

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ БАЛОК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ
ПОПЕРЕЧНЫМИ И ПРОДОЛЬНЫМИ СИЛАМИ. ИЗГИБ СИСТЕМЫ
БАЛОК НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

КУТУЗЯН НЕЛЛИ

*Кандидат физико-математических наук, доцент,
Проректор Гаварского государственного университета*

e-mail: n.kutuzyan@gsu.am

ШЕКЯН ЛАВРЕНТИЙ

Член – корреспондент Инженерной академии Армении,

Доктор физико-математических наук, профессор,

Преподаватель ГГУ

e-mail: lshekyan@mail.ru

В работе [1], как первая часть одного класса контактных задач изгиба балок, приведено решение плоской контактной задачи изгиба балки на упругой полуплоскости, основанного на теории С. П. Тимошенко [2] об обобщенной модели изгиба балок, где помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие осевые силы также влияют на прогибы балок.

Настоящая работа, являющаяся второй частью указанного класса контактных задач, посвящена решению соответствующих задач изгиба двух балок и периодической системы горизонтальных балок, находящихся на границе упругой полуплоскости.

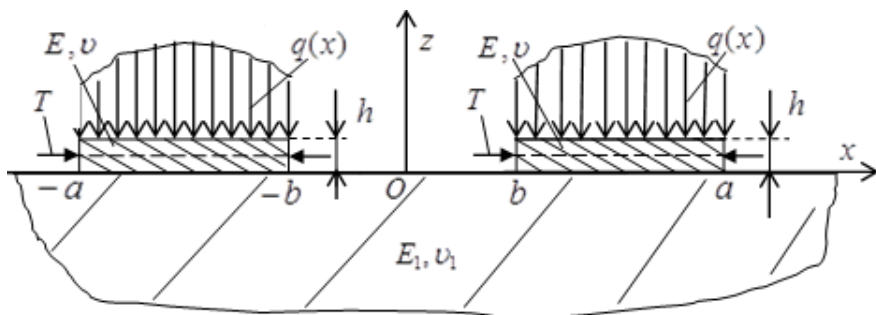
Задачи приводятся относительно действующих в контактной области нормальных контактных напряжений к соответствующему сингулярному интегральному уравнению (СИУ). Эффективное решение этих СИУ получается непосредственным применением к ним известного численно-аналитического метода [3,4], основанного на формулах Гаусса для интегралов типа Коши и обычных интегралов с привлечением математического аппарата многочленов Чебышева.

Ключевые слова: *изгиб, система балок, упругая полуплоскость, контакт, поперечные и продольные силы.*

1. Постановка задач. В условиях плоской деформации с базовой плоскостью Oxz рассматриваются задачи об изгибе двух балок и периодической системы горизонтальных балок с модулями упругости E , коэффициентами Пуассона ν , длин $2a$ и высот h , под действием заданных вертикальных распределенных сил интенсивностью $q(x)$ и приложенных на конечных точках срединной линии балок осевых сжимающих или растягивающих сил T , изгибаются на нижней упругой полуплоскости с соответствующими упругими постоянными E_1 и ν_1 .

Ставится задача: в рамках теории С.П.Тимошенко [2] о сложном изгиб балок, где помимо поперечных сил, продольные сжимающие или растягивающие осевые силы также влияют на прогибы балок, определить влияние осевых сил T на прогибы балок $w(x)$, законы распределения изгибающих моментов $M(x)$ и перерезающих сил $Q(x)$ во всех поперечных сечениях балок, а также на закон распределения контактных давлений $p(x)$,

2. Изгиб симметрично нагруженных двух одинаковых балок на упругой полуплоскости. Проводим теоретическое исследование плоской контактной задачи для двух одинаковых упругих балок и упругой нижней полуплоскости $z \leq 0$, контактирующих вдоль системы участков $[-a, -b] \cup [b, a]$ граничной горизонтальной оси Ox (фиг. 1). Предполагается, что балки находятся под действием заданной симметрично относительно оси Oz распределенной поперечной нагрузки $q(x)$ и одинаковой по величине осевых сжимающих сил T , приложенных на конечных точках срединных линий балок.



Фиг. 1. Схема контакта двух балок с упругой полуплоскостью.

Дифференциальное уравнение сложного изгиба горизонтальной одинарной балки поперечными силами $q(x)$ и $p(x)$, учитывая при этом по теории С.П. Тимошенко [2] сжимающие силы T , приложенные на концах срединной линии балки, имеет вид

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + T \frac{d^2 w}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (1)$$

где $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ – изгибная жесткость пластины, гнущейся по цилиндрической поверхности, представляет собой жесткость балки-полоски прямоугольного поперечного сечения единичной ширины при плоской деформации ($\varepsilon_y = 0$). В случае плоского напряженного состояния, жесткость на изгиб балки прямоугольного поперечного сечения единичной ширины выражается формулой $D = Eh^3/12$.

Аналогично [1], получим dw/dx для правой балки ($x \in [b, a]$), когда $M(b) = M(a) = 0$ (здесь и в следующих формулах обозначения прежние)

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2k^2 D} \int_b^a \Phi_2(x, s) [p(s) - q(s)] ds + C, \quad (b \leq x \leq a). \quad (2)$$

где C – константа интегрирования, $H_2(x, s)$ – регулярная функция, которая в случае осевого сжатия выражается формулой

$$H_2(x, s) = \frac{\sin(kx)}{\sin[k(a-b)]} \{ \sin(ka) \sin[k(s-b)] - \sin(kb) \sin[k(a-s)] \} - \frac{1 - \cos(kx)}{\sin[k(a-b)]} \{ \cos(kb) \sin[k(a-s)] - \cos(ka) \sin[k(s-b)] \} + \{ 1 - \cos[k(x-s)] \} \text{sign}(x-s), \quad (3)$$

а в случае осевого растяжения – формулой

$$H_2(x, s) = \frac{\text{sh}(kx)}{\text{sh}[k(a-b)]} \{ \text{sh}(ka) \text{sh}[k(s-b)] - \text{sh}(kb) \text{sh}[k(a-s)] \} - \frac{1 - \text{ch}(kx)}{\text{sh}[k(a-b)]} \{ \text{ch}(kb) \text{sh}[k(a-s)] - \text{ch}(ka) \text{sh}[k(s-b)] \} + \{ 1 - \text{ch}[k(x-s)] \} \text{sign}(x-s), \quad (4)$$

Далее определяем вертикальные (вниз) перемещения, которые получают граничные точки нижней упругой полуплоскости от действия на точках участков $[-a, -b] \cup [b, a]$ оси Ox контактного давления $p(x)$ [5]

$$w_1(x) = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds + C_1 \quad (-\infty < x < \infty). \quad (5)$$

Учитывая симметричность задачи $[p(-x) = p(x)]$, отсюда получим

$$\frac{dw_1}{dx} = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \left(\int_{-a}^{-b} + \int_b^a \right) \frac{p(s)}{s-x} ds = -\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E_1} \int_b^a \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} \right) p(s) ds. \quad (6)$$

Теперь, учитывая условие контакта задачи $w(x) = w_1(x)$ на точках участков $[-a, -b] \cup [b, a]$ оси Ox , при помощи (2) и (6), придём относительно $p(x)$ к следующему СИУ

$$-\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_b^a \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{s+x} \right) p(s) ds = \frac{1}{2k^2 D} \int_b^a \Phi_1(x, s) [p(s) - q(s)] ds + C, \\ (b < x < a). \quad (7)$$

При этом условия равновесия балок принимают вид

$$\int_b^a p(x) dx = \int_b^a q(x) dx = P, \quad \int_b^a xp(x) dx = \int_b^a xq(x) dx = M. \quad (8)$$

Далее введем безразмерные координаты и величины

$$\xi = \frac{2x}{a-b} - \frac{a+b}{a-b}, \quad \varphi_2(\xi) = \frac{1}{E_1} p\left(\frac{a-b}{2}\xi + \frac{a+b}{2}\right) \quad (-1 \leq \xi \leq 1). \quad (9)$$

В результате, СИУ (7) принимает вид

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_2(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{\pi k^2} \int_{-1}^1 K_2(\xi, \eta) \varphi_2(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi k^2} f_2(\xi) + \gamma \quad (-1 < \xi < 1), \quad (10)$$

а условия равновесия (8) – вид

$$\int_{-1}^1 \varphi_2(\xi) d\xi = P_2, \quad \int_{-1}^1 \xi \varphi_2(\xi) d\xi = M_2, \quad (11)$$

где $K_2(\xi, \eta)$ и $f_2(\xi)$ – известные регулярные функции, а P_2 и M_2 – известные величины.

Таким образом, задача об изгибе симметрично нагруженных двух одинаковых балок на упругой полуплоскости сводится к решению СИУ (10) при условий (11). Эффективное решение СИУ (10) при условий (11) получается точно тем же способом, как получено решение СИУ в [1].

3. Изгиб периодической системы балок на упругой полуплоскости. Перейдем теперь к решению поставленной плоской контактной задачи для периодической с периодом $2l$ системы балок длин $2a$ ($a < l$), контактирующих с упругой нижней полуплоскостью $z \leq 0$ вдоль системы участков $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [-a + 2nl, a + 2nl]$ горизонтальной оси Ox (фиг. 2). Предполагается, что балки изгибаются под действием заданной периодической с периодом $2l$ распределённой поперечной нагрузки $q(x)$ и одинаковой по величине осевых сжимающих сил T .

Задача об изгибе периодической системы балок на упругом основании линейно распределённой поперечной нагрузкой при наличии осевых сжимающих сил была рассмотрена в [6].

Выведем определяющее СИУ рассматриваемой плоской периодической контактной задачи, откуда будет определяться контактное давление $p(x)$, а затем

$$w_1(x) = -\frac{2(1-\nu_1^2)}{\pi E_1} \int_{-\infty}^a \ln \frac{1}{|\sin[\pi(x-s)/2l]} p(s) ds + \text{const} \quad , \quad (-\infty < x < \infty). \quad (12)$$
$$\frac{1-\nu_1^2}{E_1 l} \int_{-a}^a ctg \frac{\pi(s-x)}{2l} p(s) ds = \frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a H(x, s) [p(s) - q(s)] ds + C$$

$$(-a < x < a). \quad (13)$$
$$\begin{aligned} \xi &= \pi x/l; \quad \eta = \pi y/l; \quad \alpha = \pi a/l; \quad \lambda_* = E_1 l / 2\pi k^2 (1 - \nu_1^2) D; \\ \varphi_*(\xi) &= p(l\xi/\pi)/E_1; \quad h_*(\xi) = q(l\xi/\pi)/E_1; \quad \gamma_* = C/(1 - \nu_1^2). \end{aligned} \quad (14)$$
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\operatorname{ctg} \left(\frac{\eta - \xi}{2} \right) + \lambda_* K_*(\xi, \eta) \right] \varphi_*(\eta) d\eta = \frac{\lambda_*}{\pi} f_*(\xi) + \gamma_*, \quad (-\alpha < \xi < \alpha) \quad (15)$$

$$K_*(\xi, \eta) = -H\left(\frac{l\xi}{\pi}, \frac{l\eta}{\pi}\right), f_*(\xi) = \int_{-\alpha}^{\alpha} K_*(\xi, \eta) h(\eta) d\eta, P_0 = \frac{\pi P}{lE_1}, M_0 = \frac{\pi^2 M}{l^2 E_1}. \quad (17)$$

Итак, поставленная плоская контактная задача об изгибе периодической системы балок на упругой полуплоскости сводится относительно безразмерного контактного давления $\varphi_*(\xi)$ к решению СИУ (15) при условий (16), притом входящий в (15) неизвестный параметр γ_* - характеризует угол поворота центральных поперечных сечений балок.

Чтобы к СИУ (15) применить численно-аналитический метод решения СИУ [3,4], основанный на квадратурных формулах Гаусса для обычных и сингулярных интегралов с ядром Коши, в них от ядра Гильберта $ctg[(\eta - \xi)/2]$ перейдём к ядру Коши $1/(\eta - \xi)$ и от интервала $(-\alpha; \alpha)$ перейдём на интервал $(-1; 1)$. С этой целью в (15) и (16), от переменных ξ и η перейдём к переменным t и u , полагая

$$t = tg(\xi/2)/tg(\alpha/2); u = tg(\eta/2)/tg(\alpha/2); (-1 < t, u < 1). \quad (18)$$

Отсюда

$$\xi = 2arctg\left(t \cdot tg \frac{\alpha}{2}\right); \eta = 2arctg\left(u \cdot tg \frac{\alpha}{2}\right); d\eta = 2tg^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)du / \left(1 + u^2tg^2 \frac{\alpha}{2}\right).$$

Преобразуем ядро Гильберта:

$$ctg\left(\frac{\eta - \xi}{2}\right) = \frac{1 + tg(\xi/2)tg(\eta/2)}{tg(\eta/2) - tg(\xi/2)} = \frac{1 + ut \cdot tg^2(\alpha/2)}{(u - t)tg(\alpha/2)} = \frac{1 + t^2tg^2(\alpha/2)}{(u - t)tg(\alpha/2)} + t \cdot tg \frac{\alpha}{2}.$$

С учётом последнего, СИУ (15) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{u - t} + \frac{1 + t \cdot tg^2(\alpha/2)}{1 + t^2tg^2(\alpha/2)} + \frac{\lambda_* tg(\alpha/2)}{1 + t^2tg^2(\alpha/2)} L(u, t) \right] \varphi_0(u) du = \\ & = \frac{\lambda}{\pi} g_0(t) + \frac{\gamma_0 tg(\alpha/2)}{1 + t^2tg^2(\alpha/2)} \quad (-1 < t < 1), \end{aligned} \quad (19)$$

где приняты обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \frac{2tg(\alpha/2)}{1 + t^2tg^2(\alpha/2)} \varphi_* \left(2arctg \left(t \cdot tg \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right); g_0(t) = f_* \left(2arctg \left(t \cdot tg \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right) \right); \\ L(t, u) &= K_* (2arctg(t \cdot tg(\alpha/2)), 2arctg(u \cdot tg(\alpha/2))) \quad (-1 < t, u < 1). \end{aligned} \quad (20)$$

При переходе к переменной t условия (16) преобразуются в условия

$$\int_{-1}^1 \varphi_0(t) dt = P_0, \quad 2 \int_{-\alpha}^{\alpha} arctg \left(t \cdot arctg \frac{\alpha}{2} \right) \varphi_0(t) dt = M_0. \quad (21)$$

Таким образом, решение поставленной задачи об изгибе периодической системы балок на упругой полуплоскости окончательно свелось к решению СИУ (19) при условиях (21). Эффективное решение этого СИУ также получается способом, который изложен в [1].

Список использованной литературы

1. Кутузян Н. А., Шемян Л. А., Некоторые задачи об изгибе балок на упругом основании поперечными и продольными силами. Часть 1. Изгиб балки на упругой полуплоскости // Сборник научных статей Гаварского гос. университета, № 7, 2019, с. 29-39.
2. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С., Пластины и оболочки, М., Наука, 1966, 636 с.
3. Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and solution of crack problems, pp 368-425, Noordhoff Intern. Publ., 1973.
4. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math., vol. 35, №1, 1997. P. 173-185.
5. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, М.-Л. Госмехтеориздат, 1949, 270 с.
6. Кутузян Н. А., Шемян Л. А., Изгиб периодической системы балок на упругом основании линейно распределенной поперечной нагрузкой при наличии осевых сжимающих сил, Сборник научных статей Гаварского гос. университета, №5, 2018, с. 40-48.

**ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ՝ ԿՈՂԱՅԻՆ ԵՎ ԵՐԿԱՅՆԱԿԱՆ
ՈՒԺԵՐՈՎ ԾՈՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ:
ՀԵԾԱՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԾՈՌԻՄԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ**

ԿՈՒՏՈՒՋՅԱՆ ՆԵԼԼԻ

*Ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու, դոցենտ,
Գավառի պետական համալսարանի պրոռեկտոր*

ՇԵԿՅԱՆ ԼԱՎՐԵՆՏԻ

*ՀՀ ՃԱ թղթ. անդամ, ֆիզմաթ գիտությունների դոկտոր, պրոֆեսոր,
ԳԴՀ դասախոս*

Հեծանների համակարգի ծոման՝ Ս. Պ. Տիմոշենկոյի ընդհանրացված մոդելի շրջանակներում, երբ լայնական ուժերից բացի երկայնական սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանների ճկման վրա, դիտարկվում է առաձգական հիմքի վրա երկայնական սեղմող ուժերի առկայությամբ հեծանների ծոման կոնտակտային հարթ խնդիրների մի դաս:

Խնդիրները ձևակերպվում են առաձգական հիմքի և հեծանների միջև գործող կոնտակտային նորմալ լարումների նկատմամբ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման տեսքով՝ լրացուցիչ պայմանների առկայությամբ: Խնդիրների արդյունավետ լուծումը ստացվել է հայտնի թվային-վերլուծական մեթոդի անմիջական կիրառմամբ՝ հիմնվելով Կոշիի տիպի ինտեգրալների և սովորական ինտեգրալների համար Գաուսյան բանաձևերի վրա և օգտագործելով Չեբիշևի բազմանդամների մաթեմատիկական ապարատը:

Աշխատանքի ներկա մասում առաձգական կիսահարթության վրա հեծանների համակարգի ծոման վերաբերյալ համապատասխան խնդրի լուծումն է:

***Բանալի բառեր՝** ծոում, հեծանների համակարգ, առաձգական հիմք, կոնտակտային լարումներ, լայնական և երկայնական ուժեր:*

**AROUND ISSUES OF BENDING BEAMS ON AN ELASTIC BASIS BY TRANSVERSE AND
LONGITUDINAL FORCES.**

BENDING A SYSTEM OF BEAMS ON AN ELASTIC HALF-PLANE

KUTUZYAN NELLI

PhD, Associate Professor,

Vice-rector of Gavar State University

SHEKYAN LAVRENTI

Corresponding member of Eng. Acad. of Armenia, Doctor of Sciences, Professor,

Lecturer of Gavar State University

In the framework of the generalized model of bending beam system by S. P. Timoshenko, when in addition to transverse forces, longitudinal compressive or tensile forces also affect the bending of beams, a class of flat contact problems of the bending beams on an elastic basis under the longitudinal compressive forces is considered.

The problems are formulated in the form of a singular integral equation (SIU) with respect to normal contact stresses between the elastic basis and beams. An effective solution to these SIUs is obtained by direct application of the well-known numerical-analytical method based on Gaussian formulas for Cauchy type integrals and ordinary integrals and using the mathematical apparatus of the Chebyshev polynomials.

This part of research provides a solution to the corresponding problem of bending a system of beams on an elastic half-plane.

Keywords: *bending, system of beams, elastic basis, contact stresses, transverse and longitudinal forces.*

Հոդվածը ներկայացվել է խմբագրական խորհուրդ 20.02.2020թ.:

Հոդվածը գրախոսվել է 25.06.2020թ.: