УДК 514.752.43 *Математика*

НЕПОГРУЖАЕМОСТЬ В E^3 ОДНОЙ МЕТРИКИ, ЗАДАННОЙ В АСИМПТОТИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Р.Ц. Мусаелян

1. В работе рассматривается метрика заданная в асимптотических координатах. Как известно, (см [3]) асимптотическая сеть определяется однозначно, а выбор координатной сети произволен.

Рассмотрим метрику

$$ds^2 = E(x,y)dx^2 + 2F(x,y)dxdy + G(xy)dy^2 \qquad (1)$$

заданную в асимптотических координатах. Это значит, что в искомой реализации метрики (1), координатная сеть должна совпасть с асимптотической сетью. Первая квадратичная форма (1) не всегда определяет регулярную поверхность в E^3, однако в случае определения, коэффициенты $L(x,y), M(x,y), N(x,y)$ второй квадратичной формы и метрики (1)- $E(x,y), F(x,y), G(x,y)$ связаны соотношением, известной в теории поверхностей как формулы Петерсона-Кодацци и Гаусса. Из курса дифференциальной геометрии известно (см. [3]), что для совпадения координатной и асимптотической сети необходимо и достаточно, что $L(x,y) = N(x,y) = 0$. Учитывая это, упомянутая система Петерсона-Кодацци и Гаусса записывается следующим образом[1]

$$\begin{gathered}-2WM_x^{1)} + 2F\cdot M(E_y - F_x) - M(EG_x - GE_x) = 0\\ 2WM_y + 2FM(F_y - G_x) - M(EG_y - GE_y) = 0\\ \frac{-M^2}{W} = K(x,y)\ ,\end{gathered} \qquad (2)$$

где $K(x,y)$-гауссова кривизна метрики (1), а $W = EG - F^2$ −дискриминант метрики (1). Отметим, что метрика (1)-положительно определенная, а в силу асимптотичности координатной сети, полная кривизна $K(x,y) < 0$. Следовательно $M(x,y) \neq 0$.

Преобразуем систему (2) в удобное для рассмотрения вида. Для этого берем частные производные в третьем уравнении системы (2), а первые два уравнения, умножая на М, получим

$$W\big(K_xW + K(E_xG + EG_x - 2FF_x)\big) + 2FM^2(E_y - F_x) - M^2(EG_x - GE_x) = 0.$$

$$W\left(-K_yW - K\big(E_yG + EG_y - 2FF_y\big)\right) + 2FM^2(F_y - G_x) - M^2(EG_y - GE_y) = 0.$$

$$-M^2 = K\cdot W.$$

Учитывая, что $W > 0,\ M \neq 0$, последняя система сводится к системе

[1]) Здесь и в дальнейшем φ_t - частное производное функции φ по переменному t.

$$\frac{K_x}{K}W + 2EG_x - 2FE_y = 0$$
$$\frac{K_y}{K}W - 2FG_x + 2GE_y = 0 \qquad (3)$$
$$-M^2 = K \cdot W.$$

Используя обозначение $K = -k^2(x,y)$, где $k(x,y) > 0$, получим

$$W(lnk)_x + EG_x - FE_y = 0$$
$$W(lnk)_y - FG_x + G \cdot E_y = 0 \qquad (3')$$
$$M = k \cdot \sqrt{W}.$$

Система (3) или (3′) называется основной системой теории поверхностей в асимптотических координатах.

2. Во второй части этой работы рассмотрим метрику

$$dS^2 = f(y)dx^2 + \big(g(x) + h(y)\big)dy^2, \qquad (4)$$

заданную в асимптотических координатах.

Предположим, что функции $f(y)$ и $g(x) + h(y)$ принадлежат классу C^3 в некоторой области переменных x и y. Линии $x = const$ и $y = const$ — асимптотические линии. Значит полная кривизна $K(x,y)$ метрики (4) отрицательна, ибо только в метрике отрицательной кривизны из каждой точки выходят две асимптотические линии. Спрашивается, есть ли в E^3 многообразие, несущее метрику (4), для которой система координат-асимптотическая.

Теорема. Метрика (4) не может быть регулярно изометрически погружена в E^3 в виде регулярной поверхности, на которой линии x и y образуют асимптотическую сеть.

Доказательство. Запишем систему (3′) в рассматриваемой метрике (4)

$$(lnk)_x = \frac{-g'(x)}{g(x) + h(y)}$$
$$(lnk)_y = \frac{-f'(y)}{f(y)} \qquad (5)$$
$$M = k\sqrt{W},$$

где $k = \sqrt{-K(x,y)}$, а $K(x,y)$- гауссова кривизна метрики (4), а $W = f(y)\big(g(x) + h(y)\big)$ – дискриминант метрики.

Вид системы (5) позволяет считать в первом уравнении y как параметр, а во втором уравнении –x как параметр (см [2]). Интегрируя второе уравнение, получим

$$lnk = ln\frac{\lambda(x)}{f(y)} ,$$

где $\lambda(x)$ - произвольная гладкая функция. Это решение должно удовлетворять первому уравнению системы (5). Получим

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = \frac{-g'(x)}{g(x)+h(y)} .$$

Из этого соотношения $h(y)$ выражается через переменное x. По ранее рассмотренному случаю (см[1]) полученная метрика в асимптотических координатах не может быть погружена в E^3 в виде регулярной поверхности. Отметим, что в указанной работе коэффициенты метрики были $E = f^2(y)$, $F = 0$, $G = g^2(x)$. Теорема доказана.

Литература

1. Мусаелян Р.Ц. О метриках, заданных в асимптотических координатах. ДАН Арм. ССР том 89 №3, 1989.
2. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. Москва, 1961.
3. Позняк.Э. Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия. Москва, 1990.

Ասիմպտոտական կոորդինատներով մի մետրիկայի չընկղմելիությունը E^3

Ռ.Ծ.Մուսայելյան

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկված է $ds^2 = E(x,y)dx^2 + 2F(x,y)dxdy + G(x,y)dy^2$ մետրիկան ասիմպտո-տական կոորդինատներով և դուրս է բերված մակերևույթների տեսության հիմնական համակարգը, այդ մետրիկայում: Այնուհետև դիտարկված է $ds^2 = f(y)dx^2 + \big(g(x) + h(y)\big)dy^2$ մետրիկան ասիմպտոտական կոորդինատներով և ապացուցված, որ այն ռեգուլյար չի ընկղմվում E^3 տարածություն:

The non-dipping in E^3 of one metric with asymtotic co-ordinates

R.Ts.Musaelyan

Summary

The $ds^2 = E(x,y)dx^2 + 2F(x,y)dxdy + G(x,y)dy^2$ metric with asymptotic co-ordinates has been observed in this work. The basic system of the theory of surfaces in that metric has been notified.

The $ds^2 = f(y)dx^2 + \big(g(x) + h(y)\big)dy^2$ metric with asymptotic co-ordinates has been observed as well. The non-dipping in E^3 has been proved.