

УДК 535.4

РАДИОЭЛЕКТРОНИКА

DOI: 10.53297/0002306X-2022.v75.2-272

**А.Ж. ХАЧАТРЯН, К.А. ТОРЧЯН, А.Ф. ПАРСАМЯН, В.Н. АГАБЕКЯН**  
**КВАЗИТОЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛНОВОГО**  
**ПОЛЯ**

Рассматривается задача приближенного волнового поля в так называемых ближней, средней и дальней зонах наблюдения. Показана возможность введения более точного, по сравнению с приближением Френеля, так называемого квазиточного приближения. Для задачи интерференции получено распределение интенсивности в ближней зоне наблюдения, а также в приближениях Френеля и Фраунгофера. Показано, что положения максимумов интенсивности в ближней зоне наблюдения определяются кубическим уравнением.

*Ключевые слова:* суперпозиционное поле, приближенное описание, интерференционная картина, ближняя зона наблюдения.

**Введение.** Как известно, одной из центральных проблем теории волн является задача описания волнового поля в областях, далеких от генерирующих, переизлучающих или поглощающих данное поле источников и поверхностей [1, 2]. Обычно в предположении, что влияние генерированного поля на процесс генерации волн источниками мало, данную задачу в теории волн называют дифракционной. В общем случае решение дифракционной задачи представляет собой трудную математическую проблему, которую даже в приближенном виде, как правило, приходится выполнять численно [3-13]. Наиболее известными методами приближенного рассмотрения дифрагированного поля являются так называемые картины Френеля и Фраунгофера.

Обоснованность применения того или иного приближения обычно комментируется близостью или удаленностью области наблюдения от месторасположения источников и влияющих на распространение волн поверхностей. Вместе с тем хорошо известно, что такой комментарий обязательно должен быть в связке с длиной волны излучения. Т.е. если для одной длины волны данная дистанция наблюдения попадает, например, в среднюю зону наблюдения, где может быть применено приближение Френеля, то та же самая дистанция для другого значения длины волны может попасть, например, уже в ближнюю зону. Поэтому, в свете сказанного, в теории дифракции, помимо пространственных параметров задачи, вводится также еще один дополни-

тельный, так называемый волновой параметр. Помимо накладываемых на пространственные параметры задачи ограничений, условие применимости приближенного описания поля обосновывается также ограничением, накладываемым на значения волнового параметра. В последующем на основе данных значений волнового параметра вводятся понятия ближней, средней и дальней волновых зон наблюдения.

В рамках данной работы для описания волнового поля нами рассматривается возможность введения более точного, по сравнению с приближениями Френеля и Фраунгофера, так называемого квазиточного приближения. На основе задачи приближенного описания поля сферической волны показано, что частным случаем квазиточного приближения является приближение Френеля. В свою очередь, приближение Фраунгофера является частным случаем приближения Френеля. В рамках квазиточного приближения нами также рассматривается задача интерференции для двух источников.

**Продольные и поперечные пространственные параметры для описания сферического поля.** Пусть расположение источника и точки наблюдения указываются исходящими из точки  $O$  векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{R}$  (см. рис. 1). Тогда, как известно, для случая гармонического поля в точке наблюдения волновое поле описывается выражением

$$U(\vec{R}, t) = a \cdot \cos \left[ \omega t - k \left| \vec{R} - \vec{r} \right| \right] / \left| \vec{R} - \vec{r} \right|, \quad (1)$$

где  $a$  - амплитуда, а  $\omega$  и  $k$  - частота и волновое число волны.

Предположим, что наблюдения волнового поля (1) проводятся в окрестностях некоторой точки  $O'$ , положение которой задается исходящим из точки  $O$  вектором  $\vec{R}_0$ . Далее направление вектора  $\vec{R}_0$  будем называть главным направлением наблюдения,  $R_0 = \left| \vec{R}_0 \right|$  - основной дистанцией наблюдения, а точку  $O'$  - центральной точкой наблюдения. Пусть положение точки наблюдения указывается исходящим из точки  $O'$  вектором  $\Delta \vec{R}$ . Тогда, как видно из рис. 1, выполняется следующее векторное соотношение:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \Delta \vec{R}. \quad (2)$$

Следуя работам [13, 14], введем перпендикулярный и параллельный к вектору  $\vec{R}_0$  вектора  $\vec{R}_\perp$  и  $\vec{R}_\parallel$  (см. рис. 1):

$$\vec{R} - \vec{r} = \vec{R}_0 + \Delta \vec{R} - \vec{r} = \vec{R}_\perp + \vec{R}_\parallel. \quad (3)$$

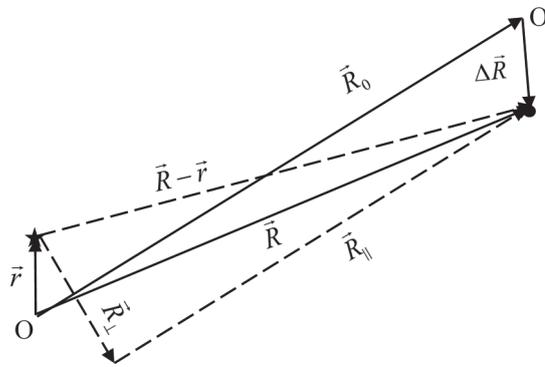


Рис. 1. Продольные и поперечные пространственные параметры для задачи приближенного описания сферического поля

Далее величины  $\vec{R}_\perp, \vec{R}_\parallel$  будем называть поперечным и продольным векторами наблюдения, а их модули  $R_\perp = |\vec{R}_\perp|$ ,  $R_\parallel = |\vec{R}_\parallel|$  - поперечной и продольной дистанциями наблюдения.

Пользуясь равенствами (3), запишем волновое поле (1) в следующем виде:

$$U(\vec{R}, t) = a \cos \left[ \omega t - k \sqrt{R_\parallel^2 + R_\perp^2} \right] / \sqrt{R_\parallel^2 + R_\perp^2}. \quad (4)$$

Рассматривая разложения данного выражения по степеням отношения  $(R_\perp / R_\parallel)^2$ , можно показать, что при выполнении условий

$$(R_\perp / R_\parallel)^2 \ll 1 \text{ и } R_\perp^2 k / R_\parallel \gg 2\pi \quad (5)$$

волновое поле точечного источника (4) может быть представлено выражением

$$U(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_\parallel} \cos \left[ \omega t - k \cdot \left( R_\parallel + \frac{R_\perp^2}{2R_\parallel} - \frac{R_\perp^4}{8R_\parallel^3} \right) \right]. \quad (6)$$

Представление сферического поля в виде (6) целесообразно называть квазиточным приближением, или приближением ближней зоны наблюдения.

При условиях

$$(R_\perp / R_\parallel)^2 \ll 1 \text{ и } R_\perp^2 k / R_\parallel \sim 2\pi \quad (7)$$

для волнового поля (4) применимо следующее выражение:

$$U(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_{\parallel}} \cos \left[ \omega t - k \cdot \left( R_{\parallel} + \frac{R_{\perp}^2}{2R_{\parallel}} \right) \right]. \quad (8)$$

Данное выражение соответствует сферическому полю в приближении Френеля, или приближению в средней зоне наблюдения. Заметим, что из двух условий (7) непосредственным образом следует, что (см. (6))

$$R_{\perp}^4 k / R_{\parallel}^3 \ll 2\pi. \quad (9)$$

В приближенной картине Фраунгофера, или в приближении дальнего поля, когда

$$\left( R_{\perp} / R_{\parallel} \right)^2 \ll 1 \text{ и } R_{\perp}^2 k / R_{\parallel} \ll 2\pi, \quad (10)$$

волновое поле записывается в виде

$$U(\vec{R}, t) = a \cos \left[ \omega t - k \cdot R_{\parallel} \right] / R_{\parallel}. \quad (11)$$

Согласно формуле (11), волновое поле в приближении Фраунгофера, в отличие от квазитонового приближения и приближения Френеля (см. (6) и (8)), зависит только лишь от продольной дистанции наблюдения.

**Эквифазные поверхности в приближенных описаниях.** Как видно из формул (5) - (11), а также из рис. 2, во всех вышеотмеченных приближениях картины поля условие малости отношений квадратов поперечной и продольной дистанций наблюдения является необходимым. Далее величину

$$\tau = \left( R_{\perp} / R_{\parallel} \right)^2 \quad (12)$$

будем называть отношением наблюдения. Одновременно с этим необходимо заметить, что применимость того или иного приближения определяется значением величины

$$\sigma = R_{\perp}^2 k / R_{\parallel}. \quad (13)$$

В теории дифракции данная величина является хорошо известной, и она называется волновым параметром [1, 2].

Легко заметить, что значение волнового параметра зависит как от продольной дистанции наблюдения, так и от значения поперечной дистанции наблюдения. Следовательно, выполнение второго условия для каждого из приближений может быть обеспечено изменением как  $R_{\parallel}$ , так и  $R_{\perp}$ . Как

правило, при фиксированном значении  $R_{\perp}$ , когда изменение значения величины  $\sigma$  обусловлено изменением продольной дистанции наблюдения  $R_{\parallel}$ , приближенный подход называют приближением по зоне наблюдения. Если наблюдения проводятся при фиксированном значении  $R_{\parallel}$ , а изменения значения  $\sigma$  связываются с изменением  $R_{\perp}$ , то обычно говорят о приближении по полю.

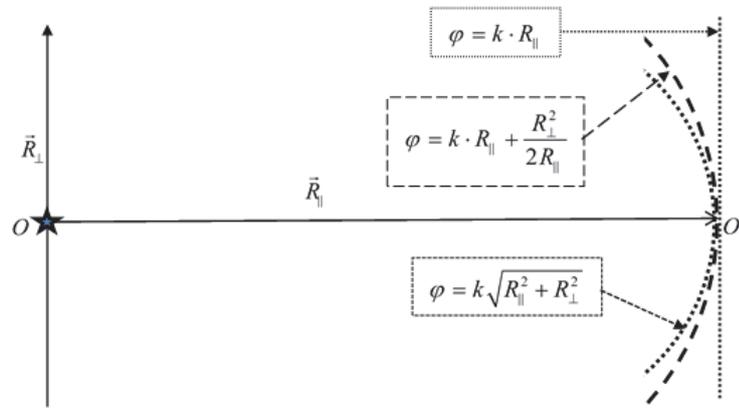


Рис. 2. Эквифазные поверхности: точный вид, вид в картине Френеля и вид в картине Фраунгофера

Как легко увидеть из соотношений (3), если  $|\vec{R}_0| \gg |\Delta\vec{R}|$  и  $|\vec{R}_0| \gg |\vec{r}|$ , то для величин (12), (13) и амплитуды поля применима также запись

$$\tau = \left( \frac{R_{\perp}}{R_0} \right)^2, \quad \sigma = \frac{R_{\perp}^2}{R_0} k \quad \text{и} \quad \frac{a}{R_{\parallel}} = \frac{a}{R_0}, \quad (14)$$

т.е. роль продольной дистанции наблюдения фактически определяется основной дистанцией наблюдения. В соответствии с (14) выражения для сферического волнового поля в квазитоном приближении (6), а также в приближениях Френеля (8) и Фраунгофера (11) примут вид

$$U(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_0} \cos \left[ \omega t - k \cdot R_{\parallel} - k \cdot \sigma + \frac{R_{\perp}^2}{8R_0^2} \cdot \sigma \right], \quad (15)$$

$$U(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_0} \cos \left[ \omega t - k \cdot R_{\parallel} - k \cdot \sigma \right], \quad (16)$$

$$U(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_0} \cos[\omega t - k \cdot R_{\parallel}]. \quad (17)$$

На плоскости  $R_{\perp}$ ,  $R_{\parallel}$  рис. 2 изображены три вида эквифазной поверхности сферической волны: ее точный вид  $k\sqrt{R_{\parallel}^2 + R_{\perp}^2}$  (см. (4)), ее вид в картине Френеля  $k \cdot (R_{\parallel} + R_{\perp}^2 / (2R_{\parallel}))$  (см. (8)) и ее вид в картине Фраунгофера  $k \cdot R_{\parallel}$  (см. (11)); звездочкой указано положение источника. Для удобства источник был помещен в начальной точке  $O$ . Как видно из рисунка, в картине Френеля сферическая волна аппроксимируется параболоидной волной, которая, в свою очередь, в картине Фраунгофера аппроксимируется плоской волной. Из рисунка также следует, что чем ближе точка наблюдения к центральной точке наблюдения  $O'$ , тем более адекватным становится приближенное описание поля. В пределах малого участка плоскости наблюдения, включающего в себя точку  $O'$ , все три поверхности, а именно - сфера, параболоида и плоскость, представляются почти неразличимыми. Их различие проявляется по мере удаления от точки  $O'$ . Ясно также, что при больших отклонениях точки наблюдения от точки  $O'$  параболическая поверхность по своему топологическому виду более близка к сфере, нежели плоская поверхность.

**Интерференционная картина в ближнем поле.** Применим представленные выше результаты к классической задаче интерференции полей двух источников сферических волн (см. рис. 3):

$$U(\vec{R}, t) = U_1(\vec{R}, t) + U_2(\vec{R}, t), \quad (18)$$

$$U_j(\vec{R}, t) = a \cos[\omega t - k|\vec{R} - \vec{r}_j|] / |\vec{R} - \vec{r}_j|, \quad (19)$$

где  $\vec{r}_j$  ( $j=1,2$ ) являются векторами, определяющими положения источников. В случае приближенного описания суперпозиционного поля (18) для сферических полей (19) будем рассматривать поперечные и продольные вектора наблюдения  $\vec{R}_j^{\perp}$  и  $\vec{R}_j^{\parallel}$  (см. (4)):

$$U_j(\vec{R}, t) = a \cos\left[\omega t - k\sqrt{(R_j^{\parallel})^2 + (R_j^{\perp})^2}\right] / \sqrt{(R_j^{\parallel})^2 + (R_j^{\perp})^2}. \quad (20)$$

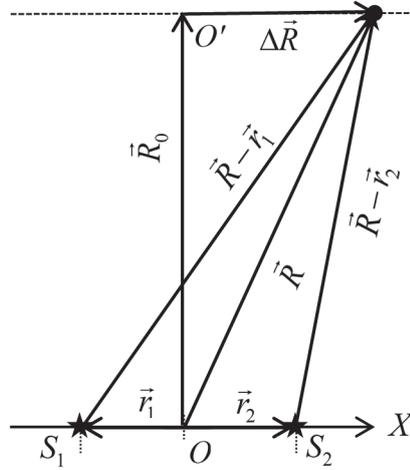


Рис. 3. Схема интерференционного опыта

Как известно, в классическом виде задача интерференции рассматривается в приближении Френеля (см. (8)), т.е. описание поля дается в средней зоне наблюдения, причем за направление наблюдения выбирается прямая, перпендикулярная оси, проходящей сквозь источники (см. ниже, а также в [9]). Вместе с тем определенный интерес представляет рассмотрение интерференционной картины в ближней зоне наблюдения, которой, как было указано выше, соответствует так называемое квазиточное приближение (см. (6)).

Пусть начальная точка проходящей сквозь источники оси  $X$  расположена посередине между источниками  $S_1$  и  $S_2$  (см. рис. 3). Тогда, обозначая расстояние между источниками посредством  $d$ , для векторов  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$ , определяющих положение источников, можем написать

$$\vec{r}_1 = -d \cdot \vec{i} / 2 \text{ и } \vec{r}_2 = d \cdot \vec{i} / 2. \quad (21)$$

На рис. 2 показан также исходящий из центральной точки наблюдения  $O'$  вектор  $\Delta \vec{R}$ . Предполагая, что он параллелен оси  $X$ , а также учитывая (21), для поперечных и продольных дистанций наблюдения (см. (20)) можем написать

$$\vec{R}_1^\perp = (\rho + d/2) \cdot \vec{i}, \quad \vec{R}_2^\perp = (\rho - d/2) \cdot \vec{i}, \quad \vec{R}_1^\parallel = \vec{R}_2^\parallel = \vec{R}_0, \quad (22)$$

где  $\Delta \vec{R} = \rho \cdot \vec{i}$ . В соответствии с формулами (14), (22) для каждого из источников будем также рассматривать параметры отношения наблюдения и волновой параметр:

$$\tau_1 = \frac{(\rho + d/2)^2}{R_0^2}, \quad \tau_2 = \frac{(\rho - d/2)^2}{R_0^2}, \quad (23)$$

$$\sigma_1 = \frac{(\rho + d/2)^2}{R_0} k, \quad \sigma_2 = \frac{(\rho - d/2)^2}{R_0} k. \quad (24)$$

С целью применения квазиточного приближения (см. (5)) для интерференционного опыта должны быть выполнены следующие условия:

$$\tau_{1,2} \ll 1 \text{ и } \sigma_{1,2} \gg 2\pi. \quad (25)$$

В этом случае, согласно (15), волновые поля источников (20) примут вид

$$U_1(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_0} \cos \left[ \omega t - k \cdot R_0 - k \cdot \sigma_1 + \frac{(\rho + d/2)^2}{8R_0^2} \cdot \sigma_1 \right], \quad (26)$$

$$U_2(\vec{R}, t) = \frac{a}{R_0} \cos \left[ \omega t - k \cdot R_0 - k \cdot \sigma_2 + \frac{(\rho - d/2)^2}{8R_0^2} \cdot \sigma_2 \right]. \quad (27)$$

Далее рассмотрим интенсивность волнового поля:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(\vec{R}, t) dt, \quad (28)$$

где  $T = 2\pi / \omega$  - период колебаний. Используя (18), (26) и (27), можно показать, что

$$I = \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 \left( 1 + \cos \left[ \frac{d \cdot \rho}{R_0} k - \frac{d \cdot \rho}{R_0} k \cdot \frac{(d^2 + 4\rho^2)}{8 \cdot R_0^2} \right] \right). \quad (29)$$

Полученный результат может быть также назван квазиточным выражением для распределения интенсивности в интерференционном опыте.

Как легко увидеть из выражения (29), при условии

$$d \cdot \rho \cdot k / R_0 \sim 2\pi \quad (30)$$

интенсивность поля принимает вид

$$I = \left( \frac{a}{R_0} \right)^2 \left( 1 + \cos \left[ \frac{d \cdot \rho}{R_0} k \right] \right). \quad (31)$$

Заметим, что согласно первому условию (25), а также (23):

$$(d^2 + 4\rho^2)/R_0^2 \ll 1. \quad (32)$$

Выражение (31) есть не что иное, как интенсивность интерференционного опыта в картине Френеля (см., например, [14]). При условии, когда

$$d \cdot \rho \cdot k / R_0 \ll 2\pi, \quad (33)$$

из формулы (31) следует выражение для интенсивности поля в картине Фраунгофера:

$$I = 2 \left( \frac{a}{R_0} \right)^2. \quad (34)$$

На рис. 4 приведены распределения приведенной интенсивности  $J_2(\rho) = I / 2(a / R_0)^2$  в квазиточном приближении (сплошная линия) и в приближении Френеля (пунктирная линия) для четырех различных значений  $R_0 = 0,5 \text{ m}$ ;  $1 \text{ m}$ ;  $1,5 \text{ m}$  и  $2 \text{ m}$ , когда  $\lambda = 0,64 \cdot 10^{-6} \text{ m}$  и  $d = 0,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ .

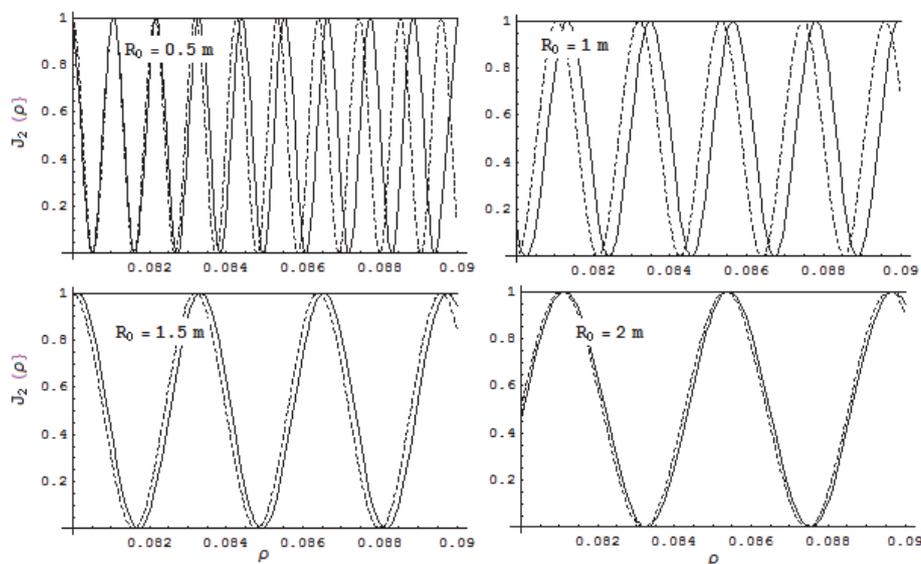


Рис. 4. Распределения приведенной интенсивности  $J_2(\rho)$  в квазиточном приближении (сплошная линия) и в приближении Френеля (пунктирная линия) для четырех различных значений:  $R_0 = 0,5 \text{ m}$ ;  $1 \text{ m}$ ;  $1,5 \text{ m}$  и  $2 \text{ m}$ , когда  $0,08 \text{ m} \leq \rho \ll 0,09 \text{ m}$

Как видно из представленных графиков, при увеличении значения  $R_0$  разность между квазиточным приближением и приближением Френеля стирается. Из рисунков также следует, что при более точном, по сравнению с приближением Френеля, рассмотрении положения максимумов интенсивности получаются более отдалёнными от центральной точки наблюдения. Заметим также, что аperiодическое распределение точек максимумов интенсивности проявляется при малых значениях  $R_0$ .

**Заключение.** Таким образом, в рамках настоящей работы на примере задачи интерференции волновых полей от двух точечных источников показана возможность введения более точного, по сравнению с картинами Френеля и Фраунгофера, приближенного описания суперпозиционного поля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Борн М., Вольф Э.** Основы оптики. – М.: Наука, 1973. – 720 с.
2. **Горелик Г.С.** Колебания и волны. – М.: Физматлит, 2007. – 656 с.
3. Resonant properties of composite structures consisting of several resonant diffraction gratings / **L.L. Doskolovich, E.A. Bezus, D.A. Bykov, et al** // Optics Express. -2019. -V .27. – P. 25814-25828.
4. **Gordon R.** Near-field interference in a double slit in a perfect conductor// J. Opt. A: Pure Appl. Opt. -2006. –V. 8. –P. L1-L3.
5. **Castaneda R., Toro W., Garcia-Sucerquia J.** Evaluation of the limits of application for numerical diffraction methods based on basic optics concepts// Optik. – 2015.- V. 126.- P. 5963-5970.
6. **Doskolovich L.L., Kazansky N.L., Kharitonov S.I., Soifer V.A.** A method of designing diffractive optical elements focusing into plane areas// Journal of Modern Optics.- 1996.-V.43.- P. 1423-1433.
7. **Popescu G., Ikeda T., Dasari R.R., Feld M.S.** Diffraction phase microscopy for quantifying cell structure and dynamics// Opt. Lett. –2006.-V. **31**.-P. 775–777.
8. **Zhang W., Zhang H., Sheppard C.J.R., Jin G.** Analysis of numerical diffraction calculation methods: from the perspective of phase space optics and the sampling theorem// J. Opt. Soc. Am. A. – 2020. -V. 37.- P. 1748–1766.
9. **Zhang W., Zhang H., Jin G.** Frequency sampling strategy for numerical diffraction calculations// Optics Express. - 2020. - V. 28.- P. 39916-39932.
10. **Крысанов Д.В., Кюркчан А.Г., Маненков С.А.** Два подхода к решению задачи дифракции на сфере Януса// Акустический журнал.- 2021.- Т. 67. – С. 126-137.
11. **Wang P., Xu Yu, Wang W., Wang Zh.** Analytic expression for Fresnel diffraction// J. Opt. Soc. Am. A.- 1998.-V. 15.-P. 684–688.
12. **Couder Y., Fort E.** Single-particle diffraction and interference at a macroscopic scale// Rev. Lett. -2006.- V. 97.- P. 154101.

13. **Khachatryan A.Zh.** To the problem of description of the wave field radiating by a system of point coherently sources// J. Contemp. Phys.- 2021.- V. 56.- P. 313–323.
14. **Khachatryan A.Zh., Panosyan Zh. R., Khachatyan Zh. B.** About the path sum in the interference pattern of a wave field generated by two coherent point sources// Optik.- 2021.-V. 245.- P. 167682.

Национальный политехнический университет Армении; Институт прикладных проблем физики НАН РА. Материал поступил в редакцию 04.07.2022.

**Ա.Ճ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ, Կ.Ա. ԹՈՐՉՅԱՆ, Ա. Փ. ՊԱՐՍԱՄՅԱՆ, Վ.Ն. ԱՂԱԲԵԿՅԱՆ**

**ԱԼԻԲՍՅԻՆ ԴԱՇՏԻ ՔՎԱԶԻՃՇԳՐԻՏ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒՄԸ**

Դիտարկված է ալիքային դաշտի մոտավոր նկարագրման խնդիրը, այսպես կոչված, հարակից, միջին և հեռու դիտման գոտիներում: Ցույց է տրված Ֆրենելի մոտավորության նկատմամբ ավելի ճշգրիտ, այսպես կոչված, քվազի ճշգրիտ մոտավորության ներմուծման հնարավորությունը: Ինտերֆերենցիայի խնդրի համար ստացվել է ինտենսիվության բաշխվածությունը դիտման հարակից գոտում, ինչպես նաև Ֆրենելի և Ֆրանգոֆերի պատկերները: Ցույց է տրվել, որ հարակից գոտում ինտենսիվության մաքսիմումները որոշվում են խորանարդային հավասարումով:

**Առանցքային բառեր.** դաշտերի վերադրում, մոտավոր նկարագրում, ինտերֆերենցիոն պատկեր, դիտման հարակից գոտի:

**A. Zh. KHACHATRYAN, K.A. TORCHYAN, A.F. PARSAMYAN,  
V.N. AGHABEKYAN**

**QUASITIVE APPROXIMATION FOR DESCRIBING OF THE WAVE FIELD**

The problem of an approximate wave field in the so-called near, middle and far zones of observation is considered. The possibility of introducing a more accurate than the Fresnel approximation, the so-called quasi-exact approximation, is indicated. For the interference problem, the intensity distribution is obtained in the near field of observation, as well as in the Fresnel and Fraunhofer approximations. It is shown that the positions of intensity maxima in the near zone of observation are determined by a cubic equation.

**Keywords:** superposition field, approximate description, interference pattern, near zone of observation.