոր մոդելներում .....	7
<i>Ա. Հ. Քամայան, Գ. Ա. Կիրակոսյան</i> – Լ-Վիներ-Հոպֆի օպերատորների մի դասի ֆրեդհոլմության մասին .....	15

### ՄԵՆԱՆԻԿԱ

<i>Ա. Ա. Ղուկասյան</i> – Դեֆորմացվող պինդ մարմնի շարժման կինեմատիկայի որոշ հարցեր՝ բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի անալոգիայով .....	21
<i>Կ. Շ. Մկրտչյան</i> – Ազատ հենված առաձգական ձողի հարկադրական տատանումները, լայնական բաշխված, շարժվող բեռի ազդեցության տակ .....	33
<i>Լ. Ա. Աղալովյան</i> – Համաշխարհային ձգողականության ընդհանրացված-նյութային տեսությունը և Սև խոռոչների դասակարգումը .....	41

### ԱՌԱՋԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Փ. Ռ. Համբարձումյան</i> – Երկշերտ սալի ստիպողական տատանումները կոնտակտի մակերևույթի կետերի տեղափոխությունների տվյալների առկայության դեպքում .....	52
<i>Կ. Լ. Աղայան</i> – Սահքի հարթ ալիքը խառը եզրային պայմաններով պիեզոէլեկտրական շերտում .....	61

### ՖԻԶԻԿԱ

<i>Ռ. Հ. Ալանսկյան</i> – Էքստրեմալ ուժեղ մագնիսական դաշտում ատոմի մասին ...	74
<i>Ա. Գ. Ստեփանյան</i> – Չայնային ֆոնոնների սահմանափակվածության և սպին-ուղեծրային փոխազդեցության համատեղ ազդեցությունը նանոլարում տաք էլեկտրոնների էներգիական կորուստների արագության վրա .....	87

### ՆԵՅՐՈՔԻՄԻԱ

<i>Ա. Ս. Գրիգորյան, Ռ. Գ. Պարոնիկյան</i> – 4-Օքսո-7-ֆենիլ-3,4,5,6,7,8-հեքսահիդրոբենզո[4,5]թիենո[2,3-d]պիրիմիդին-7-կարբոնիտրիլի որոշ նոր ածանցյալների հակամոնոամֆինոքսիդազային ակտիվությունը .....	94
---	----

### ԲՈՒՄԱԲԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

<i>Ա. Ա. Գրիգորյան</i> – <i>Philadelphus</i> L. (Hydrangeaceae) ցեղի ներկայացուցիչների վերարտադրողականության առանձնահատկությունները Հայաստանի բուսաբանական այգիներում .....	101
---	-----

### ՖԻԶԻՈԼՈԳԻԱ

<i>Թ. Յու. Ազատյան</i> – Առողջ և մտավոր հետամնացություն ունեցող երեխաների միջկիսագնդային անհամաչափության հարցի շուրջ .....	111
--	-----

### ԳԻՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ԿԵՆՍԱԳՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ՓԱՍՏԱԳՐԵՐՈՒՄ

<i>Ս.Գ. Ղարիբջանյան</i> – Հարություն Անժուր .....	119
---	-----

## СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА	
<i>Л. А. Хачатрян, Б. С. Нахапетян</i> – Двойственность энергии и вероятности в конечных моделях статистической физики .....	7
<i>А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян</i> – О фредгольмовости одного класса операторов -Винера – Хопфа .....	15
МЕХАНИКА	
<i>А. А. Гукасян</i> – Некоторые вопросы кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела .....	21
<i>К. Ш. Мкртчян</i> – Вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно опертого стержня под действием поперечно распределенной движущейся нагрузки .....	33
<i>Л. А. Агаловян</i> – Обобщенно-ньютонова теория всемирного тяготения и систематизация Черных дыр .....	41
ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ	
<i>П. Р. Амбарцумян</i> – Вынужденные колебания двухслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта .....	52
<i>К. Л. Агаян</i> – Плоская сдвиговая волна в пьезоэлектрическом слое со смешанными граничными условиями .....	61
ФИЗИКА	
<i>Р. А. Аланакян</i> – К вопросу об атоме в экстремально сильном магнитном поле .....	74
<i>А. Г. Степанян</i> – Совместное влияние ограничения акустических фононов и спин-орбитального взаимодействия на скорость потерь энергии горячими электронами в нанопроволоке .....	87
НЕЙРОХИМИЯ	
<i>А. С. Григорян, Р. Г. Пароникян</i> – Антимоноаминоксидазная активность некоторых новых производных 4-оксо-7-фенил-3,4,5,6,7,8-гексагидробензо[4,5]тиено[2,3-d]пиримидин-7-карбонитрила .....	94
БОТАНИКА	
<i>А. А. Григорян</i> – Репродуктивные особенности рода <i>Philadelphus</i> L. (Hydrangeaceae) в ботанических садах Армении .....	101
ФИЗИОЛОГИЯ	
<i>Т. Ю. Азатян</i> – К вопросу межполушарной асимметрии здоровых и умственно отсталых детей .....	111
БИОГРАФИИ УЧЕНЫХ В ДОКУМЕНТАХ	
<i>С. Г. Гарибджанян</i> – Арутюн Анжур .....	119

## CONTENTS

MATHEMATICS	
<i>L. A. Khachatryan, B. S. Nahapetian</i> – Duality of Energy and Probability in Finite-Volume Models of Statistical Physics .....	7
<i>A. G. Kamalyan, G. A. Kirakosyan</i> – On the Fredholm Property of One Class of $\mathcal{L}$ -Wiener – Hopf Operators .....	15
MECHANICS	
<i>A. A. Ghukasyan</i> – Some Questions of the Kinematics of Motion of a Deformed Rigid Body by Analogy with the Kinematics of an Absolutely Rigid Body .....	21
<i>K. Sh. Mkrtchyan</i> – Forced Transversal Vibrations of Elastic Hinged-Opened Rod under the Action of a Distributed Transversal Moving Load .....	33
<i>L. A. Aghalovyan</i> – Generalized Newton’s Theory of Universal Gravitation and Systematization of Black Holes .....	41
ELASTICITY THEORY	
<i>P. R. Hambardzumyan</i> – Forced Vibrations of a Double-Layer Plate in the Presence of Data about the Movement of Contact Surface Points .....	52
<i>K. L. Aghayan</i> – Plane Shear Wave in a Piezoelectric Layer with Mixed Boundary Conditions .....	61
PHYSICS	
<i>R. A. Alanakyan</i> – About Atom in Extremely Strong Magnetic .....	74
<i>A. G. Stepanyan</i> – Combined Influence of Acoustic Phonon Confinement and Spin-Orbit Interaction on the Energy Loss Rate of Hot Electrons in a Nanowire .....	87
NEUROCHEMISTRY	
<i>A. S. Grigoryan, R. G. Paronikyan</i> – Antimonoamine Oxidase Activity of Some New Derivatives 4-Oxo-7-phenyl-3,4,5,6,7,8-hexahydrobenzo[4,5]thieno[2,3-d]pyrimidine-7-carbonitrile .....	94
BOTANY	
<i>A. A. Grigoryan</i> – Reproductive Features of the Genus <i>Philadelphus</i> L. (Hydrangeaceae) in the Botanical Gardens of Armenia .....	101
PHYSIOLOGY	
<i>T. Yu. Azatyan</i> – Approaches to the Question of Interhemispheric Asymmetry in Healthy and Mentally Retarded Children .....	111
BIOGRAPHIES OF SCIENTISTS IN DOCUMENTS	
<i>S.G. Gharibdjanyan</i> – Harutyun Anzhur .....	119

**L. A. Khachatryan, corresponding member  
of NAS RA B. S. Nahapetian**

## **Duality of Energy and Probability in Finite-Volume Models of Statistical Physics**

(Submitted 20/IX 2023)

**Keywords:** *transition energy, probability, duality, Gibbs measure, conditional probability, transition energy field.*

**Introduction.** It is well-known that the Gibbs formula (which establishes a relationship between probability and energy) is the basis of statistical physics. Much attention has been paid to the justification of the Gibbs formula using physical reasoning. In [1], it was shown that the Gibbs formula can have a purely mathematical justification for both finite and infinite systems (for the case of finite-volume systems, see also [2]). In our paper, we will show that there is a deeper relationship between energy and probability, namely, energy and probability are dual concepts.

Duality in mathematics is the principle according to which any true statement of one theory corresponds to a true statement in the dual theory. Here, we will show how this principle can be applied to solve the known problem of describing a finite random field by a set of consistent conditional distributions (see, for example, [3]). A direct probabilistic solution to this problem is given in [2].

**1. Duality of energy and probability in finite volume.** Let  $\Lambda$  be a set with a finite number of elements,  $1 < |\Lambda| < \infty$ , and let each point  $t \in \Lambda$  be associated with the set  $X^t$ , which is a copy of some finite set  $X$ . Denote by  $X^\Lambda = \{x = (x_t, t \in \Lambda): x_t \in X, t \in \Lambda\}$  the set of functions (configurations) defined on  $\Lambda$  and taking values in  $X$ . For any  $V \subset \Lambda$ , denote by  $x_V$  the restriction of configuration  $x \in X^\Lambda$  on  $V$ . For any  $V, I \subset \Lambda$  such that  $V \cap I = \emptyset$ , and any  $x \in X^V$ ,  $y \in X^I$ , denote by  $xy$  the concatenation of  $x$  with  $y$ , that is, the configuration on  $V \cup I$  equal to  $x$  on  $V$  and to  $y$  on  $I$ . For one-point sets  $\{t\}$ ,  $t \in \Lambda$ , braces will be omitted.

*Probability distribution* on  $X^\Lambda$  is a function  $P_\Lambda: X^\Lambda \rightarrow [0,1]$  satisfying the following conditions:

$$P_\Lambda(x) > 0, x \in X^\Lambda, \quad \sum_{x \in X^\Lambda} P_\Lambda(x) = 1. \quad (1)$$

Probability distribution  $P_\Lambda$  on  $X^\Lambda$  sometimes will be called a (*finite*) *random field*.

A function  $\Delta_\Lambda: X^\Lambda \times X^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  satisfying

$$\Delta_\Lambda(x, u) = \Delta_\Lambda(x, z) + \Delta_\Lambda(z, u), \quad x, u, z \in X^\Lambda, \quad (2)$$

will be called a *transition energy*. The value  $\Delta_\Lambda(x, u)$  of this function can be interpreted as an amount of energy needed to change the state of the physical system from  $x$  to  $u$  (in the finite volume  $\Lambda$ ).

The following result establishes a relationship between two fundamental concepts: energy and probability.

**Theorem 1.** *For a set  $P_\Lambda = \{P_\Lambda(x), x \in X^\Lambda\}$  of numbers to be a probability distribution on  $X^\Lambda$  it is necessary and sufficient that elements of  $P_\Lambda$  have the Gibbs form*

$$P_\Lambda(x) = \frac{\exp\{\Delta_\Lambda(x, u)\}}{\sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(z, u)\}}, \quad x \in X^\Lambda, \quad (3)$$

where  $u \in X^\Lambda$  and  $\Delta_\Lambda = \{\Delta_\Lambda(x, u), x, u \in X^\Lambda\}$  is a transition energy on  $X^\Lambda \times X^\Lambda$  with

$$\Delta_\Lambda(x, u) = \ln \frac{P_\Lambda(x)}{P_\Lambda(u)}, \quad x, u \in X^\Lambda.$$

Since  $\Delta_\Lambda$  satisfies (2), there is a function  $H_\Lambda = \{H_\Lambda(x), x \in X^\Lambda\}$  such that

$$\Delta_\Lambda(x, u) = H_\Lambda(u) - H_\Lambda(x), \quad x \in X^\Lambda. \quad (4)$$

Substituting (4) into (3), we obtain

$$P_\Lambda(x) = \frac{\exp\{-H_\Lambda(x)\}}{\sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{-H_\Lambda(z)\}}, \quad x \in X^\Lambda,$$

where  $H_\Lambda$  can be considered as a Hamiltonian (potential energy) of a physical system. Hence, in the case of finite volume  $\Lambda$ , any function  $H_\Lambda$  on  $X^\Lambda$  can be interpreted as a Hamiltonian (see [1]). Particularly, in the classical interpretation,

$$H_\Lambda(x) = \sum_{t, s \in \Lambda} \Phi_{\{t, s\}}(x_t x_s), \quad x \in X^\Lambda,$$

where  $\Phi$  is a pair interaction potential.

The relationship between probability distribution and transition energy can be formulated in terms of operators. Let  $\mathcal{P} = \{P_\Lambda\}$  be the set of all probability

distributions on  $X^\Lambda$  and let  $\mathcal{D} = \{\Delta_\Lambda\}$  be the set of all transition energies on  $X^\Lambda \times X^\Lambda$ . Consider the operator  $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{D}$  which maps an element from  $\mathcal{P}$  to an element from  $\mathcal{D}$  according to the formula

$$(TP_\Lambda)(x, u) = \ln \frac{P_\Lambda(x)}{P_\Lambda(u)}, \quad x, u \in X^\Lambda,$$

and the operator  $T^{-1}: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$  which maps an element from  $\mathcal{D}$  to an element from  $\mathcal{P}$  by the formula

$$(T^{-1}\Delta_\Lambda)(x) = \frac{\exp\{\Delta_\Lambda(x, u)\}}{\sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(z, u)\}}, \quad x \in X^\Lambda,$$

where  $u \in X^\Lambda$ . Due to condition (2), the operator  $T^{-1}$  is correctly defined. It is clear that both operators  $T$  and  $T^{-1}$  depend on  $\Lambda$ , but to simplify the notations, sometimes we will not directly specify this dependence.

The following statement holds true.

**Proposition.** *Operators  $T$  and  $T^{-1}$  are mutually inverse, that is, for all  $P_\Lambda \in \mathcal{P}$  and  $\Delta_\Lambda \in \mathcal{D}$ , it holds*

$$T^{-1}TP_\Lambda = P_\Lambda, \quad TT^{-1}\Delta_\Lambda = \Delta_\Lambda.$$

It is easy to see that for any  $P_\Lambda \in \mathcal{P}$ , function  $TP_\Lambda$  satisfies the characteristic property (2) of transition energies, while for any  $\Delta_\Lambda \in \mathcal{D}$ , function  $T^{-1}\Delta_\Lambda$  satisfies (1), which characterizes a probability distribution. Therefore, any statement about probability  $P_\Lambda$  can be formulated in terms of corresponding transition energy  $\Delta_\Lambda$ , and vice versa.

**2. Duality of transition energy field and conditional distribution.** Let  $P_\Lambda$  be a probability distribution on  $X^\Lambda$ . There is a set  $Q(P_\Lambda) = \{Q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  of its conditional probabilities

$$Q_V^{\bar{x}}(x) = \frac{P_\Lambda(x\bar{x})}{\sum_{z \in X^V} P_\Lambda(z\bar{x})}, \quad x \in X^V, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda.$$

It is clear, that for any fixed  $V \subset \Lambda$  and  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}$ , function  $Q_V^{\bar{x}}$  is a probability distribution on  $X^V$ . We will also consider the set  $Q_1(P_\Lambda) = \{Q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\} \subset Q(P_\Lambda)$  of one-point conditional probabilities generated by  $P_\Lambda$ .

Now, let  $Q = \{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  be a set of probability distributions  $q_V^{\bar{x}}$  on  $X^V$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}$ ,  $V \subset \Lambda$ . A natural question arises: does there exist a probability distribution  $P_\Lambda$  on  $X^\Lambda$  for which  $Q$  is a set of its conditional probabilities, that is,  $Q(P_\Lambda) = Q$ ? The answer is given by the following statement.

**Theorem 2.** *Let  $Q = \{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  be a set of probability distributions on  $X^V$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}$ ,  $V \subset \Lambda$ . There exists a unique probability distribution  $P_\Lambda$  on  $X^\Lambda$  such that  $Q(P_\Lambda) = Q$  if and only if the elements of  $Q$  satisfy the following consistency conditions: for*

any disjoint  $V, I \subset \Lambda$  and  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus (V \cup I)}$ ,  $x, u \in X^V$ ,  $y \in X^I$ , it holds

$$q_{V \cup I}^{\bar{x}}(xy)q_V^{\bar{x}y}(u) = q_{V \cup I}^{\bar{x}}(uy)q_V^{\bar{x}y}(x). \quad (5)$$

Condition (5) is a finite-volume version of the well-known R. Dobrushin's consistency condition, see [4]. The set  $Q = \{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  of probability distributions satisfying (5) is called a *finite-volume specification*. Theorem 2 states that any finite-volume specification is a set of conditional probabilities of some (uniquely determined) joint distribution.

Let  $\Delta_\Lambda$  be a transition energy on  $X^\Lambda \times X^\Lambda$ . Consider the set  $D(\Delta_\Lambda) = \{\Delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  of functions

$$\Delta_V^{\bar{x}}(x, u) = \Delta_\Lambda(x\bar{x}, u\bar{x}), \quad x, u \in X^V, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda.$$

It is not difficult to see that for any fixed  $V \subset \Lambda$  and  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}$ , function  $\Delta_V^{\bar{x}}$  is a transition energy on  $X^V \times X^V$ , that is,

$$\Delta_V^{\bar{x}}(x, u) = \Delta_V^{\bar{x}}(x, z) + \Delta_V^{\bar{x}}(z, u), \quad x, u, z \in X^V. \quad (6)$$

Now, let us consider a set  $D = \{\delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  of transition energies  $\delta_V^{\bar{x}}$  on  $X^V \times X^V$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}$ ,  $V \subset \Lambda$ . The following statement holds true (see also [1]).

**Theorem 3.** *Let  $D = \{\delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  be a set of transition energies  $\delta_V^{\bar{x}}$  on  $X^V \times X^V$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}$ ,  $V \subset \Lambda$ . There exists a unique transition energy  $\Delta_\Lambda$  on  $X^\Lambda \times X^\Lambda$  such that  $D(\Delta_\Lambda) = D$  if and only if the elements of  $D$  satisfy the following consistency conditions: for any disjoint  $V, I \subset \Lambda$  and  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus (V \cup I)}$ ,  $x, u \in X^V$ ,  $y \in X^I$ , it holds*

$$\delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(xy, uy) = \delta_V^{\bar{x}y}(x, u). \quad (7)$$

The set  $D = \{\delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  of transition energies satisfying (7) is called a *finite-volume transition energy field*. This notion was introduced in [1] for the case of systems defined in infinite volume (on the integer lattice  $\mathbb{Z}^d$ ,  $d \geq 1$ ).

Previously established duality of probability  $P_\Lambda$  and energy  $\Delta_\Lambda$  allows establishing the one-to-one correspondence between systems  $Q$  and  $D$ . Namely, for every fixed  $V \subset \Lambda$ , define operators  $T_V: \{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}\} \rightarrow \{\delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}\}$  and  $T_V^{-1}: \{\delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}\} \rightarrow \{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}\}$  by

$$(T_V q_V^{\bar{x}})(x, u) = \ln \frac{q_V^{\bar{x}}(x)}{q_V^{\bar{x}}(u)}, \quad (T_V^{-1} \delta_V^{\bar{x}})(x) = \frac{\exp\{\delta_V^{\bar{x}}(x, u)\}}{\sum_{z \in X^V} \exp\{\delta_V^{\bar{x}}(z, u)\}}, \quad x, u \in X^\Lambda. \quad (8)$$

Then operators  $T: Q \rightarrow D$  and  $T^{-1}: D \rightarrow Q$  defined by

$$Tq_V^{\bar{x}} = T_V q_V^{\bar{x}}, \quad T^{-1}\delta_V^{\bar{x}} = T_V^{-1}\delta_V^{\bar{x}}, \quad \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda,$$

are mutually inverse. Moreover, the elements of  $Q$  satisfy conditions (5) if and only if the elements of  $D$  satisfy conditions (7). That means that there is a duality between specification (conditional distribution) and transition energy field.

Further, we will establish one of the important properties of the transition energy – its additivity. Let  $D = \{\delta_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus V}, V \subset \Lambda\}$  be a transition energy field. Then for any disjoint  $V, I \subset \Lambda$  and  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus (V \cup I)}$ ,  $x, u \in X^V$ ,  $y, v \in X^I$ , using (6) and (7), we can write

$$\delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(xy, uv) = \delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(xy, uy) + \delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(uy, uv) = \delta_V^{\bar{x}y}(x, u) + \delta_I^{\bar{x}u}(y, v)$$

and

$$\delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(xy, uv) = \delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(xy, xv) + \delta_{V \cup I}^{\bar{x}}(xv, uv) = \delta_I^{\bar{x}x}(y, v) + \delta_V^{\bar{x}v}(x, u).$$

From here it follows, that for the elements of the one-point subsystem  $\{\delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\} \subset D$ , one has

$$\delta_t^{\bar{x}y}(x, u) + \delta_s^{\bar{x}u}(y, v) = \delta_s^{\bar{x}x}(y, v) + \delta_t^{\bar{x}v}(x, u) \quad (9)$$

for any  $x, u \in X^t$ ,  $y, v \in X^s$ ,  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus \{t, s\}}$ ,  $t, s \in \Lambda$ . Relation (9) has a simple physical meaning. There are two ways to change the state of the system in  $\{t, s\}$  from  $xy$  to  $uv$  with the state  $\bar{x}$  in  $\Lambda \setminus \{t, s\}$  unchanged. First, change the state of the system at point  $t$  from  $x$  to  $u$  under boundary condition  $y\bar{x}$ , and then at point  $s$  from  $y$  to  $v$  already under boundary condition  $u\bar{x}$ . Or, starting from point  $s$ , change the state from  $y$  to  $v$  under the boundary condition  $x\bar{x}$ , and then, under the boundary condition  $v\bar{x}$ , change it at point  $t$  from  $x$  to  $u$ . Naturally, the same amount of energy must be spent in both cases.

A set  $D_1 = \{\delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  of one-point transition energies  $\delta_t^{\bar{x}}$  on  $X^t \times X^t$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}$ ,  $t \in \Lambda$ , and satisfying consistency conditions (9) is called a (*finite-volume*) *one-point transition energy field* (see also [1, 2]).

**Theorem 4.** A function  $\Delta_\Lambda$  on  $X^\Lambda \times X^\Lambda$  is a transition energy if and only if it can be represented in the form

$$\Delta_\Lambda(x, u) = \delta_{t_1}^{x \wedge t_1}(x_{t_1}, u_{t_1}) + \delta_{t_2}^{u_{t_1} x \wedge \{t_1, t_2\}}(x_{t_2}, u_{t_2}) + \dots + \delta_{t_n}^{u \wedge t_n}(x_{t_n}, u_{t_n}),$$

where  $\Lambda = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  is some enumeration of points in  $\Lambda$ ,  $|\Lambda| = n$ , and  $D_1 = \{\delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  is a one-point transition energy field.

**3. Application of the duality.** In this section, we will show how the established duality between the transition energy and probability distribution can be applied to solve a known problem of the description of a finite random field by a set of consistent (one-point) conditional distributions.

This problem was considered by many authors. In the well-known paper [3] by S. Geman and D. Geman, it was divided into two questions (tasks). First, how one can define (compute) a joint distribution knowing its conditionals? And second, the most difficult one, how one can spoil conditional distributions,

that is, when a given set of functions are conditional probabilities for some (necessary unique) distribution on  $X^\Lambda$ ?

As it was mentioned above, the characteristic property (5) of conditional probabilities was known and successfully applied to the problem of describing lattice random fields by specifications (see [4]). However, one cannot derive the characteristic property of one-point conditional probabilities from (5), and such property remained unknown for a long time. The consistency conditions for a set of one-point probability distributions parameterized by boundary conditions to be a one-point subset of some (uniquely determined) specification were introduced in [5] for the case of infinite systems.

The solution to the problem of the describing finite random field by a set of consistent one-point conditional distributions was given in [2] using a purely probabilistic approach. Below, we will give the solution to this problem based on the duality between transition energy and probability.

Let  $Q_1 = \{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  be a set of probability distributions  $q_t^{\bar{x}}$  on  $X^t$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}$ ,  $t \in \Lambda$ , and let  $D_1 = \{\delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  be a one-point transition energy field. Consider the mutually inverse operators  $T_1 = \{T_t, t \in \Lambda\}: Q_1 \rightarrow D_1$  and  $T_1^{-1} = \{T_t^{-1}, t \in \Lambda\}: D_1 \rightarrow Q_1$  where  $T_t$  and  $T_t^{-1}$ ,  $t \in \Lambda$ , are defined by (8):

$$\delta_t^{\bar{x}}(x, u) = (T_1 q_t^{\bar{x}})(x, u), \quad q_t^{\bar{x}}(x) = (T_1^{-1} \delta_t^{\bar{x}})(x), \quad x, u \in X^t, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda.$$

Since the elements of  $D_1$  satisfy condition (7), the elements of  $Q_1$  cannot be arbitrary and have to satisfy appropriate consistency conditions. To find such conditions, we note that for all  $t, s \in \Lambda$ ,  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus \{t, s\}}$  and  $x, u \in X^t$ ,  $y, v \in X^s$ , one has

$$\begin{aligned} \delta_t^{\bar{x}y}(x, u) + \delta_s^{\bar{x}u}(y, v) &= (T_1 q_t^{\bar{x}y})(x, u) + (T_1 q_s^{\bar{x}u})(y, v) \\ &= \ln \left( \frac{q_t^{\bar{x}y}(x)}{q_t^{\bar{x}y}(u)} \cdot \frac{q_s^{\bar{x}u}(y)}{q_s^{\bar{x}u}(v)} \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \delta_s^{\bar{x}x}(y, v) + \delta_t^{\bar{x}v}(x, u) &= (T_1 q_s^{\bar{x}x})(y, v) + (T_1 q_t^{\bar{x}v})(x, u) \\ &= \ln \left( \frac{q_s^{\bar{x}x}(y)}{q_s^{\bar{x}x}(v)} \cdot \frac{q_t^{\bar{x}v}(x)}{q_t^{\bar{x}v}(u)} \right). \end{aligned}$$

Hence, the elements of  $D_1$  satisfy condition (7) if and only if the elements of  $Q_1$  satisfy the following consistency condition: for all  $t, s \in \Lambda$ ,  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus \{t, s\}}$  and  $x, u \in X^t$ ,  $y, v \in X^s$  it holds

$$q_t^{\bar{x}y}(x) q_s^{\bar{x}x}(v) q_t^{\bar{x}v}(u) q_s^{\bar{x}u}(y) = q_t^{\bar{x}y}(u) q_s^{\bar{x}u}(v) q_t^{\bar{x}v}(x) q_s^{\bar{x}x}(y). \quad (10)$$

A set  $Q_1 = \{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  of probability distributions  $q_t^{\bar{x}}$  on  $X^t$  parameterized by boundary conditions  $\bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}$ ,  $t \in \Lambda$ , and satisfying the consistency conditions (10) is called a *(finite-volume) 1-specification*.

Let us now show how the established relation between 1-specification and one-point transition energy field allows constructing the distribution  $P_\Lambda$  on  $X^\Lambda$  compatible with  $Q_1$ , that is, such  $P_\Lambda$  that  $Q_1(P_\Lambda) = Q_1$ .

First, let us find the connection between a probability distribution  $P_\Lambda$  and its one-point conditional probabilities  $Q_1(P_\Lambda) = \{Q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$ . According to Theorems 1, there exists a unique transition energy  $\Delta_\Lambda$  for  $P_\Lambda$  such that

$$P_\Lambda(x) = \frac{\exp\{\Delta_\Lambda(x, u)\}}{\sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(z, u)\}} = \left( \sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(z, x)\} \right)^{-1},$$

where we used property (2) of  $\Delta_\Lambda$ . Further, due to Theorem 4, there exists a one-point transition energy field  $D_1(\Delta_\Lambda) = \{\Delta_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  such that

$$\begin{aligned} \sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_\Lambda(z, x)\} &= \sum_{z \in X^\Lambda} \exp\{\Delta_{t_1}^{z_{\Lambda \setminus t_1}}(z_{t_1}, x_{t_1}) + \Delta_{t_2}^{x_{t_1} z_{\Lambda \setminus \{t_1, t_2\}}}(z_{t_2}, x_{t_2}) \\ &\quad + \dots (z_{t_n}, x_{t_n})\}. \end{aligned}$$

Note that by definitions of  $D_1(\Delta_\Lambda)$  and  $Q_1(P_\Lambda)$ , we have

$$\Delta_t^{\bar{x}}(z, x) = \Delta_\Lambda(z\bar{x}, x\bar{x}) = \ln \frac{P_\Lambda(z\bar{x})}{P_\Lambda(x\bar{x})} = \ln \frac{Q_t^{\bar{x}}(z)}{Q_t^{\bar{x}}(x)}, \quad x, z \in X^t, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda,$$

and hence,

$$P_\Lambda(x) = \left( \sum_{z \in X^\Lambda} \frac{Q_{t_1}^{z_{\Lambda \setminus t_1}}(z_{t_1})}{Q_{t_1}^{z_{\Lambda \setminus t_1}}(x_{t_1})} \cdot \frac{Q_{t_2}^{x_{t_1} z_{\Lambda \setminus \{t_1, t_2\}}}(z_{t_2})}{Q_{t_2}^{x_{t_1} z_{\Lambda \setminus \{t_1, t_2\}}}(x_{t_2})} \cdot \dots \cdot \frac{Q_{t_n}^{x_{\Lambda \setminus t_n}}(z_{t_n})}{Q_{t_n}^{x_{\Lambda \setminus t_n}}(x_{t_n})} \right)^{-1}.$$

The obtained connection between  $P_\Lambda$  and  $Q_1(P_\Lambda)$  can be used to define a probability distribution compatible with a given 1-specification. Namely, let  $Q_1 = \{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\Lambda \setminus t}, t \in \Lambda\}$  be a 1-specification. For any  $x \in X^\Lambda$ , put

$$P_\Lambda(x) = \left( \sum_{z \in X^\Lambda} \frac{q_{t_1}^{z_{\Lambda \setminus t_1}}(z_{t_1})}{q_{t_1}^{z_{\Lambda \setminus t_1}}(x_{t_1})} \cdot \frac{q_{t_2}^{x_{t_1} z_{\Lambda \setminus \{t_1, t_2\}}}(z_{t_2})}{q_{t_2}^{x_{t_1} z_{\Lambda \setminus \{t_1, t_2\}}}(x_{t_2})} \cdot \dots \cdot \frac{q_{t_n}^{x_{\Lambda \setminus t_n}}(z_{t_n})}{q_{t_n}^{x_{\Lambda \setminus t_n}}(x_{t_n})} \right)^{-1},$$

where  $\Lambda = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  is some enumeration of the points of  $\Lambda$ ,  $n = |\Lambda|$ . Due to (10), this formula is correct, that is, the values of  $P_\Lambda$  does not depend on the way of enumeration of the points in  $\Lambda$ . It is not difficult to see that  $P_\Lambda$  is a probability distribution on  $X^\Lambda$ . Finally, by direct computations, one can show that  $Q_1(P_\Lambda) = Q_1$ .

Hence, the additivity property of the transition energy allowed us to find the connection between the joint and conditional distributions, and the

consistency conditions of the elements of the one-point transition energy field prompted the form of the consistency conditions of the elements of the one-point conditional distribution.

Institute of Mathematics of NAS RA  
e-mails: linda@instmath.sci.am, nahapet@instmath.sci.am

**L. A. Khachatryan, corresponding member of NAS RA B. S. Nahapetian**

### **Duality of Energy and Probability in Finite-Volume Models of Statistical Physics**

It is shown that in the framework of mathematical physics, energy and probability are dual concepts. On this basis, a solution to the well-known problem of describing a finite random field by a set of consistent conditional distributions is given.

**Լ. Ա. Խաչատրյան, ՀՀ ԳԱԱ թղթակից անդամ Բ. Ս. Նահապետյան**

### **Էներգիայի և հավանականության երկակիությունը վիճակագրական ֆիզիկայի վերջավոր մոդելներում**

Ցույց է տրված, որ վիճակագրական ֆիզիկայի շրջանակում էներգիան և հավանականությունը երկակի հասկացություններ են: Օգտագործելով այս արդյունքը, լուծում է տրվում պայմանական բաշխումների համակարգի միջոցով վերջավոր պատահական դաշտի նկարագրման հայտնի խնդիրն:

**Л. А. Хачатрян, член-корреспондент НАН РА Б. С. Нахпетян**

### **Двойственность энергии и вероятности в конечных моделях статистической физики**

Показано, что в рамках статистической физики энергия и вероятность – двойственные понятия. На этой основе приводится решение известной проблемы описания конечного случайного поля совокупностью согласованных условных распределений.

#### **References**

1. *Dachian S., Nahapetian B. S.* – Markov Process. Relat. Fields. 2019. V. 25. P. 649-681.
2. *Khachatryan L., Nahapetian B. S.* – J. Theor. Probab. 2023. V. 36. P. 1743-1761.
3. *Geman S., Geman D.* – IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1984. V. PAMI-6. № 6. P. 721-741.
4. *Dobrushin R. L.* – Theory Probab. Appl. 1968. V. 13. № 2. P. 197-224.
5. *Dachian S., Nahapetian B. S.* – Markov Processes Relat. Fields 2001. V. 7. P. 193-214.

МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.3-4-15

А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян

О фредгольмовости одного класса операторов  
-Винера – Хопфа

(Представлено академиком А. Б. Нерсесяном 6/Х 2023)

**Ключевые слова:** оператор  $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа, набор спектральных данных, фредгольмовость.

**1. Введение.** Пусть  $\chi_{\pm}$  – характеристическая функция множества  $\mathbb{R}_{\pm} = \{x \in \mathbb{R} : \pm x > 0\}$ , а  $F : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  преобразование Фурье

$$(Fy)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} y(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим класс функций  $L_2^+(\mathbb{R}) = \{F(\chi_+ f) : f \in L_2(\mathbb{R})\}$ . Как известно (см., например, п. 2.5 [1]),  $L_2^+(\mathbb{R})$  является подпространством всех функций из  $L_2(\mathbb{R})$ , являющихся угловыми граничными значениями аналитических функций из класса Харди  $H_2^+(\mathbb{C})$ , т.е. функций  $\varphi$ , аналитических в  $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$  и удовлетворяющих условию

$$\sup_{y>0} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x + iy)|^2 dy < \infty.$$

В данной работе изучены свойства фредгольмовости оператора  $T : L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$ , определенного по формуле

$$\begin{aligned}
(Ty)(x) &= y(x) + \int_0^{+\infty} y(t)k(t-x)dt + \\
&+ \frac{2e^{-2x}}{4-e^{-2x}} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-2t}}{4-e^{-2t}}\right) y(t) \int_0^{+\infty} k(t-x-\tau)e^{-\tau} d\tau dt \\
&+ \left(1 + \frac{e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\right) \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-2t}}{4-e^{-2t}} y(t) \int_{-\infty}^0 k(t-x-\tau)e^{\tau} d\tau dt
\end{aligned} \tag{1}$$

при предположении, что функция  $k$  принадлежит подпространству  $L_1(\mathbb{R}) \cap L_2^+(\mathbb{R})$  и кроме того существует функция  $d$  такая, что  $d, d' \in L_1(\mathbb{R})$  и  $d'' = k$ .

Исследование оператора  $T$  основано на его реализации в виде оператора  $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа, определение которого дается в следующем пункте.

**2. Оператор -Винера – Хопфа.** Пусть  $\mathcal{L}$  – максимальный, симметричный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$(\ell y)(x) = -y'' + v(x)y$$

с вещественным потенциалом  $v$ , удовлетворяющим условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |x|)|v(x)| dx < \infty. \tag{2}$$

Интегральный оператор  $\mathcal{L}$ -свертки на полуоси

$$((I + \mathcal{K}^+)y)(x) = y(x) + \int_0^{\infty} K(x, t) y(t) dt$$

с ядром  $K$ , удовлетворяющим уравнению

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}K + v(x)K = -\frac{\partial^2}{\partial t^2}K + v(x)K$$

и некоторым дополнительным ограничениям, был введен в [2]. Более общий класс операторов  $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа введен в [3].

Пусть  $e_{\pm}(x, \lambda)$  ( $x, \lambda \in \mathbb{R}$ ) – решения Йоста уравнения

$$\ell y = \lambda^2 y, \quad (3)$$

т.е. решения (3), удовлетворяющие граничным условиям

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\lambda x} e_{\pm}(x, \lambda) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\lambda x} e'_{\pm}(x, \lambda) = i\lambda.$$

При  $x \neq 0$  функции  $e_-(x, \lambda)$ ,  $e_-(x, -\lambda)$  образуют фундаментальную систему решений (3), и потому  $e_+(x, \lambda) = b(x)e_-(x, -\lambda) + b_0(x)e_-(x, \lambda)$ . В спектральной теории оператора  $\mathcal{L}$  важную роль играют коэффициент прохождения  $t(\lambda) = b_0^{-1}(\lambda)$  и коэффициенты отражения  $r_-(\lambda) = b(\lambda)t(\lambda)$ ,  $r_+(\lambda) = -b(-\lambda)t(\lambda)$ .

Рассмотрим интегралы

$$(U_{\mp}y)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_{\mp}(x, \lambda)y(x)dx, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

где  $u_{\mp}(x, \lambda) = t(\lambda)e_{\pm}(x, \pm\lambda)$ , которые сходятся по норме  $L_2(\mathbb{R})$  и определяют ограниченные операторы  $U_{\mp}: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ .

Под спектральным преобразованием оператора  $\mathcal{L}$  мы понимаем оператор

$$U := m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)J U_+: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}),$$

где  $(Jy)(x) = y(-x)$ ,  $m(a): L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  – оператор умножения на функцию  $a$ :  $(m(a)y) := ay$ .

Оператор  $U$  обобщает понятие преобразования Фурье  $F$ , а при  $v = 0$  совпадает с ней, поскольку на всюду плотном в  $L_2(\mathbb{R})$  множестве имеет место равенство  $U\mathcal{L}U^* = m(\lambda^2)$ . Кроме того  $UU^* = I$ ,  $U^*U = I - P$ , где  $P$  – проектор на подпространство собственных функций оператора  $\mathcal{L}$ .

Заметим, что  $\mathcal{L}$  имеет лишь конечное число простых собственных значений, имеющих вид  $i\mu_k$  ( $k = 1, \dots, N$ ),  $\mu_k > 0$ .

Пусть функция  $a \in L_{\infty}(\mathbb{R})$ , а операторы  $\pi_+^0: L_2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ ,  $\pi_+: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}_+)$  определены по формуле

$$(\pi_+ y)(x) = y(x), \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (\pi_+^0 y)(x) = \begin{cases} y(x), & x \in \mathbb{R}_+ \\ 0, & x \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

Под оператором  $\mathcal{L}$ -Винера – Хопфа, следуя [3], мы будем понимать оператор

$$W_{\mathcal{L}}(a) = \pi_+ U^* m(a) U \pi_+^0.$$

Функцию  $a$  называют символом оператора  $W_{\mathcal{L}}(a)$ .

В [3] в случае кусочно-непрерывного символа получены критерий фредгольмовости оператора  $W_{\mathcal{L}}(a)$  и формула для индекса в терминах функций  $a$ ,  $r_{\pm}$ ,  $t$ . Операторы  $U_{\pm}$  и соответственно оператор  $W_{\mathcal{L}}(a)$  могут быть записаны в явном виде лишь в тех случаях, когда явно записываются решения Йоста уравнения (3). Таковым является, например, случай безотражательного потенциала, т.е. когда  $r_{\pm} = 0$  (подробнее см. в [4-6]).

Заметим также, что решения Йоста уравнения (3) существуют и единственны при выполнении условия (2) (см. [7]). При выполнении этого условия обратная задача теории рассеяния разрешима, т.е. потенциал  $v$  однозначно может быть восстановлен по правым данным рассеяния  $\{r_+(\lambda), i\mu_k, m_k, k = 1, \dots, N\}$ , где  $i\mu_k$  – собственные значения, а  $m_k$  – нормирующие множители соответствующих собственных функций (см. [8]). Безотражательные потенциалы порождаются данными рассеяния  $\{0, i\mu_k, m_k \mid k = 1, \dots, N\}$ . При данных рассеяния  $\{-\frac{1}{\lambda^2+1}, 0, 0\}$  решения Йоста также явно выписываются.

**Теорема 1.** Пусть выполнены следующие условия:

1) потенциал  $v$  оператора  $\mathcal{L}$  определяется правым набором данных

$$\text{рассеяния } \left\{ -\frac{1}{\lambda^2+1}, 0, 0 \right\};$$

2)  $k \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2^+(\mathbb{R})$ ;

3) существует функция  $d \in L_1(\mathbb{R})$ , такая что  $d' \in L_1(\mathbb{R})$  и  $d'' = k$ ;

4) функция  $a$  определяется равенством

$$a(\lambda) = 1 + \frac{(F^{-1}k)(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2 + 2)} (\lambda^2 + 1)^2$$

тогда имеет место равенство  $T = W_{\mathcal{L}}(a)$ .

**3. Фредгольмовость.** Пусть  $X$  – банахово пространство,  $A: X \rightarrow X$  – линейный ограниченный оператор. Оператор  $A$  называется фредгольмовым, если его образ  $\text{Im } A := \{Ax \mid x \in X\}$  замкнут, а размерности ядра

$\ker A := \{x \in X \mid Ax = 0\}$  и коядра  $X/\text{Im } A$  конечны. Число  $\text{ind } A = \dim \ker A - \dim(X/\text{Im } A)$  называют индексом оператора  $A$ .

Из результатов работы [3] и теоремы 1 следует

**Теорема 2.** При условиях 2) и 3) теоремы 1 оператор  $T$ , определенный формулой (1), фредгольмов тогда и только тогда, когда

$$a(\lambda) = 1 + \frac{(F^{-1}k)(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2+2)} (\lambda^2 + 1)^2 \neq \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2+2)} \quad \text{при } \lambda > 0. \quad (4)$$

При выполнении этого условия индекс оператора  $T$  может быть вычислен по формуле

$$\text{ind } T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d \text{Arg} \left[ \frac{(\sqrt{\lambda} + \sqrt{2}i)(\lambda(\lambda+2)a(\sqrt{\lambda})+1)}{(\sqrt{\lambda}+i)^4(\sqrt{\lambda}-\sqrt{2}i)} \right].$$

Институт математики НАН РА  
e-mails: kamalyan\_armen@yahoo.com,  
grigor.kirakosyan.99@gmail.com

**А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян**

### **О фредгольмовости одного класса операторов $\mathcal{L}$ -Винера–Хопфа**

Исследован один класс интегральных операторов на полуоси, являющихся комбинацией операторов умножения на функцию и операторов Винера – Хопфа. Класс этих операторов при соответствующем выборе спектральных данных дифференциального оператора и символа реализуется как операторы  $\mathcal{L}$ -Винера–Хопфа. Получены критерий фредгольмовости и формула для вычисления индекса.

**Ա. Հ. Քամալյան, Գ. Ա. Կիրակոսյան**

#### **$\mathcal{L}$ -Վիներ–Հոպֆի օպերատորների մի դասի ֆրեդհոլմության մասին**

Հետազոտված է կիսաառանցքի վրա ինտեգրալ օպերատորների մի դաս, որոնք հանդիսանում են ֆունկցիայով բազմապատկման օպերատորների և Վիներ–Հոպֆի օպերատորների կոմբինացիա: Այդ օպերատորների դասը դիֆերենցիալ օպերատորի սպեկտրալ տվյալների և սիմվոլի համապատասխան ընտրության դեպքում իրացվում են որպես  $\mathcal{L}$ -Վիներ–Հոպֆի օպերատորներ: Ստացվել են ֆրեդհոլմության հայտանիշը և ինդեքսը հաշվելու բանաձևը:

**A. G. Kamalyan, G. A. Kirakosyan**

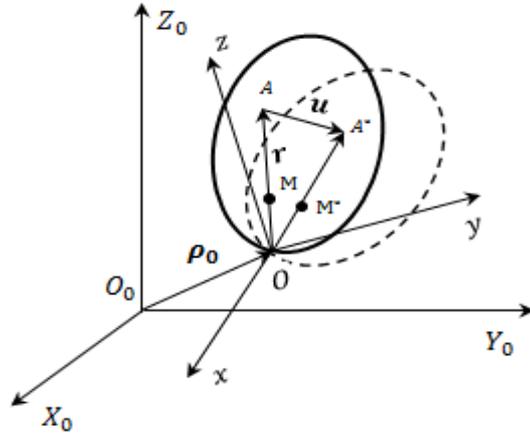
**On the Fredholm Property of One Class of  
 $\mathcal{L}$ -Wiener–Hopf Operators**

The article is devoted to the study of one class of integral operators on the half-line, which are a combination of operators of multiplication by a function and Wiener–Hopf operators. The class of these operators, with an appropriate choice of spectral data of the differential operator and symbol, are realized as  $\mathcal{L}$ -Wiener–Hopf operators. A Fredholm criterion and a formula for calculating the index are obtained.

**Литература**

1. *Böttcher A., Karlovich Y. I., Spitkovsky I. M.* Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Basel. Birkhäuser. 2002.
2. *Камалян А. Г., Хачатрян И. Г., Нерсесян А. Б.* – Изв. НАН Армении, Математика. 1994. Т. 29. №. 6. С. 31-81.
3. *Камалян А. Г., Спитковский И. М.* – Матем. заметки. 2018. Т. 104. №. 3. С. 407–421.
4. *Hasanyan D., Kamalyan A., Karakhanyan M. et al.* – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2019. V. 291. P. 175-197.
5. *Камалян А. Г., Киракосян Г. А.* – Изв. НАН Армении. Математика. 2022. Т. 57. № 2. С. 112-121.
6. *Kirakosyan G.* – Armenian Journ. of Mathematics. 2022. Т. 14. № 6. P. 1-10.
7. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж. и др.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М. Мир. 1988. 694 с.
8. *Марченко В. А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев. Наукова думка. 1977. 329 с.





Фиг. 1.

Целью настоящего исследования является изучение кинематики движения деформированного тела по аналогии с исследованием кинематики абсолютно твердого тела методами теоретической механики.

**1. Относительное положение точек упругого тела.** Обозначим положение произвольной точки  $A$  первоначального упругого тела  $Q^1$  относительно точки  $O_0$  неподвижной системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  радиус-вектором  $\rho_A$

$$\rho_A = \rho_0 + \mathbf{r}; \rho_A = (X_A, Y_A, Z_A)^T, \rho_0 = (X_0, Y_0, Z_0)^T, \mathbf{r} = (x, y, z)^T \quad (1.1)$$

где  $\rho_0$  – радиус-вектор точки  $O$  (полюса) относительно системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ ,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор произвольной точки  $A \in Q^1$  относительно начала системы координат  $Oxyz$ , символ  $T$  означает транспонирование.

Каждая точка  $A(x, y, z) \in Q^1$  тела во время деформации получает вектор перемещения  $\mathbf{u}$  и перемещается в некоторую точку  $A^*$  области  $Q^2$

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = (u_1(x, y, z, t), u_2(x, y, z, t), u_3(x, y, z, t))^T. \quad (1.2)$$

Радиус-вектор произвольной точки после деформации в системе  $Oxyz$  определяется радиус-вектором  $\mathbf{r}^*$  относительно точки  $O$ :

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u}(x, y, z, t). \quad (1.3)$$

Предполагается, что соотношения (1.3) можно решить относительно  $x, y, z$ , которые будут функциями от координат точки  $A^*(x^*, y^*, z^*) \in Q^2$ .

Тогда вместо (1.3) будем иметь

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* - \mathbf{u}(x^*, y^*, z^*, t) \quad (1.4)$$

или  $x = x^* - u_1(x^*, y^*, z^*, t), y = y^* - u_2(x^*, y^*, z^*, t), z = z^* - u_3(x^*, y^*, z^*, t)$ .

Способ описания перемещений функциями (1.3) называется лагранжевым. Уравнения (1.3), (1.4) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между координатами  $x, y, z$  и  $x^*, y^*, z^*$ . Параметры  $x^*, y^*, z^*$  в дальнейшем можно использовать в качестве криволинейных координат [1, 2]. Предполагается также, что перемещения точек тела малы по сравнению с линейными размерами тела ( $u_i \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1, i = 1, 2, 3$ ). Это означает, что существует возможность линеаризации уравнений, определяющих геометрические свойства деформированного тела.

Из (1.1) - (1.3) следует, что радиус-вектор абсолютного положения точек упругого тела относительно системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  определяется радиус-вектором  $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{r} + \mathbf{u}$ .

Представим  $\boldsymbol{\rho}_{A^*}$  в координатном виде

$$X_{A^*}\mathbf{i}_0 + Y_{A^*}\mathbf{j}_0 + Z_{A^*}\mathbf{k}_0 = X_0\mathbf{i}_0 + Y_0\mathbf{j}_0 + Z_0\mathbf{k}_0 + (x + u_1(x, y, z, t))\mathbf{i} + (y + u_2(x, y, z, t))\mathbf{j} + (z + u_3(x, y, z, t))\mathbf{k}. \quad (1.5)$$

Здесь  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  – единичные векторы осей подвижной системы координат  $Oxyz$ , а  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  – единичные векторы системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ .

Умножая скалярно (1.5) последовательно на единичные векторы  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  и учитывая свойства единичных векторов ортогональных пространственных систем, получим радиус-вектор точки  $A^* \in Q^2$  относительно неподвижной системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  [3]

$$\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r} + \mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\Gamma} = \{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}. \quad (1.6)$$

Элементы  $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$  матрицы  $\boldsymbol{\Gamma}$  являются направляющими косинусами осей систем координат  $Oxyz$  и  $O_0X_0Y_0Z_0$  и зависят от времени. В случае абсолютно твердого тела ( $u_i(x, y, z, t) \equiv 0, i = 1, 2, 3$ ) имеем  $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_0 + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{r}$ .

Аналогично, умножая (1.5) последовательно на единичные векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , получим проекции точки  $A^* \in Q^2$  в системе  $Oxyz$   $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Gamma}^T(\boldsymbol{\rho}_{A^*} - \boldsymbol{\rho}_0) - \mathbf{u}(x, y, z, t)$ .

Поскольку компоненты вектора упругих перемещений являются малыми величинами ( $u_i \sim \varepsilon, \varepsilon \ll 1, i = 1, 2, 3$ ), то из (1.6) следует, что изменения координат точек тела относительно подвижной и неподвижной систем координат при деформации имеют порядок  $\varepsilon(\alpha_{ij} \sim 1, i, j = 1, 2, 3)$ .

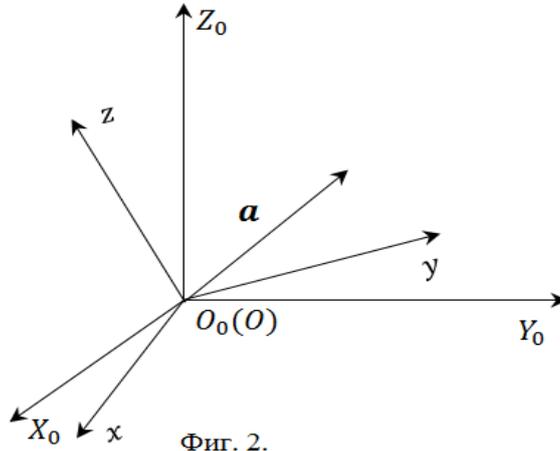
**1.1. Свойства направляющих косинусов и матрицы преобразования.** Следуя работам [4-7], определим некоторые свойства матрицы  $\Gamma$ . Обозначим проекции вектора  $\mathbf{a}$  в системе координат  $O_0X_0Y_0Z_0$  через  $(a_{X_0}, a_{Y_0}, a_{Z_0})$ , а в системе  $Oxyz$  – через  $(a_x, a_y, a_z)$  (рис. 2). Таким образом, для вектора  $\mathbf{a}$  справедливо выражение

$$\mathbf{a} = a_{X_0} \mathbf{i}_0 + a_{Y_0} \mathbf{j}_0 + a_{Z_0} \mathbf{k}_0, \mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}. \quad (1.7)$$

Умножая (1.7) последовательно на единичные векторы, получим

$$\begin{aligned} a_{X_0} &= a_x \alpha_{11} + a_y \alpha_{12} + a_z \alpha_{13}, & a_x &= a_{X_0} \alpha_{11} + a_{Y_0} \alpha_{21} + a_{Z_0} \alpha_{31}, \\ a_{Y_0} &= a_x \alpha_{21} + a_y \alpha_{22} + a_z \alpha_{23}, & \text{и} & \quad a_y &= a_{X_0} \alpha_{12} + a_{Y_0} \alpha_{22} + a_{Z_0} \alpha_{32}, \\ a_{Z_0} &= a_x \alpha_{31} + a_y \alpha_{32} + a_z \alpha_{33}, & a_z &= a_{X_0} \alpha_{13} + a_{Y_0} \alpha_{23} + a_{Z_0} \alpha_{33}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Соотношения (1.7) и (1.8) справедливы также для единичных векторов.



Фиг. 2.

Коэффициенты разложения в (1.8) для единичных векторов  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_0 : a_{X_0} &= 1, a_{Y_0} = 0, a_{Z_0} = 0; a_x = \alpha_{11}, a_y = \alpha_{12}, a_z = \alpha_{13}, \\ \mathbf{j}_0 : a_{X_0} &= 0, a_{Y_0} = 1, a_{Z_0} = 0; a_x = \alpha_{21}, a_y = \alpha_{22}, a_z = \alpha_{23}, \\ \mathbf{k}_0 : a_{X_0} &= 0, a_{Y_0} = 0, a_{Z_0} = 1; a_x = \alpha_{31}, a_y = \alpha_{32}, a_z = \alpha_{33}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 &= 1, & \alpha_{11} \alpha_{21} + \alpha_{12} \alpha_{22} + \alpha_{13} \alpha_{23} &= 0, \\ \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \alpha_{23}^2 &= 1, & \alpha_{11} \alpha_{31} + \alpha_{12} \alpha_{32} + \alpha_{13} \alpha_{33} &= 0, \\ \alpha_{31}^2 + \alpha_{32}^2 + \alpha_{33}^2 &= 1, & \alpha_{21} \alpha_{31} + \alpha_{22} \alpha_{32} + \alpha_{23} \alpha_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Аналогичным образом получим для системы  $Oxyz$ .

Соотношения (1.7) - (1.9) позволяют также определить зависимость каждого из косинусов  $\{\alpha_{ij}\}_{i,j=1}^{3,3}$  от остальных. Примем во внимание, что

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{k}_0, \mathbf{j}_0 = \mathbf{k}_0 \times \mathbf{i}_0, \mathbf{k}_0 = \mathbf{i}_0 \times \mathbf{j}_0. \quad (1.11)$$

Из (1.9) и (1.11), имеем

$$\mathbf{i}_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{k}_0 : \alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}, \quad (1.12)$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{32}\alpha_{23}, \alpha_{12} = \alpha_{23}\alpha_{31} - \alpha_{33}\alpha_{21}, \alpha_{13} = \alpha_{21}\alpha_{32} - \alpha_{31}\alpha_{22}. \quad (1.13)$$

Аналогичные выражения можно получить для коэффициентов единичных векторов  $\mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$  и для коэффициентов разложения  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

Следовательно,

$$\det \Gamma = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} + \alpha_{12} \begin{vmatrix} \alpha_{23} & \alpha_{21} \\ \alpha_{33} & \alpha_{31} \end{vmatrix} + \alpha_{13} \begin{vmatrix} \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} \end{vmatrix} = \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2 = 1$$

$$\text{Итак, } \Gamma^T = \Gamma^{-1}; \Gamma \times \Gamma^T = \Gamma^T \times \Gamma = \mathbf{E}.$$

Для абсолютно твердого тела выражения (1.10) показывают, что независимых параметров свободного твердого тела имеется всего шесть. В качестве шести величин обычно рассматриваются три координаты полюса и три угла, носящие название углов Эйлера [4-6]. Определим производную от матрицы преобразования  $\Gamma$ . Известно, что если вектор  $\mathbf{a}(t)$  в произвольной системе координат меняется как по модулю, так и по направлению (рис. 2), то полная или абсолютная производная такого вектора определяется по формуле [4-6]

$$\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t) = \frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{a}(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}(t). \quad (1.14)$$

Здесь  $\frac{d}{dt} \mathbf{a}(t)$  характеризует изменения вектора  $\mathbf{a}(t)$  в неподвижной системе координат и называется абсолютной производной. Слагаемое  $\frac{\tilde{d}}{dt} \mathbf{a}(t)$  представляет изменения вектора  $\mathbf{a}(t)$  в подвижной системе и

называется относительным или локальным,  $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}(t)$  определяет движение подвижной системы по отношению к неподвижной с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$  и является переносным составляющим.

Если вектор  $\mathbf{a}(t)$  в системе  $Oxuz$  имеет вид  $\mathbf{a}(t) = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$ , то

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{d}}{dt}\mathbf{a}(t) &= \left( \frac{d}{dt}a_x \cdot \mathbf{i} + \frac{d}{dt}a_y \cdot \mathbf{j} + \frac{d}{dt}a_z \cdot \mathbf{k} \right) \\ \left( a_x \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{i} + a_y \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{j} + a_z \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{k} \right) &= (a_x \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}) + a_y \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}) + a_z \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k})) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Абсолютная производная вектора  $\mathbf{a}(t)$  в координатном виде

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{a}})_{X_0} &= \dot{a}_x + a_z \omega_y - a_y \omega_z, (\dot{\mathbf{a}})_{Y_0} = \dot{a}_y + a_x \omega_z - a_z \omega_x, \\ (\dot{\mathbf{a}})_{Z_0} &= \dot{a}_z + a_y \omega_x - a_x \omega_y.\end{aligned}\quad (1.16)$$

Применим (1.14) - (1.16) последовательно для единичных векторов  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$ . Абсолютные производные единичных векторов равны нулю:

$$(\dot{\mathbf{i}}_0)_{X_0} = (\dot{\mathbf{i}}_0)_{Y_0} = (\dot{\mathbf{i}}_0)_{Z_0} = 0; (\dot{\mathbf{j}}_0)_{X_0} = (\dot{\mathbf{j}}_0)_{Y_0} = (\dot{\mathbf{j}}_0)_{Z_0} = 0; (\dot{\mathbf{k}}_0)_{X_0} = (\dot{\mathbf{k}}_0)_{Y_0} = (\dot{\mathbf{k}}_0)_{Z_0} = 0, \quad (1.17)$$

$$0 = \tilde{\dot{\mathbf{i}}}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}_0); 0 = \tilde{\dot{\mathbf{j}}}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}_0); 0 = \tilde{\dot{\mathbf{k}}}_0 + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}_0).$$

Из (1.16) и (1.17) имеем

$$\frac{d\alpha_{11}}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\alpha_{12}}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{d\alpha_{13}}{dt} \cdot \mathbf{k} = -(\boldsymbol{\omega} \times (\alpha_{11}\mathbf{i} + \alpha_{12}\mathbf{j} + \alpha_{13}\mathbf{k})) = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{vmatrix},$$

$$\frac{d\alpha_{21}}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\alpha_{22}}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{d\alpha_{23}}{dt} \cdot \mathbf{k} = -(\boldsymbol{\omega} \times (\alpha_{21}\mathbf{i} + \alpha_{22}\mathbf{j} + \alpha_{23}\mathbf{k})) = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}, \quad (1.18)$$

$$\frac{d\alpha_{31}}{dt} \cdot \mathbf{i} + \frac{d\alpha_{32}}{dt} \cdot \mathbf{j} + \frac{d\alpha_{33}}{dt} \cdot \mathbf{k} = -(\boldsymbol{\omega} \times (\alpha_{31}\mathbf{i} + \alpha_{32}\mathbf{j} + \alpha_{33}\mathbf{k})) = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}.$$

Представляя (1.18) относительно координат, можно определить  $\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \mathbf{r}$ :

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \mathbf{r} = \begin{pmatrix} x(\omega_z \alpha_{12} - \omega_y \alpha_{13}) + y(\omega_x \alpha_{13} - \omega_z \alpha_{11}) + z(\omega_y \alpha_{11} - \omega_x \alpha_{12}) \\ x(\omega_z \alpha_{22} - \omega_y \alpha_{23}) + y(\omega_x \alpha_{23} - \omega_z \alpha_{21}) + z(\omega_y \alpha_{21} - \omega_x \alpha_{22}) \\ x(\omega_z \alpha_{32} - \omega_y \alpha_{33}) + y(\omega_x \alpha_{33} - \omega_z \alpha_{31}) + z(\omega_y \alpha_{31} - \omega_x \alpha_{32}) \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

Определим также выражение  $\boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ . Получим еще одно очень важное свойство матрицы  $\boldsymbol{\Gamma}$  [8]:

$$\frac{d\boldsymbol{\Gamma}}{dt} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \quad (1.20)$$

## 2. Скорость движения точек деформированного твердого тела.

Для определения абсолютной скорости движения точки  $A^* \in Q^2$  относительно  $O_0X_0Y_0Z_0$  продифференцируем по времени радиус-вектор

$\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{r} + \mathbf{u}$  с учетом (1.5) и представим скорость точки  $A^*$  в виде

$$\frac{d\mathbf{p}_{A^*}}{dt} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2(x, y, z, \mathbf{u}, t). \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{V}_0$  и  $\mathbf{V}_1$  – составляющие скорости, известные из теории движения абсолютно твердого тела [4-6]. Составляющая  $\mathbf{V}_2(x, y, z, \mathbf{u}, t)$  обусловлена упругостью тела. Заметим, что свойство упругости тела приводит к колебательным движениям всей системы.

Из (1.5) и (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= \frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = V_{x_0}\mathbf{i}_0 + V_{y_0}\mathbf{j}_0 + V_{z_0}\mathbf{k}_0, \mathbf{V}_1 = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}, \\ \mathbf{V}_2 &= \left(\frac{du_1(x, y, z, t)}{dt}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{du_2(x, y, z, t)}{dt}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{du_3(x, y, z, t)}{dt}\right)\mathbf{k} + \\ &+ u_1(x, y, z, t)\frac{d\mathbf{i}}{dt} + u_2(x, y, z, t)\frac{d\mathbf{j}}{dt} + u_3(x, y, z, t)\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Определим вектор скорости  $\mathbf{V}_1$  относительно подвижной системы координат  $Oxyz$ :

$$V_{1x}\mathbf{i} + V_{1y}\mathbf{j} + V_{1z}\mathbf{k} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}. \quad (2.3)$$

Умножая (2.3) последовательно на векторы  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , получим

$$\begin{aligned} V_{1x} &= x\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{i} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{i} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i}, V_{1y} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{j} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{j}, \\ V_{1z} &= x\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{k} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для преобразования выражения (2.4) воспользуемся свойством скалярного произведения и дифференцирования единичных векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \\ \frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{i} = 0, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{j} = 0, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{k} = 0, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{j} \frac{d\mathbf{i}}{dt}, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{j} \frac{d\mathbf{k}}{dt}, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} = -\mathbf{k} \frac{d\mathbf{i}}{dt}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Преобразовав выражения (2.4) с учетом (2.5), получим

$$\begin{aligned} V_{1x} &= z\omega_y - y\omega_z \\ V_{1y} &= x\omega_z - z\omega_x, \text{ или } \mathbf{V}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \\ V_{1z} &= y\omega_x - x\omega_y \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $\frac{d\mathbf{i}}{dt} \cdot \mathbf{j} = \omega_z, \frac{d\mathbf{k}}{dt} \cdot \mathbf{i} = \omega_y, \frac{d\mathbf{j}}{dt} \cdot \mathbf{k} = \omega_x$ .  $\mathbf{V}_1 = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$  – формула Эйлера, определяющая скорость движения абсолютно твердого тела около неподвижной точки  $O$  [4-6],  $\boldsymbol{\omega}$  – мгновенная угловая скорость тела,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора  $\boldsymbol{\omega}$  на оси системы координат  $Oxyz$ .

Умножая  $\mathbf{V}_2$  последовательно на единичные векторы  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ , получим  $\mathbf{V}_2$  относительно подвижной системы координат, по аналогии с (2.6)

$$\begin{aligned} V_{2x} &= \frac{d}{dt} u_1(x, y, z, t) + [u_3(x, y, z, t) \omega_y - u_2(x, y, z, t) \omega_z], \\ V_{2y} &= \frac{d}{dt} u_2(x, y, z, t) + [u_1(x, y, z, t) \omega_z - u_3(x, y, z, t) \omega_x], \\ V_{2z} &= \frac{d}{dt} u_3(x, y, z, t) + [u_2(x, y, z, t) \omega_x - u_1(x, y, z, t) \omega_y] \end{aligned} \quad (2.7)$$

или в векторном виде

$$\mathbf{V}_2 = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)). \quad (2.8)$$

Заметим, что вектор упругих перемещений  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  во время движения изменяется как по модулю, так и по направлению. Следовательно, (2.8) можно представить в виде двух слагаемых

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{21} + \mathbf{V}_{22}, \quad (2.9)$$

$\mathbf{V}_{21} = \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t)$  – относительная или локальная скорость движения, а  $\mathbf{V}_{22} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)$  – переносная скорость движения.

Компоненты скорости  $\mathbf{V}_{21}$  и  $\mathbf{V}_{22}$  имеют порядок  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll 1$ ), поскольку время, в течение которого происходит движение, имеет порядок единицы ( $t \sim 1$ ), а  $u_i(x, y, z, t) \sim \varepsilon$ .

Для полного определения скорости (2.1) относительно подвижной системы координат  $Oxyz$  определим также скорость поступательного движения  $\mathbf{V}_0$ . Вектор скорости  $\mathbf{V}_0$  в неподвижной и подвижной системах координат имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_0 &= V_{x_0} \mathbf{i}_0 + V_{y_0} \mathbf{j}_0 + V_{z_0} \mathbf{k}_0; \quad \mathbf{V}_0 = V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}, \\ V_{x_0} \mathbf{i}_0 + V_{y_0} \mathbf{j}_0 + V_{z_0} \mathbf{k}_0 &= V_x \mathbf{i} + V_y \mathbf{j} + V_z \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Учитывая разложения векторов  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  в подвижной системе координат  $Oxyz$ ,  $\mathbf{V}_0$  определим с помощью матрицы преобразования  $\Gamma$

$$\begin{aligned} V_x &= \alpha_{11} V_{x_0} + \alpha_{21} V_{y_0} + \alpha_{31} V_{z_0} \\ V_y &= \alpha_{12} V_{x_0} + \alpha_{22} V_{y_0} + \alpha_{32} V_{z_0} \quad \text{или} \quad \mathbf{V}_{Oxyz} = \Gamma^T \mathbf{V}_{O_0} \\ V_z &= \alpha_{13} V_{x_0} + \alpha_{23} V_{y_0} + \alpha_{33} V_{z_0} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Итак, скорость движения произвольной точки упругого тела относительно подвижной системы координат имеет вид

$$\mathbf{V}_{A^*} = \Gamma^T \mathbf{V}_{O_0} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)). \quad (2.12)$$

Определим скорость движения (2.1) относительно неподвижной системы координат  $O_0X_0Y_0Z_0$ .

**Первый способ.** Представим (2.1) с учетом (2.2) - (2.7) в виде

$$\begin{aligned}
V_{A^*X_0} \mathbf{i}_0 + V_{A^*Y_0} \mathbf{j}_0 + V_{A^*Z_0} \mathbf{k}_0 &= V_{X_0} \mathbf{i}_0 + V_{Y_0} \mathbf{j}_0 + V_{Z_0} \mathbf{k}_0 + \\
&+ (z\omega_y - y\omega_z) \mathbf{i} + (x\omega_z - z\omega_x) \mathbf{j} + (y\omega_x - x\omega_y) \mathbf{k} + \\
&+ \left( \frac{d}{dt} u_1(x, y, z, t) + [u_3(x, y, z, t)\omega_y - u_2(x, y, z, t)\omega_z] \right) \mathbf{i} + \\
&+ \left( \frac{d}{dt} u_2(x, y, z, t) + [u_1(x, y, z, t)\omega_z - u_3(x, y, z, t)\omega_x] \right) \mathbf{j} + \\
&+ \left( \frac{d}{dt} u_3(x, y, z, t) + [u_2(x, y, z, t)\omega_x - u_1(x, y, z, t)\omega_y] \right) \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Умножая (2.13) последовательно на единичные векторы  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  и проведя ряд вычислений, получим вектор скорости точек упругого тела относительно неподвижной системы координат

$$\mathbf{V}_{A^*} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{\Gamma} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \mathbf{\Gamma} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)). \tag{2.14}$$

**Второй способ.** Умножая (2.12) на матрицу преобразования  $\mathbf{\Gamma}$  с учетом  $\mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}^{-1}; \mathbf{\Gamma} \times \mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}^T \times \mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}$ , получим (2.14).

**Третий способ.** Вычислим производную по времени  $t$  от радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho}_{A^*} = \boldsymbol{\rho}_0 + \mathbf{\Gamma} \mathbf{r} + \mathbf{\Gamma} \mathbf{u}$  и, принимая во внимание (1.20), получим (2.14).

Следовательно, во всех трех случаях получены аналогичные выражения.

Применение того или другого подхода зависит от конкретной задачи.

### 3. Ускорения движений точек деформированного твердого тела.

Для получения формул вектора ускорения  $\mathbf{W}$  нужно продифференцировать по времени выражение (2.1). Здесь также определим ускорения точек как относительно подвижной, так и неподвижной систем координат и выделим те компоненты, которые обусловлены упругостью тела.

**3.1. Ускорение относительно подвижной системы координат  $Oxuz$ .** Производную от (2.1) представим в виде

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2, \tag{3.1}$$

где  $\mathbf{W}_0 = \frac{d\mathbf{V}_0}{dt}$  – ускорение движения полюса

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) + \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) + (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})), \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_2 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) \right) = \\
&= \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(x, y, z, t) + (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) + 2 \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) \right) + \\
&+ (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t))).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь  $(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}) = \mathbf{W}_{TT}^{ep}$  – вращательное,  $(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}\omega^2 = \mathbf{W}_{TT}^{oc}$  – осестремительное,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – угловое ускорения тела [3-6],

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_{TT}^{ep} + \mathbf{W}_{TT}^{oc}. \tag{3.4}$$

Условимся по аналогии с (3.2)  $(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}(x, y, z, t))$  называть вращательным, а  $(\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)))$  – осестремительным ускорениями точек упругого тела в момент времени  $t$ :

$$(\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) = \mathbf{W}_{YT}^{ep}, (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}(x, y, z, t))) = \mathbf{W}_{YT}^{oc}. \tag{3.5}$$

В отличие от (3.2) в (3.3) входят еще два слагаемых, которые являются результатом того, что вектор  $\mathbf{u}(x, y, z, t)$  в течение времени изменяется как по модулю, так и по направлению. По аналогии со сложным движением абсолютно твердого тела имеем

$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{W}_{YT}^{om}$  ( $\mathbf{W}_{YT}^{om}$  – относительное ускорение),  $2 \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) \right)$  называется добавочным или поворотным ускорением или ускорением Кориолиса  $\mathbf{W}_{YT}^{yk}$ .

Следовательно, ускорением движения точек тела, обусловленным упругостью, является

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_{YT}^{om} + \mathbf{W}_{YT}^{ep} + \mathbf{W}_{YT}^{oc} + \mathbf{W}_{YT}^{yk}. \tag{3.6}$$

Окончательное выражение ускорения движения деформированного твердого тела относительно подвижной системы координат  $Oxyz$  запишем в виде

$$\mathbf{W}_{A^*} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_{TT}^{ep} + \mathbf{W}_{TT}^{oc} + \mathbf{W}_{YT}^{om} + \mathbf{W}_{YT}^{ep} + \mathbf{W}_{YT}^{oc} + \mathbf{W}_{YT}^{yk}. \tag{3.7}$$

(индекс ТТ означает твердое тело, а УТ – упругое тело).

**3.2. Ускорение относительно неподвижной системы координат.** Продифференцируем по времени выражение (2.14) и определим ускорения движений деформированного твердого тела относительно  $O_0X_0Y_0Z_0$  в виде

$$\mathbf{W}_{A^*} = \mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2, \tag{3.8}$$

где обозначены

$$\mathbf{W}_1 = \frac{d\Gamma}{dt} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \Gamma \cdot \left( \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} \right) = \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{W}_2 = \Gamma \cdot \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(x, y, z, t) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{u}(x, y, z, t)) + 2\Gamma \cdot \left( \boldsymbol{\omega} \times \frac{d}{dt} \mathbf{u}(x, y, z, t) \right) + \Gamma \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u}(x, y, z, t)) - \mathbf{u}(x, y, z, t) \cdot \omega^2).$$

Принимая за основу обозначения для формулы (3.1) - (3.3), имеем

$$\mathbf{W}_{A^*} = \Gamma \mathbf{W}_0 + \Gamma \mathbf{W}_{TT}^{ep} + \Gamma \mathbf{W}_{TT}^{oc} + \Gamma \mathbf{W}_{YT}^{om} + \Gamma \mathbf{W}_{YT}^{ep} + \Gamma \mathbf{W}_{YT}^{oc} + \Gamma \mathbf{W}_{YT}^{yk}. \quad (3.9)$$

((3.9) можно получить также из формул (3.1) умножением на  $\Gamma$ ).

Компоненты вектора ускорений  $\mathbf{W}_{YT}^{om}, \mathbf{W}_{YT}^{ep}, \mathbf{W}_{YT}^{oc}, \mathbf{W}_{YT}^{yk}$  в (3.7) и (3.9), обусловленные упругостью тела относительно подвижной и неподвижной систем координат, имеют порядок  $\varepsilon (\varepsilon \ll 1, t \sim 1)$ .

**Заключение.** Результаты исследования показывают эффективность изучения кинематики движения деформированного упругого тела по аналогии с кинематикой движения абсолютно твердого тела. Кинематика упругого тела представлена в рамках движения абсолютно твердого тела путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью. Дополнительные слагаемые относительно величин, характеризующих кинематику абсолютно твердого тела, являются малыми величинами, имеющими порядок вектора упругих перемещений точек. Методы исследования и полученные результаты можно учитывать при моделировании движений механических систем, содержащих упругие элементы большой жесткости.

Институт механики НАН РА  
e-mail: ghukasyan10@yandex.com

**А. А. Гукасян**

### **Некоторые вопросы кинематики движения деформированного твердого тела по аналогии с кинематикой абсолютно твердого тела**

Исследуется кинематика движения деформированного упругого тела по аналогии с кинематикой движения абсолютно твердого тела. Кинематика деформированного упругого тела представляется в рамках кинематики абсолютно твердого тела путем введения дополнительных величин, обусловленных упругостью тела. Дополнительные слагаемые являются малыми величинами, имеющими порядок вектора упругих перемещений точек. Примененные методы теоретической механики являются эффективными. Полученные результаты можно учитывать при моделировании движений механических систем, содержащих упругие элементы большой жесткости.

Ա. Ա. Ղուկասյան

**Դեֆորմացվող պինդ մարմնի շարժման կինեմատիկայի որոշ հարցեր՝  
բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի անալոգիայով**

Հետազոտվում է դեֆորմացվող պինդ մարմնի շարժման կինեմատիկան բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի անալոգիայով: Դեֆորմացվող պինդ մարմնի կինեմատիկան ներկայացվում է բացարձակ պինդ մարմնի կինեմատիկայի շրջանակներում՝ ավելացնելով լրացուցիչ անդամներ՝ պայմանավորված մարմնի առաձգականությամբ: Լրացուցիչ գումարելիները փոքր մեծություններ են, որոնց կարգը համընկնում է կետերի առաձգական տեղափոխության վեկտորի մեծության հետ: Տեսական մեխանիկայի մեթոդների կիրառումն արդյունավետ է, և ստացված արդյունքները կարելի է հաշվի առնել մեծ կոշտությամբ առաձգական էլեմենտներ պարունակող մեխանիկական համակարգերի շարժումների մոդելավորման դեպքում:

A. A. Ghukasyan

**Some Questions of the Kinematics of Motion of a Deformed Rigid Body  
by Analogy with the Kinematics of an Absolutely Rigid Body**

The kinematics of the motion of a deformed elastic body is studied by analogy with the kinematics of the motion of an absolutely rigid body. The kinematics of a deformed elastic body is represented within the framework of the kinematics of an absolute rigid body by introducing additional quantities due to the elasticity of the body. Additional terms are small quantities having the order of the vector of elastic displacements of points. The application of the methods of theoretical mechanics is effective and the results obtained can be taken into account when modeling the movements of mechanical systems containing elastic elements of high rigidity.

**Литература**

1. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Л. Судпромгиз. 1958. 370 с.
2. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. М.-Л. Гос. изд-во техн.-теорет. лит. 1947. 465 с.
3. *Гукасян А. А.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2014. Т. 67. № 4. С. 53-64.
4. *Суслов Г. К.* Теоретическая механика. М.-Л. Гостехиздат. 1946. 655 с.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М. Физматлит. М. 1961. 824 с.
6. *Бухгольц Н. Н.* Основной курс теоретической механики. М. Наука. 1967. 467 с.
7. *Моденов П. С.* Аналитическая геометрия. Изд-о Моск. ун-та. 1969. 699 с.
8. *Вильке В. Г.* Теоретическая механика. СПб. Лань. 2003, 301 с.



дически меняющейся величиной нагрузка, перемещающаяся вдоль стержня с постоянной скоростью  $v$ . В начальный момент времени  $t = 0$  периодически меняющаяся нагрузка расположена на левой опоре стержня. Ось координаты  $Ox$  направлена через центр тяжести сечений, причем начало координатной системы  $O$  расположено на ее левом конце. Оси  $Oy$  и  $Oz$  направлены вдоль главных осей сечения стержня. Колебания стержня происходят в вертикальной плоскости  $Ozx$ , геометрия которой представлена на рис. 1. Требуется определить вынужденные поперечные колебания этого стержня, возникающие в результате приложения распределенной, периодически меняющейся нагрузки. Для этого удобно решить вспомогательную задачу о вынужденных поперечных колебаниях упругого шарнирно опертого стержня под воздействием переменной сосредоточенной силы.

Пусть упругий стержень с шарнирно опертыми концами на расстоянии  $c$  от левой опоры подвергается действию нормальной, сосредоточенной, периодической силы. Требуется определить вынужденные поперечные колебания стержня, возникающие в результате приложения силы в виде

$$P(x,t) = P_0 \cdot \delta(x-c) \cdot \sin(\omega_0 t).$$

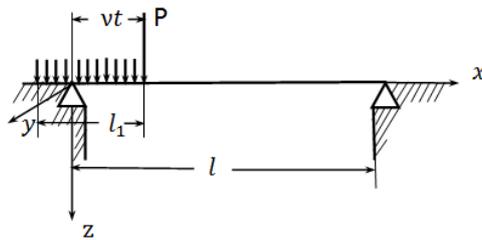


Рис. 1. Схема воздействия переменной, движущейся, равномерно распределенной нагрузки на упругий шарнирно опертый стержень.

Для рассматриваемой задачи вынужденные поперечные колебания стержня описываются неоднородным уравнением с однородными краевыми и начальными условиями [5]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{P_0}{\rho F} \cdot \delta(x-c) \cdot \sin(\omega_0 t), \text{ где } b^2 = EJ/\rho F; \quad (1.1)$$

$$w(0,t) = 0, \quad \partial^2 w(0,t)/\partial x^2 = 0;$$

$$w(l,t) = 0, \quad \partial^2 w(l,t)/\partial x^2 = 0; \quad (1.2)$$

$$w(x,0) = 0, \quad \partial w(x,0)/\partial t = 0, \quad (1.3)$$

где  $t$  – время движения нагрузки,  $l$  – длина стержня,  $l_1$  – отрезок нагруженной части стержня,  $F$  – площадь поперечного сечения стержня,  $J$ –

момент инерции поперечного сечения стержня,  $\delta(*)$  – дельта-функция Дирака,  $P(x,t)$  – сосредоточенная сила в некоторой точке  $x$  в момент времени  $t$ ,  $\rho$  – плотность материала,  $E$  – модули Юнга,  $w$  – перемещение центра изгиба сечения в направлении оси  $z$  (прогиб),  $\omega_0$  – частота внешнего воздействия.

Граничные условия (1.2) и (1.3) будут удовлетворены, если решение уравнения (1.1) представить в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot \sin(\lambda_n x), \quad (1.4)$$

где  $\lambda_n = n\pi/l$  – собственные числа колебания стержня, а  $n \in Z^+$ .

Подставляя значение  $w(x,t)$  из (1.4) в уравнение (1.1), получаем обыкновенное дифференциальное неоднородное уравнение относительно искомой гармоники  $w_n(t)$

$$\ddot{w}_n(t) + k_n^2 \cdot w_n(t) = \frac{2P_0}{\rho Fl} \cdot \sin(\lambda_n c) \cdot \sin(\omega_0 t), \quad (1.5)$$

в котором  $k_n = b\lambda_n^2$  – частота собственных колебаний стержня.

С учетом начальных условий (1.3) решение уравнения (1.5) можно представить в виде

$$w_n(t) = \frac{2P_0}{\rho Fl k_n} \cdot \sin(\lambda_n c) \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) \cdot \sin[k_n(t-\tau)] \cdot d\tau. \quad (1.6)$$

Подставляя значение  $w_n(t)$  из (1.6) в соответствующую формулу (1.4), получаем поперечные колебания упругого стержня в виде

$$w(x,t) = \frac{2P_0}{\rho F} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l k_n} \cdot \sin(\lambda_n c) \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot \int_0^t \sin(\omega_0 \tau) \cdot \sin[k_n(t-\tau)] \cdot d\tau. \quad (1.7)$$

После некоторых преобразований решение (1.7) можно представить в виде суммы вынужденных и свободных колебаний. Опуская подробности, представим вынужденные поперечные колебания стержня из общего решения (1.7) в виде

$$w(x,t) = \frac{2P_0}{\rho Fl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n c) \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - k_n^2}. \quad (1.8)$$

Имея решение (1.8), легко найти колебания стержня в случае действия распределенной, перемещающейся вдоль стержня с постоянной скоростью  $v$ , периодически меняющейся нагрузки.

Пусть  $p\delta(x-c) \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot dc$  – нагрузка, приходящаяся на элемент длины стержня  $dc$ . Подставляя  $pdc$  вместо  $P_0$  в (1.8) и выполняя интегрирование по  $c$  в пределах от  $-l_1 + vt$  до  $vt$ , получим прогиб от усилий, распределенных по всей длине

$$w(x,t) = \frac{4p}{\rho Fl} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^{-1} \sin[\lambda_n(Vt - 0.5l_1)] \cdot \sin(0.5\lambda_n l_1) \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - k_n^2}. \quad (1.9)$$

Состояние резонанса имеет место, когда частота возмущающей силы приближается к одной из собственных частот колебаний.

**2. Постановка математической краевой задачи 2.** Рассмотрим вращательное движение невозмущенной части стержня относительно фронта волны изгиба (рис. 2 в [2]). Вращательное движение происходит в вертикальной плоскости  $xz$  относительно фронта волны изгиба и осуществляется вращательным моментом  $M(t)$ .

Требуется определить вынужденные поперечные колебания  $w_1(x, t)$ , возникающие в результате вращательного движения невозмущенной части стержня, а также момент вращения  $M(t)$ , обеспечивающего заданное движение этой части стержня.

Приведем линейное интегро-дифференциальное уравнение движения (2.1) и уравнение упругих поперечных колебаний стержня (2.2) при большой жесткости на изгиб [6]:

$$\rho F \int_0^l x[x\ddot{\theta} - \ddot{w}_1(x, t)] \cdot dx = \quad (2.1)$$

$$= M(t) + \rho g F \int_0^l x[x \cos \theta(t) + w_1(x, t) \cdot \sin \theta(t)] \cdot dx$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = -x\ddot{\theta}(t) - g \cos \theta(t) \cdot \quad (2.2)$$

с граничными и начальными условиями:

$$w_1(0, t) = 0, \quad \partial^2 w_1(0, t) / \partial x^2 = 0,$$

$$w_1(l, t) = 0, \quad \partial^2 w_1(l, t) / \partial x^2 = 0, \quad (2.3)$$

$$w_1(x, 0) = 0, \quad \boxed{\partial w_1(x, 0) / \partial t = 0}. \quad (2.4)$$

В уравнениях (2.1) и (2.2) угол поворота элемента стержня на фронте волны изгиба  $\theta(t)$  определяется как

$$\theta(t) = \frac{\partial w(x', t)}{\partial x}, \quad (2.5)$$

где  $x'(t)$  – закон движения переднего фронта волны в прямом и обратном направлении волн изгиба вдоль стержня и дается уравнениями

$$x'(t) = (v+v_1)t - 2ml, \quad (2.6)$$

где  $2ml/(v+v_1) < t < (2m+1)l/(v+v_1)$  и  $m \in Z^+$ ,

$$x'(t) = (2m+1)l - (v+v_1)t, \quad (2.7)$$

где  $(2m+1)l/(v+v_1) < t < 2(m+1)l/(v+v_1)$  и  $m \in Z^+$ .

Здесь  $m$  характеризуют число отражений волны от границ стержня,  $v_1$  – групповая скорость распространения волн изгиба вдоль стержня, которая для задачи (1.1) – (1.3) вычисляется по формуле [7]

$$v_1 = \frac{\partial k}{\partial s} \Big|_{s=\lambda_n} = 2b\lambda_n$$

где  $k = bs^2$  – закон дисперсии волны изгиба.

На участке  $x'(t) \leq x(t) \leq l$ ,  $2ml/(v+v_1) < t < (2m+1)l/(v+v_1)$  с помощью (2.5) и (2.6)  $\ddot{\theta}(t)$  можно привести к следующему виду:

$$\ddot{\theta}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{\theta}_n(t),$$

где

$$\ddot{\theta}_n(t) = -\frac{p}{\rho Fl} \cdot \frac{\sin(0.5\lambda_n l)}{\omega^2 - k_n^2} \times \left\{ \begin{array}{l} -(\lambda_n v_1 - \omega)^2 \cdot \cos[(\lambda_n v_1 - \omega)t + 0.5\lambda_n l - 2\lambda_n ml] + \\ + (\lambda_n v_1 + \omega)^2 \cdot \cos[(\lambda_n v_1 + \omega)t + 0.5\lambda_n l - 2\lambda_n ml] + \\ + \{[\lambda_n(2v + v_1) - \omega]^2 \cdot \cos\{[\lambda_n(2v + v_1) - \omega]t - 0.5\lambda_n l - 2\lambda_n ml\} - \\ - \{[\lambda_n(2v + v_1) + \omega]^2 \cdot \cos\{[\lambda_n(2v + v_1) + \omega]t - 0.5\lambda_n l - 2\lambda_n ml\} \} \end{array} \right.$$

После определения прогиба  $w_1(x, t)$ ,  $M(t)$ , обеспечивающего заданное движение, момент вращения в этой части стержня вычисляется по формуле (2.1).

**3. Решение задачи 2.** Решение уравнения (2.2) без учета собственного веса стержня будем искать в форме

$$w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{1n}(t) \cdot \sin(\lambda_n x), \quad (3.1)$$

$$x' \leq x \leq l, \quad 2ml/(v+v_1) < t < (2m+1)l/(v+v_1), \quad m \in Z^+,$$

чтобы граничные условия (2.3), а также начальные условия (2.4) удовлетворялись полностью.

Подставляя значение прогиба из (3.1) в (2.2), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно искомой функции  $w_{1n}(t)$

$$\ddot{w}_{1n}(t) + k_n^2 \cdot w_{1n}(t) = -\frac{2}{l} \cdot D_n(x') \ddot{\theta}_n(t), \quad (3.2)$$

$$D_n(x') = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n^2} \{ \beta_n - [\sin(\lambda_n x') - \lambda_n x' \cos(\lambda_n x')] \}, \\ \text{in } x' \leq x \leq l, \quad 2ml/(v + v_1) < t < (2m + 1)l/(v + v_1) \\ \frac{1}{\lambda_n^2} \{ \sin(\lambda_n x') - \lambda_n x' \cos(\lambda_n x') \}, \\ \text{in } 0 \leq x \leq x', \quad (2m + 1)l/(v + v_1) < t < 2(m + 1)l/(v + v_1) \end{cases} \quad (3.3)$$

с коэффициентом нормирования  $\beta_n = \sin(\lambda_n l) - \lambda_n l \cos(\lambda_n l)$ . Решение уравнения (3.2) с начальными условиями (2.4) можно представить в виде

$$w_{1n}(t) = -\frac{2}{lk_n} \cdot \int_0^t f_n(\tau) \cdot \sin[k_n(t-\tau)] \cdot d\tau, \quad (3.4)$$

где  $f_n(t) = D_n(x')\ddot{\theta}_n(t)$  – неоднородная функция в правой части уравнения.

Подставляя значение  $w_{1n}(t)$  из (3.4) в общее решение (3.1), получаем общее решение для поперечных упругих колебаний стержня в виде

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -\frac{2}{lk_n} \cdot \int_0^t f_n(\tau) \cdot \sin[k_n(t-\tau)] \right] \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot d\tau \quad (3.5)$$

в промежутке времени  $2ml/(v+v_1) < t < (2m+1)l/(v+v_1)$ .

Решение (3.5) после преобразований можно представить в виде суммы собственных и вынужденных колебаний. Опуская подробности, представим вынужденные поперечные колебания стержня по времени из общего решения (3.5) в виде

$$w_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p}{\rho Fl^2 k_n} \cdot \frac{\sin(0,5\lambda_n l_1)}{\omega^2 - k_n^2} u_n(t) \cdot \sin(\lambda_n x) \cdot \quad (3.6)$$

Вынужденные колебания стержня на участке  $0 < x < x'$ ,  $(2m+1)l/(v+v_1) < t < 2(m+1)l/(v+v_1)$ ,  $m \in Z^+$ , можно получить с помощью формулы (3.6), заменив  $m$  на  $2(m+1)l$ . В формуле (3.6) необходимо также функцию прогиба взять со знаком минус.

Из суммы (3.6) находим резонансные частоты, которые определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \omega_n^* &= 2\lambda_n(v+v_1) \pm k_n, & \omega_n^* &= \lambda_n(2v+v_1) \pm k_n, \\ \omega_n^* &= k_n, & \omega_n^* &= 2\lambda_n v_1 \pm k_n. \end{aligned}$$

Сравнивая задачу (1.1) – (1.3) с задачей (2.1) – (2.4), получаем новые значения резонансных частот

$$\omega_n^* = \lambda_n(2v+v_1) \pm k_n, \quad \omega_n^* = 2\lambda_n(v+v_1) \pm k_n, \quad \omega_n^* = 2\lambda_n v_1 \pm k_n. \quad (3.7)$$

Из сопоставления решения математических краевых задач (2.1) – (2.4) и (4.7) – (4.10) в [2] становится очевидным, что полученные новые резонансные частоты (3.7) отличаются от резонансных частот (5.7) в [2] значениями  $2\lambda_n v$ , которые возникают в результате приложения распределенной, периодически меняющейся нагрузки вдоль стержня.

**4. Численные результаты.** Для иллюстрации эффективности полученных результатов рассмотрим в качестве конкретного примера стальной стержень с квадратным поперечным сечением со следующими параметрами:  $F = 1 \text{ см}^2$ ;  $k = 2/3$ ;  $\omega = 50 \text{ с}^{-1}$ ;  $\rho = 7.85 \times 10^{-3} \text{ кг/см}^3$ ;  $p = 2 \text{ кг}$ ;  $E = 2.14 \times 10^6 \text{ кг/см}^2$ ;  $l = 120 \text{ см}$ ;  $l_1 = 10 \text{ см}$ ;  $v = 15 \text{ м/с}$ .

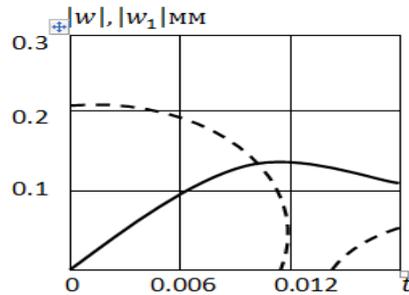


Рис. 2. Изменения прогибов при движении нагрузки.

На рис. 2 показаны графики зависимостей  $|w|$  (сплошная линия) и  $|w_1|$  (штриховая линия) от времени  $t$  в точке  $x = 90$  см. Величины  $|w|$  и  $|w_1|$  представляют абсолютные значения величин вынужденных колебаний стержня, рассчитанных, соответственно, по формулам (1.9) и (3.6). Графики показывают, что наибольшее абсолютное значение прогиба  $|w_1|$  больше, чем прогиба  $|w|$ . С увеличением  $t$  значения  $|w|$  и  $|w_1|$  вначале возрастают, а затем убывают.

**Заключение.** Общее решение (3.6) всегда справедливо лишь для достаточно длинных волн, в то время как для коротких волн оно непригодно (изгибные возмущения вдоль стержня распространяются мгновенно). Полученные новые резонансные частоты (3.7) эффективны, если скорость перемещения нагрузки вдоль стержня большая.

Институт геофизики и инженерной сейсмологии  
им. А. Назарова НАН РА  
e-mail: karush.mkrtyan.57@mail.ru

**К. Ш. Мкртчян**

### **Вынужденные поперечные колебания упругого шарнирно опертого стержня под действием поперечно распределенной движущейся нагрузки**

Рассмотрены вынужденные поперечные колебания упругого стержня с учетом вращательного движения под действием сплошной периодически меняющей свою величину нагрузки, перемещающейся вдоль стержня с постоянной скоростью  $v$ . Решение поставленной задачи строится в виде ряда собственных форм колебаний. Получены новые резонансные частоты. Показано, что полученные значения прогибов зависят от скорости перемещающейся вдоль стержня нагрузки. Полученные результаты сравниваются с результатами исследований, проведенных ранее в этой области.

## Կ. Շ. Մկրտչյան

### Ազատ հենված առաձգական ձողի հարկադրական տատանումները լայնական բաշխված, շարժվող բեռի ազդեցության տակ

Դիտարկված են պտտական շարժման հաշվառումով, ազատ հենված առաձգական ձողի հարկադրական տատանումները, հավասարաչափ բաշխված պարբերական փո-փոխող իր մեծությունը շարժվող բեռի ազդեցության տակ: Խնդրի լուծումը կառուցվում է տատանումների սեփական ձևերի շարքի տեսքով: Ստացված են նոր ռեզոնանսային հաճախականություններ, կախված ձողի երկայնքով բեռի տեղափոխության արագությունից: Կատարվել է ստացված արդյունքների համեմատական վերլուծություն:

**K. Sh. Mkrtchyan**

### Forced Transversal Vibrations of Elastic Hinged-Opened Rod under the Action of a Distributed Transversal Moving Load

Taking into account the rotational motion under the action of a continuous load, periodically changing its value and moving along the rod at a constant speed, forced transverse vibrations of the elastic rod are considered. The solution to the problem is constructed in the form of a series of natural vibration modes. New resonant frequencies were obtained. It is shown that the obtained deflection values depend on the speed of movement of the load along the rod. A comparative analysis of the results obtained was carried out.

## Литература

1. *Մկրտչյան Կ. Մ.* – Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63. Вып.6. С. 1055–1058.
2. *Մկրտչյան Կ. Մ.* – Изв. РАН. Механика твердого тела. 2019. № 1. С. 151-163.
3. *Koiter W.T.* – J. Sound Vib. 1996. V. 194. P. 636-638.
4. *Avetisyan Ara S., Khurshudyan As. Zh.* – ZAMM – J. of Applied Mathematics and Mechanics. 2021. V. 101. Iss. 10. <https://doi.org/10.1002/zamm.202000350>.
5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М. Физматгиз. 1959. 439 с.
6. *Гукасян А. А., Саркисян С. В.* – Изв. АН АрмССР. Механика. 1990. Т. 43. № 4. С. 13–23.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М. Наука. 1987. 248 с.

МЕХАНИКА

УДК 531.5;523.1

DOI: 10.54503/0321-1339-2023.123.3-4-41

Академик Л. А. Агаловян

Обобщенно-ньютонова теория всемирного тяготения  
и систематизация Черных дыр

(Представлено 11/X 2023)

**Ключевые слова:** *тяготение, центральное взаимодействие, скорость убегания, горизонт событий, Черные дыры.*

**Введение.** Триумфом науки в средние века явилось построение теории движения солнечной планетной системы. Противостояние между сторонниками птолемеевской геоцентрической системы и гелиоцентрической системы Аристарха – Коперника, длившееся веками, завершилось победой последних. В III в. до н. э. представитель пифагорейской школы Аристарх Самосский (Aristarchus of Samos, 310 – 230 гг. до н. э.) выдвинул гелиоцентрическую систему движения планет. Согласно этой модели в центре Вселенной находится Солнце, которое неподвижно, и вокруг него вращаются Земля и другие планеты. Эта модель была отвергнута древними астрономами как лишняя, на их взгляд, основания, поскольку требовала движения Земли вокруг Солнца. В дальнейшем наибольшей известностью пользовалась геоцентрическая система Птолемея, жившего в Александрии во II в. н. э. (Claudius Ptolemy, 90 - 168 гг. н. э.). В системе Птолемея все объясняется с помощью окружностей и круговых движений. Считается, что планета движется по эпициклу (окружности), центр которого, в свою очередь, движется по деференту (другой окружности), центр которого совпадает с Землей. В книге Птолемея «Альмагест» (по-арабски ‘*величайший*’) содержалось все, чтобы рассчитать положение Солнца, Луны и планет на каждую ночь. Из наблюдений звездного неба древние заключили, что оно обращается вокруг нашей Земли, которая неподвижна и находится в центре Вселенной. Со временем возросли точность и надежность астрономических наблюдений, в особенности после изобретения Галилеем (Galileo Galilei, 1564 - 1641) телескопа. Его наблюдения показали, что вокруг других планет тоже обращаются небесные тела. Это про-

тиворечило теории Птолемея. Усовершенствование этой теории сводилось к предположению, что по эпициклам движутся дополнительные эпициклы, что весьма усложняло систему, и ей угрожала опасность развалиться под тяжестью собственной сложности.

Спустя восемнадцать веков после Аристарха Коперник (*Nicolaus Copernicus*, 1473 - 1543) возродил гелиоцентрическую модель и в отличие от Аристарха, который лишь высказал общую идею, разработал детали гелиоцентрической модели и основы вычисления положений планет. Однако Коперник продолжал опираться на метод круговых орбит Птолемея. По его теории все планеты вращаются вокруг Солнца по круговым орбитам и равномерно.

Коренной перелом в победу гелиоцентрической системы внес Иоганн Кеплер (*Johann Kepler*, 1571 - 1630) в начале XVII в. Основываясь на составленном Тихо Браге (*Tycho Brahe*, 1546 - 1601) великолепном каталоге данных исключительно точных наблюдений по движению планет, в особенности по Марсу, Кеплер сформулировал три своих знаменитых закона.

Спустя несколько десятилетий Исаак Ньютон (*Isaac Newton*, 1642 - 1717) математически вывел законы Кеплера и сформулировал знаменитый закон всемирного тяготения. Согласно этому закону сила всемирного тяготения – центральная и каждая масса  $m$  притягивается другой массой  $M$  во Вселенной с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния между массами, и направлена по линии, соединяющей центры масс. Важнейшим достижением Ньютона является и доказательство того, что орбитой тел, движущихся вокруг Солнца, может являться любая из кривых семейства конических сечений: окружность, эллипс, парабола, гипербола.

В последующие десятилетия и столетия закон всемирного тяготения Ньютона получил множество убедительных и ярких подтверждений [1, 2].

Наряду с огромными успехами со временем были выявлены космические явления, которые невозможно было объяснить по теории гравитации Ньютона. В 1859 г. Леверье обнаружил некоторое расхождение орбиты ближайшей к Солнцу планеты Меркурий в перигее с результатами наблюдений [2, 3]. Не найдя убедительных объяснений этого факта, известный американский астроном Саймон Ньюкомб (*Simon Newcomb*, 1835 - 1909) высказал мнение, что, возможно, закон обратных квадратов Ньютона не выполняется точно на малых расстояниях. Была сделана попытка объяснить возникшую с Меркурием проблему на основе общей теории относительности (ОТО), но она не дала желаемых результатов.

Возникла еще одна весьма важная проблема, удовлетворительное решение которой практически еще не найдено. Это проблема «Черных дыр».

Английский астроном-любитель Джон Митчелл (*John Mitchell*, 1724 - 1793), один из основателей сейсмологии, и известный французский математик и механик Лаплас (*Pierre Laplace*, 1749 - 1827) независимо друг от друга, основываясь на теории тяготения Ньютона, высказывали мнение, что в природе должны существовать тела, для преодоления притяжений

которых требуемая скорость должна превышать скорость света  $c$ . Поэтому такое тело, названное впоследствии «Черной дырой», должно быть «темным», т.е. невидимым, ибо даже свет не может покинуть его. Его можно обнаружить косвенным путем – гравитационным воздействием на другие тела.

Митчелл и Лаплас, используя понятие второй космической скорости (скорости убегания), вывели радиус «темного тела» (гравитационный радиус):

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (1)$$

где  $M$  – масса «темного тела».

По ОТО предельным переходом было получено такое же значение гравитационного радиуса  $r_g$ . Сторонники ОТО подвергли критике Митчелла и Лапласа в том плане, что при скоростях, близких к скорости света, формулы классической механики не применимы. Оппоненты же ОТО утверждают, что эта теория не применима для описания макроскопических явлений во Вселенной, поскольку решение ее уравнений содержит сингулярность, недопустимую при описании естественных явлений. Более того, планеты и звезды, как правило, не имеют значительных, сопоставимых со скоростью света скоростей, и для них релятивистские эффекты несущественны [4].

Для внесения обоснованной ясности наличие более общей теории всемирного тяготения становится необходимостью. Новая теория тяготения не должна противоречить теории Ньютона, ибо она давно получила многократное подтверждение, и должна предоставить более широкие возможности для объяснения хотя бы части явлений, трудно объяснимых по теории Ньютона.

**1. Обобщение ньютоновой теории всемирного тяготения.** В работах автора [5-7] доказана возможность обобщения теории всемирного тяготения Ньютона. Новое центральное взаимодействие тел и частиц более мощное на коротких расстояниях, по сравнению с ньютоновым. Траектория движения опять может являться коническим сечением. Этому взаимодействию, в частности, подчиняются «Черные дыры».

Пусть имеем тела с массами  $m, M$ . Поместим начало полярных координат  $(r, \theta)$  в центре тела с массой  $M$ . Центральную силу взаимодействия будем задавать в виде

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{k/r} \vec{r}}{r^2 |\vec{r}|} \quad (2)$$

или

$$F = -GmM \frac{e^{k/r}}{r^2}, \quad (3)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная в законе всемирного тяготения Ньютона ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ ). Показатель  $k$  характеризует мощность (интенсивность) центра притяжения. При  $k=0$  взаимодействие (2), (3) совпадает с ньютоновым ( $F = -GmM/r^2$ ). Учитывая это, в (2) был введен коэффициент  $GmM$ . Если же  $k>0$ , взаимодействие будет более мощным, чем ньютоново. Очевидно, что  $k$  имеет размерность длины, о возможных значениях которой поговорим чуть позже.

Поле, создаваемое силой  $\vec{F}$ , задаваемой по формуле (2), является потенциальным, с потенциалом

$$U = -\int F dr = -\frac{GmM}{k} e^{k/r} + const, \quad (4)$$

который существенно сильнее потенциала ньютонова поля ( $U = -\frac{GmM}{r}$ ), в особенности на коротких от центра притяжения расстояниях.

Поскольку сила  $\vec{F}$  – центральная, траектория точки – плоская кривая, имеет место закон постоянства секториальной скорости (закон площадей):

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C, \quad (5)$$

где  $C$  – момент начальной скорости относительно центра притяжения.

С учетом (5) скорость точки в полярной системе координат имеет вид

$$v^2 = C^2 \left[ \left( \frac{d \frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \right)^2 \right]. \quad (6)$$

С другой стороны, согласно теореме о кинетической энергии  $d \frac{mv^2}{2} = \vec{F} d\vec{r}$ , с учетом (2), (3) имеем

$$v^2 = \frac{2GM}{k} e^{k/r} + h, \quad (7)$$

где постоянная интегрирования  $h$  определяется из начальных условий:

$$\text{при } r = r_0 \quad v = v_0. \quad (8)$$

Используя (6), (7), определим траекторию движения [6]

$$r = \frac{1/k_1}{1 + (k_2/k_1) \cos \sqrt{\delta_1} (\theta - \theta_0)}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 1 - \frac{GMk}{C^2}, \quad k_1 = \frac{GM}{C^2 \delta_1}, \quad \delta_1 > 0 \\ k_2^2 &= k_1^2 + (2GM + kh) \frac{1}{kC^2 \delta_1} = \frac{1}{kC^2 \delta_1^2} [GM + (GM + kh) \delta_1] \end{aligned} \quad (10)$$

Согласно (9) траектория является коническим сечением с параметрами

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{k_1} = \frac{C^2}{GM} - k, \\ \varepsilon &= \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{1 + \left( \frac{C^2}{MGk} - 1 \right) \left( 2 + \frac{hk}{MG} \right)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Траектория есть эллипс при

$$-\frac{MG}{k} \left( 1 + \frac{C^2}{C^2 - MGk} \right) < h < -\frac{2GM}{k}, \quad (12)$$

парабола при  $h = -(2GM)/k$ , гипербола при  $h > -(2GM)/k$ .

В случае эллипса полуоси определяются по формулам

$$a = \frac{P}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{P}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (13)$$

Используя условия (8), из (7) определим значение  $h$ :

$$h = v_0^2 - \frac{2GM}{k} e^{k/r_0}. \quad (14)$$

Согласно (14) последнее неравенство (12) можно записать в виде

$$v_0^2 < v_*^2, \quad v_*^2 = \frac{2GM}{r_0} \frac{e^{k/r_0} - 1}{k/r_0}. \quad (15)$$

Из формулы (15) следует, что при начальной скорости  $v_0 < v_*$

траектория есть эллипс, при  $v_0 = v_*$  – парабола и при  $v_0 > v_*$  – гипербола.

$$\lim_{k \rightarrow 0} v_*^2 = \frac{2GM}{r_0} = v_N^2, \quad v_N = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \quad - \text{ известная скорость убегания}$$

(вторая космическая скорость) по теории Ньютона. При  $k > 0$   $v_* > v_N$ , т.е. скорость убегания при взаимодействии (2) больше скорости убегания по теории Ньютона, и это различие может быть сколь угодно большим. Это в свою очередь означает, что для преодоления притяжения поля, соответствующего взаимодействию (2), понадобятся сверхбольшие скорости.

**2. Черная дыра и ее гравитационный радиус.** Тело с массой  $M$  будет Черной дырой («темным», невидимым), если любое тело с массой  $m < M$  и начальной скоростью, даже равной скорости света  $c$ , не может преодолевать поле притяжения массы  $M$ . Выясним, каким будет гравитационный радиус  $R_g$  при взаимодействии (2).

Начальными условиями задачи являются:

$$\text{при } r_0 = R_g \quad v_0 = c. \quad (16)$$

Согласно (15), (16) имеем

$$\frac{2GM}{R_g} \frac{e^{\frac{k}{R_g}} - 1}{k/R_g} = c^2. \quad (17)$$

Обозначив  $\lim_{k \rightarrow 0} R_g = r_g$ , вычислим в (17) предел при  $k \rightarrow 0$ . В результате получим

$$\frac{2GM}{r_g} = c^2 \quad \text{или} \quad r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (18)$$

т.е. радиус  $r_g$  есть известный гравитационный радиус (1) при центральном взаимодействии Ньютона.

Обозначим  $\gamma = k/R_g$ . Тогда формулу (17) с учетом (18) можно записать в виде

$$R_g = r_g \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} \quad \text{или} \quad \frac{R_g}{r_g} = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma}. \quad (19)$$

Формула (19) отражает связь между гравитационными радиусами тела (образования) массы  $M$  по обобщенно-ньютоновой теории и теории тяготения Ньютона. Из этой формулы следует, что  $R_g$  может быть сколь угодно больше  $r_g$  (см. график функции  $R_g/r_g$ , рис. 1). Имея значение отношения  $R_g/r_g$ , из уравнения (19) определим показатель интенсивности  $\gamma$

центра притяжения, а также интенсивность  $k = \gamma R_g$ . Наоборот, задав значение  $\gamma$ , из той же формулы определим  $R_g/r_g$ . Из графика функции  $R_g/r_g$  и уравнения (19) следует, что может существовать множество Черных дыр. Астрономы и астрофизики давно доказали это. Они предполагают, что в каждой галактике есть по крайней мере одна Черная дыра, ориентировочно находящаяся в ее центре.

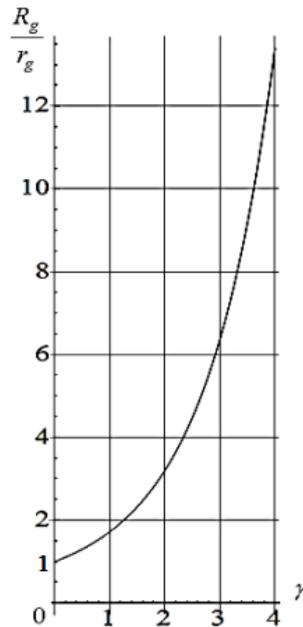


Рис. 1. Зависимость между  $R_g/r_g$  и показателем интенсивности  $\gamma$  гравитационного поля Черной дыры.

Имеется достаточно обширный каталог Черных дыр. Укажем некоторые из предполагаемых Черных дыр: NGC 6166 [8]; S 50014 + 81 [9]; Sgr A\* [10-13]; NGC 1277 [14]; OJ 287 главная [15].

По теории гравитации Ньютона по формуле (18) определяется гравитационный радиус произвольного тела массой  $M$ . Для планеты Земля  $M = 5,9736 \cdot 10^{24}$  кг,  $r_g = 8,87$  мм  $\approx 9$  мм, для Солнца массу принято обозначать через  $\odot$ , и  $\odot = 2 \cdot 10^{30}$  кг,  $r_g = 2,95$  км  $\approx 3$  км. Т.е. Земля может стать Черной дырой, если ее масса будет втиснута в шар радиуса 9 мм, для Солнца – в шар радиуса 3 км, что представляется нереальным.

Масса любой Черной дыры многократно больше массы Солнца.

**3. Горизонт событий и систематизация Черных дыр.** Поверхность вокруг Черной дыры, которую еще не могут преодолеть иные тела (час-

тицы), имеющие скорость, даже равную скорости света, называется «горизонтом событий». Этот термин был введен в физику и астрофизику американским физиком Вольфгангом Риндлером (*Wolfgang Rindler*, 1924 - 2019) в 1956 г. По известному астрофизику современности Стивену Хокингу (*Stephen Hawking*, 1942 - 2018), горизонт событий создается светом, который не в силах покинуть Черную дыру и поэтому «парит» на этом горизонте [16].

Поверхность, которая служит горизонтом событий, обычно считают сферической, радиус этой поверхности и есть гравитационный радиус  $R_g$  Черной дыры или радиус Шварцшильда (*Karl Schwarzschild*, 1873 - 1916) – по фамилии известного немецкого астронома. Геометрически является очевидным, что гравитационный радиус Шварцшильда  $R_g$  больше ньютонового гравитационного радиуса  $r_g$ .

Пусть каким-то образом определен (оценен) радиус горизонта событий (радиус Шварцшильда)  $R_g$  известной (предполагаемой) Черной дыры. Тогда по известной массе этой Черной дыры сначала вычислим ньютоновый гравитационный радиус  $r_g$  ( $2GM/c^2$ ). В результате становится известным и значение  $R_g/r_g$ . Тогда из графика функции  $R_g/r_g$  (рис. 1) или уравнения (19) сразу однозначно определяются значение показателя интенсивности  $\gamma$  силового поля Черной дыры, а также интенсивность  $k = \gamma R_g$ . В силу этого становится весьма актуальным вопрос определения не только масс Черных дыр, но и значения радиуса  $R_g$  горизонта событий.

Более детально обсудим этот вопрос для Черной дыры Стрелец  $A^*$  ( $S_{gr}A^*$ ). Она находится в центре нашей галактики – Млечного пути (*Milky Way*) [10, 12, 13]. Впервые объект был обнаружен Робертом Брауном (*Robert Brown*, 1946 - 2002) и Брюсом Баликом (*Bruce Balick*) в Национальной радиоастрономической обсерватории США в 1974 г. 13 и 15 февраля. Впоследствии исследования велись на основе наблюдений за движением звезды  $S2$  вокруг предполагаемой Черной дыры  $S_{gr}A^*$ . За время наблюдений (1992 - 2021) звезда  $S2$  сделала почти два полных оборота вокруг Черной дыры, что позволило с большой точностью определить параметры ее орбиты.

Период обращения  $S2$  составляет  $(15,8 \pm 0,11)$  года, большая полуось орбиты  $\approx 1000$  *a.e.*, эксцентриситет  $0,88441 \pm 0,00006$ , максимальное приближение к  $S_{gr}A^*$   $119,54$  *a.e.* [17].

$S_{gr}A^*$  окружен горячим радиоизлучающим газовым облаком диаметром около 1.8 парсек. Диаметр  $S_{gr}A^*$  составляет 44 млн. км, для сравнения

– расстояние между Солнцем и Меркурием 46 млн. км [13].

В 2004 г. было открыто скопление из семи звезд, которое движется вокруг  $S_{gr}A^*$  по орбите на расстоянии трех световых лет. Все это является лучшим свидетельством существования сверхмассивной Черной дыры  $S_{gr}A^*$ .

В большинстве публикаций принимается, что масса  $S_{gr}A^*$  равна  $(4,297 \pm 0,042)10^6 \odot$ . Радиус горизонта событий (радиус Шварцшильда)  $S_{gr}A^*$  составляет 45 а.е. (6732 млн. км). Естественно, он больше линейного характерного размера (радиуса  $R$ )  $S_{gr}A^*$ , что составляет 22 млн. км (половина диаметра  $S_{gr}A^*$ ). Таким образом, имеем

$$R_g = 45 a.e. = 45 \cdot 149597871 км \approx 6732 \cdot 10^6 км. \quad r_g = 12,9 \cdot 10^6 км.$$

Для  $S_{gr}A^*$  ньютонов гравитационный радиус  $r_g = 12,9 \cdot 10^6 км$ . Следовательно

$$\frac{R_g}{r_g} = \frac{6732}{12,9} = 521,860465 \approx 522. \quad (20)$$

Используя (20), из уравнения (19) однозначно определим значение показателя интенсивности  $\gamma$  силового поля  $S_{gr}A^*$ . Имеем  $\gamma = 8,38395$ . Следовательно,

$$k = \gamma R_g = 8,38395 \cdot 6732 \cdot 10^6 км = 56440,7514 \cdot 10^6 км. \quad (21)$$

Силовое поле, создаваемое Черной дырой  $S_{gr}A^*$ , согласно (2) и (21) будет иметь вид

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{\frac{8,38395 R_g}{r}}}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (22)$$

Учитывая, что  $R_g$  для  $S_{gr}A^*$  – огромное число ( $R_g = 45 a.e.$ ), из (22) следует, что силовое поле тяготения при коротких расстояниях является сверхсильным, заставляющим вращаться вокруг  $S_{gr}A^*$  также звезды.

Изложенная выше процедура остается в силе для всех Черных дыр. Любая Черная дыра создает возле себя силовое поле – экспоненциально более сильное, чем по теории тяготения Ньютона:

$$\vec{F} = -GmM \frac{e^{\frac{\gamma R_g}{r}}}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}, \quad (23)$$

где  $R_g$  – радиус горизонта событий,  $\gamma$  – показатель интенсивности поля тяготения Черной дыры, которая определяется из уравнения (19).

Все Черные дыры можно систематизировать согласно массе, радиусу  $R_g$  горизонта событий (радиусу Шварцшильда) или показателю интенсивности  $\gamma$  создаваемого Черной дырой поля. В обоих вариантах должен быть известен радиус  $R_g$  горизонта событий.

Институт механики НАН РА  
e-mail: lagal@sci.am

**Академик Л. А. Агаловян**

### **Обобщенно-ньютонова теория всемирного тяготения и систематизация Черных дыр**

Обобщена ньютонова теория всемирного тяготения. Установлено существенно сильное на коротких расстояниях, по сравнению с ньютоновым, центральное взаимодействие тел и частиц. Траектория тела опять является коническим сечением, однако скорость убегания намного больше скорости убегания по теории Ньютона. Найдена связь с Черными дырами, с горизонтом событий. Разработан способ систематизации всех Черных дыр.

**Ակադեմիկոս Լ. Ա. Աղալովյան**

### **Համաշխարհային ձգողականության ընդհանրացված-նյուտոնյան տեսությունը և Սև խոռոչների դասակարգումը**

Ընդհանրացված է համաշխարհային ձգողականության նյուտոնյան տեսությունը: Ուսումնասիրված է նոր տիպի կենտրոնական փոխազդեցություն, որի պոտենցիալ դաշտը բազմակի հզոր է նյուտոնյանից: Արտածված են պայմաններ, երբ մարմնի հետագիծը կոնական հատույթ է: Կապ է հաստատված Սև խոռոչների, իրադարձությունների հորիզոնի հետ: Մշակված է Սև խոռոչների դասակարգման եղանակ:

**Academician L. A. Aghalovyan**

### **Generalized Newton's Theory of Universal Gravitation and Systematization of Black Holes**

The Newton's theory of universal gravitation is generalized. Significantly strong at short distances central interaction of bodies and particles is established in comparison with Newtonian. The trajectory of the body again is a conical section, however, the Escape speed is much more than the speed at Newtonian interaction. A connection is found with Black Holes, with the horizon of events. A method of systematization of all Black Holes is developed.

### **Литература**

1. Kittel C., Knight W. D. et al. Mechanics. (Berkley Physics Course, V. 1. New York. McGraw-Hill. 1963 (*Киттель Ч., Найт В., Рудерман М.*

- Механика. М. Наука. 1975. 480 с.).
2. *Layzer D.* Constructing the Universe. New York. Scientific American Book. 1984, Inc. (*Лейзер Д.* Создавая картину Вселенной. М. Мир. 1988. 324 с.).
  3. *Roseveare N. T.* Mercury's Perihelion from Le Verrier to Einstein. Oxford. Clarendon Press. 1982. (*Роузвер Н. Т.* Перигелий Меркурия от Лаверьё до Эйнштейна. М. Мир. 1985. 246 с.).
  4. *Bergman P. G.* The Riddle of Gravitation. New York. Charles Scribner's Sons. 1968. (*Бергман П.* Загадка гравитации. М. Наука. Физматлит. 1969. 216 с.).
  5. *Aghalovyan L. A.* – Reports of National Academy of Sciences of Armenia. 2006. V. 106. P. 238-244.
  6. *Aghalovyan L. A.* – International Journal of Astronomy and Astrophysics. 2018. V. 8. P. 191- 199.
  7. *Aghalovyan L. A.* – International Journal of Astronomy and Astrophysics. 2020. V. 10. P.224-234.
  8. *Magorrian J., Tremaine S. et al.* – The Astronomical Journal. 1998. V. 115. P. 2285-2305.
  9. *Ghisselini G., Ceca R. et al.* – Notices of the Royal Astronomical Society. 2010. V. 405. P. 387-400.
  10. *Eckart A., Schodel R. et al.* The Black Hole at the Center of Milky Way. London. Imperial College Press. 2005.
  11. *Ghez A., Salim S. et al.* – The Astrophysical Journal. 2005. V. 620(2). P.744-757.
  12. *Ghez A., Salim S. et al.* – The Astrophysical Journal: IOP Publishing. 2008. V. 689. № 2. P. 1044-1062.
  13. *Abuter R. et al.* – Astronomy & Astrophysics. 2021. V. 656. 14 December.
  14. *Graham A.W., Durre M. et al.* – The Astrophysical Journal. 2016. V. 819. P. 43.
  15. *Valtonen M., Ciprini S. et al.* – Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Journal. Oxford University Press. 2012. V. 427. № 1. P. 77-83.
  16. *Hawking S.* Black Holes and Baby Universes and Other Essays. Toronto. Bantam Book. 1996. (*Хокинг Стивен.* Черные дыры и молодые вселенные. М. АСТ. 2018. 176 с.).
  17. *Gillessen S., Eisenhauer F. et al.* – The Astrophysical Journal. 2009. V. 692. P. 1075-1109.



задача для слоистого пакета решена в [9]. В [10] рассмотрена динамическая трехмерная задача двухслойной пластинки при наличии вязкого сопротивления в обоих слоях, в [11] – динамическая задача слоистых оболочек, когда данные измерений сняты с поверхности контакта между различными слоями.

В данной работе решена динамическая задача двухслойной ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое. Значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями с помощью установленных датчиков. Верхняя поверхность пластинки свободна, а между слоями заданы условия полного контакта.

**1. Постановка задачи.** Рассматриваются вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки (рис. 1),  $D = \{(x, y, z): (x, y) \in D_0, 0 \leq z \leq h_1 + h_2, h = h_1 + h_2 \ll l\}$ , при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое (в нижнем слое вязкое сопротивление отсутствует), где  $D_0$  – поверхность контакта слоев,  $l$  – ее характерный тангенциальный размер (наименьший из линейных размеров поверхности  $D_0$ ).

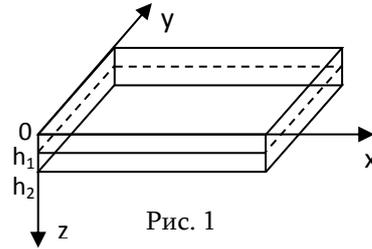


Рис. 1

Требуется найти ненулевые решения динамических уравнений пространственной задачи теории упругости для ортотропных сред при неклассических краевых условиях [7]. Имеем:

уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}^I}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^I}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^I}{\partial z} - k_1 \frac{\partial u^I}{\partial t} &= \rho^I \frac{\partial^2 u^I}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{xx}^{II}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}^{II}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}^{II}}{\partial z} &= \rho^{II} \frac{\partial^2 u^{II}}{\partial t^2}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$(x, y, z; u, v, w),$

уравнения состояния (соотношения упругости) для ортотропного тела

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(j)}}{\partial x} &= a_{11}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, & \frac{\partial u^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial x} &= a_{66} \sigma_{xy}^{(j)}, \\ \frac{\partial v^{(j)}}{\partial y} &= a_{12}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, & \frac{\partial w^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u^{(j)}}{\partial z} &= a_{55} \sigma_{xz}^{(j)}, \\ \frac{\partial w^{(j)}}{\partial z} &= a_{13}^{(j)} \sigma_{xx}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz}^{(j)}, & \frac{\partial w^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(j)}}{\partial z} &= a_{44} \sigma_{yz}^{(j)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $k_1$  – коэффициент вязкого сопротивления первого слоя,  $\rho^{(j)}$  – плотности слоев,  $a_{ik}^{(j)}$  – постоянные упругости ( $a_{ik}^{(j)} = a_{ki}^{(j)}$ ),  $j$  – номер слоя.

На лицевой поверхности  $z = 0$  заданы условия:

$$\sigma_{xz}^I(x, y, 0, t) = 0, \quad \sigma_{yz}^I(x, y, 0, t) = 0, \quad \sigma_{zz}^I(x, y, 0, t) = 0. \quad (1.3)$$

На поверхности контакта между слоями известны значения перемещений точек поверхности контакта как данные измерительных средств:

$$u^I(x, y, h_1, t) = u^{II}(x, y, h_1, t) = u^+(x, y) \sin \Omega t \quad (u, v, w), \quad (1.4)$$

где  $\Omega$  – частота вынужденных внешних воздействий.

На поверхности контакта между слоями выполняются условия полного контакта

$$\begin{aligned} \sigma_{xz}^I(x, y, h_1, t) &= \sigma_{xz}^{II}(x, y, h_1, t) & (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}), \\ u^I(x, y, h_1, t) &= u^{II}(x, y, h_1, t) & (u, v, w). \end{aligned} \quad (1.5)$$

В [3] показано, что сформулированная неклассическая краевая задача всегда имеет решение, более того, всегда существует классическая краевая задача, решением которой оно является.

**2. Общее асимптотическое решение задачи.** В уравнениях (1.1), (1.2) перейдем к безразмерным координатам и перемещениям по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \\ U^I &= u^I/l, \quad V^I = v^I/l, \quad W^I = w^I/l, \quad (I, II). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решение преобразованных уравнений будем искать в виде

$$Q^{(j)}(x, y, z, t) = Q_1^{(j)}(x, y, z) \sin \Omega t + Q_2^{(j)}(x, y, z) \cos \Omega t, \quad (2.2)$$

где  $Q^{(j)}$  – любое из напряжений и перемещений. В результате получается сингулярно возмущенная малым параметром  $\varepsilon = h/l$  система относительно  $Q_i^{(j)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx,1}^I}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy,1}^I}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz,1}^I}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^I(\Omega_*)^2 U_1^I + 2K_1 \varepsilon^{-2} \Omega_* U_2^I &= \\ 0, \quad (x, y, z; U, V, W) \\ \frac{\partial \sigma_{xx,2}^I}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy,2}^I}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz,2}^I}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^I(\Omega_*)^2 U_2^I - 2K_1 \varepsilon^{-2} \Omega_* U_1^I &= 0, \\ (x, y, z; U, V, W) \\ \frac{\partial \sigma_{xx,i}^{II}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy,i}^{II}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{xz,i}^{II}}{\partial \zeta} + \varepsilon^{-2} \rho^{II}(\Omega_*)^2 U_i^{II} &= 0, \quad (x, y, z; U, V, W), \\ i &= 1, 2 \\ \frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial \xi} &= a_{11}^{(j)} \sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{12}^{(j)} \sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{13}^{(j)} \sigma_{zz,i}^{(j)}, \quad \frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial \xi} = a_{66}^{(j)} \sigma_{xy,i}^{(j)}, \\ \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial \eta} &= a_{12}^{(j)} \sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{22}^{(j)} \sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{zz,i}^{(j)}, \quad \frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial U_i^{(j)}}{\partial \zeta} = a_{55}^{(j)} \sigma_{xz,i}^{(j)}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon^{-1} \frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial \zeta} = a_{13}^{(j)} \sigma_{xx,i}^{(j)} + a_{23}^{(j)} \sigma_{yy,i}^{(j)} + a_{33}^{(j)} \sigma_{zz,i}^{(j)}, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial W_i^{(j)}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial V_i^{(j)}}{\partial \zeta} = a_{44}^{(j)} \sigma_{yz,i}^{(j)}, \quad \Omega_*^2 = h^2 \Omega^2, \quad 2K_1 = k_1 h, \quad j = I, II; \quad i = 1, 2.$$

Решение внешней задачи будем искать в виде асимптотического представления

$$\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j)} = \varepsilon^{-1+s} \sigma_{\alpha\beta,i}^{(j,s)}, \quad \alpha, \beta = x, y, z; \quad s = \overline{0, N}, \quad (2.4)$$

$$(U_i^{(j)}, V_i^{(j)}, W_i^{(j)}) = \varepsilon^s (U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}), \quad j = I, II; \quad i = 1, 2.$$

$s = \overline{0, N}$  здесь и далее означает, что по нему (повторяющемуся) индексу  $s$  происходит суммирование в пределах целочисленных значений  $0, N$ .

Из асимптотики (2.4) следует, что в отличие от классической теории для данного класса задач все компоненты тензора напряжений асимптотически равноправны, равноправны также перемещения, и допущения классической теории пластин и оболочек здесь не применимы.

После подстановки (2.4) в преобразованные уравнения и соотношения упругости (2.3) компоненты тензора напряжений  $\sigma_{\alpha\beta,i}^{(j,s)}$  можно выразить через  $U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}$  по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,i}^{(j,s)} &= -A_{23}^{(j)} \frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial \zeta} + A_{22}^{(j)} \frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - A_{12}^{(j)} \frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{yy,i}^{(j,s)} &= -A_{13}^{(j)} \frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial \zeta} - A_{12}^{(j)} \frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + A_{33}^{(j)} \frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{zz,i}^{(j,s)} &= A_{11}^{(j)} \frac{\partial W_i^{(j,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(j)} \frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(j)} \frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial \eta}, \\ \sigma_{xy,i}^{(j,s)} &= \frac{1}{a_{66}^{(j)}} \left[ \frac{\partial U_i^{(j,s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial V_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right], \quad \sigma_{xz,i}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}} \left[ \frac{\partial U_i^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right], \\ \sigma_{yz,i}^{(j,s)} &= \frac{1}{a_{44}^{(j)}} \left[ \frac{\partial V_i^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad j = I, II; \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}^{(j)} &= \frac{a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} - a_{12}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{22}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{23}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{33}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{33}^{(j)} - a_{13}^{(j)2}}{\Delta^{(j)}}, \\ A_{12}^{(j)} &= \frac{a_{23}^{(j)} a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{33}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{13}^{(j)} = \frac{a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{13}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \quad A_{23}^{(j)} = \frac{a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)} - a_{12}^{(j)} a_{23}^{(j)}}{\Delta^{(j)}}, \\ \Delta^{(j)} &= a_{11}^{(j)} a_{22}^{(j)} a_{33}^{(j)} + 2a_{12}^{(j)} a_{13}^{(j)} a_{23}^{(j)} - a_{22}^{(j)} a_{13}^{(j)2} - a_{11}^{(j)} a_{23}^{(j)2} - a_{33}^{(j)} a_{12}^{(j)2}. \end{aligned}$$

Для определения функций  $U_i^{(j,s)}, V_i^{(j,s)}, W_i^{(j,s)}$ , ( $j = I, II; i = 1, 2$ ) получаются уравнения:

$$\frac{\partial^2 U_1^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^I (\rho^I (\Omega_*)^2 U_1^{(I,s)} + 2K_1 \Omega_* U_2^{(I,s)}) = R_{U_1}^{(I,s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_2^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^I \left( \rho^I (\Omega_*)^2 U_2^{(I,s)} - 2K_1 \Omega_* U_1^{(I,s)} \right) = R_{U_2}^{(I,s)},$$

$$\frac{\partial^2 U_i^{(II,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{II} \rho^{II} (\Omega_*)^2 U_i^{(II,s)} = R_{U_i}^{(I,s)}, \quad (U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}), \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

где

$$R_{U_i}^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - a_{55}^{(j)} \left[ \frac{\partial \sigma_{xx,i}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{xy,i}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad i = 1, 2$$

$$R_{V_i}^{(j,s)} = -\frac{\partial^2 W_j^{(j,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - a_{44}^{(j)} \left[ \frac{\partial \sigma_{xy,i}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_{yy,i}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right], \quad (2.7)$$

$$R_{W_j}^{(s)} = \frac{1}{A_{11}^{(j)}} \left( A_{23}^{(j)} \frac{\partial^2 U_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} + A_{13}^{(j)} \frac{\partial^2 V_i^{(j,s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \frac{\partial \sigma_{xz,i}^{(j,s-1)}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_{yz,i}^{(j,s-1)}}{\partial \eta} \right).$$

Очевидно, что  $R_{U_i}^{(j,0)} = R_{V_i}^{(j,0)} = R_{W_i}^{(j,0)} = 0$ ; ( $j = I, II$ ;  $i = 1, 2$ ).

Из (2.6) следует

$$U_2^{(I,s)} = -\frac{1}{2K_1 \Omega_* a_{55}^I} \left( \frac{\partial^2 U_1^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^I \rho^I (\Omega_*)^2 U_1^{(I,s)} - R_{U_1}^{(I,s)} \right),$$

$$(U, V; a_{55}^I, a_{44}^I)$$

$$W_2^{(I,s)} = -\frac{1}{2K_1 \Omega_*} \left( A_{11}^I \frac{\partial^2 W_1^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho^I (\Omega_*)^2 W_1^{(I,s)} - R_{W_1}^{(I,s)} \right), \quad (2.8)$$

а также

$$\frac{\partial^4 U_1^{(I,s)}}{\partial \zeta^4} + 2a_{55}^I \rho^I (\Omega_*)^2 \frac{\partial^2 U_1^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^{I^2} \left( \rho^{(I)^2} (\Omega_*)^2 + 4K_1^2 \right) (\Omega_*)^2 U_1^{(I,s)}$$

$$= \frac{\partial^2 R_{U_1}^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^I \rho^I (\Omega_*)^2 R_{U_1}^{(I,s)}$$

$$- 2K_1 a_{55}^I \Omega_* R_{U_2}^{(I,s)}, \quad (U, V; a_{55}^I, a_{44}^I)$$

$$\frac{\partial^4 W_1^{(I,s)}}{\partial \zeta^4} + \frac{2\rho^I (\Omega_*)^2 \partial^2 W_1^{(I,s)}}{A_{11}^I} + \frac{1}{A_{11}^{(I)^2}} \left( \rho^{(I)^2} (\Omega_*)^2 + 4K_1^2 \right) (\Omega_*)^2 W_1^{(I,s)} =$$

$$\frac{1}{A_{11}^I} \frac{\partial^2 R_{W_1}^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + \frac{\rho^I (\Omega_*)^2}{A_{11}^{(I)^2}} R_{W_1}^{(I,s)} - \frac{2K_1 \Omega_*}{A_{11}^{(I)^2}} R_{W_2}^{(I,s)}. \quad (2.9)$$

Решениями уравнений (2.9) являются:

$$U_1^{(j,s)} = U_{10}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{14}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W), \quad (2.10)$$

где величины с индексом “о” – решения однородных, а с индексом “ч” – частных неоднородных уравнений (2.9).

Решениями однородных уравнений являются:

$$U_{10}^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_{U_1}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{1U}^{(I)} + C_{U_2}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{2U}^{(I)} + C_{U_3}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{3U}^{(I)}$$

$$+C_{U4}^{(I,s)}(\xi, \eta)\varphi_{4U}^{(I)}, \quad (U, V, W),$$

$$U_{10}^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_{U11}^{(II,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II} \zeta} + C_{U21}^{(II,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II} \zeta}, \quad (2.11)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{1U}^{(I)} &= ch \gamma_U^I \zeta \cos \delta_U^I \zeta, \quad \varphi_{2U}^{(I)} = sh \gamma_U^I \zeta \sin \delta_U^I \zeta \\ \varphi_{3U}^{(I)} &= ch \gamma_U^I \zeta \sin \delta_U^I \zeta, \quad \varphi_{4U}^{(I)} = sh \gamma_U^I \zeta \cos \delta_U^I \zeta \\ \gamma_U^I &= \sqrt{\frac{a_{55}^I \Omega_*}{2} \left( \sqrt{\rho^{I2} (\Omega_*)^2 + 4K_1^2} - \rho^I \Omega_* \right)}, \\ \delta_U^j &= \sqrt{\frac{a_{55}^I \Omega_*}{2} \left( \sqrt{\rho^{I2} (\Omega_*)^2 + 4K_1^2} + \rho^I \Omega_* \right)} \\ &(U, V, W; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}). \end{aligned}$$

Одновременно имеем

$$\begin{aligned} U_2^{(j,s)} &= U_{20}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta) + U_{24}^{(j,s)}(\xi, \eta, \zeta) \quad (U, V, W), \\ U_{20}^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) &= -C_{U1}^{(I,s)}(\xi, \eta)\varphi_{2U}^{(I)} + C_{U2}^{(I,s)}(\xi, \eta)\varphi_{1U}^{(I)} + C_{U3}^{(I,s)}(\xi, \eta)\varphi_{4U}^{(I)} \\ &\quad - C_{U4}^{(I,s)}(\xi, \eta)\varphi_{3U}^{(I)}, \end{aligned}$$

$$U_{20}^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta) = C_{U12}^{(II,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II} \zeta} + C_{U22}^{(II,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II} \zeta}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xz,1}^{(I,s)} &= \frac{1}{a_{55}^I} [C_{U1}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{4U}^{(I)} - \delta_U^I \varphi_{3U}^{(I)}) + C_{U2}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{3U}^{(I)} + \delta_U^I \varphi_{4U}^{(I)}) + \\ &+ C_{U3}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{2U}^{(I)} + \delta_U^I \varphi_{1U}^{(I)}) + C_{U4}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{1U}^{(I)} - \delta_U^I \varphi_{2U}^{(I)})] + \sigma_{xz,14}^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) \\ \sigma_{xz,2}^{(I,s)} &= \frac{1}{a_{55}^I} [-C_{U1}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{3U}^{(I)} + \delta_U^I \varphi_{4U}^{(I)}) + C_{U2}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{4U}^{(I)} - \delta_U^I \varphi_{3U}^{(I)}) + \\ &C_{U3}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{1U}^{(I)} - \delta_U^I \varphi_{2U}^{(I)}) - C_{U4}^{(I,s)} (\gamma_U^I \varphi_{2U}^{(I)} + \delta_U^I \varphi_{1U}^{(I)})] + \sigma_{xz,24}^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta), \\ \sigma_{xz,1}^{(II,s)} &= \sqrt{\frac{\rho^{II}}{a_{55}^{II}}} \Omega_* C_{U11}^{(II,s)} \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II} \zeta} - \sqrt{\frac{\rho^{II}}{a_{55}^{II}}} \Omega_* C_{U21}^{(II,s)} \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II} \zeta} \\ &+ \sigma_{xz,14}^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (xz, 1 \rightarrow xz, 2; U11 \rightarrow U12; U21 \rightarrow U22; xz, 14 \rightarrow xz, 24) \end{aligned}$$

$$\sigma_{xz,i4}^{(j,s)} = \frac{1}{a_{55}^{(j)}} \left[ \frac{\partial U_{i4}^{(j,s)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial W_i^{(j,s-1)}}{\partial \xi} \right],$$

$$U_{24}^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2K_1 \Omega_* a_{55}^I} \left( \frac{\partial^2 U_{14}^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + a_{55}^I \rho^I (\Omega_*)^2 U_{14}^{(I,s)} - R_{U1}^{(I,s)} \right),$$

(x, y; U, V; a<sub>55</sub>, a<sub>44</sub>)

$$W_{2ч}^{(I,s)}(\xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{2K_j \Omega_*} \left( A_{11}^{(I)} \frac{\partial^2 W_{1ч}^{(I,s)}}{\partial \zeta^2} + \rho^{(I)} (\Omega_*)^2 W_{1ч}^{(I,s)} - R_{W1}^{(I,s)} \right),$$

$$\sigma_{zz, iч}^{(I,s)} = -A_{11}^{(I)} \frac{\partial W_{iч}^{(I,s)}}{\partial \zeta} - A_{23}^{(I)} \frac{\partial U_i^{(I,s-1)}}{\partial \xi} - A_{13}^{(I)} \frac{\partial V_i^{(I,s-1)}}{\partial \eta}; \quad i = 1, 2.$$

Удовлетворив граничным условиям (1.3) - (1.5), получим алгебраические системы относительно неизвестных функций

$$C_{U1}^{(j,s)}, C_{U2}^{(j,s)}, C_{U3}^{(j,s)}, C_{U4}^{(j,s)} (U, V, W; j = I, II).$$

Системы будут иметь конечные решения, если определители этих систем

$$\Delta_U = \cos(2\delta_U^I \zeta_1) + ch(2\gamma_U^I \zeta_1), \quad (2.13)$$

$$\zeta_1 = \frac{h_1}{h}, (U, V, W)$$

отличны от нуля:  $\Delta_U \neq 0, (U, V, W)$ . Учитывая структуру уравнений (2.13), заметим, что они не имеют действительных решений.

После решения этих систем получим значения функций  $C_{U1}^{(I,s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{U2}^{(I,s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{U3}^{(I,s)}(\xi, \eta)$ ,  $C_{U4}^{(I,s)}(\xi, \eta)$ ,  $(U, V, W)$  для компонент вектора перемещения первого слоя:

$$C_{U1}^{(I,s)}(\xi, \eta) = \frac{B_{11}^{(I)} \varphi_{1U}^{(I)}(\zeta_1) - B_{12}^{(I)} \varphi_{2U}^{(I)}(\zeta_1)}{\Delta_U},$$

$$C_{U2}^{(I,s)}(\xi, \eta) = \frac{B_{12}^{(I)} \varphi_{1U}^{(I)}(\zeta_1) + B_{11}^{(I)} \varphi_{2U}^{(I)}(\zeta_1)}{\Delta_U}$$

$$C_{U3}^{(I,s)}(\xi, \eta) = -\frac{\gamma_U^I \sigma_{xz, 1ч}^{(I,s)}(0) + \delta_U^I \sigma_{xz, 2ч}^{(I,s)}(0)}{\Omega_* \sqrt{\rho^{I2} (\Omega_*)^2 + 4K_1^2}},$$

$$C_{U4}^{(I,s)}(\xi, \eta) = \frac{\delta_U^I \sigma_{xz, 1ч}^{(I,s)}(0) - \gamma_U^I \sigma_{xz, 2ч}^{(I,s)}(0)}{\Omega_* \sqrt{\rho^{I2} (\Omega_*)^2 + 4K_1^2}}$$

$$B_{11}^{(I)} = U^{+(s)} - U_{1ч}^{(I,s)}(\zeta_1) - C_{U3}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{3U}^{(I)}(\zeta_1) - C_{U4}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{4U}^{(I)}(\zeta_1) \quad (2.14)$$

$$B_{12}^{(I)} = -U_{2ч}^{(I,s)}(\zeta_1) + C_{U4}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{3U}^{(I)}(\zeta_1) - C_{U3}^{(I,s)}(\xi, \eta) \varphi_{4U}^{(I)}(\zeta_1)$$

$$U^{+(0)} = U^+, \quad U^{+(s)} = 0, \text{ если } s \neq 0, (U, V, W)$$

и значения компонент вектора перемещения для второго слоя:

$$U_i^{(II,s)}(\xi, \eta, \zeta) = \left( \sigma_{xz, i}^{(I,s)}(\zeta_1) - \sigma_{xz, iч}^{(II,s)}(\zeta_1) \right) \sin \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} (\zeta - \zeta_1) +$$

$$\left( U^{+(s)} - U_{iч}^{(II,s)}(\zeta_1) \right) \cos \Omega_* \sqrt{a_{55}^{II} \rho^{II}} (\zeta - \zeta_1) + U_{iч}^{(II,s)}(\zeta), \quad (2.15)$$

$$(x, y, z; a_{55}, a_{44}, 1/A_{11}; U, V, W), \quad i = 1, 2$$

**3. Заключение.** Условиями возникновения резонанса рассматриваемого пакета являются уравнения  $\Delta_U = 0 (U, V, W)$ . Проанализировав эти уравнения, приходим к выводу, что при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое двухслойного ортотропного пакета данные уравнения не имеют действительных корней, вследствие чего амплитуды колебаний пакета остаются конечными.

Заметим, что в условия резонанса входят параметры только первого слоя, а на напряженно-деформированное состояние пакета влияют параметры всех слоев.

Таким образом, наличие вязкого сопротивления в верхнем слое рассматриваемых слоистых пакетов из ортотропных пластин приводит к тому, что внешнее воздействие может привести лишь к резонансу с конечными амплитудами колебаний.

Проводя мониторинг по данным измерительных приборов и следя за изменением напряженно-деформированного состояния пакета во времени, можно определить моменты, когда будет нарушена прочность контактной поверхности между некоторыми слоями пластинки, в результате чего произойдет разрыв и контакт будет неполный.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 22AA-2C008.

Армянский государственный педагогический  
университет им. Х. Абовяна  
e-mail: hambardzumyanparandzem@mail.ru

**П. Р. Амбарцумян**

### **Вынужденные колебания двухслойной пластинки при наличии данных о перемещении точек поверхности контакта**

Рассмотрены вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при наличии вязкого сопротивления в верхнем слое оболочки. Верхняя лицевая поверхность пластинки свободна, а значения компонент вектора перемещения сняты с поверхности контакта между слоями как данные измерительных приборов. Определены амплитуды колебаний и выведены условия возникновения резонанса. Асимптотическим методом получено решение соответствующих динамических уравнений и соотношений трехмерной задачи теории упругости.

**Փ. Ռ. Համբարձումյան**

### **Երկշերտ սալի ստիպողական տատանումները կոնտակտի մակերևույթի կետերի տեղափոխությունների տվյալների ամկայության դեպքում**

Դիտարկված են երկշերտ օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները վերին շերտում մածուցիկ դիմադրության ամկայության դեպքում: Սալի վերին դիմային մակերևույթն ազատ է, իսկ տեղափոխության վեկտորի բաղադրիչների արժեքները

վերցված են շերտերի կոնտակտի մակերևույթից՝ որպես չափիչ սարքերից ստացված տվյալներ: Դուրս են բերված ռեզոնանսի առաջացման պայմանները, և արտածված են տատանման ամպլիտուդները: Ասիմպտոտիկ մեթոդի կիրառմամբ ստացված են առաձգականության տեսության եռաչափ խնդրի համապատասխան դինամիկ հավասարումների և առնչությունների լուծումները:

**P. R. Hambardzumyan**

### **Forced Vibrations of a Double-Layer Plate in the Presence of Data about the Movement of Contact Surface Points**

Forced vibrations of a two-layered orthotropic plate in the presence of viscous resistance in the upper shell layer are considered. The upper front surface of the plate is free, and the values of the displacement vector components are taken from the contact surface between the layers, as data from measuring instruments. The amplitudes of vibrations are determined and the conditions for the occurrence of resonance are derived. Using the asymptotic method, a solution to the corresponding dynamic equations and relations of the three-dimensional problem of elasticity theory is obtained.

### **Литература**

1. *Пановко Я. Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М. Физматгиз. 1960. 196 с.
2. *Григорюк Э. И., Коган Е. А.* В кн.: Механика оболочек и пластин в XXI веке. Межвуз. науч. сб. Саратовский гос. техн. ун-т. 1999. С. 3-30.
3. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Панкратова Н. Д.* Задачи теории упругости неоднородных тел. Киев. Наукова думка. 1991. 216 с.
4. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. М. Машиностроение. 1980. 375 с.
5. *Reddy J. N.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis. CRC Press. Boca Raton, FL, Second Edition. 2004. P. 831.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М. Наука. 1976. 512 с.
7. *Aghalovyan L. A.* Asymptotic Theory of Anisotropic Plates and Shells. Singapore, London. World Scientific. 2015. 376 p.
8. *Агаловян Л. А.* – Механика композитных материалов. 2011. Т. 47. № 1. С. 85–102.
9. *Агаловян Л. А., Тагворян В. В.* Об одной задаче сейсмологии для слоистых пластин. Проблемы механики деформируемого твёрдого тела. Ереван. Гитутюн. 2017. С. 24-35.
10. *Гулгазарян Л. Г., Амбарцумян П. Р.* – Доклады НАН РА. 2020. Т. 120. № 3. С. 181-190.
11. *Aghalovyan L. A., Ghulghazaryan L. G., Kaplunov J. D. et al.* – J. Math. Sciences. 2023. V. 273. P. 999-1015. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06560-5>



лическими заземленными ленточными штампами с нулевыми потенциалами. На граничных полосах ( $|x| < a, y = h, |z| < \infty$ ) и ( $|x| < b, y = -h, |z| < \infty$ ) расположены электроды с потенциалами  $\varphi_+(x)$  и  $\varphi_-(x)$  соответственно. При этом посредством этих же электродов возможно сформулировать соответствующие механические граничные условия (напряжения или перемещения), если принять их в качестве жесткого штампа или тонкого металлизированного слоя с нулевой жесткостью.

Рассмотрим задачу распространения электроупругой волны в указанной выше конструкции, когда со стороны левой части волновода ( $x < 0$ ) из бесконечности по направлению оси  $Ox$  набегают проходящая гармоническая, чисто сдвиговая, плоская упругая волна антиплоской деформации (SH-волна) с сопутствующим потенциалом электрического поля:

$$w_N^{(\infty)}(x, y) = C_N e^{i\gamma_N x} \sin \lambda_N (y - h); \quad \varphi_N^{(\infty)} = \frac{e_{15}}{\epsilon_{11}} w_N^{(\infty)}(x, y) \quad (2.1)$$

$$\gamma_N = \sqrt{k^2 - \lambda_N^2}; \quad \lambda_N = \pi N / 2h; \quad k > \lambda_N; \quad N = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Здесь  $w(x, y)$  – амплитуда единственного, отличного от нуля, компонента упругого перемещения  $U_z(x, y, t) = w(x, y)e^{-i\omega t}$ ,  $\varphi(x, y)$  – амплитуда потенциала электрического поля,  $\omega$  – частота колебаний падающей волны,  $t$  – время,  $C_N$  – постоянная,  $k = \omega/c$  – волновое число,  $c = \sqrt{\mu/\rho}$  – скорость распространения сдвиговой волны в слое,  $e_{15}$  – пьезомодуль,

$\epsilon_{11}$  – диэлектрическая постоянная слоя,  $N$  – натуральное число, удовлетворяющее условию  $N < 2kh$ , которое обеспечивает условие проходящей волны (1.1) [1,2]. Отметим, что в (1.1) и в дальнейшем гармонический множитель  $e^{i\omega t}$  опускается, т.е. задача решается в амплитудах. Отметим также, что рассматриваемый слой-волновод по своим краевым поверхностям  $y = \pm h$  контактирует с вакуумом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_0$ .

Полагая, как отмечалось выше, что слой находится в условиях антиплоской деформации, которая характеризуется тем, что волна поляризуется в направлении  $z$ , но распространяется в плоскости  $(x, y)$ , требуется определить электроупругое волновое поле в слое  $|y| < h$  и в вакууме  $|y| > h$ , амплитуды касательных напряжений под штампами, число отраженных и проходящих волн и их волновые характеристики в зависимости от физических и геометрических параметров волновода и внешних нагрузок.

Решение поставленной задачи сводится к следующей краевой задаче относительно амплитуд упругого перемещения  $w(x,y)$  и потенциалов электрического поля в слое  $\varphi(x,y)$  и в вакууме  $\varphi_0(x,y)$ :

$$\Delta w(x,y) + k^2 w(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega \quad (2.3)$$

$$\Delta \varphi(x,y) + (e_{15} k^2 / \varepsilon_{11}) w(x,y) = 0,$$

$$\Delta \varphi_0(x,y) = 0, \quad (-\infty < x < \infty, |y| > h) \quad (2.4)$$

$$w(x, \pm h) = 0, \quad \begin{cases} |x| \geq a, & y = h \\ |x| \geq b, & y = -h \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{yz}(x, \pm h) = G_{44} \begin{cases} q_+(x), & |x| < a \\ q_-(x), & |x| < b \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\varphi(x, \pm h) = \varphi_0(x, \pm h) = \begin{cases} [H(x+a) - H(x-a)] \varphi_+(x), & y = h \\ [H(x+b) - H(x-b)] \varphi_-(x), & y = -h \end{cases}, \quad (2.7)$$

где  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа,  $H(x)$  – функция Хевисайда,

$G_{44} = \mu$  – модуль сдвига материала слоя,  $q_{\pm}(x)$  – заданные функции,  $\varphi_+(x), \varphi_-(x)$  – заданные значения электрического потенциала на электродах.

**3. Вывод определяющих уравнений.** Доопределим смешанное граничное условие (2.5) – (2.6) условиями:

$$w(x, \pm h) = \begin{cases} [H(x+a) - H(x-a)] g_+(x) \\ [H(x+b) - H(x-b)] g_-(x) \end{cases}, \quad |x| < \infty \quad (3.1)$$

где  $g_{\pm}(x)$  – неизвестные функции.

Построим решение краевой задачи (2.3)-(2.4), (2.7), (3.1). Введем, как обычно, функции

$$\begin{aligned} W(x,y) &= w(x,y) - w_N^{(\infty)}(x,y), \\ \Phi(x,y) &= \varphi(x,y) - \varphi_N^{(\infty)}(x,y), \end{aligned} \quad (x,y) \in \Omega \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (2.3), после преобразования Фурье приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{W}}{dy^2} - \gamma^2 \bar{W}(\sigma, y) &= 0, & |y| < h, \quad |\sigma| < \infty \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}^2}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}(\sigma, y) + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{W}(\sigma, y) &= 0, & |y| < h, \quad |\sigma| < \infty \\ \frac{d^2 \bar{\Phi}_0}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\Phi}_0(\sigma, y) &= 0, & |y| > h, \quad |\sigma| < \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

где  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ ,  $\bar{f}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\sigma x} dx$ .

Общее решение системы (3.3) имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{W}(\sigma, y) &= A \operatorname{ch}(\gamma y) + B \operatorname{sh}(\gamma h) \\ \bar{\Phi}(\sigma, y) &= C \operatorname{ch}(\gamma y) + D \operatorname{sh}(\gamma y) + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{W}(\sigma, y) \\ \bar{\Phi}_0(\sigma, y) &= E e^{-|\sigma|y} + F e^{|\sigma|y} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где коэффициенты  $A - F$ , подлежащие определению, – постоянные интегрирования.

При помощи (3.2) и (3.4), удовлетворяя граничным условиям (2.7) и (3.1), для решения краевой задачи (2.3), (2.7), (3.1) после некоторых несложных выкладок получаем:

$$w(x, y) = \int_{-a}^a J_+(x - \xi, y) g_+(\xi) d\xi + \int_{-b}^b J_-(x - \xi, y) g_-(\xi) d\xi + w_N^{(\infty)}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.5)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(x, y) + \int_{-a}^a I_+(x - \xi, y) \varphi_+(\xi) d\xi + \int_{-b}^b I_-(x - \xi, y) \varphi_-(\xi) d\xi, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.6)$$

$$\varphi_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \left[ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} g_+(\xi) + \varphi_+(\xi) \right] \frac{(y-h) d\xi}{(x-\xi)^2 + (y-h)^2}, & y > h \\ \frac{1}{\pi} \int_{-b}^b \left[ \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} g_-(\xi) + \varphi_-(\xi) \right] \frac{(y+h) d\xi}{(x-\xi)^2 + (y+h)^2}, & y < -h \end{cases} \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}
J_{\pm}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh} \gamma(h \pm y)}{\text{sh}(2\gamma h)} e^{-i\sigma z} d\sigma \\
I_{\pm}(z, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sh} |\sigma|(h \pm y)}{\text{sh} 2|\sigma|h} e^{-i\sigma z} d\sigma
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\gamma = \sqrt{\sigma^2 - k^2} = \begin{cases} \sqrt{\sigma^2 - k^2}, & \sigma > k \\ i\sqrt{k^2 - \sigma^2}, & \sigma < k \end{cases} \tag{3.9}$$

Имея в виду соотношение

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{x^2 + y^2} = \pi \delta(x),$$

где  $\delta(x)$  – известная дельта-функция Дирака, нетрудно убедиться, что решения (3.5)-(3.7) удовлетворяют граничным условиям (2.7), (3.1) и, тем самым, условию (2.5).

В тех случаях, когда функции  $g_{\pm}(x)$  считаются заданными, волновое поле можно вычислить непосредственно при помощи (3.5).

Для определения  $g_{\pm}(x)$  обратимся к граничному условию (2.6), которое представим в виде

$$\left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm 0} = q_{\pm}(x), \quad \begin{cases} |x| < a, & y = h \\ |x| < b, & y = -h \end{cases} \tag{3.10}$$

Подставляя сюда выражения  $w(x, y)$  и  $\varphi(x, y)$  из (3.5) и (3.6), после несложных выкладок для определения неизвестных  $g_{\pm}(x)$  придем к системе интегральных уравнений первого рода:

$$\begin{cases} \int_{-a}^a K_{11}(x-t) g_+(t) dt - \int_{-b}^b K_{12}(x-t) g_-(t) dt = R_1(x), & |x| < a, \\ \int_{-a}^a K_{21}(x-t) g_+(t) dt - \int_{-b}^b K_{22}(x-t) g_-(t) dt = R_2(x), & |x| < b, \end{cases} \tag{3.11}$$

где

$$K_{11}(z) = K_{22}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma(\sigma) \operatorname{cth}(2h\gamma) \cos(\sigma z) d\sigma \quad (3.12)$$

$$K_{21}(z) = K_{12}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma(\sigma)}{\operatorname{sh}(2h\gamma)} \cos(\sigma z) d\sigma$$

$$R_1(x) = \int_{-a}^a \Lambda_{11}(x-t) \varphi_+(t) dt - \int_{-b}^b \Lambda_{12}(x-t) \varphi_-(t) dt + M_{11} q_+(x) - f_N(x)$$

$$R_2(x) = \int_{-a}^a \Lambda_{21}(x-t) \varphi_+(t) dt - \int_{-b}^b \Lambda_{22}(x-t) \varphi_-(t) dt + M_{22} q_-(x) - (-1)^N f_N(x) \quad (3.13)$$

$$\Lambda_{11}(z) = \Lambda_{22}(z) = \frac{\Lambda_0}{\pi} \int_0^{\infty} \sigma \operatorname{cth}(2|\sigma|h) \cos(\sigma z) d\sigma \quad (3.14)$$

$$\Lambda_{21}(z) = \Lambda_{12}(z) = \frac{\Lambda_0}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma \cos(\sigma z)}{\operatorname{sh}(2h\sigma)} d\sigma.$$

$$f_N(x) = C_N \lambda_N e^{i\lambda_N x}, \quad M_{11} = M_{22} = \frac{1}{1+k_{15}^2}, \quad (3.15)$$

$$\Lambda_0 = \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}} \frac{k_{15}^2}{1+k_{15}^2}; \quad k_{15}^2 = \frac{e_{15}^2}{G_{44} \varepsilon_{11}}$$

Система интегральных уравнений (3.11) при заданных граничных функциях  $s$  и  $f_N(x)$  представляет собой определяющую систему уравнений поставленной задачи. Полученные из (3.11) решения  $g_{\pm}(x)$  совместно с выражениями (3.5) - (3.7) дают окончательное решение задачи, т.е. распределение электроупругого поля в рассматриваемых областях.

Ядра (3.12) и свободные члены (3.13) системы интегральных уравнений (3.11) представляются при помощи несобственных интегралов, в структурах которых фигурирует и ветвящаяся функция  $\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ . Вопросы, связанные с вычислением или оценкой этих интегралов и исходя из этого определения рода и структуры ее решения, будут рассмотрены далее.

Следует отметить, что полученная определяющая система интегральных уравнений (3.11) может быть использована при другой постановке задачи, если в представлении (2.7) принять, что функции неизвестны. Для решения задачи в этой постановке следует к системе (3.11), считая в ней  $\varphi_{\pm}(x)$  неизвестными, присоединить еще два интегральных уравнения, получаемых из условий:

$$\left( \varepsilon_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right) \Big|_{y=\pm h} = 0, \quad \begin{cases} |x| < a, & y = h, \\ |x| < b & y = -h, \end{cases} \quad (3.16)$$

отражающих условие равенства электрических индукций на соответствующих контактных интервалах краев волновода с вакуумом.

В этом случае получим определяющую систему из четырех интегральных уравнений.

**4. Решение краевой задачи (2.3) - (2.7).** Обратимся к выражениям  $w(x, y), \varphi(x, y)$  из (3.5), (3.6), ядрам  $K_{ij}(x-t)$  из (3.12) и свободным членам (3.13). Во все эти выражения, как уже отмечалось, входят несобственные интегралы с ветвящейся функцией  $\gamma = \sqrt{\sigma^2 - k^2}$ .

Более эффективное представление волнового поля можно получить, если для вычисления интеграла  $J_{\pm}(z, y)$  из (3.8) применить метод интегрирования по вычетам.

Имея в виду, что подынтегральная функция  $\text{sh}[\gamma(h \pm y)]/\text{sh}(2\gamma h)$ , четная по  $\sigma$ , является целой функцией с простыми полюсами и точками ветвления  $\sigma = \pm k$ , после несложных вычислений для  $w(x, y)$  и аналогичным образом для  $\varphi(x, y)$ , придем к следующим разложениям по модам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{i\lambda_m}{2h\alpha_m} \left\{ \sin(\lambda_m(h+y)) \int_{-a}^a g_+(\xi) e^{i\alpha_m|x-\xi|} d\xi + \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m(h-y)) \int_{-b}^b g_-(\xi) e^{i\alpha_m|x-\xi|} d\xi \right\} + w_N^{(\infty)}(x, y), \quad \begin{cases} |y| < h \\ |x| < \infty \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\varphi(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} w(x, y) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{i}{2h} \left\{ \sin \lambda_m(h+y) \int_{-a}^a \varphi_+(\xi) e^{i\lambda_m|x-\xi|} d\xi + \right. \\ \left. + \sin(\lambda_m(h-y)) \int_{-b}^b \varphi_-(\xi) e^{i\lambda_m|x-\xi|} d\xi \right\} \quad \begin{cases} |y| < h \\ |x| < \infty \end{cases} \quad (4.2)$$

где

$$\alpha_m = \sqrt{k^2 - \lambda_m^2}; \quad \lambda_m = \pi m / 2h. \quad (4.3)$$

Сходимость рядов в (4.1) и (4.2) следует понимать в обобщенном смысле. Имея  $g_{\pm}(t)$  и  $\varphi_{\pm}(t)$ , по этим формулам можно вычислить электроупругое волновое поле в волноводе при  $|y| < h$  и контактные напряжения на участках  $(a < |x| < \infty; y = \pm h)$ .

Из разложений (4.1) и выражения (4.3) следует, что, если частота

меньше определенной положительной величины, которая в рассматриваемом случае равна  $\pi/2$ , то в волноводе могут существовать лишь волны, экспоненциально затухающие с расстоянием  $|x - \xi|$ . В противном случае, если волновое число достаточно велико, существует конечное число незатухающих проходящих волн.

Обратимся к ядрам (3.12) и свободным членам (3.13). Они слишком сложны, чтобы трактовать их в простом смысле, как в случае с (3.8).

Для получения более приемлемых результатов при конкретных вычислительных процедурах следует упростить их, применяя подход регуляризации расходящихся интегралов, основанный на теории обобщенных функций [5,13,14]. При помощи этих методов удалось получить следующие представления для  $K_{11}(z)$  и  $\Lambda_{11}(z)$ :

$$K_{11}(z) = K_{22}(z) = -\frac{2}{|z|^2} + k^2 [C + \ln|kz|] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (kz)^{2n}}{2n! 2n} + R(z) \quad (4.4)$$

$$K_{21}(z) = K_{12}(z) = 2 \int_0^k \frac{\sqrt{k^2 - \sigma^2} \cos(\sigma z)}{\sin(2h\sqrt{k^2 - \sigma^2})} d\sigma + 2 \int_k^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma^2 - k^2} \cos(\sigma z)}{\text{sh}(2h\sqrt{\sigma^2 - k^2})} d\sigma \quad (4.5)$$

$$\Lambda_{11}(z) = -\frac{2}{|z|^2} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sigma \cos(\sigma z)}{e^{3\sigma h} \text{sh}(\sigma h)} d\sigma \quad (4.6)$$

$$R(z) = -k^4 \int_k^{\infty} \frac{\cos(\sigma z) d\sigma}{\sigma [\sigma + \sqrt{\sigma^2 - k^2}]^2} - 2i \int_0^k [\sqrt{k^2 - \sigma^2} - i\sigma] \cos(\sigma z) d\sigma + \quad (4.7)$$

$$+ 2 \int_0^k \sqrt{k^2 - \sigma^2} [\text{tg}(2h\sqrt{k^2 - \sigma^2} - i)] \cos(\sigma z) d\sigma + 4 \int_k^{\infty} \frac{\sqrt{\sigma^2 - k^2} \cos(\sigma z) d\sigma}{e^{4h\sqrt{\sigma^2 - k^2}} [1 - e^{2h\sqrt{\sigma^2 - k^2}}]}$$

где  $C = 0.5772\dots$  – постоянная Эйлера.

Представление (4.4) показывает, что ядра системы интегральных уравнений представляются в виде суммы гиперсингулярной, слабосингулярной (логарифмической) и регулярных частей.

Построение решения интегральных уравнений с гиперсингулярным и сингулярным ядром с выделенной особенностью в виде весовой функции ортогональных многочленов исследовано в [17, 18].

**5. Численный анализ частного случая рассматриваемой задачи**  
 $b = 0$ ,  $q_+(x) = 0$ ,  $\varphi_+(x) = 0$ . Для определения  $g_+(x)$  придем к следующему интегральному уравнению первого рода с ядром (4.4):

$$\int_{-a}^a K_{11}(x - \xi) g_+(\xi) d\xi = C_N \lambda_N e^{i\lambda_N x}, \quad |x| < a \quad (5.1)$$

при дополнительном условии

$$g_+(-a) = g_+(a) = 0. \quad (5.2)$$

Перейдем к безразмерным величинам, отнеся все линейные величины к ширине слоя-волновода  $h$  и сведем уравнение (5.1) к интервалу  $(-1, 1)$ .

Далее, разыскивая безразмерную искомую функцию  $g_+^*(\eta) = \frac{1}{a} g_+(a\eta)$  в виде

$$g_+^*(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) \quad (-1 < \eta < 1) \quad (5.3)$$

и используя результаты работ [17, 18], решение уравнения (4.6) с условиями (4.7) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно значений  $\psi(\eta_i)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) новой искомой функции  $\psi(\eta)$  в корнях многочлена Чебышева второго рода  $U_n(\eta)$ . Эта система здесь не приводится ввиду громоздкости.

После определения функции  $g_+^*(\eta)$  волновое поле  $w^{(-)}(x, y)$  в области  $(x < -a)$  и  $w^{(+)}(x, y)$  в области  $(x > a)$  можно определить по формуле

$$w^{(\pm)}(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m^{(\pm)} \sin(\lambda_m(h+y)) e^{\pm i\alpha_m \frac{x}{h}} + C_N e^{i\gamma_N x} \sin \lambda_N(y-h) \quad (|x > a|), \quad (5.4)$$

где

$$A_m^{(\pm)} = (-1)^{m+1} \frac{i\lambda_m}{2\alpha_m^*} \int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) e^{\mp i\alpha_m^* \eta} d\eta, \quad \alpha_m^* = \sqrt{(kh)^2 - \left(\frac{\pi m}{2}\right)^2} \quad (5.5)$$

амплитуды проходящих и отраженных волн.

Из (5.5) нетрудно заметить, что, в общем случае при  $\alpha_m^* \rightarrow 0$   $\left(kh \rightarrow \frac{\pi m}{2}\right)$  амплитуды  $A_m^{(\pm)}$  будут неограниченно возрастать, что приводит к явлению резонанса. Однако если решение уравнения (5.1) удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) d\eta = 0, \quad (5.6)$$

то явление резонанса подавляется.

На рис.1, *a*) и *б*) представлены вещественные (сплошные линии) и мнимые (пунктирные линии) части  $g_+^*(\eta)$  при  $N=1$  и различных зна-

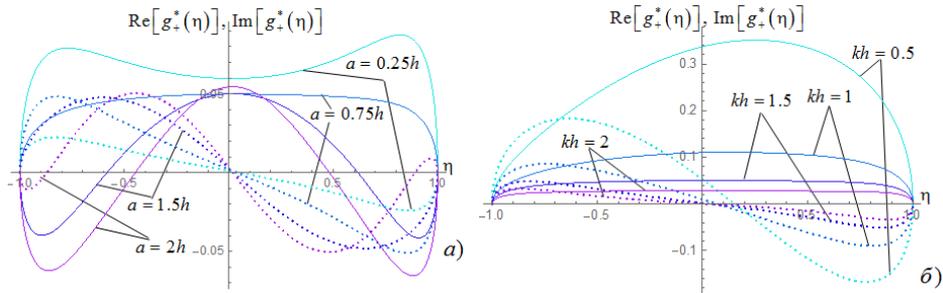


Рис. 1. Вещественные и мнимые части  $g_+^*(\eta)$  при  $N = 1$ .

чениях параметра  $a = 0.25h, 0.75h, 1.5h, 2h$  при  $kh = 1.5$  и различных значениях параметра  $kh = 0.5, 1, 1.5, 2$  при  $a = 0.75h$ .

Судя по графикам рис.1,а), выполнение условия (5.6) возможно при значениях  $a/h$ , близких к двум. Численные расчеты показали, что при  $a = 1.7869h$  интеграл в условии (5.6) принимает значение

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-\eta^2} \psi(\eta) d\eta = 5.36 \times 10^{-6} + 5.04 \times 10^{-4} i. \quad (5.7)$$

Похожие значения для этого интеграла имеют место и при других, больших, значениях параметра  $a$ .

Подобные расчеты при других значениях  $kh$  показали, что между  $kh$  и  $a/h$ , при котором выполняется условие (5.6), имеет место обратная зависимость. Из рис. 1,б) можно сделать вывод, что при  $a = 0.75h$  увеличение параметра  $kh$  не приводит к нулевому значению интеграла (5.6). Из сказанного следует, что существует такое значение  $a_*$ , при котором, если  $a < a_*$ , явление резонанса имеет место при любых значениях  $kh$ .

На рис. 2 представлены кривые зависимости модуля амплитуды проходящей волны при  $N = 1$  (пунктирные линии) и  $N = 2$  (сплошные линии) при разных значениях параметра  $a = h, 2h$ . Как видно из рисунка, увеличение параметра  $a$  приводит к сближению кривых, соответствующих разным значениям  $N$ . Похожая картина имеет место и для амплитуд отраженных волн  $A_m^-$ .

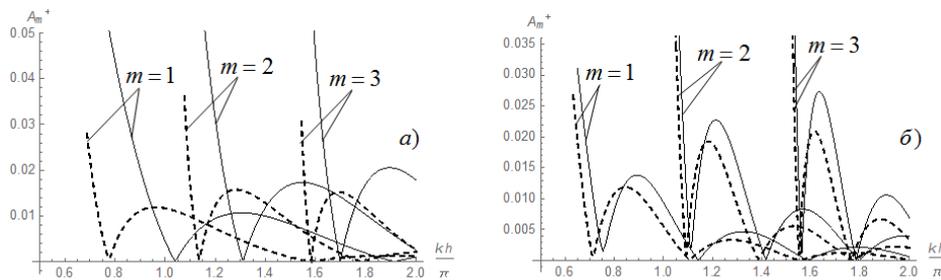


Рис. 2. Модуль амплитуды проходящей волны  $|A_m^+|$  при  $a = h$  и  $a = 2h$ .

**Заключение.** Исследованы вопросы, связанные с распространением сдвиговой электроупругой волны в пьезоэлектрическом слое-волноводе при смешанных граничных условиях на граничных поверхностях волновода. Решение задачи сведено к системе интегральных уравнений первого рода с гиперсингулярными ядрами. Получены явные выражения для амплитуд электроупругих перемещений и электрического потенциала в виде разложения по модам. По этим формулам, имея решения интегральных уравнений, можно непосредственно вычислить основные параметры, характеризующие электроупругое волновое поле в волноводе и электрическое поле в контактирующих с волноводом вакуумных полупространствах.

Для одного частного случая рассмотренной задачи проведен численный расчет. Построены графики, показывающие распределение неизвестных перемещений на участке между полубесконечными штампами для конкретных значений внешних параметров задачи. Графики, в частности, указывают на возможность отсутствия резонанса при соответствующем сочетании параметров  $N$ ,  $kh$  и  $a/h$ . Построены также графики зависимости модуля амплитуды проходящих волн от параметра  $kh$  для разных значений параметра  $a/h$ .

Институт механики НАН РА  
e-mail: karo.aghayan@gmail.com

**К. Л. Агаян**

### **Плоская сдвиговая волна в пьезоэлектрическом слое со смешанными граничными условиями**

В рамках антиплоской деформации исследуется динамическая контактная задача о направленном распространении плоских сдвиговых электроупругих волн в слое со смешанными граничными условиями. Рассматривается случай, когда на граничных плоскостях смешанными являются как механические, так и электрические условия. Решение задачи в общем случае сводится к системе из четырех интегральных уравнений с гиперсингулярными ядрами. Получены явные выражения волновых функций, представляющих поле электроупругих перемещений в

волноводе и электрическое поле в контактирующих с волноводом вакуумных полупространствах.

**Կ. Լ. Աղայան**

**Սահքի հարթ ալիքը խառը եզրային պայմաններով  
պիեզոէլեկտրական շերտում**

Հակահարթ դեֆորմացիայի շրջանակներում հետազոտվում է դինամիկ կոնտակտային խնդիր խառը եզրային պայմաններով շերտում հարթ էլեկտրաառաձգական սահքի ալիքի տարածման վերաբերյալ: Դիտարկվում է այն դեպքը, երբ սալի եզրային մակերևույթների վրա խզվում են ինչպես մեխանիկական, այնպես էլ էլեկտրական պայմանները: Ընդհանուր դեպքում խնդրի լուծումը բերվում է հիպերսինգուլյար կորիզով չորս ինտեգրալ հավասարումներից կազմված համակարգի: Ստացվել են բացահայտ արտահայտություններ շերտի էլեկտրաառաձգական տեղափոխությունների և ալիքատարի հետ փոխազդող վակուումային կիսատարածություններում էլեկտրական դաշտը ներկայացնող ալիքային ֆունկցիաների համար:

**K. L. Aghayan**

**Plane Shear Wave in a Piezoelectric Layer with  
Mixed Boundary Conditions**

Within the framework of antiplane deformation, the dynamic contact problem of the directed propagation of plane shear electroelastic waves in a layer with mixed boundary conditions is studied. The case is considered when both mechanical and electrical conditions are mixed on the boundary planes. The solution of the problem, in the general case, is reduced to a system of four integral equations with hypersingular kernels. Explicit expressions are obtained for the wave functions representing the field of electroelastic displacements in the waveguide and the electric field in the vacuum half-spaces in contact with the waveguide.

**Լիտերատուրա**

1. *Нобл Б.* Метод Винера – Хопфа. М. Мир. 1962. 297 с.
2. *Миттра Р., Ли С.* Аналитические методы теории волноводов. М. Мир. 1974. 327 с.
3. *Балакирев М. К., Гихинский И. А.* Волны в пьезокристаллах. Новосибирск. Наука. 1982. 240 с.
4. *Бардзокас Д. И., Кудравцев Б. А., Сенник Н. А.* Распространение волн в электромагнитоупругих средах. М. Эдиториал УРСС. 2003. 336 с.
5. *Сумбатьян М. А., Скалия А.* Основы теории дифракции с приложениями в механике и акустике. М. Физматлит. 2013. 328 с.
6. *Мелешко В. В., Бондаренко А. А. и др.* – Математические методы и физико-механические поля. 2008. Т.5 1. № 2, с. 86-104; №4, с. 163-180.
7. *Григорян Э. Х., Агаян К. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т. 60 № 3. С. 23-28.

8. *Агаян К. Л.* – Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2011. № 1. С. 13-18.
9. *Piliposyan D. G., Ghazaryan R. A., Ghazaryan K. B.* – Proc. of NAS RA. Mechanics. 2014. V. 67. № 3. P. 40-48.
10. *Avetisyan A. S., Hunanyan A. A.* – Proc. of NAS RA. Mechanics. 2017. V. 70. № 2. P. 28-42.
11. *Агаян К. Л.* В кн.: Тр. X Междунар. конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред». Ереван. С. 19-23.
12. *Саакян С. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика 2019, Т. 72. № 2. С. 48-56. <http://doi.org/10.33018/72.2.4>.
13. *Агаян К. Л.* – Изв. НАН Армении. Механика. 2020. Т. 73. № 2. С. 22-34. <http://doi.org/10.33018/73.2.2>.
14. –*А. С., Саакян С. Л.* – Доклады НАН РА. 2023. Т. 123. № 1. С. 12-20.
15. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 1. М. Физматгиз. 1958. 440 с.
16. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М. Наука. 1977. 287 с.
17. *Amirjanyan H. A., Sahakyan A. V., Kukudzhanov A. K.* – J. Phys. 2022. Conf. Ser. **2231** 012020. <https://doi:10.1088/1742-6596/2231/1/012020>.
18. *Sahakyan A. V., Amirjanyan H. A.* In: Solid Mechanics, Theory of Elasticity and Creep. book series Advanced Structured Materials (STRUCTMAT, volume 185), Editors: H. Altenbach, S. Mkhitaryan, V. Hakobyan, A. Sahakyan. 2023. P. 285-298. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-031-18564-9_21).

А. Г. Степанян

## Совместное влияние ограничения акустических фононов и спин-орбитального взаимодействия на скорость потерь энергии горячими электронами в нанопроволоке

(Представлено чл.-кор. НАН РА А. А. Киракосяном 13/XI 2023)

**Ключевые слова:** горячие электроны, акустические фононы, скорость потерь энергии, спин-орбитальное взаимодействие.

**1. Введение.** Проблема генерации горячих электронов, управление временем их жизни и участием в физических процессах остается актуальной [1]. В современных быстродействующих устройствах, работающих на основе твердотельных наноструктур (НС) под воздействием внешних полей, а также инжекции, формируется неравновесная система свободных носителей заряда (НЗ), в которых вследствие электрон-электронного взаимодействия за время пикосекунды устанавливается электронная температура  $T_e$ , превышающая температуру решетки  $T_L$  [2, 3]. Скорость потерь энергии системой горячих НЗ в твердотельных НС за счет рассеяния на полярных оптических и акустических фононах интенсивно исследовалась с учетом влияния пространственного ограничения на фоновые спектры [4-12]. Было показано, что рассеяние электронов на акустических фононах играет центральную роль в скорости потерь энергии при температурах ниже 25К [4]. Следует также отметить, что спин-орбитальное взаимодействие (СОВ) является важным инструментом с точки зрения возможности управления и манипулирования спиновыми степенями свободы в низкоразмерных системах [13]. СОВ в НС является следствием инверсионной асимметрии либо потенциального поля активной области структуры, либо потенциала, ограничивающего движение НЗ заряда. В первом случае это явление известно как СОВ Дрессельхауса [14], а во втором – как СОВ Рашбы [15]. Важно отметить, что СОВ Рашбы и Дрессельхауса можно контролировать с помощью внешнего напряжения и конструкции НС, соответственно [16].

В представленной работе впервые теоретически анализируется совместное влияние СОВ и ограничения акустических фононов на скорость

потерь энергии системой горячих НЗ в нанопроволоке (НП). Результаты исследования обоих эффектов могут быть использованы в конкретных применениях НП в высокоскоростных полевых устройствах.

**2. Теория.** Состояния электрона в НП, ограниченной параболическим потенциалом с частотой  $\omega_0$ , погруженной в диэлектрическую среду в однородном электрическом поле  $\mathbf{F}$ , перпендикулярном оси НП (ось  $x$ ), и соответствующие собственные значения энергии имеют вид [17, 18]:

$$\phi_{nmk\zeta}(x, \rho, \theta) = C_{nm} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) \rho^{|m|} L_n^{|m|}(\rho^2) \exp[i(kx + m\theta)] \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 + \zeta \sin\varphi}} \left(\frac{\sin\varphi + \zeta}{\cos\varphi}\right), \quad (1)$$

$$E_{nmk\zeta} = \hbar\omega_0(2n + |m| + 1) - \frac{1}{2} eFr_F + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} + \zeta k \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (2)$$

где  $\rho = \sqrt{r^2 + r_F^2 - 2rr_F \cos\theta}/r_0$ ,  $r_0 = (\hbar/m^*\omega_0)^{1/2}$ ,  $r_F = eF/(m^*\omega_0^2)$ ,  $m^*$  – эффективная масса электрона,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ,  $\zeta = \pm 1$  – квантовые числа,  $L_n^{|m|}(\rho)$  – обобщенные полиномы Лагерра,  $k$  – волновое число электрона вдоль оси  $x$ ,  $\tan\varphi = \alpha/\beta$ ,  $\alpha(\beta)$  – параметр Рашбы (Дресельхауса) [14, 15],  $C_{nm}$  – коэффициенты нормировки [18].

В рамках модели деформационного потенциала взаимодействие электрона с акустическими фононными модами описывается гамильтонианом  $H_{el-ph} = E_d \text{div} \mathbf{U}(\mathbf{r})$ , где  $E_d$  – константа потенциала деформации, а  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  – вектор смещения. В рамках этой модели вклад в гамильтониан взаимодействия вносят только дилатационные акустические моды [19, 20]. Гамильтониан  $H_{el-ph}$  в терминах операторов уничтожения и рождения фононов ( $a_{q,\omega}^-$  и  $a_{q,\omega}^+$ , соответственно) имеет вид [21]

$$H_{el-ph} = -E_d \sum_{q,\omega} \left(\frac{\omega}{v_{A,LA}}\right)^2 (a_{q,\omega}^- \tau_{A,0} \Phi_{A,q,\omega}(\mathbf{r}) + a_{q,\omega}^+ \tau_{A,0}^* \Phi_{A,q,\omega}^*(\mathbf{r})), \quad (3)$$

где  $\Phi_{A,q,\omega}(\mathbf{r}) = I_0(q_{A,0}\rho) e^{-iqx}$ ,  $I_p(x)$  – модифицированная функция Бесселя  $p$ -го порядка первого рода. Коэффициенты  $\tau_{A,0}$  определяются граничными условиями и нормировкой [19, 20]. Дисперсионное соотношение, а также диапазон изменения волнового числа для дилатационных акустических фононов можно получить из непрерывности полей смещений и напряжений [22]. При этом продольное волновое число должно находиться в области

$$\omega/v_{B,TA} < q < \omega/v_{A,TA}, \quad (4)$$

где  $q_{A,0} = \sqrt{q^2 - \omega^2/v_{A,LA}^2}$ ,  $v_{\gamma,LA} = \sqrt{c_{\gamma,11}/\rho_\gamma}$ ,  $v_{\gamma,TA} = \sqrt{c_{\gamma,44}/\rho_\gamma}$ ,  $\rho_\gamma$  и

$c_{\gamma,11}$ ,  $c_{\gamma,44}$  обозначают массовые плотности и константы жесткости сред, а индекс  $\gamma$  обозначает нанопроволоку (А) и окружающую среду (В).

Скорость потерь энергии  $P$  рассчитывается в рамках модели «электронной температуры», в которой система НЗ описывается функцией распределения Ферми – Дирака  $f(E, T_e)$  с эффективной температурой электронов  $T_e$ , большей, чем температура решетки  $T_L$  [23].

**3. Результаты и обсуждение.** Численные расчеты проведены для полупроводниковой квантовой проволоки GaAs, внедренной в среду AlAs. Значения параметров материалов взяты из [22, 24-26].

Дисперсионное уравнение, полученное в континуальном приближении для дилатационных акустических волн в НП [27], позволяет графически представить дисперсионные кривые акустических фононных мод (рис. 1). Эти кривые получены для значений волнового числа  $q$ , удовлетворяющих условию (13), и при различных значениях радиуса НП. Как видим, увеличение радиуса проволоки приводит к увеличению частоты дилатационного акустического фонона той же длины волны.

Для численного расчета скорости потерь энергии необходимо вычислить химический потенциал, зависящий от радиуса НП, напряженности внешнего электрического поля, констант Рашбы и Дрессельхауза и электронной температуры, из условия нормировки

$$n_L = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{\frac{E_{\nu,k}-\mu}{k_B T_e}} + 1 \right)^{-1} dk, \quad (5)$$

где  $\nu$  – набор квантовых чисел ( $nm\zeta$ ).

На рис. 2 представлены зависимости химического потенциала нанопроволоки от радиуса, напряженности внешнего электрического поля и электронной температуры при значении линейной концентрации электронов  $n_L = 1.4 \cdot 10^5 \text{ см}^{-1}$ .

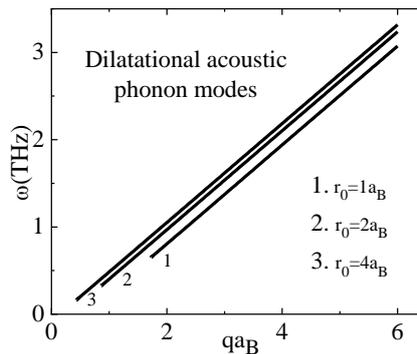


Рис. 1. Дисперсионные соотношения акустических дилатационных фононных мод с  $p = 0$  в цилиндрической нанопроволоке GaAs для значений радиуса  $r_0 = 1a_B$ ,  $r_0 = 2a_B$  и  $r_0 = 4a_B$ .  $a_B$  – эффективный радиус Бора в GaAs.

На рис. 2,а представлена зависимость химического потенциала от радиуса НП при  $T_e = 20$  К и  $T_L = 10$  К: (1) в электрическом поле  $F = 2.5$  В/см без учета СОВ (кривая 1), (2) в электрическом поле  $F = 2.5$  В/см с учетом СОВ (кривая 2), (3) без учета СОВ и в отсутствие электрического поля (кривая 3). Уменьшение химического потенциала с увеличением радиуса НП объясняется тем, что энергия горячих электронов уменьшается вследствие уменьшения энергии размерного квантования, и постоянство линейной концентрации горячих электронов приводит к снижению химического потенциала.

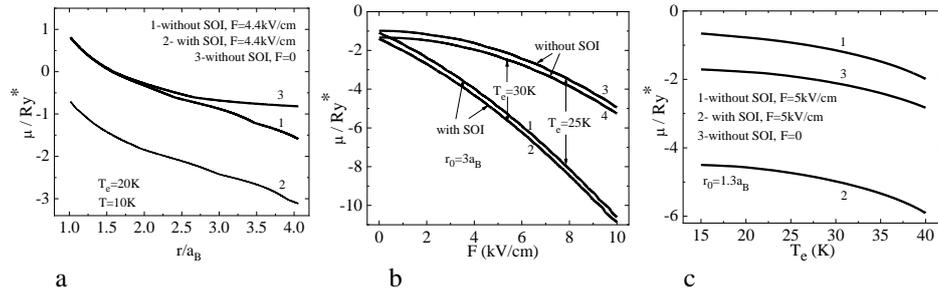


Рис. 2. Зависимость химического потенциала от (а) радиуса нанопроволоки; (б) от напряженности электрического поля; (с) от электронной температуры.

На рис. 2,б представлена зависимость химического потенциала НП от напряженности электрического поля в случае  $r_0 = 3a_B$ : (1) с учетом СОВ при  $T_e = 25$  К ( кривая 1) и при  $T_e = 30$  К (кривая 2); (2) без учета СОВ при  $T_e = 25$  К (кривая 3) и при  $T_e = 30$  К (кривая 4). Во всех рассмотренных случаях уменьшение химического потенциала НП с увеличением напряженности электрического поля объясняется теми же соображениями, что и в первом случае, поскольку увеличение напряженности электрического поля при параболическом ограничении, как следует из формулы (2), приводит к уменьшению энергии размерного квантования. Зависимость химического потенциала НП от электронной температуры в случае  $r_0 = 3a_B$  представлена на рис. 2,с: (1) без учета СОВ и в электрическом поле  $F = 5$  В/см (кривая 1), (2) с учетом СОВ и в электрическом поле  $F = 5$  В/см (кривая 2), (3) без учета СОВ электрического поля (кривая 3). Из формулы (5) следует, что в условиях постоянства энергии размерного квантования и линейной концентрации электронов повышение электронной температуры  $T_e$  должно приводить к увеличению абсолютного значения химического потенциала НП (см. рис. 2,с). Как видим, учет СОВ приводит к уменьшению химического потенциала.

Скорость потерь энергии электронами в зависимости от радиуса НП, напряженности внешнего электрического поля и температуры электронов исследована численно (рис. 3). Как видно,  $P$  возрастает при учете СОВ. На рис. 3,а представлены скорости потерь энергии от радиуса НП при  $T_e = 20$  К и  $T_L = 10$  К: (1) в электрическом поле  $F = 4.4$  В/см без учета СОВ

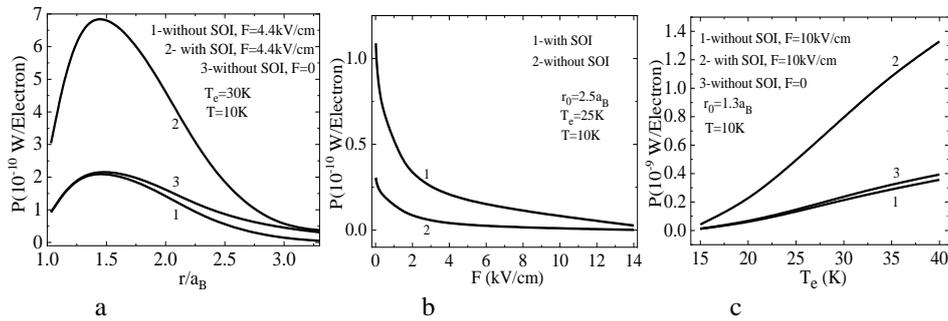


Рис. 3. Зависимость скорости потерь энергии от (а) радиуса нанопроволоки; (б) от напряженности электрического поля; (с) от электронной температуры.

(кривая 1); (2) в электрическом поле  $F = 4.4$  В/см, с учетом СОВ (кривая 2), (3) без учета СОВ и электрического поля (кривая 3). Как видим, зависимость скорости потерь энергии от радиуса НП имеет немонотонный характер: по мере его увеличения она сначала увеличивается, а затем уменьшается как в отсутствие, так и в присутствии электрического поля, а также при учете СОВ. Уменьшение скорости потерь энергии при учете или игнорировании СОВ с увеличением электрического поля (рис. 2,б), вероятно, является следствием того, что состояния дилатационных акустических мод в обратном пространстве ограничены конечным диапазоном и увеличение электрического поля уменьшает число актов рассеяния на фонах, для которых выполняется закон сохранения энергии. Как и следовало ожидать, с ростом температуры электронов скорость потерь энергии увеличивается (рис. 3,с).

**4. Заключение.** Теоретически исследовано влияние внешнего электрического поля на скорость потерь энергии горячими электронами в нанопроволоке с учетом эффекта ограничения акустических фононов и спин-орбитального взаимодействия. Для структуры нанопроволок GaAs/AlAs представлены численные результаты расчета зависимости скорости потерь энергии от температуры электронов, напряженности электрического поля и радиуса проволоки с учетом и без учета влияния СОВ. Показано, что учет СОВ приводит к увеличению скорости потерь энергии горячими электронами. Из полученных результатов следует, что поперечное электрическое поле оказывает существенное влияние на скорость потерь энергии электронами и поэтому может быть использовано в качестве чувствительного инструмента для управления процессами потерь энергии в нанопроволоке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования, науки, культуры и спорта РА в рамках проекта № 21AG-1C048.

Ереванский государственный университет  
e-mail: astepanyan@ysu.am

**А. Г. Степанян**

**Совместное влияние ограничения акустических фононов и спин-орбитального взаимодействия на скорость потерь энергии горячими электронами в нанопроволоке**

С учетом спин-орбитального взаимодействия и в рамках теории деформационного потенциала исследована скорость потерь энергии горячими электронами, рассеянными дилатационными акустическими фононами во внедренной в диэлектрическую среду цилиндрической нанопроволоке в присутствии внешнего электрического поля. Получены зависимости скорости потерь энергии от напряженности электрического поля, радиуса нанопроволоки и температуры электронов с учетом и без учета спин-орбитального взаимодействия. Показано, что учет спин-орбитального взаимодействия приводит к увеличению скорости потерь энергии электронами.

**Ա. Գ. Ստեփանյան**

**Ձայնային ֆոնոնների սահմանափակվածության և սպին-ուղեծրային փոխազդեցության համատեղ ազդեցությունը նանոլարում տաք էլեկտրոնների էներգիական կորուստների արագության վրա**

Դեֆորմացման պոտենցիալի տեսության շրջանակներում արտաքին էլեկտրական դաշտի առկայությամբ ուսումնասիրվել է դիէլեկտրական միջավայրում տեղակայված զլանաձև նանոլարում ընդարձակումային ձայնային ֆոնոնների վրա ցրված տաք էլեկտրոնների էներգիական կորուստների արագությունը: Սպին-ուղեծրային փոխազդեցության հաշվառմամբ և անտեսմամբ ստացվել են էլեկտրոնների էներգիական կորուստների արագության կախումներն էլեկտրական դաշտի լարվածությունից, նանոլարի շառավղից և էլեկտրոնային ջերմաստիճանից: Ցույց է տրված, որ սպին-ուղեծրային փոխազդեցության հաշվառումը հանգեցնում է էլեկտրոնների էներգիական կորուստների արագության մեծացման:

**A. G. Stepanyan**

**Combined Influence of Acoustic Phonon Confinement and Spin-Orbit Interaction on the Energy Loss Rate of Hot Electrons in a Nanowire**

Taking into account the spin-orbit interaction and within the framework of the theory of deformation potential, the energy loss rate of hot electrons scattered by dilatational acoustic phonons in a cylindrical nanowire embedded in a dielectric medium in the presence of an external electric field has been studied. The dependences of the energy loss rate on the electric field strength, nanowire radius, and electron temperature were obtained with and without taking into account the spin-orbit interaction. It is shown that the taking spin-orbit interaction into account leads to an increase in the energy loss rate.

## Литература

1. *Besteiro L. V., Cortés E., Ishii S. et al.* – J. Appl. Phys. 2021. V. 129. № 15. P. 150401-1 - 150401-3.
2. *Shah J.* Hot Carriers in Semiconductor Nanostructures, Academic Press. Boston. 1992. 507 p.
3. *Ting C. S.* Physics of Hot Electron Transport in Semiconductors. Singapore. World Scientific. 1992. 314 p.
4. *Leon-Avila F., Rodriguez-Coppola H., Comas F.* – Phys. Status Solidi B. 1995. V. 189. № 1. P. 107-116.
5. *Stepanyan A., Yeranosyan M., Vardanyan L. et al.* – Physica B. Condensed Matter. 2017. V. 519. P. 102-107.
6. *Campos V. B., Das Sarma S., Stroschio M. A.* – Phys. Rev. B. 1992. V. 46. № 7. P. 3849-3853.
7. *Vartanian A., Asatryan A., Kirakosyan A.* – Physica E. Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2005. V. 28. № 4. P. 545-551.
8. *Bennett C. R., Tanatar B.* – Phys. Rev. B. 1997. V. 55. № 11. P. 7165-7169.
9. *Svizhenko A., Bandyopadhyay S., Stroschio M. A.* – J. Phys. Condensed Matter. 1998. V. 10. № 27. P. 6091-6104.
10. *Vartanian A. L., Asatryan A. L., Kirakosyan A. A.* – Phys. Status Solidi. 2008. V. 245. № 5. P. 963-966.
11. *Sugaya T., Bird J. P., Ferry D. K. et al.* – Appl. Phys. Lett. 2002. V. 81. № 4. P. 727-729.
12. *Sugaya T., Bird J. P., Ferry D. K. et al.* – Phys. B. Condensed Matter. 2002. V. 314. № 1-4. P. 99-103.
13. *Zutic I., Fabian J., Sarma S. D.* – Reviews of Modern Physics. 2004. V. 76. № 2. P. 323-410.
14. *Rashba E. I.* – Fiz. Tver. Tela 2. 1960. № 6. P. 1224-1238.
15. *Dresselhaus G.* – Physical Review. 1955. V. 100. № 2. P. 580-586.
16. *Kohda M., Lechner V., Kunihashi Y. et al.* – Physical Review B. 2012. V. 86. № 8. P. 081306-1 - 081306-5.
17. *Vartanian A. L., Asatryan A. L., Stepanyan A. G. et al.* – International Journal of Modern Physics B. 2020. V. 34. № 32. P. 2050322-1 - 2050322-14.
18. *Vartanian A. L., Ghukasyan T. K., Asatryan A. L. et al.* – Micro and Nanostructures. 2022. V. 168. P. 207287-1 - 207287-11.
19. *Nishiguchi N.* – Phys. Rev. B. 1995. V. 52. № 7. P. 5279-5288.
20. *Stepanyan A., Yeranosyan M., Vardanyan L. et al.* – Physica B. 2017. V. 519. P. 102-107.
21. *Nishiguchi N.* – Phys. Rev. B. 1996. V. 54. № 3. P. 1494-1497.
22. *Nishiguchi N.* – Phys. Rev. B. 1994. V. 50. № 15. P. 10970-10980.
23. *Bhat J. S., Nesargi R. A., Mulimanib B. G.* – Appl J. Phys. 2009. V. 106. № 3. P. 033701-1 - 033701-7.
24. *Winkler R.* Spin-Orbit Coupling Effects in Two-Dimensional Electron and Hole Systems. 2003. Berlin. Springer-Verlag. P. 228.
25. *Schliemann J., Egues and D., Loss J. C.* – Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. № 14. P. 14680 -1 - S146801-4.
26. *Adachi S.* – J. Appl. Phys. 1985. V. 58. № 3. P. R1-R29.
27. *Strosico M., Dutta M.* Phonons in Nanostructures. Cambridge University Press. UK. 2001.



фермент. К таким аминам относятся индопан- $\alpha$ -метилтриптамин [8], диэтилтриптамин и др.

Несмотря на то, что сейчас создан целый ряд антидепрессивных препаратов, проблема фармакотерапии депрессий не разрешена. Препараты недостаточно совершенны, эффективны не у всех больных, могут вызывать побочные явления, их лечебный эффект недостаточно стоек. Все это определяет необходимость дальнейшего поиска новых антидепрессантов как амбулаторного длительного действия, так и быстродействующих препаратов при острых формах депрессий.

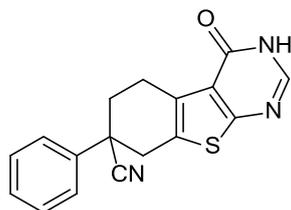
Широко используются антидепрессанты трициклического строения, которые ингибируют обратный захват в пресинаптической мембране, результатом чего является повышение содержания свободных нейромедиаторов [9]. Среди известных гетероциклических систем больший интерес вызывают тиенопиримидины, так как обладают широким спектром биологического действия, а именно противоопухолевыми, противовирусными, психотропными и другими свойствами [10-13].

В настоящей работе исследовалась антиМАО активность производных этил-2-амино-6-циан-6-фенил-4,5,6,7-тетрагидробензо[b]тиофен-3-карбоксилата и аминотиенопиримидина [14]. Работа является продолжением ранее проведенных нами исследований [15, 16].

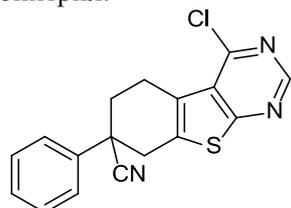
**Материал и методы.** Источником МАО служил 50%-ный гомогенат бычьего мозга, который был получен путем гомогенизации мозга в стеклянном гомогенизаторе с равным (по весу) объемом 2.5% раствора «аркопал» [17]. В полученном гомогенате определяли активность МАО. Опытные пробы содержали 0.2 мл гомогената, 0.18 мл раствора исследуемого соединения и 0.18 мл раствора субстрата. Объем пробы доводили до 1.8 мл 0.1 М Na-K фосфатным буфером до pH 7.4. В качестве субстрата использовали серотонин (5-ОТ) креатинин сульфат моногидрат, который добавляли к пробам после 30-минутной преинкубации фермента с исследуемым веществом при комнатной температуре 18-25°C. Насыщение кислородом проводили в течение 5 мин при 37°C. Реакцию останавливали добавлением 0.2 мл 50%-ной трихлоруксусной кислоты. Осадок белка отделяли центрифугированием при 3000 об/мин. В безбелковой осадочной жидкости определяли содержание аммиака методом изометрической отгонки в течение 24 ч с последующей неселеризацией и фотометрированием на фотометре-нефелометре ФЭК 56-2. Активность МАО выражается в процентном соотношении к контролю. Каждое соединение испытано в трех опытах. Полученные результаты обработаны статистически по методу Grafrad-Instat. В качестве сравнительного препарата был использован известный антидепрессант индопан.

Химические названия и структуры соединений представлены ниже:

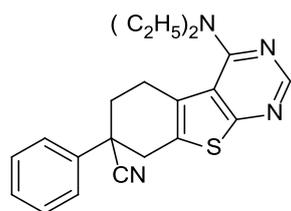
**Соединение 1:** 4-Оксо-7-фенил-5,6,7,8-тетрагидробензо-[4,5]тиеноно[2,3-d]пиримидин-7-карбонитрил:



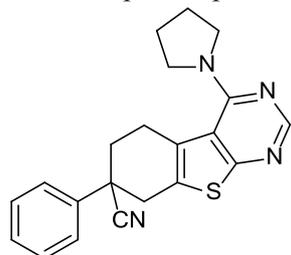
**Соединение 2:** 7-Фенил-4-хлор-5,6,7,8-тетрагидробензо-[4,5]тиено [2,3-*d*]пиримидин-7-карбонитрил:



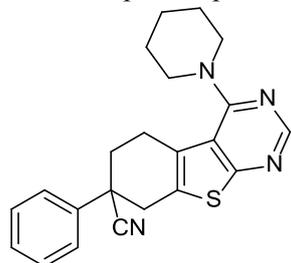
**Соединение 3:** 4-(Диэтиламино)-7-фенил-5,6,7,8-тетрагидробензо[4,5] тиено[2,3-*d*] пиримидин-7-карбонитрил:



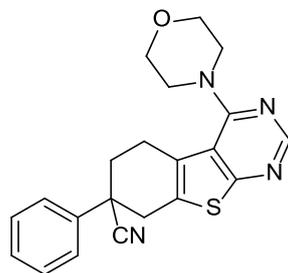
**Соединение 4:** 4-(Пирролидин-1-ил)-7-фенил-5,6,7,8-тетрагидробензо[4,5]тиено[2,3-*d*] пиримидин-7-карбонитрил:



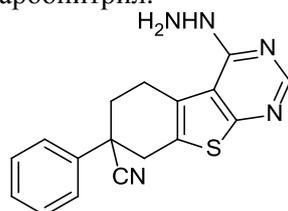
**Соединение 5:** 4-(Пиперидин-1-ил)-7-фенил-5,6,7,8-тетрагидробензо[4,5]тиено[2,3-*d*] пиримидин-7-карбонитрил:



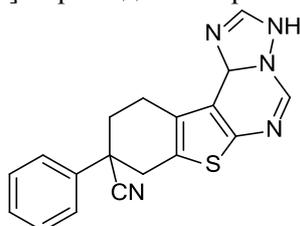
**Соединение 6:** 4-Морфолино-7-фенил-5,6,7,8-тетрагидробензо[4,5]тиено[2,3-*d*] пиримидин-7-карбонитрил:



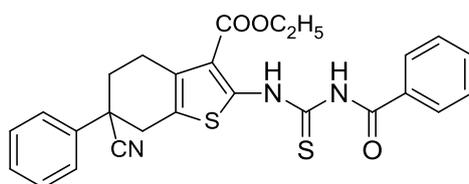
**Соединение 7:** 4-Гидразинил-7-фенил-5,6,7,8-тетрагидробензо[4,5]тиено[2,3-*d*] пиримидин-7-карбонитрил:



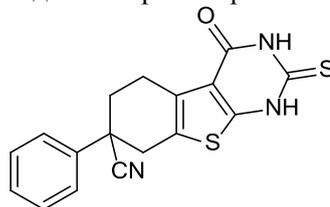
**Соединение 8:** 9-Фенил-3,8,9,10,11,11с-гексагидробензо[4,5]тиено[3,2-*e*]1,2,4-триазоло[1,5-*c*] пиримидин-9-карбонитрил:



**Соединение 9:** Этил-2-(3-бензоилтиоуреидо)-6-фенил-6-циано-4,5,6,7-тетрагидробензо[*b*] тиофен-3-карбоксилат:



**Соединение 10:** 4-Оксо-7-фенил-2-тиоксо-1,2,3,4,5,6,7,8-октагидробензо[4,5]тиено[2,3-*d*] пиримидин-7-карбонитрил:



**Результаты и обсуждение.** Изучена антимоноаминоксидазная активность вышепредставленных 10 соединений. Исследования показали, что

соединения **2, 5, 8, 9** проявляют слабое антиМАО действие. В дозе 1,0 мкмоль/мл по сравнению с контрольным препаратом соединения **1, 3, 10** умеренно угнетают дезаминирование серотонина. Следует отметить, что соединения **4, 6, 7** проявляют выраженную антиМАО активность, ингиби-

**Таблица 1**

**Влияние исследованных соединений и индопана на дезаминирование серотонина (5-ОТ) МАО бычьего мозга в условиях *in vitro***

Соединение	Ингибирование активности МАО, 0.5 мкмоль/мл	Ингибирование активности МАО, 1.0 мкмоль/мл	Ингибирование активности МАО, 5.0 мкмоль/мл	P
<b>1</b>	24±2.0	50±2.4	76±5,0	<0.05
<b>2</b>	-	33*	.	
<b>3</b>	38±2.2	43±2.0	68±4.8	<0.05
<b>4</b>	42±2.6	77±3.8	83±5.6	<0.05
<b>5</b>	-	25*	-	
<b>6</b>	40±2.6	72±3.4	80±5.4	<0.05
<b>7</b>	52±3.8	82±4.2	88±6.4	<0.05
<b>8</b>	-	38*	-	
<b>9</b>	-	32*	-	
<b>10</b>	25±2.0	48±2.6	74±4.0	<0.05
<b>Индопан</b>	54±4.8	86±60	(+) 23±2.0**	<0.05

**Примечание.** За 100% принята интенсивность дезаминирования серотонина в контрольных пробах; \* достоверность не рассчитана ввиду низкой активности соединений; \*\* индопан в этой дозе активизирует, а не угнетает МАО.

руя дезаминирование серотонина, которое совпадает с данными индопана. При концентрации 5.0 мкмоль/мл наблюдалось существенное угнетение дезаминирования серотонина (5-ОТ) начиная с 68±4.8 (у соед. **3**) и достигая 88±6.4 (у соед. **7**) %, соответственно. Исходя из того, что показатели индопана в концентрации 1.0 мкмоль/мл составляют 86±6.0, можно считать, что соединения проявляют соизмеримую активность с индопаном (табл. 1). Более высокие дозы индопана (5.0 мкмоль/мл) дают противоположный, активирующий, эффект на 23%, что в таблице представлено знаком (+).

Полученные данные позволяют судить о высокой ингибирующей активности новых исследованных соединений. Можно сказать, что производные из ряда аминотиенопиримидинов проявляют активность до 88±6.4%, что соизмеримо с данными активности индопана. Изучение связи между химической структурой исследованных соединений с их биологической активностью показало, что наиболее активные тиенопиримидины, угнетающие дезаминирование МАО, имеют в 4-м положении пиперидиновую, морфолиновую и гидразиновую группировки. Это является предпосылкой

для синтеза и выявления новых активных соединений в ряду аминотиенопиримидинов.

Научно-технологический центр органической  
и фармацевтической химии НАН РА,  
Институт тонкой органической химии им. А. Мнджояна  
e-mail: anna.js@mail.ru

**А. С. Григорян, Р. Г. Пароникян**

**Антимоноаминоксидазная активность некоторых новых  
производных 4-оксо-7-фенил-3,4,5,6,7,8-гексагидробензо  
[4,5]тиено[2,3-d]пиримидин-7-карбонитрила**

Изучена антимоноаминоксидазная активность производных 4-оксо-7-фенил-3,4,5,6,7,8-гексагидробензо[4,5]тиено[2,3-d]пиримидин-7-карбонитрила в ткани бычьего мозга в условиях *in vitro*. В качестве субстрата использован серотонин (5-OH) креатинин сульфат моногидрат. Выявлено, что некоторые синтезированные соединения в концентрации 0.5, 1.0 и 5.0 мкмоль/мл проявляют антимоноаминоксидазную активность, ингибируя деаминацию серотонина.

**Ա. Ս. Գրիգորյան, Ռ. Գ. Պարոնիկյան**

**4-Օքսո-7-ֆենիլ-3,4,5,6,7,8-հեքսահիդրոբենզո[4,5]թիենո  
[2,3-d]պիրիմիդին-7-կարբոնիտրիլի որոշ նոր ածանցյալների  
հակամոնոամինօքսիդազային ակտիվությունը**

Ուսումնասիրվել է նոր սինթեզված 4-օքսո-7-ֆենիլ-3,4,5,6,7,8-հեքսահիդրոբենզո[4,5]թիենո[2,3-d]պիրիմիդին-7-կարբոնիտրիլի ածանցյալների ակտիվությունը մոնոամինօքսիդազ ֆերմենտի նկատմամբ տավարի ուղեղի հյուսվածքում *in vitro* պայմաններում: Որպես սուբստրատ կիրառվել է սերոտոնին կրեատինին սուլֆատ մոնոհիդրատը: Հետազոտությունները ցույց են տվել, որ որոշ միացություններ 0.5; 1.0 և 5.0 մկմոլ/մլ դեղաչափերով դրսևորել են հակամոնոամինօքսիդազ ակտիվություն, ընկճելով սերոտոնինի ամինազրկումը:

**A. S. Grigoryan, R. G. Paronikyan**

**Antimonoamine Oxidase Activity of Some New Derivatives  
4-Oxo-7-phenyl-3,4,5,6,7,8-hexahydrobenzo[4,5]thieno  
[2,3-d]pyrimidine-7-carbonitrile**

The derivatives of 4-oxo-7-phenyl-3,4,5,6,7,8-hexahydrobenzo[4,5]thieno[2,3-d]pyrimidine-7-carbonitrile were studied on the activity of the enzyme monoamine oxidase MAO of bovine brain tissue under *in vitro* conditions. Serotonin (5-OH) creatinine monohydrate was used as a substrate. Studies have shown that some synthesized compounds in a concentration of 0.5; 1.0 and 5.0 μmol/ml exhibit antimonoamine oxidase activity and inhibition of serotonin deamination.

## Литература

1. World Health Organization. Composite International Diagnostic Interview (CIDI), I.O. Version. Geneva 1999.
2. *Hamilton M.* In: Handbook of Anxiety Disorders. Eds. C. A. Last, M. Hersen. Oxford. Pergamon Press. 1988. P. 143-155.
3. *Kessler R. C., Üstün T. B.* (Eds.). The WHO World Mental Health Surveys: Global perspectives on the epidemiology of mental disorders. New York. Cambridge University Press. 2008.
4. *Краснов В. Н.* – Журн. неврол. и психиат. (Вып. 2 «Депрессия»). 2012. Т. 112. № 11. С. 3-10.
5. *Мосолов С. Н.* – Журн. неврол. и психиат. (Вып. 2 «Депрессия»). 2012. Т. 112. № 11. С. 29-40.
6. *Kasper S.* – World J. Biol Psychiatry. 2001. № 2. P. 162-163.
7. *Узбеков М. Г., Максимова Н. М.* – Журн. неврол. и психиат. Спецвыпуски. 2015. Т. 115(1-2). С. 52-55.
8. *Машковский М. Д.* Лекарственные средства. М. Новая волна. 2010. 850 с.
9. *Данилов Д. С.* – Журн. неврол. и психиат. 2019. Т. 119(12). С. 115 -123.
10. *Shah R., Verma P. K.* – Chem. Cent. J. 2018. V. 12. P. 137. doi: 10.1186/s13065-018-0511-5.
11. *Amawi H., Karthikeyan C., Pathak R. et al.* – Eur. J. Med. Chem. 2017. V. 138. P. 1053-1065. doi: 10.1016/j.ejmech.2017.07.028
12. *Tang J., Huber A. D, Pineda D. L. et al.* Eur. J. Med. Chem. 2019. V. 164. P. 179-192. doi:10.1016/j.ejmech.2018.12.047.
13. *Dashyan Sh. Sh., Babaev E. V., Paronikyan E. G. et al.* – Molecules. 2022. V. 27(11). P. 3380; <https://doi.org/10.3390/molecules27113380> (registering DOI) - 24 May 2022.
14. *Агебян А. А., Мкрян Г. Г., Паносян Г. А.* – Журн. органической химии. 2021. Т. 57. № 10. С. 1451-1456.
15. *Григорян А. С.* – Биол. ж. Армении. 2018. Т. 70. № 4. С. 81-84.
16. *Григорян А. С., Агебян А. А., Арутюнян С. А. и др.* – Биол. ж. Армеснии. 2021. Т. 73. № 3. С. 80-84.
17. *Горькин В. З.* Методы, основанные на измерении освобожденного аммиака. 1981. М. 34 с.



щивания высококачественного растительного материала в первую очередь необходимо иметь жизнеспособный семенной материал. А при вегетативном размножении, с помощью черенкования используя мелкие части растений, можно быстро увеличить количество ценных для садоводства растений, особенно в случаях, когда доступно ограниченное количество маточных растений. Этот метод гарантирует передачу всех характерных особенностей материнского растения потомству, поскольку при размножении семенами многие виды не передают или передают лишь частично декоративные особенности, ради которых они были выведены. Это важно прежде всего при выращивании декоративных форм, сортов и гибридов, отличающихся особыми признаками (форма и окраска листьев, окраска и полнота цветков и др.). Вегетативное размножение часто является единственным способом размножения экзотических растений, которые либо не плодоносят, либо не образуют качественных семян в местных климатических условиях.

**Материал и методика.** С целью выяснения репродуктивных характеристик представителей рода *Philadelphus* нами в 2021-2023 гг. были испытаны семена 14 видов, которые находились на разных стадиях акклиматизации в коллекции ботанических садов и Иджеванского дендрария Республики Армения.

Для определения массы и качества, всхожести и энергии прорастания семян применялись традиционные для интродукции и используемые в многолетних интродукционных опытах общепринятые методы [6-8], к которым неоднократно обращались армянские ученые [3-4, 9].

Основным качественным показателем семян считается масса 1000 воздушно-сухих семян. Абсолютную всхожесть и энергию прорастания семян определяли проращиванием, которое выражается процентами нормально проросших семян от общего количества взятых для испытания. Абсолютная всхожесть – число нормально проросших за установленный срок семян, выраженное в процентах к количеству полнозернистых семян, взятых для проращивания. Энергия прорастания – процент проросших семян, способных быстро и коллективно прорасти за более короткий срок, чем требуется для определения всхожести. Для этого семена в 2022-2023 гг. высевали с четырехкратной повторностью по 100 штук: дважды в чашках Петри на фильтровальной бумаге, по одному разу в специальной почвенной смеси (почва, песок, торф) и речном песке при комнатной температуре. Семена, которые стратифицировались во влажном речном песке при низкой (5°C) температуре, были испытаны нами дополнительно в 2023 г. Виды чубушников исходя из полученных результатов разделены нами по А. Б. Матиняну на 4 группы плодovitости (высокая, хорошая, достаточная, низкая) [10].

Чубушники размножались нами также вегетативным способом – черенкованием [6, 7]. С целью вегетативного размножения в период бутонизации и период цветения (с третьей декады мая по первую декаду июня) брались зеленые, еще не одревесневшие летние черенки из указанных 13

видов рода *Philadelphus* из коллекции Ереванского ботанического сада. Во время подготовки черенков срезали бутоны и цветки, укорачивали листья. Затем черенки высаживали в специально подготовленную почвосмесь из почвы, торфа и песка, оставляя листовую узел на поверхности. Создавали среду, подобную тепличным условиям. После укоренения черенков измеряли корневую систему и определяли эффективность черенкования.

Описание семян, их структуры и качества. Успешная интродукция видов, воспроизводимых семенами, в конечном итоге, зависит от качества полученных семян. Качественные показатели семян можно рассматривать как один из ключевых критериев акклиматизации видов в новых условиях произрастания. Как правило, плод чубушника – твердая, локулицидная, четырехугольная коробочка с многочисленными коричневыми веретенообразными, продолговатыми, плоскими, 2-3 мм дл. семенами. К семенной коже прилегает слой эндосперма, и зародыш обычно имеет цилиндрическую форму. Срок хранения семян обычно составляет около одного года, и у большинства видов нет периода покоя [7, 11].

Собранные нами семена чубушников имели в среднем 0.05-0.15 см шир. и 0.2-0.5 см дл. Различия в размере семян, как правило, невелики. Самыми крупными семенами отличались *Ph. gordonianus*, *Ph. × zeyheri*, *Ph. × magnificus*, самыми мелкими – *Ph. coronarius f. fl. pl.*, *Ph. lewisii*, *Ph. tenuifolius*. Размер семян остальных видов был средним.

Как видно из табл. 1, сбор семян чубушников в 2021-2022 гг. проводился после полного созревания, в основном в третьей декаде октября, а в отдельных случаях – в ноябре. Возраст исследованных растений колеблется от 6 до 50 лет. С большим количеством семян в одной коробочке (126-200 шт.) выделяются виды *Ph. caucasicus*, *Ph. gordonianus*, *Ph. latifolius*, *Ph. sericanthus*, *Ph. × zeyheri*, небольшое количество у *Ph. coronarius*, *Ph. coronarius f. fl. pl.*, *Ph. tenuifolius* (42-84 шт.).

Средний вес 100 коробочек составлял 4.7 г, как у *Ph. × virginalis*. Высокий вес характерен для видов *Ph. caucasicus* (Ереванский ботанический сад), *Ph. caucasicus* (Иджеванский дендрарий), *Ph. schrenkii var. Jackii*, *Ph. gordonianus*, *Ph. lewisii*, *Ph. × magnificus*, *Ph. × zeyheri*, легким весом отличались *Ph. coronarius f. fl. pl.*, *Ph. latifolius*, *Ph. schrenkii*, *Ph. sericanthus* и самым легким *Ph. pekinensis*.

Средняя масса 1000 г семян всех видов составила 0.13 г. Тяжелым весом выделялись виды *Ph. caucasicus* (Ереванский ботанический сад), *Ph. sericanthus*, *Ph. × zeyheri*, показатели выше среднего имели виды *Ph. latifolius*, *Ph. × magnificus*, *Ph. schrenkii*, ниже среднего – *Ph. caucasicus* (Севанский ботанический сад), *Ph. caucasicus* (Иджеванский дендрарий), *Ph. coronarius f. fl. pl.*, *Ph. gordonianus*, *Ph. pekinensis*, *Ph. schrenkii var. Jackii*, *Ph. × virginalis* и низший у *Ph. lewisii*.

**Семенное размножение.** Некоторые авторы [11, 12] считают, что для нормального развития зародыша семена чубушника нуждаются в длительной (1-3 месяца) холодной стратификации при температуре 5°C, а для

успешного прорастания семян оптимальная температура воздуха должна составлять 20-23°C. При этом результаты исследования, проведенного другим автором [13], свидетельствуют о том, что после замораживания всхожесть семян, например у вида *Ph. tenuifolius*, осталась неизменной.

**Таблица 1**

**Качественные показатели плодов и семян чубушников**

Вид	Место сбора	Сроки сбора, 2020-2022 гг.	Возраст растения	Среднее кол-во семян в коробочке шт.	Вес 100 коробочек, г	Вес 1000 семян, г
1	2	3	4	6	6	7
<i>Ph. caucasicus</i>	Ереван	X-XI	20-30	200	8,7	0,19
-	Севан	X	20-40	146	6,5	0,10
-	Идж. дендр.	X	20-30	140	7,6	0,12
<i>Ph. coronarius</i>	Ереван	X	6-10	42	-	-
-	Идж. дендр.	X	25-30	82	2,7	0,15
<i>Ph. coronarius f. fl. pl.</i>	Ереван	X-XI	20	40	2,8	0,11
<i>Ph. gordonianus</i>	-	XI	25-35	126	5,5	0,12
<i>Ph. latifolius</i>	-	X	25-35	126	3,4	0,16
<i>Ph. lewisii</i>	-	X	30-40	122	5,1	0,08
<i>Ph. × magnificus</i>	-	X-XI	20-30	111	5,4	0,16
<i>Ph. pekinensis</i>	-	X	10-12	119	1,6	0,12
<i>Ph. schrenkii</i>	-	X	12	107	3,2	0,14
<i>Ph. schrenkii var. Jackii</i>	-	X	12	100	6,4	0,11
<i>Ph. sericanthus</i>	Ванадзор	X	30-50	172	2,9	0,20
<i>Ph. tenuifolius</i>	Ереван	X	20-35	84	-	-
<i>Ph. × virginalis</i>	-	X	15-30	91	4,7	0,12
<i>Ph. × zeyheri</i>	-	X-XI	20-35	127	5,6	0,20

Исследования по всхожести проводились на двух разных типах семян чубушников. Для посева были взяты семена 14 видов чубушника, собранные осенью 2021-2022 гг. на территории ботанических садов Армении. Высевались как нестратифицированные (в 2022-2023 гг.), так и дополнительно стратифицированные семена весной в первой и второй декадах апреля в комнатных условиях (в режиме плюсовой низкой температуры 5°C в течение 2 месяцев). Всходы появились в период с третьей декады апреля по третью декаду мая. В чашках Петри и в речном песке сроки прорастания семян совпадали, составив от 7 до 22 дней, но в почве они прорастали позже, и первые всходы появились на 12-й день. Всхожесть нестратифи-

цированных семян в целом составила 2-75%, стратифицированных семян 2-32%, за исключением вида *Ph. sericanthus*, произрастающего в Ванадзорском ботаническом саду, у которого всхожесть семян в обоих случаях была одинакова и достигала до 75 %. В табл. 2 обобщены данные, полученные при проращивании нестратифицированных семян.

Изученные представители рода чубушник по всхожести семян нами сгруппированы следующим образом [10]:

1. Высокую продуктивность семян (выше 70%) демонстрировал вид *Ph. sericanthus*.
2. Хорошей всхожестью (от 50 до 70%) не отличался ни один вид.
3. Достаточную или удовлетворительную всхожесть (от 25 до 50%) проявляли виды *Ph. caucasicus*, *Ph. gordonianus*, *Ph. pekinensis*, *Ph. schrenkii* и *Ph. schrenkii* var. *Jackii*.
4. Низкой всхожестью (от 1 до 25%) характеризовались виды *Ph. coronarius* f. *fl. pl.*, *Ph. latifolius*, *Ph. × magnificus*, *Ph. tenuifolius* и *Ph. × zeyheri*.
- 5.

**Таблица 2**

**Особенности прорастания семян интродуцированных видов чубушников**

Вид	Происхождение	Место испытания	Год посева	Срок посева	Первые всходы	От посева до всходов, дни	Энергия прорастания, %	Массовые всходы	Абсолютная всхожесть %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Ph. caucasicus</i>	Кавказ	Ереван	2022	15.04	26.04	11	23	02.05	37
			2023	10.04	25.04	15	13	13.05	17
-	-	Севан	2022	15.04	25.04	10	10	31.05	18
			2023	10.04	19.04	9	12	12.05	10
-	-	Иджеван, д/п	2022	15.04	04.05	19	13	09.05	23
			2023	10.04	02.05	22	4	06.05	14
<i>Ph. coronarius</i>	Европа	Ереван	2022	15.04	25.04	10	2	-	2
			2023	10.04	24.04	14	4	-	8
<i>Ph. coronarius</i> f. <i>fl. pl.</i>	Форма	-	2022	15.04	28.04	13	8	12.05	12
			2023	10.04	02.05	22	2	14.05	8
<i>Ph. gordonianus</i>	С. Америка	-	2022	15.04	23.04	8	22	01.04	40
			2023	10.04	17.04	7	16	02.05	47

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>Ph. latifolius</i>	-	-	2022	15.04	26.04	11	13	11.05	16
			2023	10.04	19.04	9	14	18.05	22
<i>Ph. lewisii</i>	-	-	2022	15.04	24.05	9	8	13.05	13
			2023	10.04	17.04	7	3	-	5
<i>Ph. × magnificus</i>	Гибрид	-	2022	15.04	28.04	13	17	15.05	21
			2023	10.04	19.04	9	12	-	17
<i>Ph. pekinensis</i>	В. Азия	-	2022	15.04	27.04	12	16	17.05	33
			2023	10.04	17.04	7	20	12.05	32
<i>Ph. schrenkii</i>	Д. Восток, В. Азия	-	2022	15.04	28.04	13	19	13.05	32
			2023	10.04	24.04	14	12	12.05	20
<i>Ph. schrenkii</i> var. <i>Jackii</i>	В. Азия	-	2022	15.04	27.04	12	18	20.05	42
			2023	10.04	18.04	8	10	04.05	22
<i>Ph. sericanthus</i>	-	Ванадор	2022	15.04	23.04	8	52	03.05	75
			2023	10.04	17.04	7	48	04.05	61
<i>Ph. tenuifolius</i>	Д. Восток	Ереван	2022	15.04	26.04	11	7	-	10
			2023	-	-	-	-	-	-
<i>Ph. × virginalis</i>	Гибрид	-	2022	15.04	27.04	12	9	11.05	18
			2023	10.04	28.04	18	4	12.05	11
<i>Ph. × zeyheri</i>	-	-	2022	15.04	30.04	15	10	09.05	19
			2023	10.04	29.04	19	7	21.05	13

**Вегетативное размножение.** В результате черенкования летними черенками установлено, что процесс укоренения у чубушников в общей сложности колеблется в пределах 24-41 дней. Полученные результаты показали, что большинство испытанных таксонов хорошо размножаются путем летнего черенкования.

Особенно высокие показатели укоренения (61-92%) отмечены у *Ph. coronarius f. fl. pl.*, *Ph. gordonianus*, *Ph. latifolius*, *Ph. lewisii*, *Ph. schrenkii* var. *Jackii*, *Ph. tenuifolius*. Средними показателями (34-62%) выделяются *Ph. caucasicus*, *Ph. × virginalis*, *Ph. × zeyheri*, низкими (12-22%) – *Ph. × magnificus*, *Ph. pekinensis*. Длина сформированных корней варьировала в пределах 3-8 см. На черенках интродуцированного аборигенного вида *Ph. caucasicus*, у которого показатель укоренения составлял 47-62%, также наблюдалось развитие бокового побега, что способствовало формированию надземной вегетативной части растения (табл.3).

Таблица 3

**Результаты черенкования чубушников в 2022-2023. гг.  
в Ереванском ботаническом саду**

Вид	Происхождение	Время черенкования	Начало черенкования	Корнеобразование, число	Продолжительность корнеобразования, дни	Корнеобразование, %
<i>Ph. caucasicus</i>	Кавказ	2022	06.06	04.07	28	62
		2023	29.05	28.06	30	47
<i>Ph. coronarius</i>	Европа	2022	02.06	10.07	38	40
		2023	29.05	20.07	31	20
<i>Ph. coronarius f. fl. pl.</i>	Культивар	2022	07.06	04.07	27	87
		2023	06.06	02.07	26	68
<i>Ph. gordonianus</i>	С.	2022	08.06	04.06	26	70
<i>Ph. latifolius</i>	Америка	2022	02.06	04.07	32	91,7
		2023	02.06	27.06	25	68
<i>Ph. lewisii</i>	Америка	2022	30.05	26.06	25	80
		2023	08.06	15.07	37	90
<i>Ph. × magnificus</i>	Гибрид	2022	31.05	23.06	24	91
		2023	10.06	09.06	29	22
<i>Ph. pekinensis</i>	Вост. Азия	2022	01.06	06.07	35	50
		2023	29.05	10.07	41	12
<i>Ph. schrenkii</i>	Д. Восток, Вост. Азия	2022	29.05	нет	Нет	0
		2023	29.05	05.07	37	33,3
<i>Ph. schrenkii var. Jackii</i>	Вост. Азия	2022	30.05	нет	нет	0
		2023	02.06	05.07	33	68
<i>Ph. tenuifolius</i>	Д. Восток	2022	04.06	28.07	32	71
		2023	09.06	04.07	25	78
<i>Ph. × virginalis</i>	Гибрид	2022	04.06	02.07	28	61
		2023	10.06	09.07	29	53
<i>Ph. × zeyheri</i>	Гибрид	2022	01.06	05.07	34	72,7
		2023	08.06	06.07	28	55
		2023	31.05	02.07	31	49

**Выводы.** На основании сравнительного анализа установлены наиболее эффективные для размножения различных видов чубушника методы. Выявлены требования каждого вида к условиям прорастания, что может найти применение в последующих научных исследованиях и практическом использовании чубушников в сфере садоводства и интродукции растений.

Установлено, что семена чубушника можно отнести к категории легко прорастающих. Это объясняется тем, что их период органического покоя относительно короткий, и при наличии благоприятных условий они быстро прорастают. Однако следует отметить, что урожайность при этом остается на низком уровне. До и после стратификации всхожесть семян

оставалась неизменной только у одного вида – *Ph. sericanthus*, произрастающего в Ванадзорском ботаническом саду. Остальные виды на стратификацию отреагировали плохо, и урожайность семян была низкой. Во всех вариантах эксперимента всходы в песке были самыми ранними и всхожесть семян была гораздо выше, чем в почве и чашках Петри. Следовательно, для получения высокой всхожести семян испытуемых видов чубушника их стратифицирование не является обязательным условием. Семена чубушника целесообразно высевать в речной песок, обеспечивая при этом влажность и оптимальную температуру для прорастания в режиме 23°C, что дает высокий результат их всхожести.

Большинство испытанных интродуцированных чубушников хорошо размножается летними черенками. Что касается форм и гибридов, которые только при вегетативном размножении передают своим потомкам декоративные характеристики, все признаки и свойства, присущие материнскому растению, то культивар *Ph. coronarius f. fl. pl.* и гибриды *Ph. × magnificus*, *Ph. × zeyheri*, *Ph. × virginialis* из нашей коллекции можно размножать вегетативным путем, так как они хорошо размножаются летними черенками и укореняемость составляет от 22 до 68%.

Относительно размножения не плодоносящих или нерегулярно плодоносящих в местных климатических условиях видов чубушника (например, вид *Ph. tenuifolius*, у которого нормальное семяобразование было лишь в 2021 г., и *Ph. coronarius*, *Ph. latifolius*, семена которых некачественные) выявлено, что указанные виды успешно размножаются с помощью летних черенков, особенно *Ph. tenuifolius* и *Ph. latifolius*, у которых корнеобразование составляет от 61 до 80%.

Отрицательные результаты при летнем черенковании были установлены у *Ph. pekinensis*, *Ph. schrenkii*, укореняемость которых была низкой (0-33%). В целом в течение двух лет среди испытанных нами растений полностью неукореняемых видов чубушника в коллекциях ботанических садов и Иджеванского дендрария РА не выявлено.

Институт ботаники им. А. Тахтаджяна НАН РА  
e-mail: [annaangrigoryan@gmail.com](mailto:annaangrigoryan@gmail.com), [annagrig-an22@mail.ru](mailto:annagrig-an22@mail.ru)

**А. А. Григорян**

### **Репродуктивные особенности рода *Philadelphus* L. (Hydrangeaceae) в ботанических садах Армении**

В целях выяснения репродуктивных особенностей представителей рода *Philadelphus* было проведено исследование 14 видов данного рода, находившихся на различных стадиях акклиматизации в ботанических садах и Иджеванском дендрарии Республики Армения. **Определены** качество, энергия прорастания и всхожесть семян, **а также** выявлены возможности размножения семенами и летними черенками. Сделаны выводы о качественных характеристиках семян и

черенков, а также об особенностях семенного и вегетативного размножения изучаемых видов.

**Ա. Ա. Գրիգորյան**

***Philadelphus* L. (Hydrangeaceae) ցեղի ներկայացուցիչների վերարտադրողականության առանձնահատկությունները Հայաստանի բուսաբանական այգիներում**

*Philadelphus* ցեղի վերարտադրողական առանձնահատկությունները պարզաբանելու նպատակով ՀՀ բուսաբանական այգիներում և Իջևանի դենդրոպարկում ուսումնասիրվել են կլիմայավարժեցման տարբեր փուլերում գտնվող 14 տեսակներ: Որոշվել են դրանց սերմերի բարորակությունը, ծլման էներգիան և ծլունակությունը, պարզվել սերմերով և ամառային կտրոններով բազմացման հնարավորությունները: Ստացված արդյունքները թույլ են տվել եզրակացություններ անել ուսումնասիրված տեսակների սերմերի և կտրոնների որակական ցուցանիշների և բազմացման առանձնահատկությունների վերաբերյալ:

**A. A. Grigoryan**

**Reproductive Features of the Genus *Philadelphus* L. (Hydrangeaceae) in the Botanical Gardens of Armenia**

To clarify the reproductive characteristics of representatives of the genus *Philadelphus*, a study was carried out on 14 species of this genus, which were at various stages of acclimatization in botanical gardens and the Ijevan Arboretum of the Republic of Armenia. The quality, germination and germination energy of their seeds were determined, and the possibilities of propagation by seeds and summer cuttings were identified. The results obtained in this study allowed us to conclude the qualitative characteristics of seeds and cuttings, as well as about the characteristics of seed and vegetative propagation of the studied species.

**Литература**

1. *Արությունյան Լ. Վ.* – Бюл. бот. сада АН АрмССР. 1973. № 23, С. 5-50.
2. *Վարդանյան Ջ. Ա., Մանասյան Գ. Գ., Գառլանյան Գ. Մ. և օր.* –Изв. гос. аграрного ун-та Армении, 2011. № 1. С. 20-26.
3. *Վարդանյան Ջ. Ա.* Научные основы интродукции древесных растений в Армении. Ереван. НАН РА, Ин-т ботаники. 2012, 399 с.
4. *Գրիգորյան Լ. Մ.* Био-экологические особенности представителей рода *Lonicera* L., инродуцированных в Армению. Автореф. канд. дис. Ереван. 1996. 20 с.
5. *Կазарյան Վ. Օ., Արությունյան Լ. Վ., Խուրշուդյան Ս. Ա. և օր.* Научные основы облесения и озеленения Армянской ССР. Ереван. Изд-во АН АрмССР. 1974. 350 с.
6. *Алексеевский А. Н.* Питомники декоративных деревьев и кустарников. М. 1956. 219 с.

7. Деревья и кустарники СССР: Дикорастущие, культивируемые и перспективные для интродукции. Под. ред. Соколова С. Я. М.- Л. 1954 Т. 3, с. 137-139.
8. Некрасов В. И. Основы семеноведения древесных растений при интродукции. М. Наука. 1973. 278 с.
9. Лавчян Э. К. – Бюл. бот. сада АН Арм. ССР. 1985. № 26. С. 51-60.
10. Матинян А. – Бюл. ГБС АН СССР. 1958. Вып. 32. С. 7-10.
11. Николаева М. Г., Разумова М. В., Гладкова Н. В. Справочник по проращиванию покоящихся семян. Л. Наука. 1985. 348 с.
12. Roger D. U. – J. Amer Soc. Hort. Sci. 1970. V. 95. № 3. P. 307-310.
13. Нестерова С.В. *Ex situ* сохранение декоративных кустарников. Вестник ВГУ. 2011. № 2. с. 90-92.



полушария являются анатомическими и заложены от рождения [8]. Их формирует такая организация афферентных путей, которая обеспечивает опережающий приход информации в проекционные поля правой гемисферы по сравнению с симметричными зонами левой. При этом разномодальные сенсорные системы правого полушария менее дифференцированы и более тесно связаны друг с другом. Благодаря таким морфофункциональным особенностям афферентные звенья психических функций закладываются у ребенка преимущественно в правом полушарии. С развитием речи и сложных произвольных движений (т.е. эфферентные звенья психики) активно функционирует уже левое полушарие [8].

Анализ литературы позволил с достоверностью констатировать тот факт, что в настоящее время накоплен большой материал, основанный на клинике локальных поражений головного мозга, свидетельствующий о зависимости эмоционально-личностных нарушений от локализации поражения. В этих работах показано, что нарушения высших психических функций связаны с патологией функций корковых и подкорковых отделов мозга, относящихся к системам разного уровня (стволовые и лимбические структуры, медиобазальные отделы лобных и височных отделов коры обоих полушарий). Кроме того, во многих работах подчеркивается важная роль межполушарной асимметрии при поражении мозговых структур правого и левого полушарий мозга в появлении тех или иных личностных особенностей.

Специфика высших психических функций, связанная с функциональной асимметрией мозга, нами исследовалась в основном на здоровых детях и на детях с легкой степенью умственной отсталости.

Имеются попытки связать латерализацию функций с обучаемостью детей, но лишь отдельные работы посвящены изучению особенностей межполушарной асимметрии детей младшего и среднего школьного возраста с нарушением умственного развития, в то время как с поступлением ребенка в школу, сменой ведущей деятельности с изменением степени межполушарной асимметрии мозга происходит наибольшее возрастание латерализации функций, доминирования левого полушария.

В нашей работе проводилось сравнительное изучение некоторых психофизиологических особенностей детей 8–11-летнего возраста с различным мануальным доминированием. Изучались внимание, пространственная ориентация, память.

В исследовании участвовал 131 учащийся в возрасте от 8 до 11 лет, из них 73 здоровых, 58 детей с легкой степенью умственной отсталости. Результаты изучения пространственного восприятия здоровых детей не совпадают с результатами ряда исследований, выполненных с детьми с легкой степенью умственной отсталости, и свидетельствуют о том, что леворукие умственно отсталые дети значительно хуже ориентируются в пространстве. Правильность ориентировки в пространстве относительно себя, относительно предмета у них составляет 56.3 и 54.1% соответственно по сравнению с правшами. Подобная разница отмечалась и при ориен-

тировке среди близко расположенных различных предметов в комнате, на улице и в ближайшем окружении. На собственном теле леворукие дети ориентируются лучше, практически без ошибок, однако латентный период ответа длительнее, чем у праворуких сверстников.

Учебная деятельность детей с легкой степенью умственной отсталости предъявляет требования к ориентации в пространстве, в том числе и на ограниченной плоскости, в частности на листе бумаги. В широко распространенном тесте Д. Б. Эльконина «Графический диктант» были получены интересные данные. Задание под диктовку и леворукие, и праворукие дети выполнили одинаково хорошо, но при самостоятельной работе были обнаружены явные различия. Более высокие показатели при выполнении самостоятельной работы получили дети-левши. Они видели узоры в целом и не задумывались, куда провести следующую линию, следующий фрагмент узора, выполняли задание уверенно, достаточно быстро и без ошибок. Разница полученных данных при выполнении самостоятельной работы теста «Графический диктант» между левшами и правшами статистически достоверна.

Подобные различия отмечались и в результатах выполнения этими детьми теста по методике «Кубики Кооса». Леворукие дети с легкой степенью умственной отсталости выполняли задание с ошибками, некоторые из них обращались к помощи взрослого, другие не проявляли интереса к заданию. Леворукие здоровые дети соответственно меньше ошибались, выполняли задание быстро, меньше обращались к помощи взрослого. Они чаще всего решали задачу в уме, почти не прибегали к методу проб и ошибок, не накладывали кубики на прозрачный трафарет.

Исследование кратковременной памяти, как мы и предполагали, обнаружило более яркую образную память у левшей здоровой группы детей, по сравнению с правшами. Однако различий в словесно-логической, а также моторной и эмоциональной памяти не было выявлено, что расходится с данными, полученными при исследовании памяти детей с легкой степенью умственной отсталости. Это обусловлено тем, что у умственно отсталых детей 8–11 лет преобладает образная память, в то время как семантическая память, связанная с работой левого полушария, более интенсивно формируется позже.

Предметом активного изучения остается проблема возрастных изменений межполушарных взаимодействий, перестройки функциональной активности правого и левого полушарий головного мозга [2, 3]. Одними авторами [5, 8] высказывается предположение, что сглаживание МА происходит в основном за счет снижения активности левого полушария, и отмечается, что в старческом возрасте в большинстве случаев преобладает активность правой гемисферы. Другими исследователями [4, 7] постулируется положение преимущественного снижения при старении функциональной активности правого полушария.

В основе нейрофизиологических механизмов организации движений у правой лежит сложная мультифункциональная система, и доминировать

может не только ведущее левое полушарие, но и правое в зависимости от того, какие мозговые структуры участвуют в обеспечении двигательной задачи, что в свою очередь определяется ее характеристиками и особенностями. В процессе различных видов деятельности эта роль может переходить от левого к правому полушарию и наоборот, т.е. наблюдается попеременное доминирование полушарий головного мозга.

При разных функциональных состояниях в нейрофизиологическом плане отмечается преимущественная активация одного из полушарий. Даже небольшое увеличение активности в одной из гемисфер приводит к торможению работы нейронов в симметричном участке противоположного полушария, что обеспечивается комиссуральными, преимущественно тормозящими межполушарными связями [7].

Нами был проведен анализ моторной функциональной асимметрии, в проявлении которой у большинства детей выявлено преобладание правой руки над левой. В возрастной группе детей от 8 до 9 лет правосторонняя асимметрия рук среди умственно отсталых школьников наблюдается в меньшей степени, чем среди их здоровых сверстников. В отличие от здоровых детей у них более значима роль правого полушария в реализации данной функции. С возрастом же (10–11 лет) доля участия левого полушария в формировании данной функции возрастает в группе здоровых детей, чего не отмечается в другой группе. Выявленные особенности могут свидетельствовать об общем затруднении формирования функциональной межполушарной асимметрии мозга у умственно отсталых.

В настоящее время выделяют три механизма межполушарного взаимодействия: реципрокные взаимодействия, когда при угнетении одного полушария функции другого реципрокно облегчаются; комплементарность – определенный вклад каждого полушария в выполняемую функцию или действие; суперпозиция – исправление «искажений» пространства другой гемисферой, которая видит его зеркально [6, 7]. Поэтому для нормального функционирования ЦНС, в том числе реализации движения, необходимо непрерывное взаимодействие обоих полушарий. При исследовании было показано, что у здоровых правшей первичная моторная кора (ПМК) и дорсальная премоторная область (ДПМО) правого полушария модулируют ПМК левого полушария во время подготовки к движению пальцами ведущей правой руки, причем в правой гемисфере сначала проявляет активность ДПМО, а затем ПМК, влияя на ПМК левого полушария во время ранней и поздней фазы подготовки к движению или только в конце фазы соответственно. Все это дополняет существующие представления об иерархической модели коры для управления моторным актом и демонстрирует пространственно-временные взаимодействия указанных корковых полей обоих полушарий во время подготовки к движению [1, 3].

Полученные нами данные свидетельствуют о доминировании левого полушария у школьников обеих групп. Хотя коэффициент мануальной

асимметрии и коэффициент право-леворукости связаны между собой, правостороннее доминирование и характер сенсорной асимметрии не согласуются друг с другом.

Наличие левостороннего профиля индивидуальной асимметрии мозга обусловлено, как правило, нарушением функций левого полушария, проявляющимся в глобальной недифференцированной реакции левого полушария на значимые и малозначительные зрительные стимулы. Кроме того, мы отметили единичные несоответствия в результатах выполненных заданий и реальном предпочтении правой и левой руки.

Таким образом, мы различаем два типа латеральности: патологическую и функциональную. Патологическая латеральность, связанная с изменением межполушарного взаимодействия, лежащего в основе интеграции функций мозга, имеет, по нашему мнению, компенсаторное значение при умственной отсталости, обусловленной органическим поражением головного мозга. У этих детей отмечается незрелость интегративных структур левого полушария, что также приводит к патологической латеральности.

Функциональная латеральность не является патологией по своей сути, она не противоречит законам нормального психического развития, в том числе интеллектуального; напротив, многие исследователи считают, что доминирование правого полушария способствует творческому развитию личности. Мы считаем, что репродуктивные методы обучения, апеллирующие к левому полушарию, способны формировать у детей 9-11 лет стереотипные подходы к творчеству. Функции правого полушария включают точное восприятие и запоминание стимулов, которые сложно выразить словами, потому что оно образное, сенсорное, обработка информации им глобальна. Мы называем доминирование правого полушария функциональным типом латеральности.

Полученную информацию необходимо учитывать при организации процесса обучения в начальной и средней школе, при работе с умственно отсталыми детьми, при формировании классов, при выборе программ, методов обучения, при организации психолого-педагогического сопровождения.

Предполагается, что функциональный вклад правого и левого полушарий в формирование психики человека различен, поскольку полушария в их парной работе во времени функционируют по-разному. Парная работа осуществляется в настоящем времени, так что правое полушарие опирается на прошедшее, левое – на будущее время. Поэтому сохранение парного функционирования полушарий и структурной целостности мозга является главным условием, без которого не может формироваться полноценная психическая деятельность.

Вышесказанное свидетельствует о том, что, в норме итоговая двигательная программа формируется в обеих гемисферах, при этом в процессе жизнедеятельности отмечается преимущественная активация одного из полушарий головного мозга при разных функциональных состояниях,

определяемая текущей информацией или необходимостью решения определенной задачи. Однако данные по исследованию функциональной организации мозга у правшей и левшей в покое и процессе деятельности неоднозначны и по ряду показателей противоречивы, что вполне объяснимо, так как в исследованиях используются не только самые разные виды задач, но и различные методы, а также различные методические подходы к анализу экспериментальных данных. Кроме того, большая часть исследований основана на клинических наблюдениях, которые также подтверждают факт совместной работы полушарий при реализации сложных видов произвольной деятельности.

При умственной отсталости в легкой степени могут наблюдаться дисфункция правого или левого полушарий, а также нарушение межполушарных взаимодействий. В зависимости от локализации очага ФМА поражения, и, как правило, ее изменения сопровождаются неврологическим дефицитом. При этом многие функции, свойственные доминантному и субдоминантному полушариям, трансформируются из-за неврологического дефицита и последующих компенсаторных изменений. Психоневрологическая симптоматика при умственной отсталости изучена довольно подробно, однако характер отношений, развивающихся между полушариями в процессе коррекции и реабилитации, до настоящего времени остается не совсем понятным.

Таким образом, несмотря на многочисленные исследования в этой области, механизмы межполушарной интеграции во время выполнения сложных произвольных движений остаются малоизученными и не всегда объяснимыми, а в частности при умственной отсталости во многих случаях не учитывается фактор ФМА, который имеет значение для понимания патофизиологических процессов выявленных нарушений и коррекционно-развивающего процесса детей с легкой степенью умственной отсталости.

Армянский государственный педагогический  
университет им. Х. Абовяна  
e-mail: atereza222@gmail.com

**Т. Ю. Азатян**

### **К вопросу межполушарной асимметрии здоровых и умственно отсталых детей**

Описаны подходы к вопросу межполушарной асимметрии здоровых и умственно отсталых детей. Полученные результаты свидетельствуют, что правосторонняя асимметрия рук среди умственно отсталых школьников наблюдается в меньшей степени, чем среди их здоровых сверстников, а с возрастом доля участия левого полушария в формировании данной функции возрастает в группе здоровых детей, чего не отмечается в другой груп-

пе. Выявленные особенности могут свидетельствовать об общем затруднении формирования функциональной межполушарной асимметрии мозга у умственно отсталых.

**Թ. Յու. Ազատյան**

**Առողջ և մտավոր հետամնացություն ունեցող երեխաների  
միջկիսագնդային անհամաչափության հարցի շուրջ**

Նկարագրված են առողջ և մտավոր հետամնացություն ունեցող երեխաների միջկիսագնդային անհամաչափության հիմնախնդրի մոտեցումները: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս, որ մտավոր հետամնացություն ունեցող երեխաների մոտ աջ ձեռքի անհամաչափություն ավելի քիչ է նկատվում, քան նրանց առողջ հասակակիցների մոտ, իսկ տարիքի հետ այս ֆունկցիայի ձևավորման մեջ ձախ կիսագնդի մասնակցության մասնաբաժինը մեծանում է առողջ երեխաների խմբում, ինչը մյուս խմբում չի նկատվում: Բացահայտված հատկանիշները կարող են վկայել մտավոր հետամնացություն ունեցող երեխաների ուղեղի ֆունկցիոնալ միջկիսագնդային անհամաչափության ձևավորման ընդհանուր դժվարության մասին:

**T. Yu. Azatyan**

**Approaches to the Question of Interhemispheric Asymmetry  
in Healthy and Mentally Retarded Children**

Approaches to the question of interhemispheric asymmetry of healthy and mentally retarded children are described. The obtained results show that right-hand asymmetry among mentally retarded schoolchildren is observed to a lesser extent than among their healthy peers, and with age the share of the left hemisphere in the formation of this function increases in the group of healthy children, which is not observed in the other group. The revealed peculiarities may indicate a general difficulty in the formation of functional interhemispheric brain asymmetry in the mentally retarded.

**Литература**

1. *Брагина Н. Н.* Функциональные асимметрии человека / Н.Н. Брагина, Т.А. Доброхотова. 2-е изд., перераб. и доп. М. Медицина. 1988. 237 с.
2. *Игнатова Ю. П., Макарова И. И., Зенина О. Ю. и др.* – Экология человека. 2016. № 9. С. 30-39
3. *Вайзман Н. П.* Психомоторика умственно отсталых детей. М. Аграф. 1997. 128 с.
4. *Bleich-Cohen M., Sharon H., Weizman R. et al.* – Schizophr Res. 2012. V. 134. № 2-3. P. 131-136. doi: 10.1016/j.schres.2011.10.011.
5. *Cohen Y., Wilson D. A.* – Sci Rep. 2018. V. 7. № 1. P. 14602. doi: 10.1038/s41598-017-15109-x.

6. *Ковязина М. С., Балашова Е. Ю.* В кн.: Руководство по функциональной межполушарной асимметрии. М. Научный мир. 2009. Гл. 7. С. 185-206.
7. *Москвина Н. В., Москвин В. А.* Межполушарные асимметрии и индивидуальные различия человека. М. Смысл. 2011. 367 с.
8. *Li D., Tang W., Yan T. et al.* – *Brain Imaging Behav.* 2021. V. 15. № 2. P. 819-832. doi: 10.1007/s11682-020-00292-9.



тельностью А. Анжур во многом содействовал развитию отдельных отраслей народного хозяйства и культуры нашей республики. Он впервые в Армении начал изучать физико-электрические свойства базальта. Совместно с Р. Л. Африкян получил данные о действии ультразвуковых волн на стерилизацию виноградного сока. В 1956 г. была издана его книга «Практикум физики: электричество и магнетизм» на армянском языке.

Арутюн Анжур скончался 4 декабря 1958 г.

(Подробнее см.: Национальный архив Армении. Ф. 20, Оп. 10. Д. 47; Сагателян В. Анжур (Чеботарян) Арутюн Геворкович//Профессора Ереванского университета. Часть I. Ереван, 1970. С. 24-25 (на арм. яз); Марикян Г. А., Оганесян Г. А. Арутюн Геворкович Анжур//История естествознания и техники в Армении. Сб. науч. трудов. V. Ереван, 1973. С. 229-249 (на арм. яз.).

### **Автобиография Арутюна Анжура**

*21 апреля 1955 г.*

*Ереван*

Отец мой из весьма бедной мещанской семьи, с 12-летнего возраста был отдан мальчиком рассыльным в торговое учреждение. Долгое время служил: был также управляющим магазином и некоторое время имел собственную торговлю, умер в 1897 году. Мать моя умерла в 1913 году.

Я, единственный сын родителей, родился в 1885 году в Нахичевани-на-Дону, учился в Ростовском-на-Дону реальном училище, окончил в 1902 г. и в том же году (1902) поступил в Петербургский технологический институт (механическое отделение), где учился до 1905 года отлично, ушел с третьего курса благодаря закрытию института, т. е. Продолжительному прекращению занятий в связи с гапоновскими событиями.

У матери были некоторые сбережения, и мы уехали за границу. Не чувствуя особого влечения к техническим наукам, я чувствовал, наоборот, сильное влечение к физике и отчасти научной философии. Поэтому в Лозаннском университете сначала стал заниматься научной философией (Пуанкаре, неевклидова геометрия и др.), затем классиками физики. Сбережения матери кончились, и ей стали посылать деньги братья и сестры. Я же давал частные уроки в колонии.

В 1909 году мы переехали в Париж, где я стал заниматься исключительно физикой и посещал лекции с 1909 по 1912 год. Одновременно занялся изучением классиков физики начиная с Галилея. Специально изучал Ньютона, Гюйгенса, Френеля, Вольта, Ома, Кулона и др. Но тут мне не повезло. В этот период вышел закон (собственно соглашение с Россией) о том, что эмигранты из России имеют право сдавать экзамены и получать диплом во Франции при условии визирования своих документов (академических) у французского консула в России, который это производил с согласия властей в России. Закон этот имел целью затруднить получение эмигрантами из России образования за границей.

Я выслал мои бумаги французскому консулу в Петербурге, но обратно не получил. К экзаменам меня не допустили. Наше материальное положение было очень скверное, и мы решили ехать обратно в родной город, а именно в Ростов-на-Дону. Тут я давал частные уроки французского языка и математики. Вскоре, однако, мать заболела и умерла в 1913 году. Я переехал в Новороссийск, где поступил в Русско-азиатский банк в начале 1914 года, а затем перешел в Краснодарское отделение Волжско-Камского банка в качестве иностранного корреспондента.

Затем сдал экзамен на домашнего учителя французского языка при Краснодарском реальном училище и переехал в станицу Незамаевскую Кубанской области на должность учителя французского языка и геометрии в Высшем начальном училище, где послужил два года, по 1916 год. Вследствие перемен в школе я уехал в Тифлис в 1917 году, поступил на электрическую осветительную станцию в качестве электротехника, желая приобрести практику по электротехнике. Прослужив год, я заболел и уехал в Геленджик в отпуск, где меня застала революция 1917 года, и мне пришлось остаться до 1920 года, так как все дороги были закрыты. В 1920 году мне удалось выбраться из Геленджика и переехать в Эривань, где я поступил сначала учителем физики в мужскую гимназию, где прослужил всего год.

Университет только организовался. Меня пригласили одновременно в университет сначала в качестве заведующего мастерской, имевшей целью создать оборудование для физической лаборатории, так как в это время не было возможности получать таковое извне. В течение 1921-1924 годов я организовал в университете первый студенческий практикум (около тридцати работ) по механике, упругости, звуку и отчасти оптике, в связи с чем меня назначили в 1921 году заведующим физической лабораторией. В 1923 году стал читать курс «Физические основы механики». В 1925 году меня командировали в Париж для ознакомления с новейшей физической техникой, повышения квалификации и, в особенности, ознакомления с новейшими методами электрических измерений и сильно развивающейся радиотехникой. В Париже я учился в двух радиоинженерных школах, получил диплом «Инженера-радиоэлектрика» и затем проработал для практики в заводской лаборатории на радиозаводе в течение 8 месяцев. В Парижском университете прошел курс и практические работы по радиоактивности у мадам Кюри и проделал все работы практикума по этой дисциплине. Одновременно сделал научную работу по теоретической механике «О новом методе изучения движения твердого тела по отношению к неподвижной системе координат». Из этой работы представил два доклада в Парижскую академию наук, напечатанные в 1927 году в Comptes Rendus. Позднее, в 1934 году, в результате развития той же работы был представлен третий доклад Академии наук СССР. Кроме того, на отпущенную полпредством валюту (от Наркомпроса АрмССР) я приобрел для университета электроизмерительные приборы, а также для измерений на высокой частоте.

В начале 1928 года возвратился в Ереван и здесь организовал новый студенческий практикум по электричеству, переменным токам и радиотехнике, а затем электроизмерительную лабораторию, названную «электро-радиолабораторией». В 1928 году стал читать курсы электричества переменных токов и радиотехники на физико-математическом факультете, каковые продолжаю читать и по сей день.

В 1932-1933 годы был командирован в Москву и Ленинград с целью приобретения приборов и материалов для измерительных установок в лаборатории, а также для ознакомления с некоторыми научными установками в научно-исследовательских институтах ЛЭФИ (Ленинградский электрофизический институт), ФТИ (Физико-технический институт), ВЭИ (Всероссийский электротехнический институт) и др.

В 1933-1934 годах под моим руководством лаборатория была занята работами по договорам с производственными учреждениями, из коих главная со строительством «КанакерГЭС»: измерение давления грунта в Канакерском туннеле по струнному методу проф. Давиденкова, а также с «Арааттрестом» по разработке методов стерилизации виноградного сока.

В 1933 году мне было присвоено звание доцента, а в 1935 году – звание профессора. В 1938 году я был назначен заведующим кафедрой «Электричества и физики колебаний». Во время войны наша кафедра выполнила целый ряд договорных и других работ для учреждений, работавших на оборону, и для некоторых военных учреждений. В 1941 году Верховным советом Армянской ССР мне было присвоено звание заслуженного деятеля науки, а в 1944 году награжден орденом «Знак почета».

В заключение должен дать о себе следующие сведения: под судом не был. В политических организациях не участвовал ни до, ни после революции. Никогда не служил на военной службе, был освобожден благодаря очень слабому зрению (астигматизму и др.). Никогда не был женат, семьи не имею. В настоящее время имею очень мало связей с родственниками, особенно с дальними. По моим сведениям, однако, никто не лишился избирательных прав и не подвергался репрессиям. За границей родственников совершенно не имею. В 1950 году был принужден уйти в отставку из-за болезни.

Проф. А. Анжур

[подпись]

**Национальный архив Армении. Ф.20. Оп.10. Д.47. Л.7-11, 17-18, 60-61. Подлинник. Рукопись.**

Публикацию подготовил  
**Степан Гарибджанян,**  
кандидат исторических наук.

### **Կանոններ հեղինակների համար**

1. «Հայաստանի գիտությունների ազգային ակադեմիայի Ձեկույցներ» հանդեսը լույս է տեսնում տարեկան չորս անգամ, զետեղում է գիտական հետազոտությունների նոր, ոչ մի տեղ չիրապարակված արդյունքներ պարունակող համառոտ, յուրօրինակ հոդվածներ:
2. ՀՀ ԳԱԱ ակադեմիկոսները, թղթակից անդամները և արտասահմանյան անդամները իրենց հոդվածները ներկայացնում են անմիջականորեն: Մյուս բոլոր հոդվածները ներկայացվում են ՀՀ ԳԱԱ անդամների միջոցով:
3. Հոդվածները կարելի է ներկայացնել հայերեն, ռուսերեն կամ անգլերեն: Այդ երեք լեզվով պետք է ներկայացնել նաև ռեֆերատ:
4. Ներկայացվում է հոդվածի էլեկտրոնային տարբերակը (CD/DVD-ով կամ e-mail-ով՝ [mas@sci.am](mailto:mas@sci.am)) երկու տպագիր օրինակով՝ վերջնական խմբագրությամբ: Հոդվածի ընդհանուր ծավալը՝ 8 էջ (12000 նիշ): Օգտագործվող տեքստային խմբագիրը՝ MS Word, տառաչափը՝ 12 pt, տողերի միջև հեռավորությունը՝ 1.5: Նկարները ներկայացվում են առանձին ֆայլով bmp կամ wmf ֆորմատով:

*Հանդեսի համառոտ անունը՝  
ՀՀ ԳԱԱԶ*

### ***Правила для авторов***

1. “Доклады Национальной академии наук Армении” выходят 4 раза в год и помещают краткие оригинальные статьи, содержащие новые, нигде не опубликованные результаты научных исследований.
2. Академики, члены-корреспонденты и иностранные члены НАН РА представляют свои статьи непосредственно, все остальные статьи представляются через членов НАН РА.
3. Статьи могут быть представлены на армянском, русском или английском языках; должны быть представлены также рефераты на этих трех языках.
4. Представляется электронный вариант статьи (на CD/DVD или по e-mail: [mas@sci.am](mailto:mas@sci.am)) с двумя распечатками в окончательной редакции. Общий объем статьи не должен превышать 8 стр. (12000 знаков). Используемый текстовый редактор MS Word, кегль 12 pt, интервал 1.5. Рисунки представляются отдельными файлами в формате bmp или wmf.

**Сокращенное название журнала  
ДНАН РА**

### ***Guidelines for Authors***

1. "The Reports of the National Academy of Sciences of Armenia" are published four times a year and place brief original articles containing new results of scientific researches, which were not printed previously.
2. Academicians, Corresponding Members and foreign members of NAS RA submit their articles directly. All other articles are submitted through the Members of NAS RA.
3. Articles may be presented in Armenian, Russian or English languages. It must have been presented the abstracts in these three languages as well.
4. It should be presented the complete editing of the electronic variant of the article (CD/DVD or by e-mail: [mas@sci.am](mailto:mas@sci.am)) and two hard copies. The whole size of the article should not exceed 8 pages (12000 marks). MS Word would be used as a text editors, font size – 12 pt, line spacing – 1.5. Pictures should be presented by the separate files in bmp or wmf formats.

***The abbreviated name of the journal is  
RNAS RA***