

ՍԻՄԵՏՐԻԱՆ ԵՎ ՆՈՒՅՆՈՒԹՅԱՆ ՍԿՋՐՈՒՆՔԸ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ
ԻՄԱՑՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

ԻԳԱ ՀԱԿՈԲՅԱՆ

Ժամանակակից փիլիսոփայական և բնագիտական գրականության մեջ սիմետրիայի գաղափարը գնալով ավելի ու ավելի լայն կիրառություն է ստանում: Գոյություն ունի այն կարծիքը, որ սիմետրիան կոնկրետ գիտական կատեգորիա է և չպետք է բարձրացվի փիլիսոփայական մակարդակի: Մյուս տեսակետի համաձայն այն փիլիսոփայական կատեգորիա է, ուստի և պետք է քննվի փիլիսոփայության այնպիսի հիմնարար կատեգորիաների հետ միասին, ինչպիսիք են տարածությունը, ժամանակը, շարժումը և այլն: Ժամանակակից բնագիտության և մաթեմատիկայի մեջ թերևս չկա մի բնագավառ, որը չհենվի այդ հասկացության վրա կամ հնարավոր չլինի դիտել այդ հասկացության դիրքերից: Դա առանձնապես վերաբերում է մաթեմատիկային, որտեղ սիմետրիան դրսևորվում է բացահայտ ձևով:

Փորձենք ցույց տալ սիմետրիայի հասկացության դերն ու նշանակությունը մաթեմատիկական իմացության մեջ, ըստ էության չորհափելով այն վիճելի հարցը, թե արդյոք այդ հասկացությունը կոնկրետ գիտական է, թե՞ պետք է դիտել որպես փիլիսոփայական կատեգորիա:

Սիմետրիայի գաղափարը ոչ բացահայտ ձևով հանդես է գալիս մաթեմատիկական զանազան տեսություններում և էական դեր է խաղում մտածողության մաթեմատիկական եղանակի մեջ: Բայց կոնկրետ ձևով այն մաթեմատիկայի մեջ երևան է եկել խմբերի տեսության ստեղծման կապակցությամբ, որպես զուտ մաթեմատիկայի բնագավառ: Խմբերի տեսության ստեղծումը կապված է է. Գալուայի անվան հետ, որը մաթեմատիկայի մեջ մտցրեց խմբի հասկացությունը և առաջարկեց հանրահաշվական հավասարումները դասակարգել ըստ նրանց սիմետրիայի խմբերի: Մաթեմատիկական ողջ խմբացության համար միասնական հիմքի հնարավորության մասին Գալուայի այս գաղափարները հետագայում սկսեցին ավելի խոր ազդեցություն գործել ամբողջ մաթեմատիկայի զարգացման վրա:

Ավելի ուշ Ֆ. Կլայնը սիմետրիայի գաղափարն առաջ քաշեց որպես միասնական սկզբունք՝ տարբեր երկրաչափական համակարգերի կառուցման համար: «Այսպիսով, — գրում է նա, — որպես երկրաչափության ընդհանրացում ստացվում է հետևյալ ժամալուծ խնդիրը: Տրված է բազմաձևություն և նրանում փոխակերպությունների խումբ: Պահանջվում է կառուցել այդ խմբի ինվարիանտների տեսությունը»¹: Ֆ. Կլայնի «էռլանգենյան ծրագիր» անունն ստացած այդ աշխատության հիմնական գաղափարն այն է, որ ցանկացած երկրաչափություն կարելի է դիտել որպես փոխակերպումների որոշ անընդհատ խմբի ինվարիանտների տեսություն: Այստեղ սիմետրիան հանդես է գա-

¹ Ф. Клейн, Сравнительное обозрение новейших математических исследований («Об основаниях геометрии», М., 1956, стр. 402).

լիս որպես տվյալ խմբի որոշ ենթախումբ: Այդ գաղափարի զարգացման և երկրաչափության սահմաններից նրա դուրս գալու հետ ակնհայտ դարձավ, որ սիմետրիայի սկզբունքը կարող է ծառայել որպես միասնական հիմք՝ միավորելու ժամանակակից մաթեմատիկայի հսկա շենքի բոլոր անշատ մասերը: Այդ գաղափարը շմաց նաև զուտ մաթեմատիկայի շրջանակներում: Ֆ. Կլայնն իր կոնցեպցիան զարգացրեց և կիրառեց նաև ֆիզիկայի ու մեխանիկայի մեջ:

Հարաբերականության տեսությունը, որը նոր՝ ֆիզիկական հնչեղություն հաղորդեց «էռլանգենյան ծրագրին», սկիզբ գրեց ֆիզիկայի նկատմամբ տեսական-խմբային կամ էռլանգենյան մոտեցմանը: Ըստ Ֆ. Կլայնի աշակերտ Գ. Վայլի, ողջ հարաբերականության տեսությունը, դիտված որպես քառաչափ տարածաժամանակի ինվարիանտների տեսություն, ավելին է, քան սիմետրիայի տեսության մեկ այլ ասպեկտ²: Ֆ. Կլայնի ծրագիրը, որպես սիմետրիայի տարբեր ձևերի որոնումների խնդիր, այսպիսով, դուրս է գալիս ոչ միայն երկրաչափության, այլև ընդհանրապես մաթեմատիկայի շրջանակներից և վերածվում է ողջ բնագիտության համար միասնական սկզբունքի որոնումների պրոբլեմի: Բայց բո՛ւն պրոբլեմը, ինչպես մատնանշվեց, առաջին անգամ է ձևակերպվում որպես մաթեմատիկական պրոբլեմ և նրա լուծման բանալին գտնվում է մաթեմատիկական իմացության ոլորտում: Հենց այստեղ է սիմետրիայի հասկացությունը կիրառական ուժ ստանում և վերածվում մեթոդաբանական ու էվրիստիկական հզոր սկզբունքի, որի նշանակությունը դուրս է դալիս մաթեմատիկայի սահմաններից:

Մաթեմատիկայի մեջ սիմետրիան սահմանվում է խմբերի տեսության լեզվով: Այդ սահմանումն աչքի է ընկնում արտակարգ ընդհանրությամբ և գործադրելի է ժամանակակից գիտության բոլոր ձևայնացվող բնագավառներում: Սակայն սիմետրիայի հասկացության ինչպես պատմական, այնպես էլ տրամաբանական ակունքները պետք է որոնել ոչ թե խմբերի տեսության կամ ինվարիանտների տեսության, այլ նույնության պրոբլեմի մեջ:

Մաթեմատիկայի մեջ սիմետրիան հանդես է գալիս որպես առանձնահատուկ օրինաչափություն: Մաթեմատիկական օբյեկտի սիմետրիայի խումբ ասելով հասկանում ենք օբյեկտի կամ նրա մասերի բոլոր ինքնահամատեղությունների ամբողջությունը: Երկրաչափության մեջ որպես այդ օրինաչափության հիմք հանդես է գալիս երկրաչափական օբյեկտների հավասարության, ավելի ճիշտ՝ համատեղելիության (կոնգրուենտության) հասկացությունը: Տարածության կառուցվածքը կարելի է նկարագրել, հենվելով բացառապես համատեղելիության հասկացության վրա, ինչպես դա անում էր Հելմհոլցը³: Այդ հասկացության հիմնավորումը դուրս է գալիս երկրաչափության ոլորտից և անցնում է մաթեմատիկայի, ինչպես նաև գիտության փիլիսոփայական պրոբլեմների բնագավառը: Փիլիսոփայության պատմության մեջ մենք այդ հիմնավորումը գտնում ենք նույնության պրոբլեմում: Նույնությունը հանդես է գալիս որպես սիմետրիայի հիմք⁴ և որպես այդպիսին կարիք է զգում մի փոքր ավելի մանրամասն քննարկման:

² Г. Вейль, Симметрия, М., 1968, стр. 49.

³ Г. Гельмгольц, О фактах, лежащих в основаниях геометрии. («Об основаниях геометрии», 1957, стр. 366—382).

⁴ Н. Ф. Овчинников, Принципы сохранения, М., 1966, стр. 46; В. С. Готт, Философские вопросы современной физики, М., 1967.

Նույնության պրոբլեմի տրամաբանական կողմը մշակել է Արիստոտելը: Նա առաջ է քաշել $A=A$ սկզբունքը, որն ստացել է նույնության կամ մտածողության մեջ հակասությունների արգելքի օրենք անվանումը: Մաթեմատիկական իմացության ոլորտում դրա նշանակությունը դժվար է գերազանահատել: «Մաթեմատիկայի հիմքը,— գրել է Լայբնիցը,— հակասության կամ նույնության սկզբունքն է, այսինքն այն դրույթը, որ դատողությունը չի կարող լինել միաժամանակ ճշմարիտ և կեղծ, որ, հետևաբար, A -ն A է և չի կարող ոչ A լինել: Միայն այդ սկզբունքը բավական է արտածելու համար ողջ թվաբանությունը, երկրաչափությունը, ուրեմն և, հետևաբար, մաթեմատիկայի բոլոր սկզբունքները»⁵: Բայց մաթեմատիկայի մեջ նույնության օրենքն արտահայտում է նաև սիմետրիայի սկզբունքը նրա առավել ընդհանուր, վերացական տեսքով, քանի որ այնտեղ սիմետրիան պատկերացվում է որպես նույնաբար իրեն հավասար օբյեկտի օրինաչափ շարժում, այլ կերպ ասած՝ օբյեկտի առջև շարժումների կամ փոխակերպումների միագումար, որոնք նրան համատեղում են ինքն իր հետ:

Սիմետրիայի հատկությունները վերլուծելիս տեղափոխումը, պտույտը և հայելային արտացոլումը դիտվում են որպես շարժման պարզագույն ձևեր: Դրանք կոչվում են սիմետրիայի փոխակերպումներ: Այստեղ խոսքը մաթեմատիկական շարժման մասին է: Օբյեկտը (մաթեմատիկական օբյեկտը) շարժվում է ոչ թե այն պատճառով, որ ունի փոփոխման ներքին մղում, այլ այն պատճառով, որ նրան շարժման մեջ է դնում մարդկային մտածողությունը, զուգորդություններ կատարելով և նրանից ստեղծելով համակարգ-կառուցվածքներ: Այդ շարժման կարևոր հատկությունն այն է, որ տեղափոխումների կամ փոխակերպումների պրոցեսում օբյեկտը մնում է ինքն իրեն հավասար:

Օբյեկտի հասկացությունը, որն օգտագործվում է մաթեմատիկայի մեջ, մի վերացություն է, որին հանգում են օբյեկտիվ իրականության իրերի կամ երևույթների որոշակի, տվյալ դեպքում ոչ էական, հատկություններից վերանալու միջոցով: Սակայն նույնիսկ մաթեմատիկայի մեջ մաքուր նույնության հասկացությունն անվերապահորեն ընդունելի չէ, քանի որ « A -ն A է» պնդումը իրի կամ առարկայի վերաբերմամբ ավելին չէ, քան դատարկ կրկնաբանություն: Հենց դա նկատի ունի Լ. Վիտգենշտայնը, երբ գրում է. «Երկու առարկաների մասին ասել, որ դրանք նույնական են, անիմաստ է, իսկ մեկ առարկայի մասին ասել, որ նա նույնական է ինքն իրեն, նշանակում է ոչինչ չասել»⁶:

$A=A$ սկզբունքի մետաֆիզիկական մեկնաբանությունը հիմնված է առարկայի՝ որպես կամայական բնույթի օբյեկտի, պարզունակ ըմբռնման վրա: Այնինչ տրամաբանության մեջ այդ հասկացության հարաբերականությունն այն գործոններից է, որոնք սահմանափակում են $A=A$ բանաձևի կիրառելիության ոլորտը⁷: Մաթեմատիկայի մեջ օբյեկտի հարաբերականության խնդրի լուծումը թույլ է տալիս ի հայտ բերել հասկացությունները խստիվ կերպով ճշգրտելու հնարավորության սահմանները և վերջին հաշվով ինչ-որ չափով որոշել դրանց տրամաբանական ձևայնացման շրջանակները: Այդ խնդիրը,

⁵ «Полемика Г. Лейбница и С. Кларка», Л., 1960, стр. 40.

⁶ Л. Витгенштейн, Логико-философский трактат, М., 1958, стр. 76.

⁷ «Философская энциклопедия», т. 1, М., 1960, стр. 8.

ինչպես և նույնության սկզբունքի հիմնավորումն ընկած են ձևական մտածողության ոլորտից դուրս: Բուն նույնության պրոբլեմը պատկանում է մետա-տեսության և փիլիսոփայության բնագավառին:

Որպես փիլիսոփայական պրոբլեմ նույնության պրոբլեմը հիմնավորապես մշակվել է հեղելյան տրամաբանության մեջ⁸:

Մաթեմատիկան իմացության միակ բնագավառն է, որտեղ թույլատրվում է մաքուր կամ բացարձակ⁹ նույնության, հետևաբար, նաև բացարձակ սիմետրիայի գոյությունը: Դրանով է բացատրվում ոչ միայն մաթեմատիկական կառուցվածքների ծայրահեղ վերացականությունը, այլև նրանց զարմանալի կուտ լինելը ե հստակությունը: Մաթեմատիկան իրավամբ կարող է կոչվել սիմետրիայի թագավորություն, իսկ «մաթեմատիկական մտածողության գործունեության ցուցադրման համար հազիվ թե կարելի լինի գտնել որևէ ավելի լավ բան, քան սիմետրիան»¹⁰: Ո՛չ բնության մեջ և ոչ էլ իմացության մեկ այլ բնագավառում սիմետրիան երբեք չի հանդիպում այդպիսի մաքուր, հստակ ձևով:

Սակայն մաքուր նույնության (և բացարձակ սիմետրիայի) հասկացության վրա հենվելը մաթեմատիկական մտածողության վրա դնում է որոշակի սահմանափակումներ, որոնք ներկայանում են նույնության օրենքի կողմից մաթեմատիկայի վրա դրվող արգելքների ձևով:

Առաջին սահմանափակումը կամ «արգելքը» արտահայտվում է հակասության օրենքի միջոցով, որն արգելում է հակասությունները մտածողության մեջ: Հեգելի մոտ այդ օրենքը հանդես է գալիս որպես նույնության մասին դրույթի մեկ ուրիշ արտահայտություն, որպես նրա բացասական ձև՝ «Ա-ն չի կարող միևնույն ժամանակ լինել Ա և ոչ-Ա», — և կոչվում է դրույթ հակասության մասին: Արիստոտելի ու Լայբնիցի մոտ հակասության և նույնության սկզբունքները շեն տարբերվում: Հակասության սկզբունքը հարաբերական ինքնուրույնությունն ատացավ մի փոքր ավելի ուշ՝ մաթեմատիկական տրամաբանության զարգացման կապակցությամբ: Սակայն դժվար չէ նկատել, որ ցանկացած մեկնաբանության դեպքում այդ սկզբունքը հանդես է գալիս որպես հակասությունների արգելք՝ մտածողության մեջ:

Այդ դրույթն առանձին հետաքրքրություն է ձեռք բերում առավելապես այն հարցի կապակցությամբ, թե մաթեմատիկայի մեջ ինչպիսի տեղ է զբաղվում սիմետրիայի հասկացությունը: Ինչպես մատնանշվեց, մաթեմատիկայի մեջ սիմետրիայի սահմանման ժամանակ որպես հիմք է ծառայում նույնության հասկացությունը: Բայց սիմետրիայի հետ միասին այստեղ որպես զուտ բացասական հասկացություն հանդես է գալիս նրա հակոտնյան՝ ասիմետրիան:

Մաթեմատիկայի մեջ ասիմետրիան սահմանելիս որպես ելակետ ծառայում է հակասության հասկացությունը: Սակայն այստեղ մենք այդ հարցի

⁸ Гегель, Наука логики, т. 2, М., 1971, стр. 29.

⁹ Բացարձակ տերմինը այստեղ և հետագայում գործածվում է որևէ այլ հասկացության նկատմամբ անհարաբերականության իմաստով: Տվյալ դեպքում բացարձակ նույնությունն նշանակում է մաքուր նույնություն, որը անհարաբերական է զանազանության, տարբերության, հակադրության և հակասության նկատմամբ:

¹⁰ Г. Вейль, *Եզվ. աշխ.*, էջ 160:

քննության մեջ չենք զբաղվի, քանի որ հարկ կլինի քննել նաև նույնության, զանազանության, հակասության և այլ հասկացությունների կապը սիմետրիայի, դիսիմետրիայի, ասիմետրիայի հասկացությունների հետ: Նշենք միայն, որ մաթեմատիկայում հակասություն հասկացությունը բացարձակ ասիմետրիային համադրելը միանգամայն օրինաչափ է: Ավելին, ասիմետրիան միշտ հանդես է գալիս որպես հակասություն, որը դրսևորվում է նույնորեն իրեն հավասար օբյեկտի ներսում (սիմետրիան պարունակում է ասիմետրիա, իսկ նույնությունը ներքնապես հակասական է): Մաթեմատիկայի մեջ ասիմետրիայի գաղափարը որոշակի դեր է խաղում, որը չի կարելի անտեսել, ինչպես որ չի կարելի անտեսել հակասության հասկացությունը մաթեմատիկայի մեջ նույնության սկզբունքի տեղը որոշելիս: Այդ տեղը առավել ցայտուն կերպով ի հայտ է գալիս այն արգելքների կապակցությամբ, որոնք մաթեմատիկայի վրա դրվում են նույնության օրենքի կողմից: Այդ արգելքներից մեկի մասին (հակասությունների արգելքը մտածողության մեջ) արդեն վերը ասվեց: Մյուս արգելքը, որ քննության կարիք ունի, դարձյալ ի հայտ է գալիս մաթեմատիկական իմացության յուրահատկության կապակցությամբ, որը որոշվում է մաքուր կամ բացարձակ նույնության հասկացության կիրառման ոլորտում: Ըստ Հեգելի, մաթեմատիկան էության իմացության առաջին աստիճանն է, մի մակարդակ, որտեղ էությունը երկատված չէ, ուստի և զուրկ է որոշակիությունից, որտեղ էությունը հանդես է գալիս որպես զուտ նույնություն¹¹:

Այստեղ հարկ է հիշել, որ մաթեմատիկայի մեջ պարզագույն հասկացությունները, ինչպես օրինակ, միավորի կամ գումարման սահմանելու բոլոր փորձերն անխուսափելիորեն հանգեցնում են կրկնաբանության: Այնինչ, ունենալով միավորի և գումարման հասկացությունները, կարելի է կառուցել թվերի բնական շարքը: Բայց ի՞նչ է միավորը: Այդ հասկացությունը սահմանելու ամեն մի փորձ (Ջ. Պեանո, Ն. Վինբեր և այլն) հանգեցնում է միևնույն արդյունքին՝ «միավորը միավոր է» կամ «գումարումը գումարում է» և ոչ ավելին:

«Ա-ն Ա է» նույնության օրենքը թույլ է տալիս Ա օբյեկտի միայն մեկ կողմի միաժամանակյա քննություն: Ունենալով Ա-ն, մենք կարող ենք կառուցել մաթեմատիկան, բայց այդ Ա-ի սահմանումը կա՞մ նրա կառուցվածքի ի հայտ բերումը մի հարց է, որը մաթեմատիկայի իրավասությունից դուրս է: Այդ «արգելքի» խախտումը հանգեցնում է երկու ծայրահեղություններից մեկն ու մեկին՝ կա՞մ կրկնաբանության, կա՞մ հակասության, այսինքն այնպիսի իրավիճակի, երբ երկու հակադիր պնդումները միաժամանակ հանդես են գալիս որպես ճշմարիտ:

Կրկնաբանությունը պարունակում է տրամաբանական շրջան, որը բացարձակ սիմետրիայի արտահայտություն է: Իսկ հակասությունը մաթեմատիկայի մեջ, ինչպես նշվեց, հակադրվում է բացարձակ ասիմետրիայի հասկացությանը:

Ինչպես հայտնի է, մաթեմատիկայում հակասությունը նշանակում է խաթարում, սխալ և ընկալվում է որպես աղետ կամ, լավագույն դեպքում, անբարեհաջողության նշան: Մաթեմատիկական տեսությունը ներկայացվող առաջին պահանջը՝ անհակասականությունը¹², ներկայացվում է ընդհանրապես

¹¹ Гегель, նշվ. աշխ., էջ 29:

¹² Ձևական տեսության հակասականության դեպքում նրա միջոցներով կարելի է ապացուցել ցանկացած պնդումը, օրի հետևանքով տեսությունը կորցնում է իր իմացական արժեքը:

մտածողության մաթեմատիկական եղանակին: Մաթեմատիկայի առանձին մասերում կամ հատվածներում երևան եկող հակասությունները սովորաբար կոչվում են պարադոքսներ կամ անտինոմիաներ: Քանի որ այստեղ մեզ հետաքրքրում են հատկապես պարադոքսները, այսինքն այն հակասությունները, որոնցից հնարավոր չէ ազատվել սովորական եղանակներով, համառոտակի քննենք դրանք:

Մաթեմատիկայի մեջ պարադոքսներն ի հայտ են եկել նրա բուն ծաղկման շրջանում՝ մ. թ. ա. V դ., երբ երկրաչափությունը ճշգրիտ դեդուկտիվ գիտություն դառնալու հետ մեկտեղ արվեցին երկու պարադոքսալ հայտնագործություններ, քառակուսու անկյունագծի և նրա կողմի անհամատեղելիությունը և էլեացիների դպրոցի պարադոքսները (այսպես կոչված Զենոնի ապորիաները):

XVII—XVIII դդ. անվերջ փոքրերի հաշվի հայտնագործումից հետո մաթեմատիկոսները կիրառեցին նրա մեթոդները, առանձնապես շտապագծելով այն մասին, թե որքանով են անսասան այդ հաշվի հիմքերը: Սակայն XIX դ. սկզբին այդ հիմքերի անկայունության պարզելը հանգեցրեց մաթեմատիկայի երկրորդ ճգնաժամին:

Որքան էլ տարօրինակ է, նոր ճգնաժամը վրա հասավ այն ժամանակ, երբ մաթեմատիկոսներն անալիզի և ֆունկցիաների տեսությունը հաջողությամբ թվաբանացնելուց հետո այնքան էին համոզված նրա հիմքերի անսասանության մեջ, որ այն ժամանակվա առաջատար մաթեմատիկոսներից մեկը՝ Պուանկարեն, հայտարարեց (1900), թե մաթեմատիկան արդեն ձեռք է բերել միանգամայն ամուր և հուսալի հիմք, «որ այժմ մաթեմատիկայի մեջ մնում են միայն ամբողջ թվերը կամ ամբողջ թվերի վերջավոր և անվերջ համակարգերը» և որ «Մաթեմատիկան ամբողջությամբ թվաբանացված է: Մենք այսօր կարող ենք ասել, որ ձեռք է բերված բացարձակ խստություն»¹³:

Սակայն բազմությունների տեսության մեջ երևան եկած պարադոքսները պատճառ դարձան մաթեմատիկայի հիմքերի երրորդ ճգնաժամի, որը մաթեմատիկայում չի հաղթահարված մինչև օրս:

Ո՞րն է պարադոքսների պատճառը, որոնց վերացման պրոբլեմը մաթեմատիկոսներին ստիպում է կրկին ու կրկին դիմել իրենց գիտության հիմքերին:

Պուանկարեն պարադոքսների պատճառը համարում էր ոչ-պրեդիկատիվ սահմանումները: Վերջիններս համարվում են արատավոր (circular), քանի որ այն, ինչ նրանց մեջ սահմանվում է, մասնակցում է սեփական սահմանմանը: Պարադոքսների պատճառին, ըստ էության, նույն բացատրությունը տվեց նաև Բ. Ռասսելը, արատավոր շրջանի իր սկզբունքում. «ոչ մի համախումբ, — գրել է նա, — չի կարող պարունակել այնպիսի տարրեր, որոնք սահմանվում են միայն այդ համախմբի տերմիններով, ինչպես նաև այնպիսի տարրեր, որոնք ներառում կամ ենթադրում են այդ համախումբը»¹⁴: Մաթեմատիկայի (և տրամաբանության) մեջ հասկացությունների ոչ-պրեդիկատիվ կազմավորման արգելման երկու առաջին և ամենաականավոր կողմնակից-

¹³ H. Poincaré, Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques. C. R. du II^{me} Congr. Intern. des Math. Paris, 1900, p. 200—202.

¹⁴ С. Купин, Введение в метаматематику, М., 1957, стр. 444.

նեբրի՝ Պուանկարեի և Ռասելի ոչ-պրեդիկատիվության կոնցեպցիաներում հետազայում հայտնաբերված տարբերություններն ավելի շուտ վերաբերում են այն հարցին, թե որտեղ է այն սահմանը, որը միմյանցից զատում է կործանարար և անմեղ ոչ-պրեդիկատիվ սահմանումները¹⁵։ Մեզ համար այստեղ կարևոր է մեկ ուրիշ հարց՝ ո՞րն է ոչ-պրեդիկատիվ սահմանման առաջացման պատճառը։ Չէ՞ որ այն հանգես է գալիս ոչ միայն բազմությունների տեսության մեջ, այլև ողջ մաթեմատիկայում և առանձնապես անալիզում։ Գուցե պատճառը «արգելքի» խախտման մեջ է, «արգելք», որը մաթեմատիկայի վրա դնում է նույնության օրենքը և, հնարավոր է, մաթեմատիկայի ու տրամաբանության հիմնավորման պրոբլեմը վերջին հաշվով հանգում է նույնության պրոբլեմին։

Համենայն դեպս հարկ է նշել այն բավականին հետաքրքիր փաստը, որ տրամաբանական շրջան պարունակող սահմանումներով գործողություն կատարելը (իսկ տրամաբանական շրջանը, ինչպես նշեցինք վերը, բացարձակ սիմետրիայի դրսևորումներից մեկն է) հանգեցնում է իր հակադրությանը՝ հակասության կամ պարադոքսի։ Բացարձակ սիմետրիան առաջ է բերում բացարձակ ասիմետրիա։ Իսկ բացարձակ սիմետրիան մաթեմատիկայի հիմքում է դրվում նույնության օրենքի՝ մաթեմատիկական մտածողության այդ անսասան կանխադրույթի կողմից։

Մաթեմատիկայի մեջ ասիմետրիայի հասկացության տեղն ի հայտ է գալիս նաև անսահմանության հասկացության և նրա հետ կապված պրոբլեմների կապակցությամբ։

Նշված դժվարությունների (այդ թվում և պարադոքսների) իսկական աղբյուրը մաթեմատիկոսները տեսնում են նաև անվերջության հասկացության ոչ բավարար հիմնավորվածության և դրանից բխող հետևանքների մեջ։ Անվերջության հասկացության հետ մաթեմատիկան գործ ունի իր առաջացման հենց սկզբից։ Այդ հասկացությունը մաթեմատիկայի համար կենսական է այն աստիճանի, որ նրա հետ շաճնչվող պրոբլեմները դադարում են բուն իմաստով այդպիսին լինելուց և վերածվում են փաստերի տրիվիալ արձանագրման։ Ավելին, առանց անվերջության կիրառման մաթեմատիկան ընդհանրապես կդադարեր գիտություն լինելուց։ Չէ՞ որ գիտելիքը գիտություն է դառնում միայն այն ժամանակ, երբ այն դուրս է գալիս վերջավորի սահմաններից։ Դա առանձնապես վերաբերում է մաթեմատիկային։ Առանց չափազանցության կարելի է ասել, որ մաթեմատիկայի նոր հիմնավորման տարբեր փորձերը նշանակալից չափով կախված են այն մոտեցումից, որը ցուցաբերվում է անվերջության պրոբլեմի նկատմամբ։ Իսկ վերջինիս հիմնավորման պրոցեսի կարևորագույն փուլերն ուղեկցվել են անվերջության մասին եղած կոնցեպցիաների արմատական վերանայմամբ¹⁶։

¹⁵ А. Френкель, И. Бар-Хилел, Основания теории множеств, М., 1966, стр. 214.

¹⁶ Մաթեմատիկայի հիմքերի ճգնաժամերն այսպես թե այնպես կապված են եղել անվերջության հասկացության հետ։ Այսպես, առաջին ճգնաժամը (Ջենոնի պարադոքսները), ինչպես նշվեց վերևում, կապված էր անվերջ փոքր մասերից վերջավոր մեծությունների կառուցման փորձերի հետ։ Երկրորդ ճգնաժամը կապված է անվերջ փոքրերի անալիզի հիմնավորման և ակտուալ անվերջության հասկացության չափազանց լայն օգտագործման հետ։ Երրորդ ճգնաժամը, որը կապված է բազմությունների տեսության մեջ պարադոքսների երևան գալու հետ, ինտուիցիոնիստների կարծիքով առաջացել է այն պատճառով, որ մաթեմատիկայի ուրիշ ոչ մի

Անվերջություն հասկացությունը ինքնին, իր ներքին հակասական բնույթի պատճառով¹⁷ մաթեմատիկայում դժվարություններ է առաջ բերում: Իսկ վերջավոր հստախմբերի համար մշակված միջոցների օգնությամբ անվերջության հետ վարվելու միտումը մաթեմատիկայի մեջ ծագող դժվարությունների աղբյուրն է, որը, Վայլի կարծիքով, ավելի խոր հիմք ունի, քան Ռասելի առաջարկած արատավոր շրջանի սկզբունքը:

Եվ այսպես, նույնիսկ մաթեմատիկայի մեջ, որն իրավամբ կարող է կոչվել սիմետրիայի թագավորություն, ասիմետրիային որոշակի տեղ է հատկացվում: Դա ի հայտ է գալիս պարադոքսների կապակցությամբ, որոնք չի կարելի համարել թյուրմասցություններ կամ թույլ տրված սխալների ուղղակի հետևանք:

Վերը մատնանշեցինք պարադոքսների առաջացման երկու հնարավոր պատճառ՝ հակացությունների ոչ-պրեդիկատիվ սահմանումը և ներքնապես հակասական այնպիսի հակացության լայն կիրառումը, ինչպիսին անվերջությունն է (նրա հետ կապված խնդիրների հետ միասին)¹⁸, առանց որի մաթեմատիկային սպառնում է վիթխարի կրկնաբանության վերածվելու վտանգը: Բայց, հնարավոր է նաև, որ այդ պատճառներն ավելի խորն են, որ մաթեմատիկայի հիմնավորման պրոբլեմը հանգում է մի կողմից նույնության, իսկ մյուս կողմից՝ հակասության պրոբլեմին, որն ըստ էության նույն պրոբլեմի մյուս կողմն է:

Նույնության օրենքը մաթեմատիկայում դնում է բացարձակ նույնության հակացությունով (և բացարձակ սիմետրիայի) գործողություն կատարելու պահանջ: Այդ պահանջի խստությունն արտահայտվում է այն արգելքների մեջ, որոնք մաթեմատիկական մտածողության վրա դրվում են այդ օրենքի կողմից, որն արգելում է ոչ միայն հակասությունները մտածողության մեջ, այլև պահանջում է Ա օբյեկտի միայն մեկ ասպեկտի միաթամանակյա քննությունը:

Կարելի է մատնանշել ևս մեկ արգելք, որը մաթեմատիկայում դնում է նույնության օրենքը: Դրա համար հարկ է էքսկուրս կատարել ֆիզիկայի բնագավառը: Մինչև թույլ փոխադրեցությունների ժամանակ զուգություն սկզբունքի խախտման հայտնաբերումը (1956) կար այն կարծիքը, որ տարածությունը սիմետրիկ է, քանի որ ֆիզիկայի ոչ մի օրենք չէր արտահայտում ձախ և աջ կողմերի միջև որևէ ներքին տարբերություն: Զուգության պահպանման օրենքի խախտումը վերջ դրեց այդ համոզմանը: Այժմ հայտնի է, որ հայելային արտացոլումները փոխում են տարածության կառուցվածքը կամ, խիստ ասած, ֆիզիկական ավտոմորֆիզմների խումբը, ի տարբերություն մաթեմատիկական ավտոմորֆիզմների խմբի, որն այդպիսի արտացոլում չի պարունակում: Այսպես, սիմետրիայի ոչ մի գործողությամբ չի կարելի կվարցի ասիմետրիկ աջ բյուրեղը վերածել ձախի կամ աջ՝ ձեռքը՝ ձախի, քանի որ այդ փոխդասավորությունը բացարձակ բնույթ է կրում:

Եթե ենթադրենք, որ մաթեմատիկական Ա օբյեկտը նույնպես կարող է

բնագավառում անվերջությունը չի կիրառվել ալգեբրայի լայնորեն և այդքան անսահմանափակ կերպով: Г. И. Рузавин, О природе математического знания, М., 1968, стр. 110.

¹⁷ «Անսահմանը հակասություն է, որն ի հայտ է գալիս կեցության ոլորտում», Гегель. Զեղ. աշխ., էջ 66:

¹⁸ Օրինակ, ընդհատունության և անընդմիջության պրոբլեմը՝ մաթեմատիկայի հիմքերի այդ շատ հին պրոբլեմը:

ներկայացվել որպես աջ A և ձախ A , ապա կարող ենք ասել, որ աջ A -ն հավասար չէ ձախ A -ին, այսինքն՝ նույնության օրենքը ճիշտ է միայն հայելային արտացոլմամբ համատեղելի կամ սիմետրիկ օբյեկտների համար¹⁹։

Նույնը կարելի է ասել նաև բացառված երրորդի սկզբունքի մասին. ինչ-որ մի բան A է, կամ A չէ, երրորդը չի տրված։ Դժվար չէ նկատել, որ այս սկզբունքը ևս ճիշտ է միայն սիմետրիկ A -ի դեպքում, քանի որ հակառակ դեպքում A -ն կլինի կամ աջ A , կամ ձախ A , և որպես այդ հակադրության հիմք հանդես կգա A -ն՝ հենց այն երրորդը, որը պետք է բացառվի։

Այսպիսով, նույնության օրենքն արգելում է ոչ միայն հակասությունները մտածողության մեջ և A օբյեկտի ավելի քան մեկ ասպեկտի միաժամանակյա քննությունը, այլև արգելում է ասիմետրիկ և դիսիմետրիկ օբյեկտներով գործողություն կատարելը։ Այդ օրենքը խստիվ ձևով ուսումնասիրվող օբյեկտին պարտադրում է բացարձակ սիմետրիկություն և կառուցվածքայնությունից ղուրկ բնույթ։ Ուստի բնության մեջ նկատվող աշոխության-ձախության կամ էնանտիոմորֆիզմի երևույթը մաթեմատիկայի մեջ գտնում է զուտ ձևական արտահայտություն։

էնանտիոմորֆիզմի երևույթը փիլիսոփայական մեծ նշանակություն ունի, որովհետև այստեղ խոսքը մատերիայի այնպիսի հակադրությունների մասին է, որոնք, ըստ երևույթին, ունեն համընդհանուր նշանակություն, ինչպես որ բնության ցանկացած օբյեկտը կա՛մ D է, կա՛մ L , կա՛մ միաժամանակ D և L , այսինքն սիմետրիկ է։ Բնության մեջ այլ օբյեկտների գոյության մասին ոչինչ հայտնի չէ²⁰։ Յու. Ուրմանցևի այս պնդման հետ կարելի է համաձայնել, սակայն ոչ-մեծ ճշգրտում մտցնելուց հետո միայն։ Բնության մեջ եղած ցանկացած օբյեկտ ասելով նա, հավանաբար հասկանում է անշարժ օբյեկտը, քանի որ շարժվող օբյեկտը կարող է ունենալ երկուսից ավելի մոդիֆիկացիա, որը, թեև կուզե զուտ ձևականորեն արտացոլվում է մաթեմատիկայի մեջ։

Մաթեմատիկայի մեջ աջը և ձախը (ինչպես և ցանկացած հակադիր մեծությունները), ըստ երևույթին, կարելի է նշանակել $+$ և $-$ նշաններով։ Այսպես, աջ A -ն հանդես կգա որպես $+$ A կամ դրական A , ձախ A -ն՝ որպես $-$ A , կամ բացասական A ։ Ընդ որում, այստեղ դրականը և բացասականը հակադրության կողմերն են, որոնք ինքնուրույն են դարձել, «դրանք հակադրության բացարձակ մոմենտներն են»²¹, այսինքն $+$ կամ $-$ նշանը ներմուծվում է դրսից և չի փոխում A օբյեկտի կառուցվածքը։

Եթե տարածության մեջ A օբյեկտի նկարագրության ժամանակ հաշվի առնենք x, y, z միայն կոորդինատների դեկարտյան համակարգի x, y, z երեք կոորդինատները, այլև նրանց նշանները, ապա հնարավոր կդառնա օբյեկտի ոչ թե երկու, այլ ութ մոդիֆիկացիա.

$$\begin{aligned} &+++A, \quad ++-A, \quad +--A, \quad -++A, \\ &---A, \quad --+A, \quad -++A, \quad +--A; \end{aligned}$$

¹⁹ Հայելակերպ համատեղելի օբյեկտները հաճախ անվանում են ոչ դիսիմետրիկ օբյեկտներ։ Մենք դրանք անվանում ենք սիմետրիկ, տարբերելով դիսիմետրիկ (այսինքն՝ հայելակերպ ոչ համատեղելի) օբյեկտներից։

²⁰ Ю. А. Урманцев. О философском и естественнонаучном значении некоторых проявлений правизны и левизны в живой природе («О сущности жизни», М., 1964).

²¹ Гегель, նշվ. աշխ., էջ 48։

այսինքն A օբյեկտը կարող է գտնվել կոորդինատային համակարգի ութ հատվածամասերից մեկում²²:

Մաթեմատիկայի մեջ աշ-ձախ կամ զրական-բացասական A -երի շորս զույգերի միջև եղած տարբերությունը վերանում է, քանի որ համապատասխան փոխակերպումներից հետո բոլոր զույգերը հանդես են գալիս որպես $+A$ կամ $-A$: Սակայն ֆիզիկայի և առանձնապես տարրական մասնիկների ֆիզիկայի մեջ այդ տարբերություններն արդեն հնարավոր չէ անտեսել (օրինակ, նեյտրինոյի շորս տիպերի դեպքում): Այդ տարբերությունները չի կարելի հաշվի չառնել նաև կենսաբանության մեջ, որտեղ միևնույն մոլեկուլը կարող է գոյություն ունենալ $l(-)$, $l(+)$, $d(-)$ և $d(+)$ շորս մոդիֆիկացիաներում: Ընդ որում, այդ փոխդասավորություններում եղած տարբերությունները ներքին բնույթ են կրում և դրանք չի կարելի «հանել փակագծերից» կամ բուն օբյեկտի սահմաններից, ինչպես դա տեղի է ունենում մաթեմատիկայի մեջ: Այլ խոսքով ասած, երկրաչափական ավտոմորֆիզմների խումբն ավելի լայն է ֆիզիկական ավտոմորֆիզմների խմբից և պարունակում է արտացոլում: Կարելի է ասել, որ այդ երրորդ արգելքը, որը մաթեմատիկական դարձնում է սիմետրիայի թափափություն, մտածողության մաթեմատիկական ձևի, մաթեմատիկական տեսությունների ու համակարգերի համար ապահովում է ոչ միայն ծայրահեղ վերացականություն, այլև ընդգրկման արտակարգ համընդհանրություն և լայնություն, որին չի կարող հավակնել խմբության ուրիշ ոչ մի ընաճավառ:

Այսպիսով, մաթեմատիկական իմացության մեջ սիմետրիայի դերը դրսևար է գերազնահատել: Այդ հատկացությունն ընկած է մաթեմատիկական մտածողության հիմքում և որոշում է նրա յուրահատկությունը: Միևնույն ժամանակ, եթե մաթեմատիկական ընդունենք որպես մաքուր սիմետրիայի ընաճավառ, որը չի պլոտորված ասիմետրիայի կողմից, ապա նա կվերածվի «վիթխարի կրկնաբանության», որովհետև իր ամենահետաքրքիր արդյունքներով, ինչպես և զարգացմամբ պարտական է հատկապես ասիմետրիային: Իհարկե, կոնկրետ մաթեմատիկական տեսություններում ասիմետրիան (ինչպես և հակասությունը) ընկալվում է որպես բացարձակ բացասական մի բան, քանի որ ձևական-տրամաբանական տեսակետից այն նշանակում է բուն տեսության կործանում: Բայց արտաքին գնահատման տեսակետից հենց այդ հատկացությանն է բաժին ընկնում ձևական մտածողության սահմանների կարգավորիչի դերը: Այդ հատկացությունը հակասության ձևով երևան է գալիս ամեն անգամ, երբ մաթեմատիկական փորձում է դուրս գալ իր սահմաններից: Եվ թեպետ մաթեմատիկական կոնկրետ տեսության մեջ հակասությունն անմիջականորեն անլուծելի է և նշանակում է խափանում, սխալ կամ լավագույն դեպքում հանդես է գալիս որպես անբարեհաջողության նշան, այնուամենայնիվ, մաթեմատիկայի զարգացման պատմությունը կարելի է պատկերացնել որպես առաջացող հակասությունների (պարադոքսների) և ասիմետրիայի հաղթահարման պատմություն:

²² X, y, z կոորդինատների փոխարեն դրել ենք դրանց նշանները, A -ն հակադիր զույգերով դասավորելով այնպես, որ -1 -ով բազմապատկելու դեպքում A -երի վերին քառյակը վերածվի ստորին քառյակի և ընդհակառակը:

СИММЕТРИЯ И ТОЖДЕСТВО В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ПОЗНАНИИ

ИДА АКОПЯН

Резюме

Современную математику сравнивают с вавилонской башней, строители которой чем выше возносят это сооружение, тем хуже понимают друг друга. Принципом, который дает возможность объединить все разрозненные части «вавилонской башни» современной математики на единой основе, является принцип симметрии.

Анализ содержания симметрии в его связи с понятием тождества позволяет выяснить место и роль этого понятия в системе математического знания. Симметрия лежит в основе математического мышления вообще, а антипод симметрии — асимметрия — определяет его границы.