ՀՏԴ 378.14 Մաթեմատիկայի դասավանդման մեթոդիկա

ՄՈԴՈՒԼ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐՈՎ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ

Կարենե ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ռոբերտ ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

Բանալի բառեր: *հավասարում, լուծում, պարամետր, մոդուլ, գրաֆիկ, կոորդինատային հարթություն, տրոհում, նշանապահպանություն, հատում*

Ключевые слова: *уравнение, решение, параметр, модуль, график, координатная плоскость, разбиение, пересечение, горизонталь.*

Key words: *equation, solution, parameter, module, graph, coordinate plane, splitting, crossing, horizontal.*

МОДУЛЬ СОДЕРЖАЩИЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

К. Григорян, Р.Арутюнян

В статье рассматриваются решения некоторых модуль содержащих уравнений с параметрами. Для нахождения решений уравнения при всех допустимых значениях параметра использовался графический метод решения, суть которого в условном разбиении координатной плоскости на области, в каждом из которых выражения, содержащиеся под знаком модуля, сохраняют свой знак, и последующего построения соответствующих графиков. Множество решений уравнения определяется по графику в зависимости от значений параметра.

MODULE CONTAINING EQUATIONS WITH PARAMETERS

K.Grigoryan, R. Harutyunyan

The article examines the solution of some module containing equations with parameters. For finding solutions of the equation for all permissible parameter values used graphical method of solution, the essence of which is conditional splitting the coordinate plane into regions in each of which the expressions under the sign of the module, retain their sign, and the subsequent creation of appropriate graphs. Many solutions of the equation are determined by graphics depending on parameter values.

Հոդվածում դիտարկվում են մոդուլ պարունակող պարամետրով հավասարումների լուծումները: Այս տեսքի հավասարումներ լուծելիս պարամետրի բոլոր թույլատրելի արժեքների համար կիրառվել է գրաֆիկական եղանակը, որի էությունը կոորդինատային հարթության տրոհումն է մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում մոդուլի նշանի մեջ գտնվող արտահայտությունները պահպանում են իրենց նշանը: Կառուցելով համապատասխան գրաֆիկը, որոշվում է լուծումների բազմությունը կախված պարամետրի արժեքներից ելնելով գրաֆիկից:

Մաթեմատիկայի դպրոցական դասընթացում պարամետր պարունակող խնդիրները համարվում են դժվարավուններից: Լուծել պարամետր պարունակող հավասարումը նշանակում է լուծել հավասարումը պարամետրի բոլոր արժեքների համար: Պարամետր պարունակող խնդիրների լուծումը դժվարություններ է առաջացնում սովորողների մոտ, քանի որ գոյություն չունի որևէ ալգորիթմ, որի օգնությամբ կարելի է լուծել խնդիրը: Յուրաքանչյուր այդպիսի առաջադրանք պահանջում է տրամաբանական, ստեղծագործական մոտեցում:

Մոդուլ պարունակող պարամետրով հավասարումների լուծման դեպքում կիրառվում է մոդուլից ազատման կանոնը՝ ըստ սահմանման՝

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ եթե } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ եթե } f(x) < 0 \end{cases}$$

Այդպիսի հավասարումները լուծելու համար, շատ դեպքերում, նախընտրելի է գրաֆիկական եղանակը, քանի որ անալիտիկ լուծումը ավելի բարդ և ծավալուն է:

Դիտարկենք օրինակներ:

Օրինակ 1. Կախված a պարամետրից քանի± արմատ ունի հավասարումը.

$$x^2 + 5(x+1) + 3|x-a| + a = 0$$

Լուծում:

ա). *Անալիտիկ եղանակ.*

Եթե $x \geq a$, ստանում ենք $x^2 + 8x + 5 - 2a = 0$, $D = 11 + 2a$:

Այս դեպքում հավասարումն ունի երկու արմատ, երբ $a > -\frac{11}{2}$, արմատ չունի, երբ $a < -\frac{11}{2}$ և միակ արմատ, երբ $a = -\frac{11}{2}$:

Եթե $x < a$, ստանում ենք $x^2 + 2x + 5 + 4a = 0$, $D = -4 - 4a$:

Տվյալ հավասարումը ունի երկու արմատ, երբ $a < -1$, մեկ արմատ, երբ $a = -1$ և արմատ չունի, երբ $a > -1$:

Այսպիսով, ամփոփելով երկու դեպքերը, ստանում ենք՝

երբ $-\frac{11}{2} < a < -1$, հավասարումն ունի երկու արմատ,

երբ $a = -1$ կամ $a = -\frac{11}{2}$, հավասարումն ունի մեկ արմատ,

երբ $a < -\frac{11}{2}$ կամ $a > -1$, հավասարումն արմատ չունի:

բ). *Գրաֆիկական եղանակ*՝

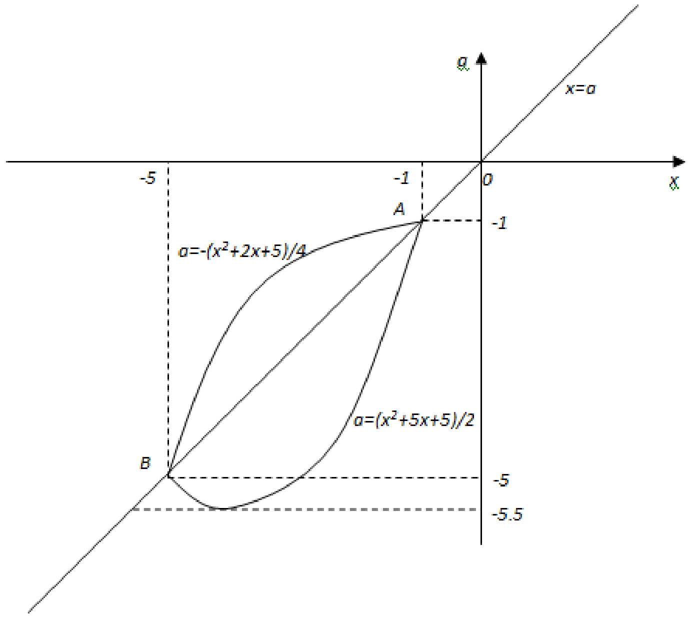
Oxa կոորդինատային հարթության վրա պատկերենք բոլոր այն (x, a) կետերը, որոնք բավարարում են տվյալ հավասարմանը (նկ. 1):

Եթե $x \geq a$, ապա $a = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 5)$, եթե $x < a$, ապա $a = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5)$:

Գտնենք այդ պարաբոլների հատման կետերը

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(x^2 + 8x + 5) \\ a = -\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 5) \end{cases}$$

համակարգի լուծումից՝ $A(-5; -5)$, $B(-1: -1)$, որոնք գտնվում են $x = a$ ուղղի վրա:



Նկ. 1

Գրաֆիկից երևում է, որ

երբ $a = -1$ կամ $a = -\frac{11}{2}$ հավասարումը ունի մեկ լուծում,

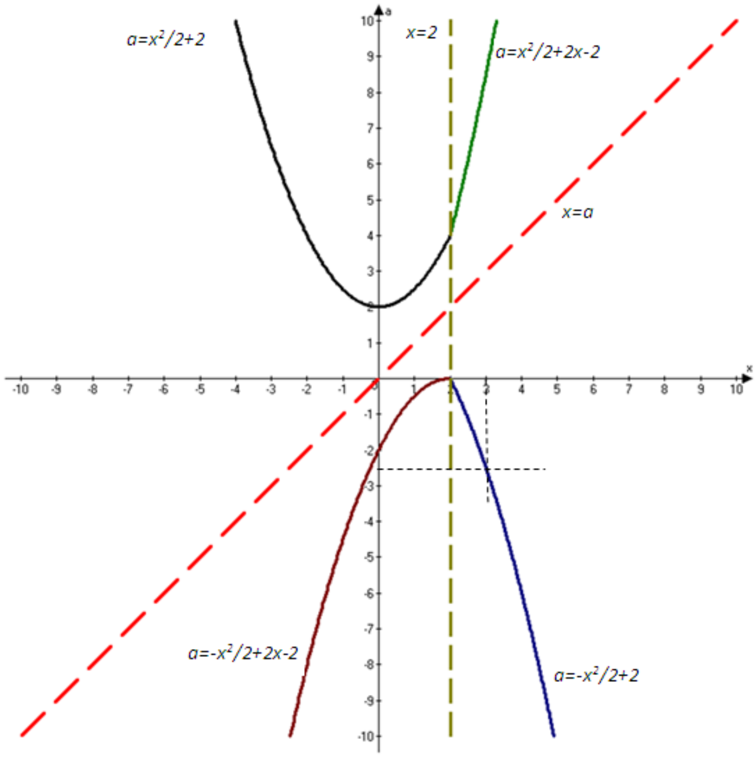
երբ $-\frac{11}{2} < a < -1$, հավասարումը ունի երկու լուծում,

երբ $a < -\frac{11}{2}$ կամ $a > -1$ հավասարումը լուծում չունի, քանի որ պարամետրի այդ արժեքներին համապատասխանող հորիզոնական ուղղին, հատում է գրաֆիկը նշված քանակով կետերում:

Օրինակ 2. Լուծել հավասարումը

$$x^2 = 2|x - a| - 2|x - 2|$$

Լուծում: $x = a$ և $x = 2$ ուղիղները տրոհում են կոորդինատային Oxa հարթությունը 4 մասի, որոնցից յուրաքանչյուրում մոդուլի նշանի մեջ գտնվող արտահայտությունները պահպանում են իրենց նշանը: Հաշվի առնելով դա, կարող ենք ազատվել մոդուլների նշաններից, այնուհետև յուրաքանչյուր մասում կառուցել ստացված ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 2):



Նկ. 2

1) $x \geq a,\ x \geq 2$: Ազատվելով մոդուլների նշաններից, ստանում ենք $x^2 = -2a + 4$:

Արտահայտելով $a = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ կառուցում ենք գրաֆիկը (պարաբոլը) 1)-ին մասում:

Գտնենք x–ը՝

$$\begin{cases} x^2 = -2a + 4 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{-2a + 4}$$

Հանգունորեն դիտարկում ենք մյուս դեպքերը.

2) $x \geq a,\ x < 2$

$$x^2 = 4x - 2a - 4 \Leftrightarrow a = -\frac{x^2}{2} + 2x - 2$$

$$\begin{cases} x^2 = 4x - 2a - 4 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \pm \sqrt{-2a} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 - \sqrt{-2a}$$

3) $x < a,\ x < 2$

$$x^2 = 2a - 4 \Leftrightarrow a = \frac{x^2}{2} + 2$$

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{2a - 4} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2a - 4}$$

4) $x < a,\ x \geq 2$

$$x^2 = -4x + 2a + 4 \Leftrightarrow a = \frac{x^2}{2} + 2x - 2$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x - 2a - 4 = 0 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm \sqrt{8 + 2a} \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 + \sqrt{8 + 2a}$$

Ելնելով գրաֆիկից (նկ.2) և համապատասխան x–ի արժեքներից հանգում ենք վերջնական պատասխանին՝

երբ $a \le 0$, $x = 2 - \sqrt{-2a}$, $x = \sqrt{-2a+4}$,
երբ $0 < a < 2$, հավասարումը արմատ չունի,
երբ $2 \le a \le 4$, $x = \pm\sqrt{2a-4}$,
երբ $a > 4$, $x = -\sqrt{2a-4}$, $x = -2 + \sqrt{8+2a}$:

Օրինակ 3. Լուծել հավասարումը

$$(4a-15)x^2 + 2a|x| + 4 = 0$$

Լուծում: Ակնհայտ է, որ երբ $a = \frac{15}{4}$ հավասարումը լուծում չունի:

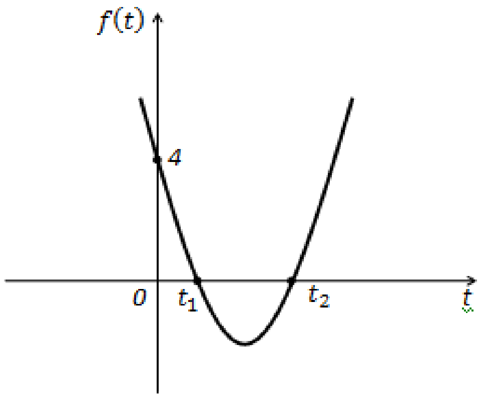
Այն դեպքում, երբ $a \ne \frac{15}{4}$ նշանակելով $|x| = t$, ստանում ենք

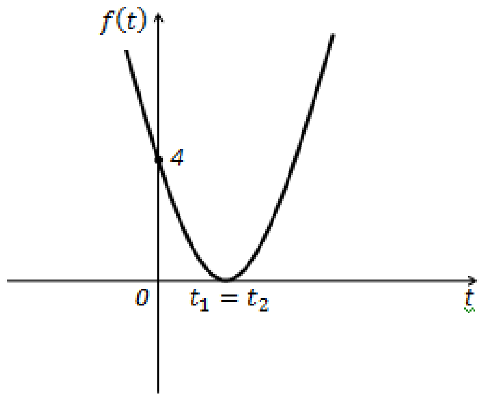
$$(4a-15)t^2 + 2at + 4 = 0, \text{ որտեղ } t > 0:$$

Դիցուք $f(t) = (4a-15)t^2 + 2at + 4$:

Քանի որ $f(0) = 4 > 0$ ապա $f(t)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը հատում է օրդինատների առանցքը վերին կիսահարթությունում $(0; 4)$ կետում: Հաշվի առնելով, որ $t > 0$ դիտարկենք կոորդինատային հարթության վրա գրաֆիկի դասավորվածության հնարավոր դեպքերը.

1. Պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են վերև (նկ.3)



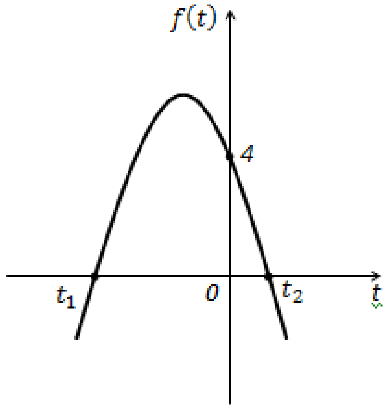


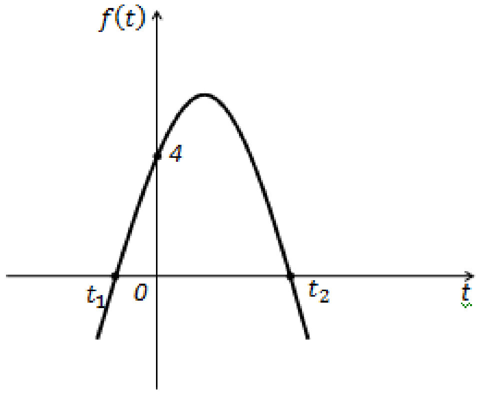
Նկ.3

Պարաբոլը հատում է Ot առանցքը դրական աբսցիսներով երկու կետում կամ շոշափում է Ot առանցքը դրական աբցիս ունեցող մի կետում: Այսինքն՝ ստանում ենք հետևյալ համակարգը.

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ \dfrac{-2a}{2(4a-15)} > 0 \\ 4a - 15 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty;6] \cup [10;\infty) \\ 0 < a < \dfrac{15}{4} \\ a > \dfrac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a \epsilon \emptyset:$$

2. Պարաբոլի ճյուղերը ուղղված են ներքև (նկ.4)





Նկ.4

Այս դեպքում պարաբոլը անպայման հատում է Ot առանցքը դրական աբցիս ունեցող մի կետում: Երբ $4a - 15 < 0 \iff a < \frac{15}{4}$, ապա

$$t = \frac{a + \sqrt{a^2 - 16a + 60}}{15 - 4a} > 0$$

Որտեղից էլ՝

$$x = \pm\frac{a + \sqrt{a^2 - 16a + 60}}{15 - 4a}$$

Պատասխան: Երբ $a \geq \frac{15}{4}$, հավասարումը արմատ չունի, երբ $a < \frac{15}{4}$,

$$x = \pm\frac{a + \sqrt{a^2 - 16a + 60}}{15 - 4a}:$$

Օրինակ 4. Լուծել հավասարումը

$$|x - a| + |x + a + 1| = 3$$

Լուծում: $x = a$ և $x = -a - 1$ ուղիղները տրոհում են կոորդինատային Oxa հարթությունը 4 մասի, որոնցից յուրաքանչյուրում մոդուլի մեջ գտնվող արտահայտությունը պահպանում է իր նշանը: Որոշելով այդ նշանը և ազատվելով մոդուլների նշաններից, յուրաքանչյուր մասում կառուցում ենք ստացված ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ.5):

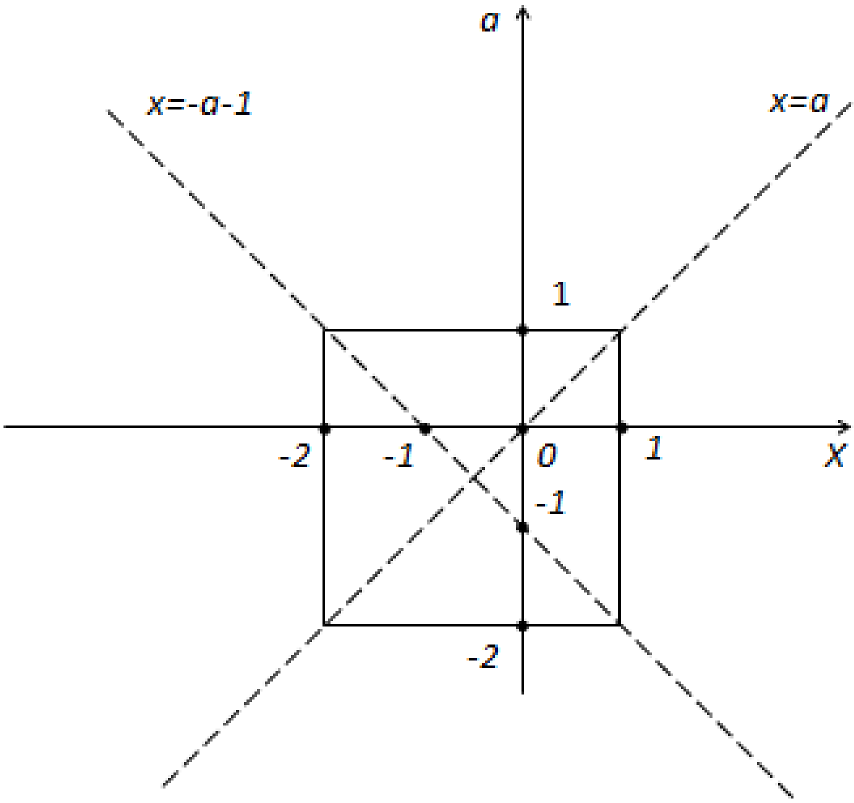
Երբ $x < a,\ x < -a - 1$, ստանում ենք $a - x - x - a - 1 = 3 \iff x = -2$:

Երբ $x < a, x > -a - 1$, ստանում ենք $a - x + x + a + 1 = 3 \iff a = 1$:

Երբ $x > a, x > -a - 1$, ստանում ենք $x - a + x + a + 1 = 3 \iff x = 1$:

Երբ $x > a,\ x < -a - 1$, ստանում ենք $x - a - x - a - 1 = 3 \iff a = -2$:

Կառուցենք համապատասխան գրաֆիկը.

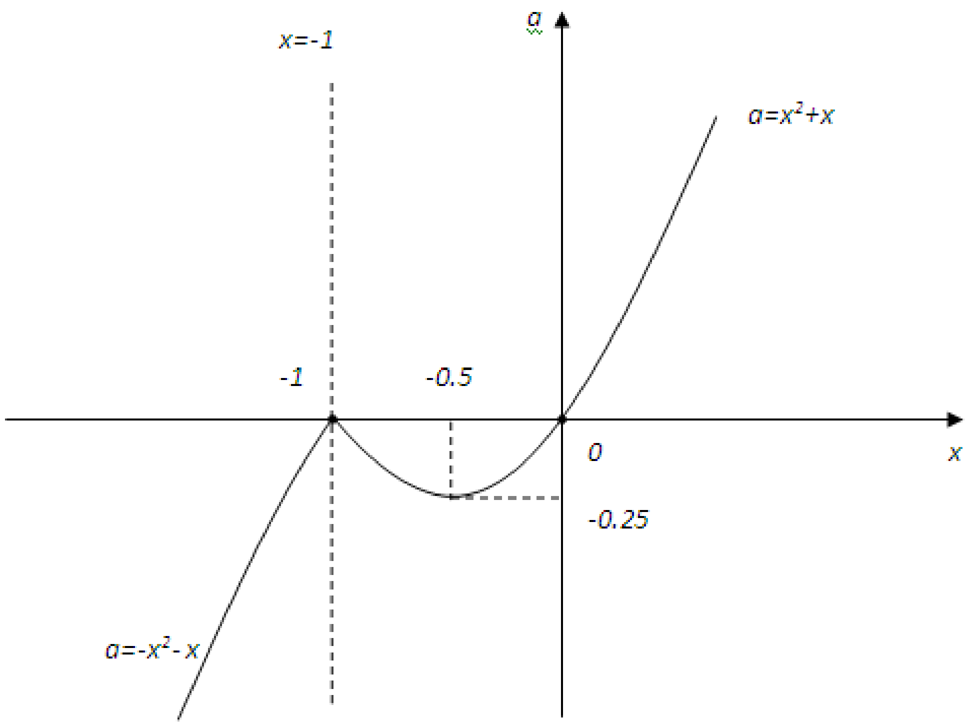


Նկ.5

Ելնելով գրաֆիկից, հանգում ենք հետևյալ պատասխանին`
Երբ $a = 1$ կամ $a = -2$, $-2 \le x \le 1$:
Երբ $-2 \le a \le 1$, $x = 1$, $x = 2$:
Օրինակ 5. Լուծել հավասարումը.

$$x|x+1| = a$$

Լուծում: Կառուցենք $a(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը. $a\,(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{երբ } x \ge -1 \\ -x^2 - x, & \text{երբ } x \le -1 \end{cases}$
Դիցուք $x \ge -1$ ստանում ենք $x^2 + x = a$: Որտեղից`
$x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1+4a}\right)$:
Երբ $x \le -1$, ապա ստանում ենք $-x^2 - x - a = 0 \iff x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1-4a}\right)$
Գտնենք պարաբոլի գագաթի կոորդինատները և կառուցենք $a(x)$ ֆունկցիայի գրաֆիկը (նկ. 6):



Նկ.6

Ելնելով գրաֆիկից հանգում ենք պատասխանին.

Երբ $a > 0, x = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + 4a}\right)$:

Երբ $a = 0, x = 0; x = -1$:

Երբ $-\frac{1}{4} \leq a < 0, x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4a}\right),\ x = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 - 4a}\right)$:

Երբ $a < -\frac{1}{4}, x = \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{1 - 4a}\right)$:

Եզրակացություն:

Մոդուլ պարունակող պարամետրով հավասարումները շատ դեպքերում հարմար է լուծել գրաֆիկական եղանակով, որի դեպքում կոորդինատային հարթությունը տրոհվում է մասերի, որոնցից յուրաքանչյուրում մոդուլի մեջ գտնվող արտահայտությունները պահպանում են իրենց նշանները: Ազատվելով մոդուլների նշաններից և կառուցելով ստացված ֆունկցիայի գրաֆիկը, որոշվում է հավասարման լուծումը, կախված պարամետրի թույլատրելի արժեքներից:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Старков В.Н. 165 задач с параметрами (в помощь абитуриенту)//Методические указания. СПб. изд. СПБГУ, 2004-25с.
2. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач. Уч. посов. для 10 кл. ср. школы – М.: Просвешение, 1989.-252с.

Տվյալներ հեղինակների մասին.

Գրիգորյան Կարինե Միկիտի - Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարանի դասախոս
karine.grigoryan1957@mail.ru
Հարությունյան Ռոբերտ Միսակի - Շուշիի տեխնոլոգիական համալսարանի ավագ դասախոս
rharutyunyan@shushitech.am

Հոդվածը տպագրության է երաշխավորել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ. գ.դ. Ա.Մ. Խաչատրյանը: