ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и НПУА. Сер. ТН. 2019. Т. LXXII, N2.

УДК 621.52+511.52

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА А.Н. КРЫЛОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПОЛНОЙ ПРОБЛЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ - ФУНКЦИЙ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Предложен дифференциальный аналог метода А.Н. Крылова для решения полной проблемы собственных значений-функций однопараметрических матриц. Получено необходимое и достаточное условие однозначной разрешимости задачи. Рассмотрено решение одного модельного примера, демонстрирующее вычислительную эффективность предложенного дифференциального аналога.

Ключевые слова: полная проблема собственных значений-функций, метод А.Н. Крылова, однопараметрические матрицы, дифференциальные преобразования, дифференциальный аналог, модельный пример.

Введение. Известно много методов для решения полной проблемы собственных значений числовых матриц, например [1-4]. Среди них особое место занимает метод А.Н. Крылова, обладающий простотой и эффективностью вычислительных процедур.

Дифференциальные аналоги ряда методов для решения полной проблемы собственных значений-функций однопараметрических матриц, основанные на дифференциальных преобразованиях [5], предложены в монографии [6] (например, регулярный численно-аналитический метод с явными и неявными вычислительными схемами, метод Жирара-Виета для параллельного определения всех корней алгебраических многочленов с переменными коэффициентами, метод фон-Мизеса (для решения частной проблемы собственных значений-функций), $QR^{ДП}$-аналог определения комплексных собственных значений-функций однопараметрических матриц).

В настоящей работе предлагается дифференциальный численно- аналитический аналог метода А.Н. Крылова для решения полной проблемы собственных значений-функций однопараметрических матриц $A(t)$ порядка n, основанный на дифференциальных преобразованиях [5, 6].

Математический аппарат

1. Согласно методу А.Н. Крылова [3], для матрицы $A_{n\times n}$ берётся произвольный начальный вектор $C_0 = (c_{01}, ..., c_{0n})^T$ и по рекуррентному соотношению

$$C_i = A \cdot C_{i-1},\ i = \overline{1,\ n} \tag{1}$$

строится конечная последовательность векторов-столбцов

$$C_1 = A \cdot C_0 = (c_{11}, ..., c_{1n})^T, \tag{2}$$

$$C_2 = A \cdot C_1 = (c_{21}, ..., c_{2n})^T, \tag{3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_n = A \cdot C_{n-1} = (c_{n1}, ..., c_{nn})^T. \tag{4}$$

Далее составляется линейная неоднородная система конечных уравнений

$$C_{n-1} \cdot P_1 + C_{n-2} \cdot P_2 + ... + C_1 \cdot P_{n-1} + C_0 \cdot P_n = C_n \tag{5}$$

с невырожденной матрицей

$$\underset{n\times n}{C} = [C_{n-1}, C_{n-2}, ...,\ C_1,\ C_0] \tag{6}$$

(т.е. при условии

$$rang\, C = n) \tag{7}$$

и n-мерным вектором-столбцом

$$P = (P_1, ..., P_n)^T. \tag{8}$$

Иначе говоря, строится система

$$\underset{n\times n}{C} \cdot \underset{n\times 1}{P} = \underset{n\times 1}{C_n}, \tag{9}$$

в которой, как оказывается, элементы вектора (8) точно совпадают с коэффициентами собственного многочлена матрицы *A*. Таким образом, легко строится характеристическое уравнение матрицы *A*

$$P(\lambda) = \lambda^n + P_1 \cdot \lambda^{n-1} + P_2 \cdot \lambda^{n-2} + ... + P_{n-1} \cdot \lambda + P_n = 0, \tag{10}$$

затем находятся корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}, \lambda_n$ этого уравнения или, что одно и то же, все собственные числа матрицы *A*.

Если при выборе некоторого произвольного начального вектора C_0 условие (7) полноранговости матрицы *C* нарушается, т.е. имеет место условие

$$rang\, C < n, \tag{11}$$

то при этом используется аппарат минимальных аннулирующих многочленов [3], при которых решается частная проблема собственных значений. Использование некоторого множества произвольных начальных векторов C_0 в итоге также приводит к решению полной проблемы собственных значений, однако при сравнительно большом объеме вычислительных процедур.

Утверждение 1. Вне зависимости от выбора произвольного начального вектора C_0, соотношение (7) является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости полной проблемы собственных значений матрицы A.

2. Теперь рассмотрим полную проблему собственных значений-функций однопараметрических матриц A(t) порядка n. Естественно, при этом произвольный начальный вектор $C_0(t)=(c_{01}(t),...,c_{0n}(t))^T$ и соотношения (1)-(11) остаются в силе с точностью до однопараметрических векторов-столбцов $C_i(t),\ P_i(t),\ i=\overline{1,n}$ собственных значений-функций $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,\ n}$ и матрицы $C(t)$. Далее, имея в виду последнее обстоятельство и допустив, что при этом имеют место следующие дифференциальные преобразования [5, 6]:

$$A(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K A(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\doteq A(t)=\chi_1\big(t,t_\nu,H,A(K),\ K=\overline{0,\infty}\big),\quad(12)$$

$$C_i(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K C_i(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\doteq C_i(t)=\chi_2(t,t_\nu,H,C_i(K),K=\overline{0,\infty}),\ i=\overline{0,n},\quad(13)$$

$$C(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K C(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\doteq C(t)=\chi_3(t,t_\nu,H,C(K),\ K=\overline{0,\infty}),\quad(14)$$

$$P_i(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K P_i(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\doteq P_i(t)=\chi_4(t,t_\nu,H,P_i(K),K=\overline{0,\infty}),\ i=\overline{1,n},\quad(15)$$

$$P(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K P(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\doteq P(K)=\chi_5(t,t_\nu,H,P(K),\ K=\overline{0,\infty}),\quad(16)$$

$$\lambda_i(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K \lambda_i(t)}{dt^K}\Big|_{t=t_\nu},\ K=\overline{0,\infty}\doteq \lambda_i(t)=\chi_6(t,t_\nu,H,\ \lambda_i(K),K=\overline{0,\infty}),i=\overline{1,n}\quad(17)$$

(где $A(K)$ и $C(K)$, $K=\overline{0,\ \infty}$ - матричные дискреты матриц $A(t)$ и $C(t)$ соответственно; $C_i(K)$ и $P_i(K)$, $K=\overline{0,\ \infty}$, $i=\overline{1,\ n}$ – векторные дискреты векторов $C_i(t)$ и $P_i(t)$, $i=\overline{1,\ n}$ соответственно; $\lambda_i(K)$, $K=\overline{0,\ \infty}$, $i=\overline{1,\ n}$ – дискреты собственных значений-функций $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,\ n}$; $K=\overline{0,\ \infty}$ – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; символ $\overset{\cdot}{=}$ – знак перехода из области оригиналов в область дифференциальных изображений и наоборот; $\chi_1(\cdot),...,\chi_6(\cdot)$ – некоторые аппроксимирующие функции, восстанавливающие оригиналы $A(t)$, $C_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $C(t)$, $P_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, $P(t)$ и $\lambda_i(t)$, $i=\overline{1,n}$ соответственно), перейдем к соответствующему дифференциальному аналогу решения рассматриваемой проблемы.

Аналогичное (1) однопараметрическое соотношение из области оригиналов переведем в область дифференциальных изображений. При этом, согласно алгебре дифференциальных преобразований, будем иметь представление

$$C_i(K)=\sum_{l=0}^{K} A(l)\cdot C_{i-1}(K-l),\ K=\overline{0,\infty},\ i=\overline{1,n}. \tag{18}$$

Точно так же, в соответствии с (9) получим представление

$$C_n(K)=\sum_{l=0}^{K} C(\ell)\cdot P(K-l),\ K=\overline{0,\infty}, \tag{19}$$

откуда, определив векторные дискреты $P(K)$, $K=\overline{0,\infty}$, в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием (16) можно определить и вектор $P(t)$. В частности, при маклореновском и тейлоровском дифференциальных преобразованиях будем иметь представления

$$P(t)=\sum_{K=0}^{\infty} P(K)\cdot t^K, \tag{20}$$

$$P(t)=\sum_{K=0}^{\infty} P(K)\cdot (t-t_v)^K \tag{21}$$

соответственно.

Далее, имея коэффициенты-функции $P_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, в соответствии с (10) получим аналогичное представление

$$P(\lambda(t),t)=\lambda^n(t)+P_1(t)\cdot\lambda^{n-1}(t)+P_2(t)\cdot\lambda^{n-2}(t)+...+P_{n-1}(t)\cdot\lambda+P_n(t)=0. \tag{22}$$

Определение собственных значений-функций матрицы $A(t)$ (или корней этого характеристического уравнения) можно осуществить также на основе дифференциальных преобразований, в частности, используя явную или неявную вычислительные схемы, предложенные в [5, с. 130, 131].

Утверждение 2. Вне зависимости от выбора произвольного начального вектора $C_0(t)$ (который, в частности, может обладать и постоянными компонентами), аналогичное (7) соотношение

$$rang\, C = n \tag{23}$$

является необходимым и достаточным условием однозначной разрешимости полной проблемы собственных значений-функций однопараметрической матрицы $A(t)_{n\times n}$.

Модельный пример. Рассмотрим задачу определения собственных значений – функций однопараметрической матрицы

$$A(t) = \begin{bmatrix} (2+t+t^2) & (-1+t) & 0 \\ (-1+t) & (2-t) & (-1+t) \\ 0 & (-1+t) & (2-t^2) \end{bmatrix}.$$

При $t_\nu = 0,\ H = 1$, очевидно, она обладает матричными дискретами

$$A(0) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},\quad A(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\quad A(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A(K) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \forall K \geq 3.$$

<u>Первый этап вычислений (*i* = 1)</u>

Имеем

$$A(t)\cdot C_0(t) = C_1(t),$$

откуда, например, выбрав $C_0(t) = (3,2,1)^T$, получим:

<u>при *K*=0</u>*:*

$$C_1(0) = A(0)\cdot C_0(0) = (4,0,0)^T;$$

<u>при *K*=1</u>*:*

$$C_1(1) = A(1)\cdot C_0(0) + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_0(1)} = (5,2,2)^T;$$

при *K*=2:

$$C_1(2) = A(2)\cdot C_0(0) + A(1)\cdot \cancelto{0}{C_0(1)} + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_0(2)} = (3,0,-1)^T;$$

при *K*=3:

$$C_1(3) = \cancelto{0}{A(3)}\cdot C_0(0) + A(2)\cdot \cancelto{0}{C_0(1)} + A(1)\cdot \cancelto{0}{C_0(2)} + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_0(3)} = (0,0,0)^T$$

и т.д.

Следовательно, маклореновское представление $C_1(t)$ имеет вид

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} (4+5\cdot t+3\cdot t^2) \\ 2\cdot t \\ (2\cdot t - t^2) \end{pmatrix}.$$

Второй этап вычислений (*i* = 2)

Имеем

$$C_2(t) = A(t)\cdot C_1(t),$$

откуда:

при *K*=0:

$$C_2(0) = A(0)\cdot C_1(0) = (8,-4,0)^T;$$

при *K*=1:

$$C_2(1) = A(1)\cdot C_1(0) + A(0)\cdot C_1(1) = (4,4,0)^T + (8,-3,2)^T = (12,1,2)^T;$$

при *K*=2:

$$C_2(2) = A(2)\cdot C_1(0) + A(1)\cdot C_1(1) + A(0)\cdot C_1(2) =$$
$$= (4,0,0)^T + (7,5,2)^T + (6,-2,-2)^T = (17,3,0)^T;$$

при *K*=3*:*

$$C_2(3) = \cancelto{0}{A(3)} \cdot C_1(0) + A(2)\cdot C_1(1) + A(1)\cdot C_1(2) + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_1(3)} =$$
$$= (5,0,-2)^T + (3,2,0)^T = (8,2,-2)^T;$$

при *K*=4*:*

$$C_2(4) = \cancelto{0}{A(4)} \cdot C_1(0) + \cancelto{0}{A(3)} \cdot C_1(1) + A(2)\cdot C_1(2) + A(1)\cdot \cancelto{0}{C_1(3)} + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_1(4)} =$$
$$= (3,0,1)^T;$$

при *K*=5*:*

$$C_2(5) = \cancelto{0}{A(5)} \cdot C_1(0) + \cancelto{0}{A(4)} \cdot C_1(1) + \cancelto{0}{A(3)} \cdot C_1(2) + A(2)\cdot \cancelto{0}{C_1(3)} + A(1)\cdot \cancelto{0}{C_1(4)} +$$
$$+ A(0)\cdot \cancelto{0}{C_1(5)} = (0,0,0)^T$$

и т.д.

Следовательно, маклореновское представление $C_2(t)$ имеет вид

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} (8+12\cdot t+17\cdot t^2+8\cdot t^3+3\cdot t^4) \\ (-4+t+3\cdot t^2+2\cdot t^3) \\ (2\cdot t+0\cdot t^2-2t^3+t^4) \end{pmatrix}.$$

Третий этап вычислений (i=3)

Имеем

$$C_3(t) = A(t)\cdot C_2(t),$$

откуда:

при *K*=0*:*

$$C_3(0) = A(0)\cdot C_2(0) = (20,-16,4)^T;$$

при *K*=1*:*

$$C_3(1) = A(1)\cdot C_2(0) + A(0)\cdot C_2(1) = (4,12,-4) + (23,-12,3) = (27,0,-1)^T;$$

при *K*=2*:*

$$\begin{aligned} &C_3(2) = A(2)\cdot C_2(0) + A(1)\cdot C_2(1) + A(0)\cdot C_2(2) = \\ &= (8,0,0)^T + (13,13,1)^T + (31,-11,-3)^T = (52,2-2)^T; \end{aligned}$$

при *K*=3*:*

$$\begin{aligned} &C_3(3) = \cancelto{0}{A(3)}\cdot C_2(0) + A(2)\cdot C_2(1) + A(1)\cdot C_2(2) + A(0)\cdot C_3(3) = \\ &= (12,0,-2)^T + (20,14,3)^T + (14,-2,-6)^T = (46,12-5)^T; \end{aligned}$$

при *K*=4*:*

$$\begin{aligned} &C_3(4) = \cancelto{0}{A(4)}\cdot C_2(0) + \cancelto{0}{A(3)}\cdot C_2(1) + A(2)\cdot C_2(2) + A(1)\cdot C_2(3) + A(0)\cdot C_2(4) = \\ &= (17,0,0)^T + (10,4,2)^T + (6,-4,2)^T = (33,0,4)^T; \end{aligned}$$

при *K*=5*:*

$$\begin{aligned} &C_3(5) = \cancelto{0}{A(5)}\cdot C_2(0) + \cancelto{0}{A(4)}\cdot C_2(1) + \cancelto{0}{A(3)}\cdot C_2(2) + A(2)\cdot C_2(3) + \\ &+ A(1)\cdot C_2(4) + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_2(5)} = (8,0,2)^T + (3,4,0)^T = (11,4,2)^T; \end{aligned}$$

при *K*=6*:*

$$\begin{aligned} &C_3(6) = \cancelto{0}{A(6)}\cdot C_2(0) + \cancelto{0}{A(5)}\cdot C_2(1) + \cancelto{0}{A(4)}\cdot C_2(2) + \cancelto{0}{A(3)}\cdot C_2(3) + \\ &+ A(2)\cdot C_2(4) + A(1)\cdot \cancelto{0}{C_2(5)} + A(0)\cdot \cancelto{0}{C_2(6)} = (3,0,-1)^T; \end{aligned}$$

<u>при *K*=7</u>*:*

$$C_3(7)=\cancelto{0}{A(7)}\cdot C_2(0)+\cancelto{0}{A(6)}\cdot C_2(1)+\cancelto{0}{A(5)}\cdot C_2(2)+\cancelto{0}{A(4)}\cdot C_2(3)+\cancelto{0}{A(3)}\cdot C_2(4)+$$
$$+A(2)\cdot \cancelto{0}{C_2(5)}+A(1)\cdot \cancelto{0}{C_2(6)}+A(0)\cdot \cancelto{0}{C_2(7)}=(0,0,0)^T$$

и т.д.

Следовательно, маклореновское представление $C_3(t)$ имеет вид

$$C_3(t)=\begin{pmatrix}(20+27\cdot t+52\cdot t^2+46\cdot t^3+33\cdot t^4+11\cdot t^5+3\cdot t^6)\\ (-16+2\cdot t^2+12\cdot t^3+4\cdot t^5)\\ (4-t-2\cdot t^2-5\cdot t^3+4\cdot t^4+2\cdot t^5-t^6)\end{pmatrix}.$$

<u>Четвертый этап вычислений</u>

Построим в соответствии с (9) систему уравнений

$$\left[\begin{array}{c|c|c}(8+12\cdot t+17\cdot t^2+8\cdot t^3+3\cdot t^4) & (4+5\cdot t+3\cdot t^2) & 3\\ (-4+t+3\cdot t^2+2\cdot t^3) & 2\cdot t & 2\\ (2t-2\cdot t^3+t^4) & (2\cdot t-t^2) & 1\end{array}\right]\cdot\begin{pmatrix}P_1(t)\\ P_2(t)\\ P_3(t)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(20+27\cdot t+52\cdot t^2+46\cdot t^3+33\cdot t^4+11\cdot t^5+3\cdot t^6)\\ (-16+2\cdot t^2+12\cdot t^3+4\cdot t^5)\\ (4-t-2\cdot t^2-5\cdot t^3+4\cdot t^4+2\cdot t^5-t^6)\end{pmatrix},$$

откуда имеем матричные дискреты

$$C(0)=\begin{bmatrix}8 & 4 & 3\\ -4 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad C(1)=\begin{bmatrix}12 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix},\quad C(2)=\begin{bmatrix}17 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},$$

$$C(3)=\begin{bmatrix}8 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C(4)=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C(5)=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$C(6)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad C^{-1}(0)=\begin{bmatrix} 0 & -0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,5 & -1,75 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и векторные дискреты

$C_3(0)=(20,-16,4)^T$, $C_3(1)=(27,0,-1)^T$, $C_3(2)=(52,2,-2)^T$, $C_3(3)=(46,12,-5)^T$,
$C_3(4)=(33,0,4)^T$, $C_3(5)=(11,4,2)^T$, $C_3(6)=(3,0,-1)^T$, $C_3(K)=(0,0,0)^T$, $\forall K\geq 7$.

Следовательно,

при *K*=0*:*

$$C_3(0)=C(0)\cdot P(0),$$

откуда

$$(P_1(0),P_2(0),P_3(0))^T=(6,-10,4)^T;$$

при *K*=1*:*

$$C_3(1)=C(1)\cdot P(0)+C(0)\cdot P(1),$$

откуда

$$(P_1(1),P_2(1),P_3(1))^T=(0,-4,7)^T;$$

при *K*=2*:*

$$C_3(2)=C(2)\cdot P(0)+C(1)\cdot P(1)+C(0)\cdot P(2),$$

откуда

$$(P_1(2),P_2(2),P_3(2))^T=(0,3,-4)^T;$$

при *K*=3*:*

$$C_3(3)=C(3)\cdot P(0)+C(2)\cdot P(1)+C(1)\cdot P(2)+C(0)\cdot P(3),$$

откуда

$$(P_1(3),P_2(3),P_3(3))^T=(0,1,-3)^T;$$

при *K*=4*:*

$$C_3(4)=C(4)\cdot P(0)+C(3)\cdot P(1)+C(2)\cdot P(2)+C(1)\cdot P(3)+C(0)\cdot P(4),$$

откуда

$$(P_1(4), P_2(4), P_3(4))^T = (0, 1, -1)^T;$$

<u>при *K*=5</u>*:*

$$C_3(5) = \cancelto{0}{C(5)} \cdot P(0) + C(4) \cdot P(1) + C(3) \cdot P(2) + C(2) \cdot P(3) + C(1) \cdot P(4) + C(0) \cdot P(5),$$

откуда

$$(P_1(5), P_2(5), P_3(5))^T = (0, 0, 1)^T;$$

<u>при *K*=6</u>*:*

$$C_3(6) = \cancelto{0}{C(6)} \cdot P(0) + \cancelto{0}{C(5)} \cdot P(1) + C(4) \cdot P(2) + C(3) \cdot P(3) + C(2) \cdot P(4) +$$
$$+ C(1) \cdot P(5) + C(0) \cdot P(6),$$

откуда

$$(P_1(6), P_2(6), P_3(6))^T = (0, 0, 0)^T$$

и т.д.

Следовательно, маклореновское представление векторов коэффициентов $P(t)$ в соответствии с (20) имеет вид

$$P(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ (-10 - 4 \cdot t + 3 \cdot t^2 + t^3 + t^4) \\ (\ 4\ + 7 \cdot t - 4 \cdot t^2 - 3t^3 - t^4 + t^5) \end{pmatrix},$$

а характеристическое уравнение матрицы $A(t)$:

$$P(\lambda(t),\ t) = (-1)^3 \cdot [\lambda^3(t) - 6 \cdot \lambda^2(t) - (-10 - 4 \cdot t + 3 \cdot t^2 + t^3 + t^4) \cdot \lambda(t) -$$
$$-(4 + 7 \cdot t - 4t^2 - 3t^3 - t^4 + t^5)] = 0.$$

Нетрудно убедиться, что точно к такому же результату приводит метод непосредственного развертывания определителя рассматриваемой матрицы, т.е. $\det[A(t) - \lambda(t) \cdot E] = 0.$

<u>Пятый этап вычислений</u>

Теперь, используя явную схему [5,с.131], вычислим дискреты $\lambda_1(K),\ \lambda_2(K), \lambda_3(K), K=\overline{0,2}$, используя последнее характеристическое уравнение.

Имеем:

<u>при *K*=0</u>*:*

$$P(\lambda(t),t)\ \Big|_{t_\nu=0}=\lambda^3(0)-6\cdot\lambda^2(0)+10\cdot\lambda(0)-4=0,$$

откуда

$$\lambda_1(0)=2,\ \lambda_2(0)=2+\sqrt{2},\ \lambda_3(0)=2-\sqrt{2};$$

<u>при *K*=1</u>*:*

$$\frac{\partial P(\lambda(t),t)}{\partial t}\ \Big|_{t_\nu=0}=3\cdot\lambda^2(t)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}-12\cdot\lambda(t)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}-(-4+6\cdot t+3\cdot t^2+4\cdot t^3)\cdot\lambda(t)-$$
$$-(-10-4\cdot t+3\cdot t^2+t^3+t^4)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}-(7-8t-9\cdot t^2-4\cdot t^3+5\cdot t^4)\ \Big|_{t_\nu=0}=$$
$$=3\cdot\lambda^2(0)\cdot\lambda(1)-12\cdot\lambda(0)\cdot\lambda(1)+4\cdot\lambda(0)+10\cdot\lambda(1)-7=0,$$

откуда

$$\lambda_1(1)=0,5;\ \lambda_2(1)=-0,25-\sqrt{2};\ \lambda_3(1)=-0,25+\sqrt{2};$$

<u>при *K*=2</u>*:*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P(\lambda(t),t)}{\partial t^2}\ \Big|_{t_\nu=0}=6\cdot\lambda(t)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}+3\cdot\lambda^2(t)\cdot\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}-12\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}-12\cdot\lambda(t)\cdot\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}-$$
$$-(6+6\cdot t+12\cdot t^2)\cdot\lambda(t)-(-4+6\cdot t+3\cdot t^2+4\cdot t^3)\cdot\frac{d\lambda(t)}{dt}-$$
$$-(-4+6\cdot t+3\cdot t^2+4\cdot t^3)\frac{d\lambda(t)}{dt}-(-10-4\cdot t+3\cdot t^2+t^3+t^4)\cdot\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}-$$
$$-(7-8\cdot t-9\cdot t^2-4\cdot t^3+5\cdot t^4)\ \Big|_{t_\nu=0}=$$
$$=6\cdot\lambda(0)\cdot\lambda(1)+3\cdot\lambda^2(0)\cdot\lambda(2)-12\cdot\lambda(1)-12\cdot\lambda(0)\cdot\lambda(2)-$$
$$-6\cdot\lambda(0)+4\cdot\lambda(1)+4\cdot\lambda(1)+10\cdot\lambda(2)-7=$$
$$=(3\cdot\lambda^2(0)-12\cdot\lambda(0)+10)\cdot\lambda(2)+(6\cdot\lambda(0)-4)\cdot\lambda(1)-(6\cdot\lambda(0)+7)=0,$$

откуда

$$\lambda_1(2)=-7,5;\ \lambda_2(2)=8,25+3,875\cdot\sqrt{2};\ \lambda_3(2)=8,25-3.875\cdot\sqrt{2}$$

и т.д.

Ограничимся первыми тремя найденными дискретами для всех собственных значений-функций. При этом будем иметь следующие приближенные собственные значения–функции:

$$\lambda_1(t) = 2 + 0,5 \cdot t - 7,5 \cdot t^2 + ...,$$
$$\lambda_2(t) = (2+\sqrt{2}) - (0,25+\sqrt{2}) \cdot t + (8,25+3,875 \cdot \sqrt{2}) \cdot t^2 + ...,$$
$$\lambda_3(t) = (2-\sqrt{2}) - (0,25-\sqrt{2}) \cdot t + (8,25-3,875 \cdot \sqrt{2}) \cdot t^2 + ... \ .$$

Таким образом, решена полная проблема собственных значений-функций матрицы $A(t)$ при выполнении условия полноранговости матрицы $C(0)$, т.е. при rang $C(0)$=3. При невыполнении последнего условия, т.е при rang $C(0)$<3, пришлось бы воспользоваться аппаратом минимальных аннулирующих многочленов, решающим частную проблему собственных значений-функций. Так, например, при выборе произвольного вектора $C_0(t) = (1, (1+t), (1-t))^T$ получаем матрицу

$$C(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

с рангом

$$\text{rang}\ C(0)=2 \leq 3$$

и минимальным аннулирующим многочленом второго порядка, позволяющим определять начальные дискреты

$$\lambda_2(0) = 2+\sqrt{2},$$
$$\lambda_3(0) = 2-\sqrt{2},$$

а при выборе произвольного начального вектора $C_0(t) = (1; 0; -1)^T$ – матрицу

$$C(0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -1 \end{bmatrix},$$

с рангом

$$\text{rang}\ C(0)=1 < 3$$

и минимальным аннулирующим многочленом первого порядка, позволяющим определять начальную дискрету

$$\lambda_1(0) = 2 .$$

Ход вычислительных процедур по определению последующих дискретов и собственных значений-функций, естественно, аналогичен уже рассмотренному.

Заключение. Таким образом, для решения полной проблемы собственных значений-функций однопараметрических матриц предложен дифференциальный аналог метода А.Н. Крылова, все операции которого эффективно выполняются исключительно на основе использования дифференциальных преобразований Г.Е. Пухова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Кублановская В.Н.** О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений // ЖВМ и МФ. - 1961. - 1, № 4. – С. 555-570.
2. **Уилкинсон Дж.** Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970. – 564 с.
3. **Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.Н.** Вычислительные методы высшей математики / Под ред. И.П. Мысовских. – Минск: Вышейшая школа, 1972. - Т.1. – 584 с.
4. **Парлетт Б.** Симметричная проблема собственных значений (Численные методы). - М.: Мир, 1983. - 384 с.
5. **Пухов Г.Е**. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. - Киев: Наукова думка, 1984. - 420 с.
6. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований: Монография. - Ереван: Изд-во ГИУА “Чартарагет”, 2010. - 364 с.

Национальный политехнический университет Армении. Материал поступил в редакцию 15.05.2019.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ

Ա.Ն. ԿՌԻԼՈՎԻ ՄԵԹՈԴԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՆՄԱՆԱԿԸ ՄԻԱՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐ – ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼՐԻՎ ՀԻՄՆԱԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Առաջարկվել է Ա.Ն. Կռիլովի մեթոդի դիֆերենցիալ նմանակը՝ միապարամետրական մատրիցների սեփական արժեքներ-ֆունկցիաների լրիվ հիմնախնդրի լուծման համար։ Ստացվել է խնդրի միարժեք լուծելիության անհրաժեշտ և բավարար պայմանը։ Դիտարկվել է մեկ մոդելային օրինակի լուծումը, որը ցուցադրել է առաջարկված դիֆերենցիալ նմանակի հաշվողական արդյունավետությունը։

Առանցքային բառեր. սեփական արժեքներ-ֆունկցիաների լրիվ հիմնախնդիր, Ա.Ն. Կռիլովի մեթոդ, միապարամետրական մատրիցներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, դիֆերենցիալ նմանակ, մոդելային օրինակ։

S.H. SIMONYAN

THE DIFFERENTIAL ANALOGUE OF THE A.N. KRYLOV METHOD FOR SOLVING THE COMPLETE PROBLEM OF ITS OWN VALUES - FUNCTIONS OF ONE-PARAMETRIC MATRICES

A differential analogue of the A.N. Krylov method of for solving the complete eigenvalue problem - functions of one-parameter matrices is proposed. A necessary and sufficient condition for the unique solvability of the problem is obtained. A solution of one model example is considered, which demonstrates the computational efficiency of the proposed differential analogue.

Keywords: complete problem of eigenvalues-functions, method A.N. Krylov, one-parametric matrices, differential transformations, differential analogue, model example.