

ՀՏԴ 513.813

Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

Ֆ.մ.գ.թ., ԱրդՀ մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ

e-mail: Gurgen250612@mail.ru

ՌԻՄԱՆՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԻ ԻԶՈՄԵՏՐԻԱՅԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ուսումնասիրված են ռիմանյան տարածության երկու մակերևույթների իզոմետրիան: Ապացուցված է, որպեսզի Φ_1 և Φ_2 մակերևույթները լինեն իզոմետրիկ, անհրաժեշտ և բավարար է, որ ընդհանուր կոորդինատական համակարգում նրանց առաջին քառակուսային ձևերը լինեն նույնը: Ապացուցված է, եթե հարթ տիրույթի մակերեսը, որը սահմանափակված է Γ կորով, հավասար է F -ի, ապա կորի L երկարության և F մակերեսի միջև տեղի ունի $L^2 \geq 4\pi F$ իզոպերիմետրիկ անհավասարությունը:

Բանալի բառեր՝ իզոմետրիա, քառակուսային ձև, ուղղելի կոր, դիֆերենցելի բազմաձևություն, n -չափանի ռիմանյան տարածություն:

Г.Налбандян

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ИЗОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В статье изучается изометрия между двух поверхностей в римановом пространстве. Доказано, что для того чтобы две поверхности Φ_1 и Φ_2 были изометричны, необходимо и достаточно, чтобы в общей координатной системе совпала их первая квадратичная форма. Доказано, что если площадь плоской области ограничена кривой Γ равной F , то между длиной кривой L и площадью фигурой F имеется изопериметрическое неравенство $L^2 \geq 4\pi F$.

Ключевые слова: изометрия, квадратическая форма, спрямляемая кривая, дифференцируемые многообразия, n -измеримое римановое пространство.

G. Nalbandyan

SOME PROPERTIES OF THE ISOMETRY OF SURFACES IN RIEMANNIAN SPACE

Two surfaces of the Riemannian space isometry have been studied. It has been proved that in order the surfaces Φ_1 and Φ_2 to be isometric, it is necessary and sufficient that their first squared forms in the overall coordinating system to be the same. It has been proved that if the flat surface area is bounded by G curve, which is equal to F , then there is isoperimetric inequality $L^2 \geq 4\pi F$ between the length of L curve and F surface.

Key words: isometry, squared form, rectifiable curve, differentiable manifolds, n -measurable Riemannian space.

Հայտնի է, որ եռաչափ եվկլիդեսյան տարածության մեջ երկու մակերևույթներ կոչվում են իզոմետրիկ, եթե գոյություն ունի փոխմիարժեք արտապատկերում, որի դեպքում համապատասխան կորերը ունեն նույն երկարությունը: Այդ արտապատկերումն անվանում են իզոմետրիա: [1, 2]

Թեորեմ 1. Որպեսզի Φ_1 և Φ_2 մակերևույթները լինեն իզոմետրիկ անհրաժեշտ և բավարար է, որ ընդհանուր կոորդինատական համակարգում նրանց առաջին քառակուսային ձևերը լինեն նույնը:

Ապացույց: Անհրաժեշտություն: Դիցուք Φ_1 և Φ_2 մակերևույթները իզոմետրիկ են, այսինքն $\tilde{s}[t_1, t_2] = \tilde{s}[t_1, t_2]$: Ուրեմն

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\tilde{g}_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2\tilde{g}_{12} \left(\frac{du^1}{dt} \right) \left(\frac{du^2}{dt} \right) + \tilde{g}_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2} dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \left(\frac{du^1}{dt} \right) \left(\frac{du^2}{dt} \right) + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2} dt \end{aligned} \quad (1)$$

Եթե (1)-ի մեջ ֆիքսենք t_1 -ը, իսկ t_2 -ը համարենք փոփոխական, ապա, ածանցելով ըստ t_2 -ի, կստացվի՝

$$\sqrt{\tilde{g}_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + \tilde{g}_{12} \left(\frac{du^1}{dt} \right) \left(\frac{du^2}{dt} \right) + \tilde{g}_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2} = \sqrt{g_{11} \left(\frac{du^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \left(\frac{du^1}{dt} \right) \left(\frac{du^2}{dt} \right) + g_{22} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2}$$

Բարձրացնելով քառակուսի և հաշվի առնելով, որ $\left(\frac{du^1}{dt}, \frac{du^2}{dt} \right)$ շոշափող վեկտորը կամայական վեկտոր է, ապա կստանանք՝

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{11}(u^1, u^2) &= g_{11}(u^1, u^2), \quad \tilde{g}_{12}(u^1, u^2) = g_{12}(u^1, u^2), \\ \tilde{g}_{22}(u^1, u^2) &= g_{22}(u^1, u^2): \end{aligned}$$

Այսպիսով՝ այդ երկու մակերևույթների առաջին քառակուսային ձևերը նույնն են:

Բավարարություն: Թող Φ_1 մակերևույթի առաջին քառակուսային ձևն է

$$d\vec{r}^2 = g_{11}(u^1, u^2)(du^1)^2 + 2g_{12}(u^1, u^2)du^1 du^2 + g_{22}(u^1, u^2)(du^2)^2 \quad (2)$$

Հայտնի է, որ եթե տրված է $\vec{r} = \vec{r}(u^1, u^2)$ ռեգուլյար մակերևույթը, որի

$$\vec{r}_1 = \frac{\partial \vec{r}(u^1, u^2)}{\partial u^1} \text{ և } \vec{r}_2 = \frac{\partial \vec{r}(u^1, u^2)}{\partial u^2} \text{ վեկտորները իրար գուգահեռ չեն, ապա}$$

առաջին քառակուսային ձևի գործակիցները միարժեքորեն որոշվում են այսպես՝

$$g_{11}(u^1, u^2) = \vec{r}_1(u^1, u^2) \cdot \vec{r}_1(u^1, u^2),$$

$$g_{12}(u^1, u^2) = \vec{r}_1(u^1, u^2) \cdot \vec{r}_2(u^1, u^2),$$

$$g_{22}(u^1, u^2) = \vec{r}_2(u^1, u^2) \cdot \vec{r}_2(u^1, u^2):$$

Դիցուք Φ_1 մակերևույթի վրա տրված $\gamma: u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t), t \in (a, b)$ կորը, այդ դեպքում նրա $[t_1, t_2]$ աղեղի երկարությունը հաշվում են

$$s[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\right)\left(\frac{du^2}{dt}\right) + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt \quad (3)$$

բանաձևով: Այժմ Φ_2 մակերևույթի վրա կոորդինատները նշանակենք $(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2)$ - ով, իսկ առաջին քառակուսային ձևի գործակիցները՝ $\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \tilde{g}_{22}$ -ով: Արտապատկերման նկատմամբ ընդհանուր կոորդինատական համակարգը այն համակարգն է, որի նկատմամբ Φ_1 մակերևույթի կամայական $M_1(u^1, u^2)$ կետի և նրա M_2 կերպարի կոորդինատները Φ_2 մակերևույթի վրա կլինեն նույն u^1, u^2 կոորդինատները՝ $M_2(u^1, u^2)$ [3, 5]:

Այդ դեպքում γ կորի և նրա $\tilde{\gamma}$ կերպարի համապատասխան կետերը կունենան նույն կոորդինատները: Հետևաբար, այդ կորերի համապատասխան կետերում t և $\tilde{t}$ պարամետրերը ևս կլինեն նույնը՝ $\tilde{t} = t$, ուրեմն γ կորի $[t_1, t_2]$ աղեղի կերպարի երկարությունը կհաշվվի այսպես՝

$$\tilde{s}[t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\tilde{g}_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2\tilde{g}_{12}\left(\frac{du^1}{dt}\right)\left(\frac{du^2}{dt}\right) + \tilde{g}_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2} dt: \quad (4)$$

Մյուս կողմից ենթադրել ենք, որ $\tilde{g}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1, u \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} u \begin{pmatrix} 1 \\ 1, g \end{pmatrix}^1$ $\tilde{g}_{12}(u^1, u^2) = g_{12}(u^1, u^2)$, $\tilde{g}_{22}(u^1, u^2) = g_{22}(u^1, u^2)$, ուրեմն (3) -ից և (4) -ից կստացվի՝

$$\tilde{s}[t_1, t_2] = s[t_1, t_2]:$$

Այսպիսով՝ այդ երկու մակերևույթները կլինեն իզոմետրիկ:

Հայտնի է, որ մակերևույթի առաջին քառակուսային ձևի գործակիցները՝ $g_1, g_{-1}, g_{21}, g_{22}$ կազմում են թենզոր, այսինքն (u^1, u^2) կոորդինատական համակարգից (u'^1, u'^2) կոորդինատական համակարգին անցնելիս ձևափոխվում են

$$g_{i'j'} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^{i'}} \cdot \frac{\partial u^j}{\partial u'^{j'}} \cdot g_{ij}$$

օրենքով, որտեղ g_{ij} - ն տրված թենզորն է $\{u^1, u^2\}$ համակարգում, իսկ $g_{i'j'}$ - ք այդ նույն թենզորն է $\{u'^1, u'^2\}$ համակարգում, իսկ $\frac{\partial u^i}{\partial u'^{i'}}$ -ները դրանք u^i կոորդինատական համակարգից u'^i կոորդինատական համակարգի անցման ֆունկցիաներն են, [4, 6]:

Կասենք, որ տրված է մակերևույթի վրա $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ տիպի թենզոր, եթե ցանկացած u^i կոորդինատական համակարգում տրված են 2^{p+q} հատ ֆունկցիաներ, որոնք u^i համակարգից u'^i համակարգին անցնելիս ձևափոխվում են

$$T_{k'_1, k'_2, \dots, k'_q}^{i'_1, i'_2, \dots, i'_p} = A_{i'_1}^{i_1} \cdot A_{i'_2}^{i_2} \cdot \dots \cdot A_{i'_p}^{i_p} \cdot A_{k'_1}^{k_1} \cdot A_{k'_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot A_{k'_q}^{k_q} \cdot T_{k_1, k_2, \dots, k_q}^{i_1, i_2, \dots, i_p},$$

օրենքով, որտեղ $A_i^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}$ և $A_i^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}$:

Եթե n -չափանի դիֆերենցելի բազմաձևության վրա տրված է g_{ik} թենզորը, $i, k = 1, 2, \dots, n$, որը չվերասերվող է և սիմետրիկ, ապա այդ դիֆերենցելի բազմաձևությանը անվանում են n -չափանի ռիմանյան տարածություն, [1, 2, 4]:

Հայտնի է, որ n -չափանի ռիմանյան տարածության մեջ սահմանվում է երկու վեկտորների սկալյար արտադրյալը

$$(x^i, y^j) = g_{ij} x^i y^j,$$

տեսքով, իսկ կորի աղեղի երկարությունը հավասար է

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt}} dt$$

մեծությանը, երբ կորը տրված է $u^i = u^i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$ հավասարումներով: Հայտնի է, որ n -չափանի ռիմանյան տարածության առաջին քառակուսային ձևը

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j \quad (5)$$

տեսքի է, որտեղ $i, j = 1, 2, \dots, n$:

Տեղի ունի

Թեորեմ 2: Հարթության վրա միևնույն L պարագիծն ունեցող բոլոր փակ կորերից ամենամեծ մակերեսը սահմանափակում է ω շրջանագիծը:

Ապացույցի հետ կաելի է ծանոթանալ մաթեմատիկի էքստրեմումների տեսությունից [5,5]: Այսպիսով ունենք

$$S(x) = x^2 = \frac{L^2}{16} : \quad (6)$$

Այժմ, վերցնենք

$$L = 2\pi R \quad (7)$$

արժեքը և տեղադրենք (6) հավասարության մեջ, կունենանք

$$S(x) = x^2 = \frac{4\pi^2 R^2}{16} = \frac{\pi}{4} (\pi R^2) = \frac{\pi}{4} S_\omega < S_\omega : \quad (8)$$

Թեորեմ 3: Թող Γ կորով սահմանափակված հարթ քառակուսելի տիրույթի մակերեսը հավասար է F -ի: Այդ դեպքում կորի L երկարության և F մակերեսի միջև տեղի ունի

$$L^2 \geq 4\pi F$$

իզոպերիմետրիկ անհավասարությունը:

Ապացույց: Հավասարության դեպքը $L^2 = 4\pi F$ տեղի ունի, երբ Γ կորը շրջանագիծ է: Հաշվի առնելով թեորեմ 2-ը, եթե շրջանագծի երկարությունը հավասար է $L = 2\pi R$, իսկ մակերեսը՝ $F = \pi R^2$: Ուրեմն՝

$$\left. \begin{aligned} L^2 &= 4\pi^2 R^2 \\ 4\pi F &= 4\pi^2 R^2 \end{aligned} \right\},$$

հետևաբար

$$L^2 = 4\pi F :$$

Այժմ ապացուցենք անհավասարությունը կամայական ողորկ կորի համար:

Դիցուք կորը տրված է $x = x(s), y = y(s)$ բնական հավասարումով, ներմուծենք նոր $t = 2\pi s / L$ պարամետր, որը փոփոխվում է $[0, 2\pi]$

հատվածում: Այդ դեպքում $x(s)$, $y(s)$ ֆունկցիաները կլինեն 2π պարբերությամբ ֆունկցիաներ: Դիֆերենցիալ երկրաչափությունից հայտնի է, որ եթե կորը տրված է բնական հավասարումով, ապա նրա կամայական կետում տարված շոշափողն ունի միավոր երկարություն՝ $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$, այսինքն՝

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1: \quad (9)$$

Օգտվելով բարդ ֆունկցիայի ածանցյալի բանաձևից՝ կունենանք

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{2\pi}{L}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{2\pi}{L}:$$

Ուրեմն՝

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \cdot \frac{4\pi^2}{L^2}$$

Որտեղից, հաշվի առնելով (15) -ը, կստանանք

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2: \quad (10)$$

Հայտնի է, որ $[a, b]$ հատվածում $\vec{r} = \vec{r}(t)$ հավասարումով տրված հարթ կորը ուղղելի է և նրա կորի աղեղի երկարությունը որոշվում է $S(\gamma) = \int_a^b |\vec{r}'_t| dt$ բանաձևով: Հետևաբար, Γ կորի L երկարության համար կունենանք՝

$$S(\gamma) = \int_a^b |\vec{r}'_t| dt = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dt = \frac{L}{2\pi} \cdot 2\pi = L: \quad (11)$$

Այժմ $x = x(t)$, $y = y(t)$ ֆունկցիաները վերլուծենք եռանկյունաչափական շարքերի:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad y(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k \cos kt + d_k \sin kt): \quad (12)$$

Այդ դեպքում Ֆուրիեյի շարքերը նրանց ածանցյալների համար կլինեն՝

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} (-a_k \sin kt + b_k \cos kt)k, \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} (-c_k \sin kt + d_k \cos kt)k: \quad (13)$$

Հայտնի է ֆունկցիաների տեսությունից [5,6], որ $\sin kt, \cos ink t, \sin mt, \cos inmt$ ֆունկցիաները կազմում են օրթոգոնալ համակարգ $[0, 2\pi]$ հատվածում: Իսկ $\varphi_k(t)$ և $\varphi_m(t)$ ֆունկցիաների սկալյար արտադրյալը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\langle \varphi_k(t), \varphi_m(t) \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi_k(t) \varphi_m(t) dt : \quad (14)$$

Այսպես, երբ $k \neq m$, ապա

$$\langle \sin kt, \sin mt \rangle = 0, \quad \langle \cos kt, \cos mt \rangle = \int_0^{2\pi} \cos kt \cos mtdt = 0,$$

$$\langle \sin kt, \cos mt \rangle = \int_0^{2\pi} \sin kt \cdot \cos mtdt = 0, \quad \langle 1, \sin kt \rangle = 0, \quad \langle 1, \cos kt \rangle = 0 :$$

Իսկ երբ $k=m$, ապա

$$\langle \sin kt, \sin kt \rangle = \pi :$$

Ուրեմն՝

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k (-a_k \sin kt + b_k \cos kt) \right]^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \quad (15)$$

Համանման ձևով.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k^2 + d_k^2) k^2 : \quad (16)$$

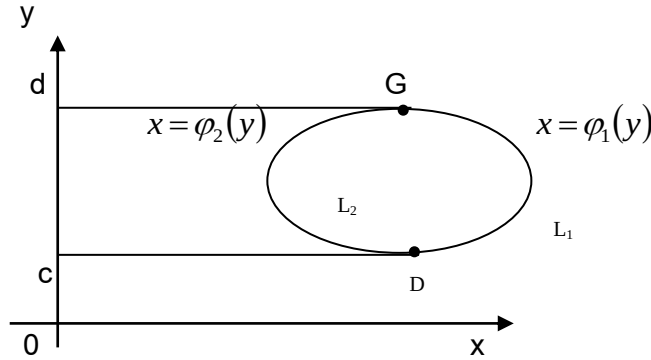
Հաշվի առնելով (10) պայմանը՝ կստանանք

$$\frac{L^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) :$$

Որտեղից

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) : \quad (17)$$

Դիցուք տրված է հարթ պատկեր, որը սահմանափակված է աջ կողմից $x = \varphi_1(y)$, իսկ ձախ կողմից $x = \varphi_2(y)$ ֆունկցիաներով: Այդ Γ կորով սահմանափակված հարթ կորի մակերեսը, ինչպես հայտնի է մաթանալիզից հաշվում են հետևյալ բանաձևով.



$$S = \int_c^d \phi_1(y) dy - \int_c^d \phi_2(y) dy = \int_{L_1} x dy - \int_{L_2} x dy = \int_{L_1} x dy + \int_{-L_2} x dy = \int_L x dy :$$

$$F = \int_L x dy = \int_0^{2\pi} x \frac{dy}{dt} \cdot dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right] \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-c_k \sin kt + d_k \cos kt) k dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k d_k - b_k c_k) \pi k :$$

Ուրեմն՝

$$F = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k d_k - b_k c_k) k : \quad (18)$$

Հաշվի առնելով (17), (18) հավասարությունները, գնահատենք հետևյալ տարբերությունը՝

$$L^2 - 4\pi F = 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) k^2 - 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_k d_k - b_k c_k) k \geq$$

$$\geq 4\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left[(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) k^2 - 2(a_k d_k - b_k c_k) k \right] =$$

$$= 4\pi^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} ((ka_k - d_k)^2 + (kb_k + c_k)^2) + \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1)(d_k^2 + c_k^2) \right] :$$

քանի որ նշված արտահայտության աջակողմյան մասը ոչ բացասական է, ապա

$$L^2 \geq 4\pi F :$$

Հավասարության դեպքը տեղի կունենա միայն ու միայն այն ժամանակ, եթե

Ա. $ka_k = d_k$, $kb_k = -c_k$ և $d_k = c_k = 0$, երբ $k \geq 2$, այսինքն
 $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$:

Բ. $a_1 = d_1$, $b_1 = -c_1$, երբ $k = 1$:

Այսպիսով, (12) տրված կորի հավասարումները ընդունում են հետևյալ տեսքերը՝

$$\text{Ա. } x = \frac{a_0}{2}, \quad y = \frac{c_0}{2}$$

$$\text{Բ. } x = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \quad y = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t,$$

որոնք հանդիսանում են շրջանագծի հավասարման ներկայացման տարբեր ձևեր: Իրոք՝

$$\text{Ա } x^2 + y^2 = \frac{a_0^2 + c_0^2}{4} = R^2:$$

$$\text{Բ } \left(x - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c_0}{2}\right)^2 = (a_1 \cos t + b_1 \sin t)^2 + (-b_1 \cos t + a_1 \sin t)^2 = a_1^2 + b_1^2 = R^2:$$

Երկրորդ եղանակ: Այժմ ապացույցը տանք օգտվելով միայն իզոմետրիայի գաղափարից: Դիցուք տրված են հարթ քառակուսելի տիրույթը, որը սահմանափակված է Γ կորով, և մակերեսը հավասար է F -ի:

Ինչպես հայտնի է, փակ կորը անվանում են ուղղելի, եթե հոմոմորֆ է շրջանագծին: Հետևաբար, հարթ պատկերի պարագծի կետերի և միևնույն պարագիծն ունեցող շրջանագծի կետերի միջև ստեղծվում է իզոմետրիկ արտապատկերում, այսինքն

$$L_F = l_\omega = 2\pi R = L: \quad (19)$$

Մյուս կողմից, հարթ պատկերի $S_F = F$ մակերեսի կետերի պատկերները

դասավորված կլինեն ω շրջանագծով սահմանափակված տիրույթի ներսում, այսինքն $F' = F$ պատկերի մակերեսը չի գերազանցի ω շրջանագծով սահմանափակված պատկերի մակերեսից, համաձայն թեորեմ 2-ի:

Ուրեմն, կունենանք

$$F = S_F = F' \leq S_\omega = \pi R^2: \quad (20)$$

Այսպիսով, հաշվի առնելով (19) և (20) պայմանները կստանանք՝

$$L_F^2 = L^2 = 4\pi^2 R^2 = 4\pi(\pi R^2) = 4\pi S_\omega \geq 4\pi S_F = 4\pi F:$$

Հետևաբար, իրոք՝ $L^2 \geq 4\pi F$:

Գրականություն

1. Норден А.П. Пространства декартовой композиции // Изв. вузов, математика, N 4, 1963.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. - М.: "Наука", 2006.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная Геометрия М.: "Наука", 1986.
4. Аминов Ю.А. "Дифференциальная геометрия и топология кривых", М., "Наука", 1988г.
5. Фихтенгольц Г. М. "Курс дифференциального интегрального исчисления", М., "Наука", т.2, 1981г.
6. Шилов Г.Е "Математический анализ" "функции одного переменного", М., "Наука", 1989г.

Հոդվածը տպագրության է նրաշխարհում խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.վ.գ.թ. Գ. Տ. Սահակյանը: