

## МОДЕЛЬ ДЖЕЙНСА–КАММИНГСА В БАЗИСЕ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН: БОЛЬШИЕ ЧИСЛА ВОЗБУЖДЕНИЙ

А.Ж. МУРАДЯН\*

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

\*e-mail: muradyan@ysu.am

(Поступила в редакцию 24 февраля 2023 г.)

Модель Джейнса–Каммингса (JC) представлена на основе квантованных встречных волн, характерных для кольцевого резонатора. Модель, помимо гамильтониана и оператора числа возбуждений, включает оператор интерференции, собственные значения которого имитируют член  $\cos 2kz$  классической картины поля. Рассмотрены среднее число фотонов, дисперсия, параметр Манделя  $Q$  и атомно-фотонная запутанность в состояниях с определенным числом возбуждений. Обнаружены коллапсы и возрождения, которые в стандартной модели JC присутствуют только в состояниях с неопределенным числом возбуждений. Показано, что фотоны на граничных энергетических уровнях антигруппированы (с  $Q \approx -1/2$ ) независимо от параметров системы, а фотоны других энергетических уровней сгруппированы со степенью, растущей с общим числом фотонов.

### 1. Введение

Модель Джейнса–Каммингса (JC) [1,2] двухуровневого атома и околорезонансной квантованной моды электромагнитного поля представляет собой простейшую и содержательную, по сути, формулировку взаимодействия света и вещества в квантовой оптике [3–6]. Модель учитывает очень важные вещи в современной квантовой науке: спонтанное излучение, дискретность фотонов, квантовые корреляции, запутанность атомных и фотонных состояний, макроскопические квантовые состояния, вплоть до потенциальных приложений в квантовых технологиях. Общий обзор положения дел можно найти в работах [7,8]. При этом модель испытала множество обобщений, касающихся общих и/или реальных обстоятельств [9,10].

Важно отметить, что полевая мода стандартной модели JC представляет собой стоячую волну, исчезающую на отражающих зеркалах. Такая геометрия исключает из состава поля вторую, ортогональную выбранной, моду и одновременно нарушает закон сохранения импульса во взаимодействующей системе атом+поле. Данная статья свободна от первого ограничения за счет выбора модовой структуры поля встречными волнами, которая обычно реализуется в кольцевом резонаторе [11,12].

В данной статье определяются распределение фотонов во встречных волнах и среднеквантовые характеристики стационарных состояний модели, а также характеры их временных поведений.

## 2. Модель и уравнения

Рассматриваемая модель JC исходит из гамильтониана [11,12]

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_0}{2}(1 + \sigma_z) + \hbar\omega(\hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2) - \left( \frac{\hbar\beta}{\sqrt{2}}\sigma_+(\hat{a}_1 + \hat{a}_2) + h.c. \right), \quad (1)$$

где  $\sigma_z$ ,  $\sigma_+$ ,  $\sigma_-$  и  $\omega_0$  – атомные псевдоспиновые (Паули) операторы и частота оптического перехода, соответственно,  $\hat{a}_j$  и  $\hat{a}_j^+$  ( $j=1,2$ ) – операторы уничтожения и рождения двух мод бегущей волны с частотой  $\omega$  и  $h.c.$  обозначает эрмитов сопряженный элемент. Множитель  $\beta$  равен половине вакуумной частоты Раби и связан с дипольным моментом атомного перехода  $d$  соотношением  $\beta/\sqrt{2} = -d(2\pi\omega/\hbar V)$ , где  $V$  – нормирующий объем (резонатора).

Система имеет одну атомную и две фотонные степени свободы. Соответственно гамильтониан (1), оператор числа возбуждений

$$\hat{N} = \frac{1}{2}(1 + \sigma_z) + \hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2 \quad (2)$$

и оператор интерференции [12]

$$\hat{\Theta} = \hat{a}_1^+\hat{a}_1 + \hat{a}_2^+\hat{a}_2 - \hat{a}_2^+\hat{a}_1 - \hat{a}_1^+\hat{a}_2 \quad (3)$$

вместе образуют полный набор взаимно коммутативных операторов. Значение оператора  $\hat{\Theta}$  будет объяснено позже.

Собственное состояние  $|\Psi_{E,N}\rangle$  с энергией  $E$  и числом возбуждения  $N$  ( $\hat{N}|\Psi_{E,N}\rangle = N|\Psi_{E,N}\rangle$ ) можно записать в базисе чистых состояний как

$$|\Psi_{E,N}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^N a_m |m\rangle |N-m\rangle + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sum_{m=0}^{N-1} b_m |m\rangle |N-1-m\rangle, \quad (4)$$

где первая и вторая столбчатые матрицы представляют основное и возбужденное состояния атома, соответственно, а произведение двух кет-векторов в каждой сумме представляет собой состояния числа фотонов для встречных волн.  $a_m$  и  $b_m$  – искомые амплитуды вероятности при заданных состояниях атомов  $(0, 1)^T$  и  $(1, 0)^T$  и фоковских состояниях фотонов  $|m\rangle|N-m\rangle$  и  $|m\rangle|N-1-m\rangle$ . Индекс  $N$  здесь опущен для простоты записи.

Потребуется, чтобы  $|\Psi_{E,N}\rangle$  была также собственной функцией оператора  $\hat{\Theta}$ :  $\hat{\Theta}|\Psi_{E,N}\rangle = \Theta|\Psi_{E,N}\rangle$ . Используя метод производящей функции и явное выражение (3), нетрудно показать, что  $\Theta = 2n$ , где  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Теперь обратимся к независящему от времени уравнению Шрёдингера, из которого после стандартного вычисления получается следующая пара рекуррентных уравнений для амплитуд  $a_m$  и  $b_m$ :

$$\left(\frac{E}{\hbar} - N\omega\right)a_m = -\frac{\beta^*}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m}b_{m-1} + \sqrt{N-m}b_m\right), \quad (5a)$$

$$\left(\frac{E}{\hbar} - N\omega + \Delta\right)b_m = -\frac{\beta}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{m+1}a_{m+1} + \sqrt{N-m}a_m\right). \quad (5b)$$

Здесь  $\Delta = \omega - \omega_0$  – расстройка резонанса. При подстановке (5b) в (5a), последнее приводится к виду

$$\left(\varepsilon(\varepsilon + \delta) - N|\zeta|^2\right)a_m = |\zeta|^2\sqrt{m(N-m+1)}a_{m-1} + |\zeta|^2\sqrt{(m+1)(N-m)}a_{m+1}, \quad (6)$$

где безразмерная энергия  $\varepsilon = E / \hbar\omega_{\text{rec}}$ , расстройка резонанса  $\delta = \Delta / \omega_{\text{rec}}$  и параметр взаимодействия  $\zeta = \sqrt{2}\beta / \omega_{\text{rec}}$  введены через масштабную частоту  $\omega_{\text{rec}} = \hbar k^2 / 2M$  (обычно называемую частотой отдачи), где  $k = \omega / c$ , а  $M$  – атомная масса. Заметим, что квадрат коэффициента перед  $a_{m-1}$  пропорционален вероятности переизлучения в единицу времени фотона из волны, распространяющейся вправо, в волну, распространяющуюся влево. Квадрат коэффициента при  $a_{m+1}$  пропорционален вероятности обратного процесса. В отличие от случая классического поля эти вероятности не равны между собой, и что важно, они больше при переизлучении из волны с большим числом фотонов в волну с меньшим числом фотонов. Это означает, что квантово-механическое среднее число фотонов во встречных волнах будет одинаковым в стационарных состояниях при любых значениях параметров системы.

### 3. Стационарные состояния

Решение уравнения (6) ищем в случае большого числа фотонов во встречных волнах. Для этого применим соответствующее квазиклассическое (или рассматриваемое как типа Гэвиса–Каммингса) приближение [13–15], разлагающее  $a_{m\pm 1}$  в ряд Тейлора до второго порядка в уравнении (6). В результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с решением

$$a_m = c_{i,n} \sqrt{\frac{m!(N-m)!}{N!}} \exp\left(-\frac{(2m-N)^2}{2N}\right) H_n\left(\frac{2m-N}{\sqrt{2N}}\right), \quad (7)$$

где  $H_n(\cdot)$  – полином Эрмита  $n$ -го порядка, и энергетический спектр имеет вид

$$\varepsilon_{i,n} = -\frac{\delta}{2} + (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + 2(N-n)\zeta^2}, \quad n = 0, 1, \dots, N. \quad (8)$$

Амплитуда возбужденного состояния  $b_m$  определяется соотношением (5b). Фактор  $c_{i,n}$  представляет собой нормировочную константу, определяемую из требования  $\sum_{m=0}^N |a_m|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} |b_m|^2 = 1$ .

Итак, вместо двух энергетических уровней стандартной модели JS с одной косинусоидальной (или синусоидальной) пространственной модой рассматриваемая модель с встречными квантованными модами имеет  $2N + 1$  энергетических уровней,  $N + 1$  из которых соответствует основному состоянию атома до взаимодействия, а остальные  $N$  – возбужденному состоянию. Отметим, что одно из

стационарных состояний при  $n = N$  отсутствует, а другое является невзаимодействующим (темным).

Чтобы понять физическое содержание оператора  $\hat{\Theta}$ , отметим, что дискретный энергетический спектр (8) заполняет определенный диапазон значений, и сравним его со случаем стоячей волны классического поля:

$$\varepsilon_i(z) = -\frac{\delta}{2} + (-1)^{i-1} \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + \frac{\Omega_R}{2}(1 + \cos 2kz)}, \quad (9)$$

где  $\Omega_R$  – средняя частота Раби в стоячей волне. Это повторяет квантованный спектр (8), но непрерывно и с той спецификой, что разные квантовые числа  $n$  соответствуют разным положениям атома  $z$ , или, что то же самое, разным фазам между двумя встречными волнами, составляющими стоячую волну. Поэтому фазовая интерпретация уширения энергетического спектра может быть применена и в квантованном случае, тем более что, хотя фаза каждой волны неопределенна для определенного числа фотонов, разность фаз между ними может иметь определенные значения [16]. Вот почему называем оператор  $\hat{\Theta}$  интерференционным.

Первостепенный интерес представляет распределение фотонов во встречных волнах для стационарных состояний по всему энергетическому спектру. Будучи симметричным по отношению к право- и левораспространяющимся волнам, оно симметрично повторяется в двух половинах энергетического спектра. На пограничных уровнях энергетического спектра распределение фотонов сосредоточено вокруг центрального значения  $m = N/2$  (кружки на рис.1). По мере удаления от краев к центру энергетического спектра  $m$ -распределение фотонов модулируется и постепенно смещается к краям области определения (звездочки на рис.1). В центре энергетического спектра  $m$ -распределение фотонов полностью сглаживается и сильно углубляется в средней части (квадраты на рис.1).

Распределение, сгруппированное вокруг среднего значения  $m = N/2$ ,

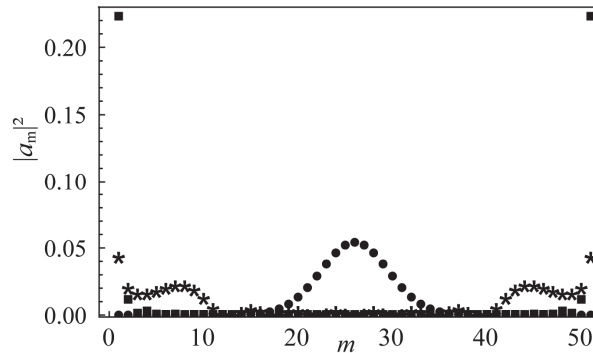


Рис.1. Распределение вероятности числа фотонов во встречной волне для трех энергетических уровней: пограничного ( $n = 0$  или  $N$ , кружки), промежуточного ( $n = N/7$  или  $6N/7$ , звездочки) и среднего ( $n = N/2$ , квадраты). Параметры:  $N = 50$ ,  $\delta = -5$ ,  $\zeta = 10$  и  $i = 1$ . Почти такая же картина распределения соответствует возбужденному атому и второй половине энергетического спектра с  $i = 2$ .

вполне ожидаемо, так как оно как бы прямо следует из отмеченной выше закономерности о большей вероятности переизлучения фотонов из волны с большим числом фотонов в волну с меньшим числом фотонов. Дальнейшее отклонение от этой закономерности следует отнести к квантовой интерференции вероятностных амплитуд, образующих стационарные состояния. Однако очевидный сдвиг вероятностей к граничным значениям кажется странным и неожиданным для квантовой теории измерения. Действительно, при наличии постоянного натиска выравнивания числа фотонов во встречных волнах вероятность обнаружения всех (или ни одного) фотонов в одной волне больше, чем вероятность обнаружения половины фотонов. Такого положения дел быть не могло при классической, хотя и волновой, природе фотона. Выход из ситуации может показать число-фазовая неопределенность, приложенная к одной из встречных волн. Следует при этом принять, что для пограничных энергетических уровней неопределенность фазы отдельной волны максимальна и приводит к минимальной неопределенности числа фотонов в ней, а по мере продвижения к центру энергетического спектра неопределенность фазы волны уменьшается, увеличивая неопределенность числа фотонов с выравниванием распределения почти везде.

Отметим, что выражение (7) допускает увеличение числа возбуждений (общего числа фотонов)  $N$  с целью получения полуклассической картины поля с определенными числами фотонов во встречных волнах. Но оказывается, что возрастающие значения  $N$  не сужают распределение фотонов во встречных волнах вокруг среднего значения в любом стационарном состоянии, а почти всегда симметрично выдавливают его из центра к краям области определения (примерно, как на рис.1). Таким образом, модель JS, основанная на квантовании встречных бегущих волн, в отличие от режима квантования одной стоячей волны [14], в пределе больших чисел фотонов не имеет простого перехода к полуклассической теории.

В заключение параграфа отметим, что вопрос о возможности образования стационарных состояний (7) из изначально свободных подсистем проблематичен и требует отдельного рассмотрения (вне данной статьи). Причина в том, что общепринятый подход к решению задачи – приближение адиабатического следования – в данной ситуации неработоспособен, так как в пределе  $\zeta \rightarrow 0$  энергетический спектр системы вырождается как с основным, так и с возбужденными состояниями атома  $N + 1$  - и  $N$  -кратно, соответственно. На практике нам, возможно, придется довольствоваться суперпозицией свободных стационарных состояний.

#### 4. Среднеквантовые характеристики модели

Квантово-механические характеристики системы, такие как дисперсия, параметр Манделя и энтропия, рассматриваются для состояний с определенным числом возбуждений. Следует подчеркнуть, что в подобных состояниях первые две характеристики полностью отсутствуют (тождественно равны нулю) в стандартной модели JS.

Обратимся сначала к дисперсии квадратурных операторов  $\hat{X}$  и  $\hat{Y}$  [4–6], квантовых представителей напряженностей электрического и магнитного полей,

соответственно. В этой модели они равны и

$$\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle = \langle (\Delta \hat{Y})^2 \rangle = \frac{1}{4} + \sum_{m=0}^N m |a_m|^2 + \sum_{m=0}^{N-1} m |b_m|^2. \quad (10)$$

Отношение  $\langle (\Delta \hat{X})^2 \rangle / N$  оказывается хорошей универсальной константой и быстро приближается к  $1/4$  по мере увеличения числа фотонов.

Следующей характеристикой подсистемы бегущей волны является параметр Манделя  $Q$ , являющийся мерой отклонения распределения числа заполнений от пуассоновской статистики:

$$\hat{Q} = \frac{\langle (\hat{a}^+ \hat{a})^2 \rangle - \langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle^2}{\langle \hat{a}^+ \hat{a} \rangle} - 1. \quad (11)$$

Отрицательные значения  $Q$  указывают на субпуассоновскую статистику и не имеют классического аналога. В нашем случае такими антигруппированными являются краевые стационарные состояния, как показано на рис.2. Картина практически неизменна по константе взаимодействия  $\zeta$  и расстройке резонанса  $\delta$ , но чувствительна к величине числа возбуждений  $N$ . При относительно небольших значениях  $N$  распределение имеет колоколообразную форму. С увеличением числа возбуждений краевые значения остаются неизменными, а внутренние значения в среднем увеличиваются пропорционально  $N$ , но не монотонно по всему энергетическому спектру. В центральной части появляются ямки, количество которых монотонно увеличивается с  $N$  и, как следствие, увеличивается и ширина центральной платовидной части.

Запутанность атомной и полевой подсистем ведет себя очень похоже на запутанность в стандартной модели JC, а именно, она монотонно растет с увеличением взаимодействия атома с полем (кроме, конечно, темного состояния с  $n = N$ ), стремясь к универсальному значению  $\ln 2$ , соответствующему полному выравниванию населенностей основного и возбужденного уровней атома по всему энергетическому спектру системы.

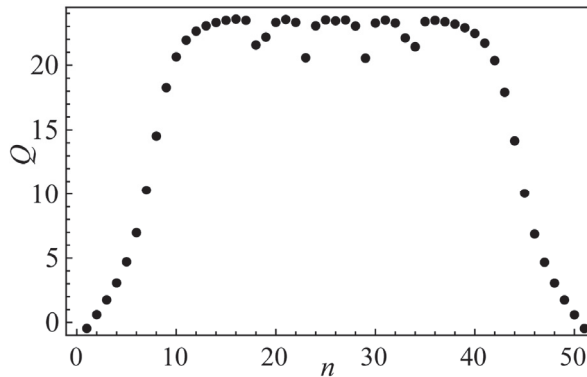


Рис.2. Параметр Манделя  $Q$  во всем энергетическом спектре. В краевых точках  $Q \approx -1/2$ , а фотоны бегущих встречных волн антигруппированы. Параметры те же, что и на рис.1.

## 5. Эволюция во времени состояний с фиксированным числом возбуждений

Зависимое от времени поведение построено на основе стационарных состояний. Поскольку энергетический спектр слабо неэквидистантен с простой закономерностью (8), амплитуда  $a_m(t)$  как бы совершает нерегулярные колебания на малых промежутках времени, но затем, тем не менее, испытывает коллапсы и возрождения относительно некоторого среднего значения, характерного для каждого квантового числа  $m$ . Один из таких случаев показан на рис.3. Особо следует напомнить, что в состоянии с определенным числом возбуждений эволюция стандартной модели JS протекает исключительно гармонически.

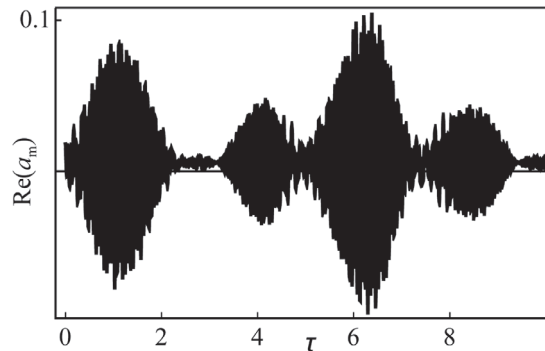


Рис.3. Амплитуда вероятности нахождения  $m = 12$  фотонов в одной из бегущих волн в состоянии с определенным числом возбуждений  $N = 50$ . Первоначально атом находится в основном состоянии и во встречных бегущих волнах было соответственно  $m_0 = 24$  и  $N - m_0 = 26$  фотонов. Остальные параметры такие же, как на рис.1.

Аналогичная закономерность сохраняется и для других характеристик системы: среднего числа фотонов, дисперсии, параметра Манделя  $Q$  и запутанности атомной и фотонной подсистем.

## 6. Заключение

Модель JS рассматривается на базе квантованных бегущих волн, характерных для кольцевого резонатора. Невырожденные состояния системы задаются одновременными собственными функциями трех коммутирующих операторов: гамильтониана, числа возбуждений и интерференции. Собственные значения последнего имитируют интерференцию классических встречных волн.

Энергетический спектр модели состоит из двух семейств с  $N + 1$  и  $N$  уровнями, соответственно, в отличие от стандартной модели JS, где энергетический спектр состоит только из двух уровней, по одному на каждый энергетический уровень атома. Число фотонов во встречных волнах сосредоточено вокруг среднего значения только для двух крайних энергетических уровней. При движении к центру спектра вероятности нахождения фотонов в одной из встречных волн с модуляциями перемещаются от центра области определения к ее краям. На середине энергетического спектра модуляции распределения фотонов сглаживаются

и образуют глубокое, похожее на яму распределение, как на рис.1.

Фотонные состояния только на двух краевых энергетических уровнях имеют чисто квантовую природу. Однако они не сжаты. Кроме того, состояния с определенным числом возбуждений демонстрируют негармоническую временную эволюцию в виде коллапсов и возрождений, отсутствующую в сходных состояниях стандартной модели JC. Наконец, представленная модель JC не имеет прямого перехода к полуклассической теории в пределе большого числа фотонов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования, науки, культуры и спорта РА в Лаборатории исследований и моделирования квантовых явлений ЕГУ.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **E.T. Jaynes, F.W. Cummings.** Proc IEEE, **51**, 89 (1963).
2. **B.W. Shore, P.L. Knight.** J. Mod. Opt., **40**, 1195 (1993).
3. **L. Allen, J.H. Eberly.** Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York, Dover, 1987.
4. **C.C. Gerry, P.L. Knight.** Introductory Quantum Optics. Cambridge, Cambridge University Press, 2005.
5. **D.F. Walls, G.J. Milburn.** Quantum Optics. Berlin: Springer-Verlag, 2008.
6. **G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre.** Introduction to Quantum Optics. New York: Cambridge University Press, 2010.
7. **S. Haroche, D. Kleppner.** Physics Today, **42**, 24 (1989).
8. **A. Reiserer, G. Rempe.** Rev. Mod. Phys., **87**, 1379 (2015).
9. **A.D. Greentree, J. Koch, J. Larson.** J. Phys. B, **46**, 220201 (2013).
10. **J. Larson, T. Mavrogordatos.** arXiv:2202.00330v1 (2022).
11. **B.W. Shore, P. Meystre, S. Stenholm.** J. Opt. Soc. Am., **8**, 903 (1991).
12. **A.Zh. Muradyan, G.A. Muradyan.** J. Phys. B, **35**, 3995 (2002).
13. **M. Tavis, F.W. Cummings.** Phys. Rev., **170**, 379 (1968).
14. **E. Arimondo, A. Bambini, S. Stenholm.** Phys. Rev. A, **24**, 898 (1981).
15. **А.Ж. Мурадян.** Изв. НАН Армении, Физика, **30**, 114 (1995).
16. **N.V. Karlov.** Lectures on Quantum Electronics. CRC Press Inc, 1992.

#### JAYNES-CUMMINGS MODEL IN COUNTERPROPAGATING WAVES BASIS: LARGE NUMBERS OF EXCITATIONS

A.Zh. MURADYAN

The Jaynes-Cummings (JC) model is presented based on quantized counterpropagating waves characteristic of a ring resonator. The model, in addition to the Hamiltonian and the operator of the number of excitations, includes an interference operator whose eigenvalues imitate the term  $\cos 2kz$  of the classical field picture. The average number of photons, dispersion, the Mandel  $Q$  parameter, and atomic-photon entanglement in states with a certain number of excitations are studied. Collapses and revivals are revealed, which in the standard JC model are present only in states with an indefinite number of excitations. Photons at the boundary energy levels are antibunched (with  $Q \approx -1/2$ ) regardless of the parameters of the system, and photons of other energy levels are grouped with a degree that grows with the total number of photons.