

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱ, ՄԵԽԱՆԻԿԱ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ
ОРТОТРОПНОЙ НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ СО
СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г.

АГПУ имени Х. Абовяна, 0010, Ереван, пр. Тиграна Меца 17

e-mail: lusina@mail.ru, ghulgr@yahoo.com

Используя систему уравнений соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, исследуются свободные колебания ортотропной тонкой упругой незамкнутой круговой цилиндрической оболочки со свободными краями. Для нахождения приближенных собственных частот и соответствующих собственных форм применяется метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова. Получены дисперсионные уравнения для нахождения приближенных собственных частот возможных типов колебаний. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки. Установлена также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задачи на собственные значения полубесконечной ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля с тремя свободными краями. На примере незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки получены приближенные значения безразмерной характеристики собственных частот колебаний.

Ключевые слова: колебания, оболочка, дисперсионные уравнения, асимптотика.

Поступила в редакцию 16.01.2018г.

Введение

Известно, что у свободного края ортотропной пластинки, независимо друг от друга существуют планарные и изгибные колебания [1-3]. При искривлении пластинки два указанных типа колебаний оказываются связанными, давая начало двум новым типам локализованных у свободного края (преимущественно планарных и преимущественно изгибных) типов колебаний. У свободного края упругой цилиндрической оболочки происходит трансформация одного типа колебания в другой. При этой трансформации колебаний, с учетом геометрических и механических параметров оболочки, возникает сложная картина распределения частот собственных колебаний конечных и бесконечных цилиндрических оболочек со свободным краем [4-6]. Для тонких цилиндрических оболочек со свободным краем первые частоты распределены очень густо [7-12]. Поэтому численный расчет не всегда эффективен. С увеличением числа свободных краев цилиндрических оболочек картина распределения частот собственных колебаний становится более сложной. Эти трудности преодолеваются с помощью комбинирования аналитической и асимптотической теорий, а также численными методами.

В настоящей работе исследуются свободные колебания тонкой упругой незамкнутой цилиндрической оболочки со свободными краями. Задача не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор, соответствующий задаче, самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения приближенных собственных частот и соответствующих собственных форм можно применять метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [13-17].

1. Постановка задачи и основные уравнения.

Предполагается, что образующие цилиндрической оболочки ортогональны торцам оболочки. На срединной поверхности оболочки вводятся криволинейные координаты (α, β) , где $\alpha(0 \leq \alpha \leq l)$ и $\beta(0 \leq \beta \leq s)$ являются соответственно длиной образующей и длиной направляющей окружности. l – длина цилиндрической оболочки, а s – длина направляющей окружности.

В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочек используются уравнения, которые соответствуют классической теории ортотропных цилиндрических оболочек, записанных в выбранных криволинейных координатах α, β (рис.1).

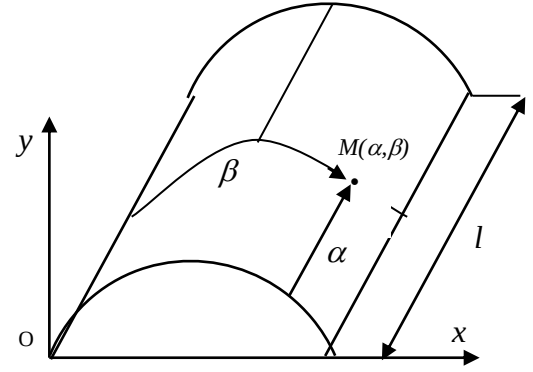


рис. 1.

$$\begin{aligned}
 & -B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \alpha} = \lambda u_1, \\
 & -(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_3}{\partial \beta} - \frac{\mu^4}{R^2} \left(4B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} + \right. \\
 & \left. + B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} \right) - \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) = \lambda u_2, \\
 & \mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) + \frac{\mu^4}{R} \left(B_{22} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta^3} + \right. \\
 & \left. + (B_{12} + 4B_{66}) \frac{\partial^3 u_2}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right) - \frac{B_{12}}{R} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} - \frac{B_{22}}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} + \frac{B_{22}}{R^2} u_3 = \lambda u_3.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – проекции вектора перемещения, соответственно в направлениях α, β и нормали к срединной поверхности оболочки, R – радиус направляющей окружности срединной поверхности, $\mu^4 = h^2/12$ (h – толщина оболочки). $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала, B_{ij} – коэффициенты упругости. Граничные условия имеют вид [18]:

$$\begin{aligned}
 & \left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \frac{4\mu^4}{R} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \\
 & \left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0, \\
 & \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \right|_{\alpha=0,l} = 0.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} - \frac{u_3}{R} \Big|_{\beta=0,s} &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \Big|_{\alpha=0,s} = 0, \\
\frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \Big|_{\beta=0,s} &= 0, \\
\frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} + \frac{4B_{66}}{B_{22}} \frac{1}{R} \frac{\partial^3 u_2}{\partial \alpha^2} \Big|_{\beta=0,s} &= 0.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где соотношения (1.2) и (1.3) являются условиями свободного края при $\alpha=0, l$ и $\beta=0, s$ соответственно.

2. Вывод и анализ характеристических уравнений.

В первом, втором и третьем уравнениях системы (1.1), спектральный параметр λ формально заменим на $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ соответственно. Решение системы (1.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2, u_3) = \{u_m w_m''(\theta_m \beta), v_m w_m''(\theta_m \beta), w_m''(\theta_m \beta)\} \beta^2 (\beta - s)^2 \exp(k\chi\alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}. \tag{2.1}$$

Здесь $w_m(\theta_m \beta), m = \overline{1, +\infty}$ являются собственными функциями задачи

$$w^{IV} = \theta^4 w, \quad w''|_{\beta=0,s} = w'''|_{\beta=0,s} = 0, \quad 0 \leq \beta \leq s, \tag{2.2}$$

$$w_m(\theta_m \beta) = ch\theta_m \beta + \cos\theta_m \beta - \frac{ch\theta_m s - \cos\theta_m s}{sh\theta_m s - \sin\theta_m s} (sh\theta_m \beta + \sin\theta_m \beta), \tag{2.3}$$

соответствующие собственным значениям $\theta_m^4, m = \overline{1, +\infty}$. u_m, v_m, χ – неопределенные постоянные. Задача (2.2) самосопряженная и имеет положительный простой дискретный спектр с предельной точкой на $+\infty$, а θ_m – корни уравнения: $ch(\theta s) \cos(\theta s) - 1 = 0$.

При этом условия (1.3) выполняются автоматически. Подставим (2.1) в (1.1). Из полученных трех уравнений второе дифференцируем по β .

Полученные уравнения скалярным образом умножаем на вектор функции $(w_m''(\theta_m \beta), w_m'(\theta_m \beta), w_m''(\theta_m \beta))$ и интегрируем в пределах от 0 до s . Из первых двух полученных уравнений имеем

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) u_m = \varepsilon_m \chi \left\{ a_m + a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} l_m + \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{22}B_{12}}{B_{11}B_{66}} d_m \right\}, \tag{2.4}$$

$$(c_m + \varepsilon_m^2 a^2 g_m d_m) v_{cm} = \varepsilon_m \left\{ a^2 g_m l_m - b_m \beta_m \right\}, \tag{2.5}$$

а из третьего уравнения, учитывая соотношения (2.4) и (2.5), получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
R_{mm} c_m + \varepsilon_m^2 \left\{ c_m - b_m \beta_m - \frac{B_{12}}{B_{22}} \chi^2 a_m + a^2 \left[R_{mm} g_m d_m + b_m \left(1 + \beta_m^2 + \frac{2(B_{12} + 4B_{66})}{B_{22}} \beta_m \chi^2 \right) \right] + \right. \\
\left. + \varepsilon_m^2 a^2 d_m (b_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2) - a^4 g_m l_m \left(\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \chi^2 + \beta_m \right) \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \chi^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2; \quad b_m = B_1 \chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2; \\
c_m &= \chi^4 + B_2 \beta_m \chi^2 + \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 \right) \chi^2 + (\beta_m + \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right);
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$B_1 = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}; \quad d_m = \frac{4B_{66}}{B_{11}} \chi^2 + \beta_m;$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 2B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{66}}, l_m = \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}}\beta_m\chi^2 + 1, \\
g_m &= \frac{B_{22}}{B_{66}}\chi^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}}\beta_m + \frac{B_{22}}{B_{11}}\eta_{1m}^2, \varepsilon_m = \frac{1}{R\theta_m}, \eta_{im}^2 = \frac{\lambda_i}{B_{66}\theta_m^2}, i = \overline{1,3}, \\
R_{mm} &= a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}}\chi^4 + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}}\beta_m\chi^2 + 1 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}}\eta_{3m}^2, \\
\beta_m &= \int_0^s \beta^2(\beta-s)^2 w_m''(\theta_m\beta) w_m(\theta_m\beta) d\beta / \int_0^s \beta^2(\beta-s)^2 w_m''^2(\theta_m\beta) d\beta, a^2 = \mu^4 \theta_m^2.
\end{aligned}$$

Пусть $\chi_j, j = \overline{1,4}$ – попарно различные нули уравнения (2.6) с неположительными действительными частями и $\chi_{4+j} = -\chi_j, j = \overline{1,4}$. Пусть $(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, u_3^{(j)}), j = \overline{1,8}$ нетривиальные решения вида (2.1) системы (1.1) при $\chi = \chi_j, j = \overline{1,8}$ соответственно. Приближенное решение задачи (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$u_i = \sum_{j=1}^8 u_i^{(j)} w_j, i = \overline{1,3}. \quad (2.8)$$

Подставим (2.8) в граничные условия (1.2). Из полученных уравнений второе дифференцируем по β . Скалярным образом, каждое полученное уравнение умножаем на вектор функцию $(w_m''(\theta_m\beta), w_m'(\theta_m\beta), w_m''(\theta_m\beta))$ и интегрируем в пределах от 0 до s . В итоге получим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^8 \frac{M_{ij}^{(m)} w_j}{c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 a^2 g_m^{(j)} d_m^{(j)}} = 0, i = \overline{1,8}, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned}
M_{1j}^{(m)} &= \chi_j^2 a_m^{(j)} - \frac{B_{12}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} c_m^{(j)} - \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}^2} d_m^{(j)} (\beta_m + \eta_{1m}^2) + \\
&\quad a^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} l_m^{(j)} \left(\chi_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right), \\
M_{2j}^{(m)} &= \chi_j \left\{ \left(a_m^{(j)} + b_m^{(j)} \right) \beta_m + a^2 \left[4c_m^{(j)} \beta_m - l_m^{(j)} \left(\frac{B_{22}}{B_{66}} \chi_j^2 + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} \beta_m + \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + a^2 \varepsilon_m^2 \left(4b_m^{(j)} \beta_m + \frac{B_{12}B_{22}}{B_{11}B_{66}} d_m^{(j)} \beta_m - 4a^2 g_m^{(j)} \left(\frac{B_{12}}{B_{22}} \chi_j^2 + 1 - \beta_m^2 \right) \right) \right\}, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{3j}^{(m)} &= \left(\chi_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta_m \right) c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 \left[\frac{B_{12}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta_m + a^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^4 + \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{22}} \beta_m \chi_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} (\beta_m^2 - 1) \right) \right], \\
M_{4j}^{(m)} &= \chi_j \left\{ \left(\chi_j^2 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \beta_m \right) c_m^{(j)} + \varepsilon_m^2 \left[\frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} b_m^{(j)} \beta_m + a^2 g_m^{(j)} \left(\frac{4B_{66}}{B_{22}} \chi_j^4 - \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12}B_{66}}{B_{11}B_{22}} \beta_m \chi_j^2 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} (\beta_m^2 - 1) \right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$M_{5j}^{(m)} = M_{1j}^{(m)} \exp(z_j), M_{6j}^{(m)} = M_{2j}^{(m)} \exp(z_j), M_{7j}^{(m)} = M_{3j}^{(m)} \exp(z_j), M_{8j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} \exp(z_j) \quad z_j = \theta_m \chi_j l, j = \overline{1,8}.$$

Верхний индекс j в скобках означает, что соответствующая функция взята при $\chi = \chi_j$. Чтобы система (2.9) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{Det} \| M_{ij}^{(m)} \|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.11)$$

Численный анализ показывает, что левая часть этого равенства становится малой, когда любые два корня уравнения (2.6) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений. Оказывается, что множитель в левой части равенства (2.11), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить. Для этого введем обозначения:

$$\begin{aligned} [z_i z_j] &= \theta_m l (\exp(z_i) - \exp(z_j)) / (z_i - z_j), [z_i z_j z_k] = \theta_m l ([z_i z_j] - [z_i z_k]) / (z_j - z_k), \\ [z_1 z_2 z_3 z_4] &= \theta_m l ([z_1 z_2 z_3] - [z_1 z_2 z_4]) / (z_3 - z_4), \\ \sigma_1 &= \sigma_1(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 + \chi_2 + \chi_3 + \chi_4, \\ \sigma_2 &= \sigma_2(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 \chi_2 + \chi_1 \chi_3 + \chi_1 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 + \chi_2 \chi_4 + \chi_3 \chi_4, \\ \sigma_3 &= \sigma_3(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 \chi_2 \chi_3 + \chi_1 \chi_2 \chi_4 + \chi_1 \chi_3 \chi_4 + \chi_2 \chi_3 \chi_4; \\ \sigma_4 &= \sigma_4(\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4) = \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4, \\ \bar{\sigma}_k &= \sigma_k(\chi_1, \chi_2, \chi_3, 0), \bar{\bar{\sigma}}_k = \sigma_k(\chi_1, \chi_2, 0, 0), k = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При этом $\bar{\sigma}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_4 = \bar{\bar{\sigma}}_3 = 0$. Пусть f_n , $n = \overline{1, 6}$ симметрический многочлен n -й степени от переменных $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$. Известно, что он выражается через элементарные симметрические многочлены единственным образом. Обозначая

$$f_n = f_n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4); \bar{f}_n = f_n(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3, 0); \bar{\bar{f}}_n = f_n(\bar{\bar{\sigma}}_1, \bar{\bar{\sigma}}_2, 0, 0), n = \overline{1, 6}; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \sigma_1, f_2 = \sigma_1^2 - \sigma_2; f_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 + \sigma_3; f_4 = \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_3 - \sigma_4; \\ \bar{f}_5 &= \bar{\sigma}_1^5 - 4\bar{\sigma}_1^3\bar{\sigma}_2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_2^2 + 3\bar{\sigma}_1^2\bar{\sigma}_3 - 2\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_3; \bar{\bar{f}}_6 = \bar{\bar{\sigma}}_1^6 - 5\bar{\bar{\sigma}}_1^4\bar{\bar{\sigma}}_2 + 6\bar{\bar{\sigma}}_1^2\bar{\bar{\sigma}}_2^2 - \bar{\bar{\sigma}}_2^3; \end{aligned} \quad (2.14)$$

и выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.11), получаем

$$\text{Det} \| M_{ij}^{(m)} \|_{i,j=1}^8 = K^2 \exp(-z_1 - z_2 - z_3 - z_4) \text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8, \quad (2.15)$$

$$K = (\chi_1 - \chi_2)(\chi_1 - \chi_3)(\chi_1 - \chi_4)(\chi_2 - \chi_3)(\chi_2 - \chi_4)(\chi_3 - \chi_4). \quad (2.16)$$

Выражения для m_{ij} приведены в приложении.

Уравнение (2.11) эквивалентно уравнению

$$\text{Det} \| m_{ij} \|_{i,j=1}^8 = 0. \quad (2.17)$$

Учитывая возможные соотношения между λ_1, λ_2 и λ_3 , заключаем, что уравнение (2.17) определяет частоты соответствующих типов колебаний.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ уравнение (2.6) – характеристическое уравнение системы (1.1), а уравнение (2.17) – дисперсионное уравнение задачи (1.1)-(1.3).

В пункте 5 исследованы асимптотики дисперсионного уравнения (2.17) при $1/\theta_m R \rightarrow 0$ (предельный переход к пластинке или к локализации колебаний у свободных краев цилиндрической оболочки) и при $\theta_m l \rightarrow \infty$ (предельный переход к полубесконечной цилиндрической оболочке или к локализации колебаний у свободных краев цилиндрической оболочки). Для проверки достоверности полученных в пункте 5 асимптотических связей, в следующих двух пунктах исследуются планарные и изгибные собственные колебания ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами.

3. Планарные колебания ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами.

Пусть ортотропная прямоугольная пластинка отнесена к триортогональной системе прямолинейных координат (α, β, γ) с началом в свободной торцевой плоскости так, что координатная плоскость $\alpha\beta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления упругости материала пластинки совпадают с координатными линиями (рис.2). Пусть s, l являются шириной и длиной пластинки соответственно. При условиях свободного колебания рассматривается вопрос существования планарных колебаний прямоугольной пластинки со свободными сторонами. В качестве исходных уравнений, примем уравнения малых планарных колебаний, которые соответствуют классической теории ортотропных пластин [19]

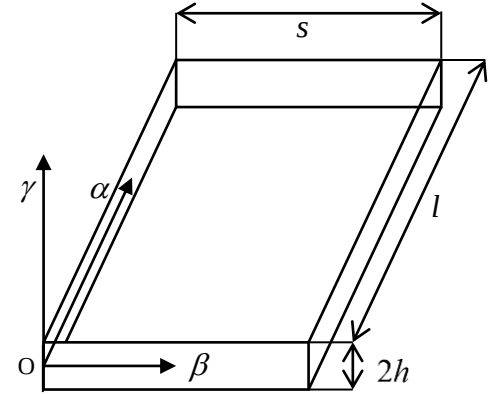


рис. 2.

$$-B_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha^2} - B_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \beta^2} - (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha \partial \beta} = \lambda u_1;$$

(3.1)

$$-(B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \alpha \partial \beta} - B_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \alpha^2} - B_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial \beta^2} = \lambda u_2,$$

где α ($0 \leq \alpha \leq l$) и β ($0 < \beta < s$) ортогональные прямолинейные координаты точки срединной плоскости, u_1, u_2 – проекции вектора перемещений, соответственно в направлениях α, β , $B_{ik}, i, k = 1, 2, 6$ – коэффициенты упругости. $\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала. Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0, l} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\alpha=0, l} = 0;$$

(3.2)

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_2}{\partial \beta} \right|_{\beta=0, s} = \left. \frac{\partial u_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial \beta} \right|_{\beta=0, s} = 0,$$

(3.3)

где соотношения (3.2), (3.3) выражают условия свободного края при $\alpha = 0, l$ $\beta = 0, s$ соответственно. Задача (3.1)–(3.3) не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор соответствующий задаче (3.1)–(3.3) самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения приближенных собственных частот и соответствующих собственных форм можно применять метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [17]. Решение системы (3.1) ищем в виде

$$(u_1, u_2) = \{u_m w_m''(\theta_m \beta), v_m w_m''(\theta_m \beta)\} \beta^2 (\beta - s)^2 \exp(\theta_m \gamma \alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (3.4)$$

где u_m, v_m, γ неизвестные постоянные, а $w_m(\theta_m \beta), m = \overline{1, \infty}$ определены в (2.3). При этом условия (3.3) выполняются автоматически. Подставим (3.4) в (3.1). Из полученных уравнений второе дифференцируем по β . Скалярным образом полученные уравнения умножаем на вектор функцию $(w_m''(\theta_m \beta), w_m'(\theta_m \beta))$ и интегрируем в пределах от 0 до s . В итоге получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (B_{11} \gamma^2 + B_{66} \beta_m + B_{66} \eta_m^2) u_m - (B_{12} + B_{66}) \gamma v_m &= 0, \\ (B_{12} + B_{66}) \gamma \beta_m u_m + (B_{66} \gamma^2 - B_{22} \beta_m + B_{66} \eta_m^2) v_m &= 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\eta_m^2 = \lambda / (\theta_m^2 B_{66})$, а θ_m и β_m определены в (2.2) и (2.7) соответственно. Приравнявая определитель системы (3.5) к нулю, получим характеристическое уравнение системы уравнений (3.1)

$$c_m = y^4 + B_2 \beta_m y^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 + (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad (3.6)$$

Пусть y_1 и y_2 различные корни уравнения (3.6) с неположительными действительными частями и $y_{2+j} = -y_j, j=1,2$. В качестве решения системы (3.5) при $y = y_j, j=\overline{1,4}$ возьмем

$$u_m^{(j)} = \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} y_j, \quad v_m^{(j)} = y_j^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} (\beta_m + \eta_m^2), \quad j=\overline{1,4}. \quad (3.7)$$

Представим решение задачи (3.1)-(3.3) в виде

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum_{j=1}^4 u_m^{(j)} \beta^2 (\beta - s)^2 w_m''(\theta_m \beta) \exp(\theta_m y_j \alpha) w_j, \\ u_2 &= \sum_{j=1}^4 v_m^{(j)} \beta^2 (\beta - s)^2 w_m''(\theta_m \beta) \exp(\theta_m y_j \alpha) w_j. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Подставим (3.8) в граничные условия (3.2). Каждое полученное уравнение, скалярным образом, умножаем на вектор функцию $(w_m''(\theta_m \beta), w_m'(\theta_m \beta))$ и интегрируем в пределах от 0 до s . В итоге получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 R_{ij}^{(m)} w_j &= 0, \quad i=1,2, \\ \sum_{j=1}^4 R_{ij}^{(m)} \exp(z_j) w_j &= 0, \quad i=1,2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$R_{1j}^{(m)} = y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} (\beta_m + \eta_m^2), \quad R_{2j}^{(m)} = y_j \left(y_j^2 - \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right), \quad z_j = \theta_m y_j l, \quad j=\overline{1,4}. \quad (3.10)$$

Приравнявая определитель Δ_e системы (3.9) к нулю и произведя элементарные действия над столбцами определителя, получим дисперсионное уравнение

$$\Delta_e = \exp(-z_1 - z_2) (y_2 - y_1)^2 \text{Det} \| l_{ij} \|_{i,j}^4 = 0, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} l_{11} &= R_{11}^{(m)}, \quad l_{12} = y_1 + y_2, \quad l_{13} = l_{11} \exp(z_1), \quad l_{14} = l_{12} \exp(z_2) + l_{11} [z_1 z_2]; \\ l_{21} &= R_{21}^{(m)}, \quad l_{22} = y_1 y_2 + B_1 \beta_m - \eta_m^2, \quad l_{23} = -l_{21} \exp(z_1), \quad l_{24} = -l_{22} \exp(z_2) - l_{21} [z_1 z_2]; \\ l_{31} &= l_{13}, \quad l_{23} = l_{14}, \quad l_{33} = l_{11}, \quad l_{34} = l_{12}; \quad l_{41} = l_{23}, \quad l_{42} = l_{24}, \quad l_{43} = l_{21}, \quad l_{44} = l_{22}; \\ [z_1 z_2] &= \theta_m l (\exp(z_2) - \exp(z_1)) / (z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Уравнение (3.11) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \text{Det} \| l_{ij} \|_{i,j=1}^4 &= \left(\frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \right)^2 K_{2m}^2 (\eta_m^2) (1 + \exp(2(z_1 + z_2))) + \\ &+ 8 l_{12} l_{11} l_{22} l_{21} \exp(z_1 + z_2) - \\ &- 4 l_{11} l_{21} (l_{11} l_{22} + l_{21} l_{12}) (\exp(z_2) - \exp(z_1)) [z_1 z_2] - \\ &- (l_{11} l_{22} + l_{21} l_{12})^2 (\exp(2z_1) + \exp(2z_2)) - 4 l_{11} l_{21} [z_1 z_2]^2 = 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$K_{2m} (\eta_m^2) = (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \beta_m + \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 \quad (3.13)$$

Заметим, что если y_1 и y_2 корни уравнения (3.6) с отрицательными действительными частями, то при $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни уравнения (3.12) аппроксимируются корнями уравнения

$$K_{2m}(\eta_m^{(2)}) = (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}B_{66}} \beta_m + \eta_m^2 \right) - \eta_m^2 y_1 y_2 = 0. \quad (3.14)$$

Уравнение (3.14) является аналогом уравнения Рэлея для достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами (ср. [9-11]).

Таким образом, собственные частоты задачи (3.1)-(3.3) находятся из уравнений (3.12).

Для нахождения соответствующих собственных форм необходимо определить коэффициенты w_j , $j = \overline{1,4}$ из системы уравнений (3.9) и подставить в (3.8). В качестве решений системы уравнений (3.9) при данной безразмерной характеристике собственного значения η_m можно взять

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{R_{12}^{(m)} R_1^{(m)} \exp(2z_1 + z_2) + R_2^{(m)} \exp(z_1) - 2R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} \exp(z_2)}{R_{11}^{(m)} R_1^{(m)} - R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_2 &= \frac{R_1^{(m)} \exp(2z_1 + z_2) + R_2^{(m)} \exp(z_2) - 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1)}{R_1^{(m)} - R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_3 &= -\frac{R_{12}^{(m)} R_1^{(m)} \exp(z_1) + R_2^{(m)} \exp(2z_2 + z_1) - 2R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} \exp(2z_1 + z_2)}{R_{11}^{(m)} R_1^{(m)} - R_2^{(m)} \exp(2z_1) + 2R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)} \exp(z_1 + z_2)}, \\ w_4 &= \exp(z_2), \quad R_1^{(m)} = R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} - R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)}, \quad R_2^{(m)} = R_{11}^{(m)} R_{22}^{(m)} + R_{12}^{(m)} R_{21}^{(m)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

4. Изгибные колебания ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами.

Пусть имеется ортотропная прямоугольная пластинка и h, s, l являются соответственно толщиной, шириной и длиной пластинки (рис. 2). При условии свободного колебания рассматривается вопрос существования изгибных колебаний прямоугольной пластинки со свободными сторонами. В качестве исходного уравнения, примем уравнение малых изгибных колебаний, которое соответствует классической теории ортотропных пластин [19]

$$\mu^4 \left(B_{11} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^4} + 2(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 u_3}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + B_{22} \frac{\partial^4 u_3}{\partial \beta^4} \right) = \lambda u_3, \quad (4.1)$$

где α ($0 \leq \alpha \leq l$) и β ($0 \leq \beta \leq s$) – ортогональные прямолинейные координаты точки срединной плоскости пластинки; u_3 – нормальная компонента вектора перемещения точки срединной плоскости; B_{ik} , $i, k = 1, 2, 6$ – коэффициенты упругости, $\mu^4 = h^2 / 12$ (h – толщина пластинки).

$\lambda = \omega^2 \rho$, где ω – угловая частота собственных колебаний, ρ – плотность материала.

Граничные условия имеют вид

$$\left. \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{B_{12}}{B_{11}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right|_{\alpha=0,l} = \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right|_{\alpha=0,l} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left. \frac{B_{12}}{B_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \beta^2} \right|_{\beta=0,s} = \left. \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta^3} + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{22}} \frac{\partial^3 u_3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right|_{\beta=0,s} = 0, \quad (4.3)$$

где соотношения (4.2) и (4.3) выражают условия свободного края при $\alpha = 0, l$ и $\beta = 0, s$ соответственно. Задача (4.1)-(4.3) не допускает разделения переменных. Дифференциальный оператор соответствующий задаче (4.1)-(4.3) самосопряженный и неотрицательно определенный. Поэтому, для нахождения приближенных собственных частот и соответствующих

собственных форм можно применять метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Канторовича-Власова [17]. Решение уравнения (4.1) ищем в виде

$$u_3 = w_m''(\theta_m \beta) \beta^2 (\beta - s)^2 \exp(\theta_m y \alpha), \quad m = \overline{1, +\infty}, \quad (4.4)$$

где u_m, v_m, χ неизвестные постоянные, а $w_m(\theta_m \beta), m = \overline{1, +\infty}$ определены в (2.3). При этом условия (4.3) выполняются автоматически. Подставим (4.4) в (4.1). Полученное уравнение умножая на $w_m''(\theta_m \beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s , получим характеристическое уравнение

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} y^4 + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta_m y^2 + 1 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0; \quad (4.5)$$

$$\eta_m^2 = \frac{\lambda}{\theta_m^2 B_{66}}, \quad a^2 = \theta_m^2 h^2 / 12, \quad (4.6)$$

где θ_m и β_m определены в (2.2) и (2.7) соответственно. Пусть y_3 и y_4 различные корни уравнения (4.5) с неположительными действительными частями и $y_{2+j} = -y_j, j = 3, 4$. Решение задачи (4.1)–(4.3) ищем в виде

$$u_3 = \sum_{j=3}^6 w_m''(\theta_m \beta) \beta^2 (\beta - s)^2 \exp(\theta_m y_j \alpha) w_j. \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в граничные условия (4.2). Умножая полученные уравнения на $w_m''(\theta_m \beta)$ и интегрируя в пределах от 0 до s , получим систему уравнений

$$\sum_{j=3}^6 R_{ij}^{(m)} w_j = 0, \quad i = 3, 4, \quad (4.8)$$

$$\sum_{j=3}^6 R_{ij}^{(m)} \exp(z_j) w_j = 0, \quad i = 3, 4.$$

$$R_{3j}^{(m)} = y_j^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta_m, \quad R_{4j}^{(m)} = y_j^3 + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \beta_m y_j, \quad z_j = \theta_m y_j l, \quad j = \overline{3, 6}. \quad (4.9)$$

Приравнявая определитель Δ_b системы (4.8) к нулю и произведя элементарные действия над столбцами определителя, получим дисперсионное уравнение

$$\Delta_b = \exp(-z_3 - z_4) (y_4 - y_3)^2 \text{Det} \| b_{ij} \|_{i,j}^4 = 0 \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} b_{11} &= R_{33}^{(m)}, \quad b_{12} = y_3 + y_4, \quad b_{13} = b_{11} \exp(z_3), \quad b_{14} = b_{12} \exp(z_4) + l_{11} [z_3 z_4]; \\ b_{21} &= R_{43}^{(m)}, \quad b_{22} = y_3 y_4 - \beta_m B_{12} / B_{11}, \quad b_{23} = -b_{21} \exp(z_3), \quad b_{24} = -b_{22} \exp(z_4) - b_{21} [z_3 z_4]; \\ b_{31} &= b_{13}, \quad b_{32} = b_{14}, \quad b_{33} = b_{11}, \quad b_{34} = b_{12}; \quad b_{41} = b_{23}, \quad b_{42} = b_{24}, \quad b_{43} = b_{21}, \quad b_{44} = b_{22}; \quad (4.11) \\ [z_3 z_4] &= \theta_m l (\exp(z_4) - \exp(z_3)) / (z_4 - z_3). \end{aligned}$$

Уравнение (4.10) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \text{Det} \| b_{ij} \|_{i,j=1}^4 &= K_{1m}^2 (\eta_m) (1 + \exp(2(z_3 + z_4))) + 8b_{12} b_{11} b_{22} b_{21} \exp(z_3 + z_4) - \\ &- 4b_{11} b_{21} (b_{11} b_{22} + b_{21} b_{12}) (\exp(z_4) - \exp(z_3)) [z_3 z_4] - \\ &- (b_{11} b_{22} + b_{21} b_{12})^2 (\exp(2z_3) + \exp(2z_4)) - 4b_{11} b_{21} [z_3 z_4]^2 = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$K_{1m} (\eta_m^2) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} \beta_m y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right) \beta_m^2. \quad (4.13)$$

Заметим, что если χ_3 и χ_4 корни уравнения (4.5) с отрицательными действительными частями, то при $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни уравнения (4.12) аппроксимируются корнями уравнения

$$K_{1m}(\eta_m^2) = y_3^2 y_4^2 + 4 \frac{B_{66}}{B_{11}} \beta_m y_3 y_4 - \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \right)^2 \beta_m^2 = 0. \quad (4.14)$$

Уравнение (4.14) является аналогом уравнения Коненкова для достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами (ср. [9-11]).

Таким образом, собственные частоты задачи (4.1)-(4.3) находятся из уравнений (4.12).

Для нахождения соответствующих собственных форм необходимо определить коэффициенты $w_j, j = \overline{3,6}$ из системы уравнений (4.8) и подставить в (4.7). В качестве решений системы уравнений (4.8) при данной безразмерной характеристике собственного значения η_m можно взять

$$\begin{aligned} w_3 &= \frac{R_{34}^{(m)} R_3^{(m)} \exp(2z_3 + z_4) + R_4^{(m)} \exp(z_3) - 2R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} \exp(z_4)}{R_{33}^{(m)} R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)}, \\ w_4 &= \frac{R_3^{(m)} \exp(2z_3 + z_4) + R_4^{(m)} \exp(z_4) - 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3)}{R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)}, \\ w_5 &= -\frac{R_{34}^{(m)} R_3^{(m)} \exp(z_3) + R_4^{(m)} \exp(2z_3 + z_4) - 2R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} \exp(2z_3 + z_4)}{R_{33}^{(m)} R_3^{(m)} - R_4^{(m)} \exp(2z_3) + 2R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)} \exp(z_3 + z_4)}, \\ w_6 &= \exp(z_4), \quad R_3^{(m)} = R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} - R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)}, \quad R_4^{(m)} = R_{33}^{(m)} R_{44}^{(m)} + R_{34}^{(m)} R_{43}^{(m)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

5. Асимптотики дисперсионного уравнения (2.17) .

5.1. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.17) при $\varepsilon_m \rightarrow 0$. Используя предыдущие формулы предположим, что $\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$. Тогда при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (2.6) преобразуется в совокупность уравнений

$$c_m = y^4 + B_2 \beta_m y^2 + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 y^2 + (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) = 0, \quad (5.1)$$

$$R_{mm} = a^2 \left(\frac{B_{11}}{B_{22}} y^4 + \frac{2(B_{12} + 2B_{66})}{B_{22}} \beta_m y^2 + 1 \right) - \frac{B_{66}}{B_{22}} \eta_m^2 = 0. \quad (5.2)$$

Предельный переход $\varepsilon_m \rightarrow 0$ здесь понимается в том смысле, что фиксируя радиус R и b – расстояние между граничными образующими цилиндрической оболочки, совершается переход к цилиндрической оболочке радиуса R' кратному $R:R' = nR$, и к пределу $\varepsilon'_m = 1/(n\theta_m R) = \varepsilon_m / n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Уравнения (5.1), (5.2) являются характеристическими уравнениями для уравнений планарных и изгибных колебаний ортотропных пластин соответственно, когда все стороны свободны. Корни уравнений (5.1) и (5.2) с неположительными действительными частями, как в пунктах 3 и 4, обозначаются через y_1, y_2 и y_3, y_4 соответственно. Аналогичным образом как в [20] доказывается, что при

$$\varepsilon_m \ll 1; \quad y_i \neq y_j, \quad i \neq j, \quad (5.3)$$

корни χ^2 уравнения (2.8) можно представить в виде

$$\chi_i^2 = y_i^2 + \alpha_i^{(m)} \varepsilon_m^2 + \beta_i^{(m)} \varepsilon_m^4 + \dots, \quad i = \overline{1,4}. \quad (5.4)$$

При условии (5.3), учитывая соотношения (2.10), (2.15), (5.4) и тот факт, что

$$M_{3j}^{(m)} = M_{4j}^{(m)} = M_{7j}^{(m)} = M_{mj}^{(m)} = O(\varepsilon_m^2), \quad i = \overline{1,2}, \quad (5.5)$$

уравнение (2.17) можно привести к виду

$$\text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = (B_{66}/B_{11})^2 N^2(\eta_m^2) K_{3m}^2(\eta_m^2) \text{Det}\|l_{ij}\|_{i,j=1}^4 \text{Det}\|b_{ij}\|_{i,j=1}^4 + O(\varepsilon_m^2) = 0, \quad (5.6)$$

где $\text{Det}\|l_{ij}\|_{i,j=1}^4$ и $\text{Det}\|b_{ij}\|_{i,j=1}^4$ определяются формулами (3.12) и (4.12) соответственно, а

$$\begin{aligned} K_{3m}(\eta_m^2) = & (\beta_m + \eta_m^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} + a^2 \frac{2(B_{12} + B_{66})(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}B_{66}} \beta_m \right)^2 - \\ & \left(B_2 \beta_m + \frac{B_{11} + B_{66}}{B_{11}} \eta_m^2 \right) \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} + a^2 \frac{2(B_{12} + B_{66})(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}B_{66}} \beta_m \right) \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \right. \\ & \left. a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \right) + \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_m^2 - \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + a^2 \frac{B_{22}(B_{12} + B_{66})}{B_{11}B_{66}} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$N(\eta_m^2) = (y_3 + y_1)(y_3 + y_2)(y_4 + y_1)(y_4 + y_2).$$

Из (5.6) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ уравнение (2.17) распадается на уравнения

$$\text{Det}\|l_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad \text{Det}\|b_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0, \quad K_{3m}(\eta_m^2) = 0. \quad (5.8)$$

Первое и второе уравнения являются дисперсионными уравнениями планарных и изгибных колебаний аналогичной задачи для ортотропной прямоугольной пластинки соответственно. Корням третьего уравнения соответствуют планарные колебания цилиндрической оболочки. Третье уравнение появляется в результате использования уравнения соответствующей классической теории ортотропных цилиндрических оболочек.

Если y_1, y_2 и y_3, y_4 – корни уравнения (5.1) и (5.2) с отрицательными действительными частями соответственно, то при $\theta_m l \rightarrow \infty$ уравнения (2.17) и (5.6) преобразуются в уравнение

$$\begin{aligned} \text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = & \left(\frac{B_{66}}{B_{11}} \right)^2 N^2(\eta_m^2) K_{1m}^2(\eta_m^2) K_{2m}^2(\eta_m^2) K_{3m}^2(\eta_m^2) + O(\varepsilon_m^2) + \\ & + \sum_{j=1}^4 O(\exp(z_j)) = 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Из (5.9) следует, что при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни дисперсионного уравнения (2.17) аппроксимируются корнями уравнения

$$K_{1m}(\eta_m^2) = 0, \quad K_{2m}(\eta_m^2) = 0, \quad K_{3m}(\eta_m^2) = 0; \quad (5.10)$$

Первые два уравнения из (5.10) являются дисперсионными уравнениями изгибных и планарных колебаний достаточно длинной ортотропной прямоугольной пластинки со свободными сторонами (см. (4.14) и (3.14)). Следовательно, при малых ε_m и больших $\theta_m l$ приближенные значения корней уравнения (2.17) являются корнями уравнения (5.8) и (5.10) (ср. табл. 1,2,3).

5.2. Асимптотика дисперсионного уравнения (2.17) при $\theta_m l \rightarrow \infty$. При использовании предыдущих формул будем полагать, что χ_1, χ_2, χ_3 и χ_4 (корни уравнения (2.6)) имеют отрицательные действительные части. Тогда уравнение (2.17) можно привести к виду

$$\text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^8 = \left(\text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \right)^2 + \sum_{j=1}^4 O(\exp(\theta_m \chi_j l)) = 0. \quad (5.11)$$

Откуда следует, что при $\theta_m l \rightarrow \infty$ корни уравнения (2.17) аппроксимируются корнями уравнения

$$\text{Det}\|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = 0. \quad (5.12)$$

Уравнение (5.12), при $m \in N$, определяет всевозможные локализованные собственные колебания у свободных торцов ортотропной круговой цилиндрической оболочки открытого профиля со свободными краями. Если $\varepsilon_m \rightarrow 0$ имеем

$$\text{Det} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 = (B_{66}/B_{11})N(\eta_m^2)K_{1m}(\eta_m^2)K_{2m}(\eta_m^2)K_{3m}(\eta_m^2) + O(\varepsilon_m^2); \quad (5.13)$$

Следовательно, учитывая формулы (5.12) и (5.13) заключаем, что дисперсионное уравнение (2.17) принимает вид (5.9).

6. Численные исследования.

В табл. 1 приведены значения некоторых η_m -корней первых двух уравнений из (5.8) для прямоугольной пластинки из боропластика с параметрами [21]:

$$\begin{aligned} \rho &= 2 \cdot 10^3 \text{ кг/М}^3; E_1 = 2.646 \cdot 10^{11} \text{ Н/М}^2; \\ E_2 &= 1.323 \cdot 10^{10}; G = 9.604 \cdot 10^9; \nu_1 = 0.2; \nu_2 = 0.01 \end{aligned} \quad (6.1)$$

В табл. 2 приведены некоторые безразмерные характеристики собственных значений η_m для преимущественно изгибных и преимущественно планарных колебаний ортотропной цилиндрической оболочки открытого профиля из боропластика с механическими параметрами (6.1) и геометрическими параметрами: $R = 40$; $s = 4.00167$, $l = 5$.

Результаты представленные в табл. 3, соответствуют цилиндрической оболочки открытого профиля из боропластика с механическими параметрами (6.1) и теми же геометрическими параметрами, что в табл. 2.

В табл. 2 и 3 после характеристик собственных частот указан тип колебаний: b – преимущественно изгибный, e – преимущественно планарный. Заметим, что третье уравнение (5.8) при $1 \leq m \leq 15$ корней не имеет и $\beta_m \rightarrow -1$ при $m \rightarrow \infty$.

Модули упругости E_1 и E_2 соответствуют направлениям вдоль образующей и направляющей соответственно. В табл. 2 и 3 случай $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$ соответствует задаче (1.1)-(1.3).

Случай $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta_3 = \eta$ соответствует задаче (1.1)-(1.3), в которой отсутствуют тангенциальные компоненты силы инерции, т.е. имеем преимущественно изгибный тип колебаний. Аналогично, случай $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = 0$ соответствует преимущественно планарному типу.

Таблица 1. Характеристики собственных частот прямоугольной пластинки при $s = 4$, $l = 5$.

m	θ_m	$\text{Det} \ b_{ij}\ _{i,j=1}^4 = 0$	$\text{Det} \ l_{ij}\ _{i,j=1}^4 = 0$	m	θ_m	$\text{Det} \ b_{ij}\ _{i,j=1}^4 = 0$	$\text{Det} \ l_{ij}\ _{i,j=1}^4 = 0$
1	1.18251	0.00807 0.01025	0.76526 0.77736	10	8.24668	0.05593 0.05645	0.96143 0.96336
2	1.96330	0.01331 0.01516	0.87811 0.88828	11	9.03208	0.06126 0.06173	0.96192 0.96348
3	2.74890	0.01865 0.02011	0.92239 0.93082	12	9.81748	0.06659 0.06702	0.96283 0.96409
4	3.53429	0.02397 0.02515	0.94110 0.94798	13	10.6029	0.07191 0.07232	0.96194 0.96297
5	4.31969	0.02929 0.03028	0.94999 0.95557	14	11.3883	0.07724 0.07761	0.95278 0.96062
6	5.10509	0.03462 0.03546	0.95477 0.95929	15	12.1737	0.08257 0.08292	0.96342 0.96409

Таблица 2. Характеристики собственных частот преимущественно изгибных и преимущественно планарных колебаний цилиндрической оболочки при $s = 4.00167$, $l = 5$.

m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0,$ $\eta_{3m} = \eta_m$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m,$ $\eta_{3m} = 0$	m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = 0,$ $\eta_{3m} = \eta_m$	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_m,$ $\eta_{3m} = 0$
1	1.18202	0.00801 b 0.01024 b	0.80051 e 0.81208 e	10	8.24324	0.05591 b 0.05643 b	0.95037 e 0.98400 e
2	1.96248	0.01515 b 0.02541 b	0.71489 e 0.91637 e	11	9.02831	0.06123 b 0.06171 b	0.95296 e 0.97915 e
3	2.74775	0.02010 b 0.02647 b	0.82941 e 0.98546 e	12	9.81338	0.06656 b 0.06699 b	0.95574 e 0.97626 e
4	3.53282	0.02399 b 0.02514 b	0.88687 e 0.97997 e	13	10.5985	0.07213 b 0.07259 b	0.95715 e 0.96695 e
5	4.31789	0.02929 b 0.03027 b	0.91240 e 0.98887 e	14	11.3885	0.07724 b 0.07761 b	0.95466 e 0.96762 e
6	5.10296	0.03461 b 0.03545 b	0.92676 e 0.99287 e	15	12.1686	0.08259 b 0.08288 b	0.95925 e 0.96951 e

Вычисления показывают, что первые частоты собственных колебаний, локализованных у свободных краев цилиндрической оболочки, где присутствует нормальная компонента силы инерции, являются частотами колебаний преимущественно изгибного типа. Наряду с первыми частотами колебаний квазипоперечного типа существуют частоты колебаний квазитангенциального типа. С увеличением m все эти колебания становятся колебаниями “рэлеевского” типа.

При $\varepsilon_m \rightarrow 0$ собственные колебания для задачи (1.1)-(1.3) расчленяются на квазипоперечные и квазитангенциальные колебания и частоты этой задачи стремятся к частотам аналогичной задачи для прямоугольной пластинки.

Численные результаты показывают, что асимптотические формулы (5.6) и (5.9) дисперсионного уравнения (2.17) являются хорошим ориентиром для нахождения собственных частот задачи (1.1)-(1.3).

Таблица 3. Характеристики собственных частот колебаний цилиндрической оболочки при $s = 4.00167$, $l = 5$.

m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$	m	θ_m	$\eta_{1m} = \eta_{2m} = \eta_{3m} = \eta_m$
1	1.18202	0.00801 b 0.80051 e 0.01024 b 0.81208 e	10	8.24324	0.05591 b 0.95037 e 0.05643 b 0.98400 e
2	1.96248	0.01515 b 0.71489 e 0.02541 b 0.91637 e	11	9.02831	0.06123 b 0.95296 e 0.06171 b 0.97915 e
3	2.74775	0.02010 b 0.82941 e 0.02647 b 0.98546 e	12	9.81338	0.06656 b 0.95574 e 0.06699 b 0.97626 e
4	3.53282	0.02399 b 0.88687 e 0.02514 b 0.97997 e	13	10.5985	0.07213 b 0.95715 e 0.07259 b 0.96695 e
5	4.31789	0.02929 b 0.91240 e 0.03027 b 0.98887 e	14	11.3885	0.07724 b 0.95466 e 0.07761 b 0.96762 e
6	5.10296	0.03461 b 0.92676 e 0.03545 b 0.99287 e	15	12.1686	0.08259 b 0.95925 e 0.08288 b 0.96951 e

7. Приложение.

Здесь приведены аналитические выражения для элементов m_{ij} .

$$\begin{aligned}
 m_{11} &= H\chi_1^4 + d_1\chi_1^2 + d_2; \quad m_{12} = H\bar{f}_3 + d_1\bar{f}_1; \quad m_{13} = H\bar{f}_2 + d_1; \quad m_{14} = Hf; \\
 m_{21} &= T\chi_1^5 + d_3\chi_1^3 + d_4\chi_1; \quad m_{22} = T\bar{f}_4 + d_3\bar{f}_2 + d_4; \quad m_{23} = T\bar{f}_3 + d_3\bar{f}_1; \quad m_{24} = Tf_2 + d_3; \\
 m_{31} &= \delta_m\chi_1^6 + d_5\chi_1^4 + d_6\chi_1^2 + d_7; \quad m_{32} = \delta_m\bar{f}_5 + d_5\bar{f}_3 + d_6\bar{f}_1; \\
 m_{33} &= \delta_m\bar{f}_4 + d_5\bar{f}_2 + d_6; \quad m_{34} = \delta_m f_3 + d_5 f_1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_{41} &= \delta_m \chi_1^7 + d_8 \chi_1^5 + d_9 \chi_1^3 + d_{10} \chi_1; \quad m_{42} = \delta_m \bar{f}_6 + d_8 \bar{f}_4 + d_9 \bar{f}_2 + d_{10}; \\
m_{43} &= \delta_m \bar{f}_5 + d_8 \bar{f}_3 + d_9 \bar{f}_1; \quad m_{44} = \delta_m f_4 + d_8 f_2 + d_9; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 \varepsilon_m^2; \\
m_{i5} &= (-1)^{i+1} m_{i1} \exp(z_1); \quad m_{i6} = (-1)^{i+1} (m_{i2} \exp(z_2) + m_{i1} [z_1 z_2]); \\
m_{i7} &= (-1)^{i+1} (m_{i3} \exp(z_3) + m_{i2} [z_2 z_3] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3]); \\
m_{i8} &= (-1)^{i+1} (m_{i4} \exp(z_4) + m_{i3} [z_3 z_4] + m_{i2} [z_2 z_3 z_4] + m_{i1} [z_1 z_2 z_3 z_4]), \quad i = \overline{1, 4};
\end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\begin{aligned}
H &= a^2 \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} \beta_m; \quad T = -\frac{B_{12}}{B_{66}} a^2 \delta_m \beta_m; \quad \delta_m = 1 + 4a^2 \varepsilon_m^2; \\
d_1 &= \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11}^2} \beta_m - \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \eta_{1m}^2 - 4a^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} (\beta_m + \eta_{1m}^2) + \\
&+ a^2 \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} - \frac{B_{12} (B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}^2} (\beta_m + \eta_{1m}^2) \beta_m \right); \\
d_2 &= -\frac{B_{12}}{B_{11}^2} (\beta_m + \eta_{1m}^2) (B_{66} \eta_{2m}^2 + a^2 B_{22} (1 + \varepsilon_m^2 \beta_m)); \\
d_3 &= \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2}{B_{11} B_{66}} \delta_m \beta_m + a^2 \left(4B_1 - \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 \beta_m^2}{B_{11} B_{66}} + 4\eta_{2m}^2 \beta_m - \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \beta_m \right) - \\
&4a^4 \varepsilon_m^2 \left(\frac{B_{12}}{B_{11}} (\beta_m + \eta_{1m}^2) \beta_m + \frac{B_{22}}{B_{66}} (1 - \beta_m^2) \right); \\
d_4 &= \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) \beta_m + a^2 \left(4\beta_m (\beta_m + \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) + \right. \\
&+ \frac{B_{22} B_{12}}{B_{11} B_{66}} \beta_m - \frac{B_{22}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \left. \right) + a^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} \left(\frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{66}} \beta_m^2 + 4\eta_{1m}^2 \beta_m \right) - \\
&- 4a^4 \varepsilon_m^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} (\beta_m + \eta_{1m}^2) (1 - \beta_m^2); \\
d_5 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 + B_1 \beta_m + a^2 \varepsilon_m^2 \left(B_1 \beta_m + \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} + \frac{4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right); \\
d_6 &= \varepsilon_m^2 \left\{ \frac{B_{12}}{B_{11}} B_1 \beta_m + a^2 \left[\frac{(B_{11} B_{22} - B_{12}^2)}{B_{11}^2} (\beta_m + \eta_{1m}^2) \beta_m + \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11} B_{66}} (\beta_m^2 - 1) \right] \right\} + \\
&+ \frac{B_{11} B_{22} + B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \beta_m \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12} + B_{66}}{B_{11}} \beta_m \eta_{2m}^2 + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 + \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} + \frac{B_{12}}{B_{11}} B_2 \right) \beta_m^2; \\
d_7 &= \frac{B_{12}}{B_{11}} \beta_m (\beta_m + \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \varepsilon_m^2 + \frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) + \\
&+ a^2 \varepsilon_m^2 \frac{B_{12} B_{22}}{B_{11}^2} (\beta_m + \eta_{1m}^2) (\beta_m^2 - 1); \\
d_8 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 + \eta_{2m}^2 + B_1 \beta_m + \frac{4B_{66}}{B_{11}} \beta_m + a^2 \varepsilon_m^2 \left(B_2 \beta_m + \frac{4B_{66} - 2B_{12}}{B_{11}} \beta_m + \frac{4B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \right); \\
d_9 &= \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{1m}^2 \eta_{2m}^2 + \frac{B_{11} B_{22} + B_{12} B_{66} + 4B_{66}^2}{B_{11}^2} \beta_m \eta_{1m}^2 + \frac{B_{12} + 5B_{66}}{B_{11}} \beta_m \eta_{2m}^2 + \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}} B_2 \beta_m^2 + \\
&\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m^2 + \varepsilon_m^2 \left(a^2 \frac{B_{11} B_{22} - B_{12}^2 - 4B_{12} B_{66}}{B_{11}^2} \beta_m (\beta_m + \eta_{1m}^2) + \frac{(B_{12} + 4B_{66})}{B_{11}} B_1 \beta_m + a^2 \frac{B_{22} (B_{12} + 4B_{66})}{B_{11} B_{66}} (\beta_m^2 - 1) \right); \\
d_{10} &= \frac{B_{12} + 4B_{66}}{B_{11}} (\beta_m + \eta_{1m}^2) \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m \varepsilon_m^2 + \left(\frac{B_{22}}{B_{11}} \beta_m + \frac{B_{66}}{B_{11}} \eta_{2m}^2 \right) \beta_m + \varepsilon_m^2 a^2 \frac{B_{22}}{B_{11}} (\beta_m^2 - 1) \right);
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Norris, A.N. Flexural edge waves/ A.N. Norris //J. of Sound and Vibration.-1994.- 171, № 4. P. 571-573.
2. Белубемян М.В. Волны, локализованные вдоль свободной кромки пластинки с кубической симметрией/ М.В.Белубемян, И.А. Енгибарян // Изв. РАН. МТТ. – 1996, № 6. - С. 139-143.
3. Thompson, I. On the existence of flexural edge waves on thin orthotropic plates/ I. Thompson and I.D. Abrahams // J. Acoust. Soc. Amer. -2002.-112, № 5.- P. 1756-1765.
4. Nazarov, S.A. Localization effects for eigenfuctions near to the edge a thin domain/ S.A. Nazarov// Mathematica Bohemica.- 2002.- 127, № 2.- P. 283-292.
5. Andrianov, J.V. Edge localized effects in buckling and vibrations of a shell with free in circumferential direction ends./ J.V. Andrianov, J. Awrejcewicz //Acta Mechanica.- 2004.- 40, № 173.- P.41-47.
6. Grinchenko, V.T. Wave motion localization effects in elastic waveguides/ V.T. Grinchenko //Int.Appl. Mech.-2005.- 41, №9.- P. 988-994.
7. Вильде М.В. Краевые и интерфейсные резонансные явления в упругих телах/ М.В Вильде, Ю.Д. Каплунов., Л.Ю. Кассович- М.: физматлит 2010.- 279с.
8. Гольденвейзер А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек/ А.Л. Гольденвейзер В.Б. Лидский П.Е. Товстик -М.: Наука, 1979. -383с.
9. Гулгазарян Г.Р. О колебаниях тонкой упругой ортотропной цилиндрической оболочки со свободными краями/ Г.Р. Гулгазарян, Л.Г. Гулгазарян// Проблемы прочности и пластичности. изд. Нижегородского университета-2006, вып. 68. –С. 150-160.
- 10.Gulgazaryan, G.R. Vibrations of an orthotropic cylindrical panel with various boundary conditions/ G.R. Gulgazaryan, R.G. Gulgazaryan and A.A. Khachanyan// Int. Appl. Mech. 49, No 5, 2013.- P. 534-554.
- 11.Ghulghazaryan, G.R. Localized vibrations of a thin-walled stracture consisted of otthotropic elastic non-closed cylindrical shells with free and rigid-clamped edge generators/ G.R. Ghulghazaryan, R. G. Ghulghazaryan,and Dg.L. Srapionyan// ZAMM. Z. Math. Mech. 93. No 4, 2013.- P. 269-283.
- 12.Gulgazaryan, G.R. Dhe vibrations of a thin elastic orthotropic circular cylindrical shell with free and hinged edges / G.R. Gulgazaryan, L.G. Gulgazaryan, R.D. Saakyan // J. of Appl. Math. and Mech. - 2008. - 72, № 3. – P. 453 - 465.
- 13.Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек/ В.З. Власов // Строительная промышленность. - 1932.- № 11. - С. 33 - 38; № 12. - С. 21 - 26.
- 14.Канторович Л.В. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла/ Л.В. Канторович // Изв. АН СССР. Отд. мат. и ест. н. – 1933.- № 5. – С. 647 - 653.
- 15.Прокопов В.Г. Метод сведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям Л.В. Канторовича и общий метод решения многомерных задач теплопереноса/ В.Г. Прокопов, Е.И Беспалова, Ю.В. Шеренковский // Инж.-физ. журн.-1982.-42, № 6.–С.1007 – 1013.
- 16.Беспалова Е.И. К решению стационарных задач теории пологих оболочек обобщенным методом Канторовича–Власова /Е.И. Беспалова //Прикл. механика.2008.- 44, №11.– С.99- 111.
- 17.Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике/ С.Г. Михлин -М.: Наука.- 1970.- 510с.
- 18.Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек./ С.А. Амбарцумян -М.: Наука, 1974. - 446с.
- 19.Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин/ Амбарцумян С.А. - М.: Наука, 1987. - 360с.
- 20.Gulgazaryan, G.R. Vibrations of semi-infinite,orthotropic cylindrical shells of open profile/ G.R. Gulgazaryan // Intern.Appl. Mech.2004. V. 40. № 2. P.199-212.
- 21.Гулгазарян Г.Р. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев/ Г.Р. Гулгазарян, В.Б. Лидский // Изв. АН СССР МТТ. – 1982, №3.-С. 171-174.

ԱՄՓՈՓՈՒՄ
ԱԶԱՏ ԵԶՐԵՐՈՎ ԲԱՑ ԲԱՐԱԿ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ
ՀԱՄԱՐ ՄՈՏԱՎՈՐ ԴԻՍՊԵՐՍԻՈՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ
Ղուլղազարյան Գ.Ռ., Ղուլղազարյան Լ.Գ.

***Հիմնաբառեր.** տատանումներ, թաղանթ, դիսպերսիոն հավասարումներ, ասիմպտոտիկա*

Օգտվելով օրթոտրոպ գլանային թաղանթների դասական տեսությանը համապատասխան հավասարումների համակարգից, հետազոտվում է բաց բարակ ազատ եզրերով առաձգական օրթոտրոպ շրջանային գլանային թաղանթի սեփական տատանումները: Սեփական հաճախությունների մոտավոր արժեքները և նրանց համապատասխան սեփական ֆունկցիաները գտնելու համար կիրառվում է սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների բերման Կանտորովիչ-Վլասովի մեթոդը: Հնարավոր տիպերի սեփական տատանումների հաճախությունները գտնելու համար արտածված են դիսպերսիոն հավասարումներ: Ասիմպտոտիկ կապ է հաստատված դիտարկվող խնդրի և ուղղանկյուն օրթոտրոպ սալի համար նման խնդրի դիսպերսիոն հավասարումների միջև: Ասիմպտոտիկ կապ է հաստատված նաև, դիտարկվող խնդրի և բաց երեք եզրերով ազատ կիսասանվերջ օրթոտրոպ գլանային թաղանթի սեփական արժեքների որոնման խնդրի դիսպերսիոն հավասարումների միջև: Բաց օրթոտրոպ գլանային թաղանթի օրինակի վրա ստացված են սեփական տատանումների մոտավոր հաճախությունների անչափողական բնութագրիչներ:

SUMMARY
THE APPROXIMATE DISPERSION EQUATIONS FOR THIN ELASTIC OPEN
ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH FREE EDGES
Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G.

***Key words:** vibrations, shell, dispersion, equations, asymptotics.*

Using the system of equations corresponding to the classical theory of orthotropic cylindrical shells, the free vibrations of thin elastic orthotropic non-closed circular cylindrical shell with free edges is investigated. To calculate the natural frequencies and to identify the respective natural modes it is employ the generalized Kantorovich-Vlasov method of reduction to ordinary differential equations. The dispersion equations for finding the approximate natural frequencies of possible types of vibrations are derived. An asymptotic link between the dispersion equations of problem in hand and analogous problem for the rectangular plate with free sides is shown. Also, a link between the dispersion equations of the problem in hand and the boundary-value problem for the semi - infinite orthotropic non-closed circular cylindrical shell with the free edges is shown. On the example of non-closed orthotropic shell approximate values of the dimensionless characteristics of the natural frequency are derived.

Рекомендована к публикации д.ф.м.н., проф. А. Ванцяном 27.02.2018г.