

ՀՏԴ 513.813

Մաթեմատիկա

Գուրգեն ՆԱԼԲԱՆԴՅԱՆ

ԱրՊՀ-ի մաթեմատիկայի ամբիոնի դոցենտ, ֆ.մ.գ.թ.

E-mail Gurgen250612@mail.ru**ԳԵՈՂԵԶԻԿ ԶՈՒԳԱՀԵՌ****ՀԻՊԵՐՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐ****ՌԻՄԱՆՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ**

Նշված թեման նպատակահարմար է ուսումնասիրել ինդուկցիայի մեթոդով՝ ի տարբերություն [2] –ում շարադրված է դեդուկցիայի մեթոդի: Թեմայի յուրացումը ավելի մատչելի կլինի մագիստրանտների և ասպիրանտների համար: Դիտարկվում է V_n Ռիմանյան տարածությունում V_{n-1} անհզոտոտայ հիպերմակերևույթ: Ուսումնասիրված է, որ V_0 կետից ելնող իրական երկարությամբ գեոդեզիկները հանդիսանում են նորմալ գեոդեզիկներ V_0 կենտրոնով և իրական շառավղով V_{n-1} գեոդեզիկ հիպերսֆերաների համար: Ուսումնասիրված է, որ V_{n-1} հիպերմակերևույթի գեոդեզիկ նորմալները հանդիսանում են նաև նորմալներ V_{n-1} -ին գեոդեզիկ զուգահեռ $V_r; (r \leq n-1)$ մակերևույթի համար:

Բանալի բառեր՝ իզոտոտոտայ և անհզոտոտայ հիպերմակերևույթներ, գեոդեզիկ նորմալներ, գեոդեզիկ զուգահեռներ, գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթների ընտանիք, հիպերսֆերա, վարիացիայի մեթոդ:

Г.Налбандян

ГЕОДЕЗИЧЕСКИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХОСТИ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

На мой взгляд отмеченную тему целесообразно изучать по методу индукции, в отличие от [2], где рассмотрен метод дедукции. Таким образом, осмысление темы будет доступным для магистрантов, аспирантов В римановом пространстве V_n рассматривается произвольная неизотропная гиперповерхность V_{n-1} .

Изучено, что из точки V_0 исходящие геодезические вещественной длины, служат нормальными геодезическими для геодезических гиперсфер V_{n-1} вещественного радиуса с центром V_0 . Изучено, что геодезические нормальные к V_{n-1} будут нормальными и к любой геодезически параллельной к V_{n-1} поверхности $V_r; (r \leq n-1)$.

Ключевые слова: изотропные и неизотропные гиперповерхности, геодезические нормали, геодезически параллельные, семейство геодезически параллельных гиперповерхностей, гиперсфера, метод вариации.

G.Nalbandyan

**GEODESICALLY PARALLEL HYPERSURFACES IN
RIEMANNIAN SPACE**

In my opinion, it is advisable to study the noted topic by the method of induction, in contrast to [2], where the method of deduction is considered. Thus, understanding the topic will be available to graduate students. It has been V_0 studied that geodesics of real length coming from a point, serve as normal geodesics for geodesic hyperspheres of material radius centered V_0 . In an arbitrary non-isotropic hypersurface V_{n-1} is regarded in V_n Riemannian space. The geodesics normal to will be normal and to any geodesically parallel to over $V_r; (r \leq n-1)$.

Keywords: isotropic and nonisotropic hypersurfaces, geodesic normals, geodesic parallels, family of geodesically parallel hypersurfaces, hypersphere, method of variation:

Թեմայի ուսումնասիրության համար նախապատվություն է տրվում ինդուկցիայի մեթոդին, այսինքն՝ անցումը պարզից դեպքից ընդհանուր դեպքի: Այսպես՝ [2] դասագրքում նշված թեման շարադրված է դեդուկցիայի մեթոդով՝ ընդհանուրից դեպքի պարզը, որը, մեր կարծիքով, այնքան էլ մատչելի չէ մագիստրանտների, ասպիրանտների համար: Նախ տանք մի քանի կարևոր հասկացություններ, որոնք անհրաժեշտ են հետագա դատողությունների համար:

Դիտարկենք՝

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}) \quad (1)$$

անիզոտրոպ V_{n-1} հիպերմակերևույթը V_n ռիմանյան տարածությունում, որտեղ $u^\alpha, \alpha = 1, n-1$ պարամետրերը փոփոխվում են Ω_α կապակցված տիրություն, իսկ $x^i(u^\alpha)$ ֆունկցիաները Ω_α տիրություն և նրա եզրագծում առնվազն երկու անգամ ածանցելի են և բավարարում են ռեգուլյարության պայմանին, այսինքն՝ $A = \left\| \frac{\partial x^i}{\partial u^j} \right\|, \quad i = \overline{1, n} \quad j = \overline{1, n-1}$ մատրիցայի ռանգը հավասար է $(n-1)$ -ի՝

$$\text{rang} A = n-1 \quad (2)$$

Հայտնի է, որ ռիմանյան տարածությունում կորերի երկարությունները կարող են լինել իրական, կեղծ կամ զրո, այլ կերպ ասած՝ իզոտրոպ՝ զրո երկարությամբ և անիզոտրոպ՝ իրական կամ կեղծ երկարությամբ: Պարզ է, որ կամայական $M \in V_{n-1}$ կետում գոյություն ունի ոչ իզոտրոպ նորմալ միավոր (կամ կեղծ միավոր) վեկտոր, որը կնշանակենք η^i -ով: Նշենք, որ այդպիսի նորմալ վեկտոր կարելի է կառուցել -1 արտադրիչի ճշտությամբ, այնպես որ V_{n-1} հիպերմակերևույթի կամայական կետում կվերցնենք երկու

ուղղություններից միայն մեկը, իսկ մյուս կետերում՝ անընդհատության սկզբունքով [1-3] :

Ինչպես հայտնի է $v^i = v^i(t)$ վեկտորը զուգահեռ է տեղափոխվում $u^i = u^i(t)$ կորի երկայնքով, եթե այդ վեկտորի կոորդինատները բավարարում են՝

$$\frac{dv^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} v^j = 0 \quad (3)$$

հավասարումների համակարգին [4-5], որտեղ $i, j, k = \overline{1, n}$:

Դիֆերենցիալ հավասարումների տեսությունից հայտնի է, որ այդ դեպքում գեոդեզիկ գծերի դիֆերենցիալ հավասարումների

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0, \quad (4)$$

համակարգն ունի լուծում, որը նույնպես կլինի անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիա՝ S և u^α պարամետրերից կախված, որտեղ $i, j, k = \overline{1, n}$:

Օր ի ն ա կ 1. Նախ դիտարկենք կարևոր մի մասնավոր դեպք, երբ տրված մակերևույթը զրո չափի է և իրենից կներկայացնի V_0 -կետը: Այդ դեպքում V_0 կետից յուրաքանչյուր ուղղությամբ դուրս եկող գեոդեզիկ գիծ կլինի նորմալ V_0 «մակերևույթի» նկատմամբ:

Անհրաժեշտ է առանձին դիտարկել իրական և կեղծ երկարությամբ գեոդեզիկ գծերը: Բոլոր ուղղություններով տեղադրենք ai իրական հաստատուն երկարությամբ հատվածներ գեոդեզիկ գծերի երկայնքով: Այդ հատվածների ծայրակետերը կազմում են հիպերմակերևույթ, որին անվանում են հիպերսֆերա՝ V_0 կենտրոնով և a շառավղով: Նույն կերպ, V_0 կետից տեղադրելով $s = ai$ կեղծ երկարությամբ հատվածներ, կստանանք հիպերմակերևույթ, որին անվանում են գեոդեզիկ հիպերսֆերա V_0 կենտրոնով և ai շառավղով:

Նշենք, որ իրական ռիմանյան տարածությունում միշտ գոյություն ունի հիպերսֆերա՝ իրական շառավղով, որն ընդգրկում է V_0 կետը: Պսևդոռիմանյան տարածության դեպքում իրական և կեղծ շառավղիներով գեոդեզիկ հիպերսֆերաները կառուցվում են նույն կերպ, ինչպես S_{n-1} հիպերսֆերան համապատասխան R_n պսևդոէվկլիդեսյան տարածությունում [1-2]: Որոշակիության համար մենք կսահմանափակվենք միայն իրական շառավղով գեոդեզիկ հիպերսֆերաներով:

Թեորեմ 1. V_0 կետից եկող իրական երկարությամբ գեոդեզիկ գծերը հանդիսանում են գեոդեզիկ նորմալներ V_0 կենտրոնով և իրական շառավղով V_{n-1} գեոդեզիկ հիպերսֆերաների համար:

Ապացույց: Պետք է ապացուցել, որ V_{n-1} հիպերսֆերայի յուրաքանչյուր L կետ, որը գեոդեզիկ գծով միացված է V_0 կետի հետ, ուղղված է V_{n-1} հիպերսֆերայի L կետում տարված նորմալի ուղղությամբ: Հաշվենք ML գեոդեզիկ հատվածի երկարությունը վարիացիայի մեթոդով, որտեղ M կետը

տեղադրված է V_0 կետում՝ հիպերսֆերայի կենտրոնում, իսկ L կետը սահում է V_{n-1} հիպերսֆերայով:

Հաշվենք, ML աղեղի երկարության վարիացիան նրա անվերջ փոքր փոփոխության դեպքում [6-7]: Քանի որ տեղի ունի (3) պայմանը, այսինքն կորը գեոդեզիկ է, ուրեմն կարելի է օգտվել

$$\delta s = \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_L - \left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_M \quad (5)$$

բանաձևից: Քանի որ M կետը անշարժ է, ուրեմն $ML = s$ աղեղի երկարությունը կլինի հաստատուն և կունենանք $\delta s = 0$ արժեքը: Մյուս կողմից

$$\left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_M = 0 \quad (6)$$

որովհետև M կետը անշարժ է: Հետևաբար,

$$\left[\delta x^j \right]_M = 0 \quad (7)$$

Հաշվի առնելով (6) և (7) պայմանները՝ (5)-ից կստացվի

$$\left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_L = 0: \quad (8)$$

Դա փաստորեն նշանակում է, որ ML գեոդեզիկ գիծը հիպերսֆերայի L կետում ուղղահայաց է V_{n-1} հիպերսֆերային:

Այսպիսով V_0 կենտրոնով և իրական շառավղով գեոդեզիկ V_{n-1} հիպերսֆերան կազմում է մեկ պարամետրից կախված գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթների ընտանիք, որն ունի V_0 կետից ելնող ընդհանուր գեոդեզիկ նորմալներ: Ուրեմն V_0 կետը կարելի է դիտարկել որպես ընտանիքի «հիպերմակերևույթ», որը գրո չափի է: Նշենք, որ նմանակերպ արդյունքները ճիշտ են նաև կեղծ շառավղով համակենտրոն գեոդեզիկ հիպերսֆերաների համար:

Օրինակ 2. Դիտարկենք սովորական տարածությունում միևնույն առանցքն ունեցող շրջանային զլանների ընտանիքը: Այս մակերևույթները («հիպերմակերևույթները» սովորական եռաչափ տարածության տեսանկյունից) կազմում են մեկ պարամետրից կախված ընտանիք և ունեն ընդհանուր գեոդեզիկ նորմալներ:

Իրոք, բոլոր հնարավոր ուղղահայացները, որոնք տարված են առանցքի յուրաքանչյուր կետում, կլինեն ընդհանուր նորմալներ ընտանիքի բոլոր զլանների համար: Հատվածները ընդհանուր նորմալով ընկած երկու զլանների միջև մնում են հաստատուն: Կառուցելով տրված զլանին գեոդեզիկ զուգահեռ մակերևույթներ՝ կստանանք ընտանիքի մյուս զլանները:

Եթե շրջանագծի շառավղին հավասար հաստատուն հատվածները տեղադրենք զլանային մակերևույթի ներքին նորմալի ուղղությամբ, ապա գեոդեզիկ զուգահեռ մակերևույթը կվերածվի զլանի առանցքի, այսինքն՝ ուղիղ գծի: Նման երևույթներ հնարավոր են նաև բազմաչափ մակերևույթների համար:

Ուրեմն կարելի է վերականգնել գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթների ընտանիքը ոչ միայն կամայական V_{n-1} հիպերմակերևույթի միջոցով, այլ նաև երբ այն վերածվում է V_r փոքր չափանի մակերևույթի: Ճիշտ նույն ձևով կարելի է կառուցել գեոդեզիկ զուգահեռ մակերևույթների ընտանիք, եթե տրված է ինչ-որ փոքր չափի V_r մակերևույթ, որը պետք է պատկանա այդ ընտանիքին, որպես վերածվող հիպերմակերևույթ:

Այժմ անցնենք ընդհանուր դեպքին: (1) բանաձևով որոշված հիպերմակերևույթի յուրաքանչյուր $M \in V_{n-1}$ կետով տանենք գեոդեզիկ գիծ նորմալի ուղղությամբ, այսինքն՝ η^i վեկտորի ուղղությամբ: Այդպիսի գեոդեզիկ գծերին անվանում են V_{n-1} հիպերմակերևույթին նորմալ գեոդեզիկ գծեր, և կվերագրենք s պարամետրը, եթե իրական երկարությամբ է, և կվերագրենք σ պարամետրը, եթե կեղծ երկարությամբ է:

Քանի որ շոշափող η^i վեկտորն անիզոտրոպ է, հետևաբար գեոդեզիկ գիծը իզոտրոպ լինել չի կարող: Թող M կետը լինի որպես հաշվման սկզբնակետ, այսինքն՝ այդ կետում $s=0$ (կամ $\sigma=0$): Դրական ուղղությունը վերցնենք η^i վեկտորի ուղղությամբ, այնպես, որ M կետում շոշափող $\frac{dx^i}{ds}$ (կամ $\frac{dx^i}{d\sigma}$) վեկտորի ուղղությունը համընկնի η^i (այլ ոչ թե $-\eta^i$) վեկտորի ուղղության հետ: Որոշակիության համար կոիտարկենք այսուհետև միայն իրական երկարությամբ գեոդեզիկ գծերը:

Եթե u^α պարամետրերին տանք արժեքներ Ω_α տիրույթից և մոդուլով շատ փոքր արժեք s -ին, ապա դրանցով որոշվում է ինչ-որ L կետ արդեն ռիմանյան տարածությունում: Այսինքն, երբ u^α պարամետրերը որոշում են M կետը V_{n-1} հիպերմակերևույթի վրա, ապա M կետով անցնող նորմալ գեոդեզիկ գծի վրա միարժեքորեն որոշվում է L կետը V_r -ում այնպես, որ $ML=s$:

Նշենք, որ $s=0$ արժեքի դեպքում կստանանք V_{n-1} հիպերմակերևույթի M կետը: Եթե ֆիքսենք u^α պարամետրերը և փոխենք միայն s -պարամետրը, ապա կետը կշարժվի V_{n-1} հիպերմակերևույթին տարված նորմալ գեոդեզիկ գծով [2-4]:

Ըստ կառուցման L կետը միարժեք որոշվում է u^α և s պարամետրերով, ուրեմն նրա կոորդինատները կլինեն այդ պարամետրերից կախված միարժեք ֆունկցիաներ, այսինքն՝

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^{n-1}, s), \quad (9)$$

որտեղ $u^\alpha \in \Omega_\alpha$, իսկ s պարամետրը փոփոխվում է զրո թիվը պարունակող ինչ-որ ինտերվալում: Այդ դեպքում նորմալ գեոդեզիկի $M \in V_{n-1}$ սկզբնական կետի կոորդինատները և այդ կետում տարված սկզբնական η^i շոշափող վեկտորի կոորդինատները կլինեն u^α և s պարամետրերից կախված անընդհատ դիֆերենցելի ֆունկցիաներ:

Հետևաբար V_{n-1} հիպերմակերևույթի յուրաքանչյուր նորմալ գեոդեզիկ գծի երկայնքով L կետը նշված է այնպես, որ ML տեսքի աղեղների

երկարությունները հավասար լինեն իրար, այսինքն՝ $ML = s$: Այդպիսի L կետերի բազմությունը որոշում է մակերևույթ, որին անվանում են V_{n-1} հիպերմակերևույթին գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթ:

Այդ եղանակով առաջացած մակերևույթի պարամետրական հավասարումը կորոշվի, եթե (9) -ում s -պարամետրին տանք որոշակի հաստատուն արժեք՝ $s = a$: Այդ դեպքում V_{n-1} հիպերմակերևույթի յուրաքանչյուր M կետ կտեղաշարժվի նորմալ գեոդեզիկ գծերով $s = a$ հաստատուն հեռավորությամբ:

Ուրեմն ստացված կետերի երկրաչափական տեղը որոշվում է

$$x^i = x(\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n)$$

(10)

պարամետրական հավասարումով: Այն կարող է ունենալ եզակիություններ օրինակ՝ այն կարող է վերածվի ավելի ցածր չափողականությամբ մակերևույթի, նույնիսկ կարող է վերածվել կետի:

Իրոք, (2) պայմանը կարող է տեղի չունենալ a -ի որոշ արժեքների դեպքում և x^j ֆունկցիաները կարտահայտվեն ավելի քիչ u^a պարամետրերի միջոցով: Հետևաբար (10) բանաձևով որոշվող մակերևույթը կունենա $r < n - 1$ չափողականություն: Բայց a -ի շատ փոքր արժեքների դեպքում (2) պայմանը ապահովում է անընդհատության շնորհիվ և կունենանք հիպերմակերևույթ, իսկ $a = 0$ դեպքում V_{n-1} հիպերմակերևույթը:

Թեորեմ 2. V_{n-1} հիպերմակերևույթի նորմալ գեոդեզիկ գծերը կլինեն նորմալներ նաև V_{n-1} հիպերմակերևույթին գեոդեզիկ զուգահեռ $V_r; (r \leq n - 1)$ մակերևույթի համար:

Ապացույց: Դիտարկենք V_{n-1} հիպերմակերևույթի նորմալ գեոդեզիկ գծի երկայնքով ML աղեղը, որի M սկզբնակետը սահում է V_{n-1} հիպերմակերևույթով, իսկ L վերջնակետը սահում է նրան գեոդեզիկ զուգահեռ V_r մակերևույթով: Այդ դեպքում, ML աղեղի երկարությունը մնում է հաստատուն՝ $ML = s = a$ ըստ կառուցման:

Հաշվենք ML աղեղի երկարության վարիացիան նրա անվերջ փոքր փոփոխության դեպքում [6-7]: Զանի որ կորը գեոդեզիկ է, ապա կօգտվենք (5) բանաձևից:

Նախ $\delta s = 0$, քանի որ $s = a$ մեծությունը հաստատուն է:

Մյուս կողմից $\left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_M$ արտահայտում է $\frac{dx^i}{ds}$ և δx^j վեկտորների

սկալյար արտադրյալը, որտեղ $\frac{dx^i}{ds}$ վեկտորը շոշափում է ML աղեղը M

կետում, իսկ δx^j -ը M կետի անվերջ փոքր տեղաշարժի վեկտորն է V_{n-1} հիպերմակերևույթով:

Համաձայն (3) պայմանի՝ $\frac{dx^i}{ds} = \eta^i$ հանդիսանում է V_{n-1}

հիպերմակերևույթի նորմալ վեկտորը, իսկ δx^j -ն շոշափում է V_{n-1}

հիպերմակերևույթը, ուրեմն դրանց սկալյար

արտադրյալը կհավասարվի զրոյի: Այդ դեպքում (5) –ից կստանանք

$$\left[g_{ij} \frac{dx^i}{ds} \delta x^j \right]_L = 0:$$

Այսինքն՝ ML աղեղի L կետում տարած $\frac{dx^i}{ds}$ շոշափող վեկտորի և L

կետի V_r մակերևույթով անվերջ փոքր տեղաշարժի δx^i վեկտորի սկալյար

արտադրյալը կհավասարվի զրոյի: Ենթադրության համաձայն՝ δx^j վեկտորը

հանդիսանում է շոշափող V_r մակերևույթին, ուրեմն $\frac{dx^i}{ds} = \eta^i$ կլինի նորմալ

վեկտոր V_r մակերևույթի համար: Հետևաբար $\frac{dx^i}{ds}$ վեկտորը, որը հանդի-

սանում է ML գեոդեզիկ գծի շոշափողը նրա L կետում տարված, կունենա

V_r մակերևույթի նորմալի ուղղությունը:

Դիտարկենք V_{n-1} հիպերմակերևույթին գեոդեզիկ զուգահեռ $V'_{n-1}; (r = n - 1)$ հիպերմակերևույթը, որի նորմալ գեոդեզիկները կլինեն նորմալ գեոդեզիկներ V_{n-1} հիպերմակերևույթի համար: Համաձայն (3) պայմանի՝ գեոդեզիկները անիզոտրոպ են, ուրեմն դրանց օրթոգոնալ V'_{n-1} հիպերմակերևույթը ևս կլինի անիզոտրոպ: Ուրեմն անիզոտրոպ գեոդեզիկ զուգահեռ V_{n-1} և V'_{n-1} հիպերմակերևույթների միջև ընդհանուր նորմալ գեոդեզիկներով պահպանվում է հաստատուն հեռավորություն: Հետևաբար, կամայական մակերևույթ, որը գեոդեզիկ զուգահեռ է V_{n-1} -ին կլինի գեոդեզիկ զուգահեռ V'_{n-1} հիպերմակերևույթին: Այսպիսով՝ V_{n-1} և V'_{n-1} հիպերմակերևույթները ստեղծում են նույն գեոդեզիկ զուգահեռ մակերևույթների ընտանիքը: Ուրեմն որպես սկզբնական մակերևույթ կարելի է վերցնել կամայական անիզոտրոպ $V_r; (r \leq n - 1)$ մակերևույթ այդ ընտանիքից:

Այսպիսով, եթե կամայական $M \in V_r$ կետով տանենք գեոդեզիկ գծեր յուրաքանչյուր նորմալի ուղղությամբ, ապա կստանանք գեոդեզիկ գծերի ընտանիք՝ կախված $(n - r)$ -հատ պարամետրերից, դրանց վրա տեղադրելով $s = 0$ երկարությամբ հատվածներ՝ կստանանք գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթներ, որոնք կհամընկնեն V_{n-1} հիպերմակերևույթով ստեղծված գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթների ընտանիքի հետ: Ուրեմն կամայական անիզոտրոպ V_{n-1} հիպերմակերևույթ ընդգրկվում է մեկ պարամետրից կախված գեոդեզիկ զուգահեռ հիպերմակերևույթների ընտանիք: Այդ հիպերմակերևույթներն ունեն ընդհանուր նորմալ գեոդեզիկ գծեր: Պարամետրերի որոշ արժեքների դեպքում

ընտանիքի հիպերմակերևույթը կարող է վերածվել փոքր չափանի մակերևույթի:

Այսպիսով միևնույն ընտանիքին պատկանող երկու անիզոտրոպ հիպերմակերևույթներ անվանում են գեոդեզիկ զուգահեռ, եթե նրանք ընդհանուր նորմալ գեոդեզիկներից անջատում են հավասար երկարությամբ հավաժներ: Ակնհայտ է, որ այն կլինի համարժեք վերևում նշված հիպերմակերևույթների գեոդեզիկ զուգահեռության սահմանումին:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности.- М.: "Наука", 1976.
2. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ М.: "Наука", 2006.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная Геометрия М.: "Наука", 1986.
4. Абрамов А.А. Введение в тензорный анализ к риманову геометрию, М. 2004.
5. Налбандян Г.А. Чебышевские и геодезические сети на приводимых пространствах, Մաթեմատիկական բարձրագույն դպրոցում, հ IV, 2008, էջ 42-47:
6. Նալբանդյան Գ.Ա. Ռիմանյան տարածության մակերևույթի վրա գեոդեզիկ գծեր, ԱրՊՀ Գիտական տեղեկագիր, N 1, 2009, էջ 11-13:
7. Նալբանդյան Գ.Ա. Անիզոտրոպ կորի աղեղի երկարության հաշվումը V_n ռիմանյան տարածությունում, ՀՀ Գորիսի պետական համալսարանի Միջազգային II գիտաժողով <<ԱՇԽԱՏԱՆՔՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒՄ>> մայիսի 26-27, 2011, էջ 91-96:

Հոդվածը տպագրության է ներառվել խմբագրական կոլեգիայի անդամ, ֆ.մ.գ.թ. Գ.Տ.Սահակյանը: