

УДК. 517.94

ОБ АСИМПТОТИКЕ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

МАРЯНЯН С. М.

Для широкого класса краевых задач для линейных уравнений с частными производными Л. А. Люстерником и М. А. Вишиком была разработана методика построения асимптотики решения, основной смысл которой состоит во вводе в асимптотическое разложение решения поправок, имеющих вид функции типа пограничного слоя, компенсирующих потерю некоторых граничных условий при переходе к вырожденной задаче.

В настоящей работе методом, развитым в работе [1]-[2], строится полная асимптотика решения спектральной задачи для одного уравнения эллиптического типа.

Пусть Q -прямоугольник в двумерном пространстве

$$Q(0 < x < 1, 0 < y < h)$$

Рассмотрим следующую спектральную задачу: в Q определить решение уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = \lambda u \quad (1)$$

которое удовлетворяет следующим начальным и граничным условиям

$$u|_{y=0} = 0, \quad u|_{y=h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=h} = 0 \quad (2)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=1} = 0 \quad (3)$$

где λ параметр: $h < 1$.

Цель нашей работы заключается в том, чтобы построить асимптотику решения поставленной задачи. При построении асимптотики мы будем пользоваться методом М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [1]-[2].

Для решения (1) - (2) - (3) вводим новые координаты

$$x=x, \quad y=th, \quad \text{где } 0 < t < 1$$

В новых координатах (1) - (2) - (3) имеет вид

$$\frac{1}{h^4} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \lambda u \quad (4)$$

$$u|_{t=0} = 0, u|_{t=1} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=1} = 0 \quad (5)$$

$$u|_{x=0} = 0, u|_{x=1} = 0, u \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{x=1} = 0 \quad (6)$$

Асимптотическое представление решения задачи будем искать в виде

$$u = u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \dots \quad (7)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_{-4}}{h^4} + \frac{\lambda_{-3}}{h^3} + \frac{\lambda_{-2}}{h^2} + \frac{\lambda_{-1}}{h} + \lambda_0 + \lambda_1 h + \dots \quad (8)$$

Подставим выражения для U и λ из (7) и (8) соответственно в (4), (5) и (6) получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h^4} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} (u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \dots) + \frac{\partial^4}{\partial x^4} (u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \dots) = \\ & = \left(\frac{\lambda_{-4}}{h^4} + \frac{\lambda_{-3}}{h^3} + \frac{\lambda_{-2}}{h^2} + \frac{\lambda_{-1}}{h} + \lambda_0 + h\lambda_1 + \dots \right) (u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \dots) \\ & (u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \dots) \bigg|_{t=0, t=1} = 0, \frac{\partial}{\partial t} (u_0 + hu_1 + h^2u_2 + \dots) \bigg|_{t=0, t=1} = 0 \end{aligned}$$

В последних равенствах сравнивая члены при одинаковых степенях по h получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_0}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_0 &= 0 \\ u_0 \bigg|_{t=0, t=1} &= 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} \bigg|_{t=0, t=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_1}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_1 &= \lambda_{-3} u_0 \\ u_1 \bigg|_{t=0, t=1} &= 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} \bigg|_{t=0, t=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_2}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_2 &= \lambda_{-3} u_1 + \lambda_{-2} u_0 \\ u_2 \bigg|_{t=0, t=1} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} \bigg|_{t=0, t=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_3}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_3 &= \lambda_{-3} u_2 + \lambda_{-2} u_1 + \lambda_{-1} u_0 \\ u_3 \bigg|_{t=0, t=1} &= 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t} \bigg|_{t=0, t=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_3}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_4 &= \frac{\partial^4 u_0}{\partial x^4} + \lambda_{-3} u_3 + \lambda_{-2} u_2 + \lambda_{-1} u_1 + \lambda_0 u_0 \\ u_4 /_{t=0, t=1} &= 0, \quad \frac{\partial u_4}{\partial t} /_{t=0, t=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^4 u_k}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_k &= - \frac{\partial^4 u_{k-4}}{\partial x^4} + \lambda_{-3} u_{k-3} + \lambda_{-2} u_{k-2} + \lambda_{-1} u_{k-1} + \\ &+ \lambda_{-1} u_{k-1} + \lambda_{-1} u_{k-3} + \lambda_0 u_{k-4} + \lambda_1 u_{k-5} + \lambda_{k-4} u_0 \\ u_k /_{t=0, t=1} &= 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial t} /_{t=0, t=1} = 0 \quad (k = 5, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Займемся решением полученных задач. Возьмем задачу (9)

$$\frac{\partial^4 u_0}{\partial t^4} - \lambda_{-4} u_0 = 0 \quad (15)$$

$$u_0 /_{t=0, t=1} = 0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial t} /_{t=0, t=1} = 0 \quad (16)$$

Пусть $\lambda_{-4} = \alpha^4$. Тогда характеристическое уравнение соответствующее (15) имеет четыре корня

$$\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha$$

тогда

$$y_1 = e^{\alpha t}, \quad y_2 = e^{-\alpha t}, \quad y_3 = e^{i\alpha t}, \quad y_4 = e^{-i\alpha t}$$

$$u_0 = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t} + c_3 e^{i\alpha t} + c_4 e^{-i\alpha t}$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из условий (16) именно из следующей системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 + C_4 &= 0 \\ C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} + C_3 e^{i\alpha} + C_4 e^{-i\alpha} &= 0 \\ \alpha_1 C_1 - \alpha_2 C_2 + i\alpha C_3 - i\alpha C_4 &= 0 \\ \alpha_1 C_1 e^{\alpha} - \alpha_2 C_2 e^{-i\alpha} + i\alpha C_3 e^{i\alpha} - i\alpha C_4 e^{-i\alpha} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Напишем определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{\alpha} & e^{-\alpha} & e^{i\alpha} & e^{-i\alpha} \\ 1 & -1 & i & -i \\ e^{\alpha} & -e^{-\alpha} & ie^{i\alpha} & -ie^{-i\alpha} \end{vmatrix}$$

Так как система однородная, то для того, чтобы она имела отличное от нуля решение, необходимо и достаточно, чтобы $\Delta = 0$. Из условия определяем α_k т.е. $\alpha_{-4, k}$. Зафиксируем какое-то значение K_0 и рассуждение

будем вести для этого значения. Зная λ_{-4, k_0} находим, что

$$U_{0, k_0}(t, x) = \bar{U}_{0, k_0}(x) \bar{\bar{U}}_{0, k_0}(t)$$

где $\bar{U}_{0, k_0}(x)$ подлежит определению. Теперь займемся заданной (10)

$$\frac{\partial^4 u_{1, k_0}}{\partial t^4} - \lambda_{-4, k_0} U_{1, k_0} = \lambda_{-3, k_0} U_{0, k_0} \quad (18)$$

$$u_{1, k_0} /_{t=0, t=1} = 0, \quad \frac{\partial u_{1, k_0}}{\partial t} /_{t=0, t=1} = 0 \quad (19)$$

Напишем сопряженную однородную задачу соответствующей задаче (18) (19). Она имеет вид

$$\frac{\partial^4 z_{0, k_0}}{\partial t^4} - \lambda_{-4, k_0} Z_{0, k_0} = 0$$

$$Z_{0, k_0} /_{t=0, t=1} = 0, \quad \frac{\partial z_{0, k_0}}{\partial t} /_{t=0, t=1} = 0$$

Выше показали, что эта задача имеет отличное от нуля $Z_{0, k_0}(t)$ решение. Поэтому для того, чтобы задача (18) - (19) имела решение необходимо и достаточно, чтобы имело место соотношение

$$\int_0^1 \lambda_{-3, k_0} U_{0, k_0} Z_{0, k_0}(t) dt = 0 \quad (20)$$

(20) - называется условием разрешимости задачи (18) - (19). Из (20) имеем

$$\lambda_{-3, k_0} \int_0^1 \bar{U}_{0, k_0}(x) \bar{\bar{U}}_{0, k_0}(t) Z_{0, k_0}(t) dt = 0$$

Так как $U_{0, k_0}^{(1)} = Z_{0, k_0}^{(1)}$, то из последнего равенства имеем

$$\bar{U}_0(x) \lambda_{-3, k_0} \int_0^1 [\bar{\bar{U}}_{0, k_0}(t)]^2 dt = 0$$

Аналогично получаем, что

$$U_{2, k_0, r_0}(t, x) = \bar{U}_{2, k_0, r_0}(x) \bar{\bar{U}}_{2, k_0, r_0}(t)$$

$$U_{3, k_0, r_0}(t, x) = \bar{U}_{3, k_0, r_0}(x) \bar{\bar{U}}_{3, k_0, r_0}(t)$$

Теперь рассмотрим задачу (13).

Так как λ_{-3, k_0} , λ_{-2, k_0} и λ_{-1, k_0} равен нулю, то имеет вид

$$\frac{\partial^4 u_{4, k_0}}{\partial t^4} - \lambda_{-4, k_0} U_{4, k_0} = - \frac{\partial^4 u_{0, k_0}}{\partial x^4} + \lambda_{0, k_0} U_{0, k_0} \quad (21)$$

$$U_{4,ko} /_{t=0, t=1} = 0, \quad \frac{\partial^4 u_{4,ko}}{\partial t} /_{t=0, t=1} = 0 \quad (22)$$

Напишем условие разрешимости задачи (21) - (22). Она имеет вид

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial^4 u_{o,ko}}{\partial x^4} + \lambda_{o,ko} U_{o,ko} \right\} \bar{U}_{o,ko}(t) dt = 0$$

Отсюда имеем

$$\int_0^1 \left\{ \left[\frac{\partial^4 \bar{U}_{o,ko}(x)}{\partial x^4} + \lambda_{o,ko} \bar{U}_{o,ko}(x) \right] \bar{U}_{o,ko}(t) \right\} \bar{U}_{o,ko}(t) dt = 0$$

$$\int_0^1 \left\{ \left[\frac{\partial^4 \bar{U}_{o,ko}(x)}{\partial x^4} + \lambda_{o,ko} \bar{U}_{o,ko}(x) \right] \bar{U}_{o,ko}(t) \right\} dt = 0$$

$$\left[\frac{\partial^4 \bar{U}_{o,ko}(x)}{\partial x^4} + \lambda_{o,ko} \bar{U}_{o,ko}(x) \right] \int_0^1 [\bar{U}_{o,ko}(t)]^2 dt = 0$$

Так как

$$\int_0^1 [\bar{U}_{o,ko}(t)]^2 dt = 0$$

то

$$\frac{\partial^4 \bar{U}_{o,ko}(x)}{\partial x^4} - \lambda_{o,ko} \bar{U}_{o,ko}(x) = 0$$

Следовательно для $U_{o,ko}(x)$ получаем следующую спектральную задачу

$$\frac{\partial^4 U_{o,ko}(x)}{\partial x^4} - \lambda_{o,ko} \bar{U}_{o,ko}(x) = 0 \quad (23)$$

$$\bar{U}_{4,ko} /_{x=0, x=1} = 0, \quad \frac{\partial U_{o,ko}}{\partial x} /_{x=0, x=1} = 0 \quad (24)$$

Аналогично выше написанному определяем, что $U_{o,ko,r_o}(t)$ собственные функции задачи (23) - (24) $\lambda_{o,ko,ro}$ собственные числа этой же задачи. Продолжая процесс, определяем все члены разложения и (7) - (8).

Кафедра математики

Поступила 25.10.1997

Լիտերատուրա

1. *Մ. Ի. Վիշիկ, Լ. Ա. Լյոստերնիկ*. УМН. Т.12.5 /77,3/1957/
2. *Մ. Ի. Վիշիկ, Լ. Ա. Լյոստերնիկ*. УМН. Т.15.3/93,3/1960/
3. *Մ. Մ. Տաճառլիև, Տ. Մ. Մարյան*. ДАН СССР. 1985.280./3

Ս. Մ. Մարյանյան

Էվոլյուցիոն հավասարման վերաբերյալ սպեկտրալ խնդրի ասիմպտոտիկ լուծման մասին

Ամփոփում

Աշխատանքում փոքր պարամետրի մերոմորֆ կառուցված է սպեկտրալ խնդրի լուծման լրիվ ասիմպտոտիկան էվոլյուցիոն մեկ հավասարման համար: