

Г.А. ГЕВОРКЯН

ПРИЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЁННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА-ЭЙЛЕРА К ЗАДАЧАМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИХ МЕХАНИЗМОВ

Получены результаты, достигнутые при моделировании упругих динамических систем как с разомкнутыми, так и с замкнутыми кинематическими цепями, которые послужили надёжными предпосылками для приложения обобщённого метода Ньютона-Эйлера к задачам оптимального управления упругих механизмов.

Ключевые слова: следящий манипулятор, упругие деформации, траектория движения исполнительного органа, минимизация функции отклонения.

Введение. В предлагаемой статье приводятся итоги решения задачи точного воспроизведения заданной траектории движения исполнительного органа упругим манипулятором. В качестве воспроизводимой траектории движения предварительно выбирается окружная траектория, а в роли следящей динамической системы выступает трёхзвенный манипулятор с упругим звеном [1].

В такой постановке задача сводится к динамическому анализу упругого манипулятора в присутствии внешней (дополнительной) склерономной связи, традиционное решение которой ассоциируется с процедурой обращения матрицы масс упругого манипулятора при участии неопределённых множителей Лагранжа.

Предложенная в публикации [2] методика освобождения механизмов от внешних голономных связей с приложением эквивалентных внешних усилий к формально-свободным моделям этих систем позволяет аналогичным образом и при поддержке стандартных расчётных процедур произвести динамический анализ рассматриваемого следящего манипулятора в присутствии дополнительной связи обобщённым методом Ньютона-Эйлера, как это производилось для динамических систем с разомкнутыми кинематическими цепями в работах [3 - 5].

1. Формулировка задачи оптимального управления. Рассмотрим трёхзвенный манипулятор (рис. 1), состоящий из неподвижной и недеформируемой опорной стойки C_0 , абсолютно жёсткого звена C_1 и упругого звена C_2 . Предполагая связи между звеньями идеальными, поместим упругий манипулятор в потенциальное поле силы тяжести.

Когда звено C_2 предполагается абсолютно жёстким, конец второго звена A_3 в точности описывает дугу окружности $A_3A'_3$ (рис. 1) при движении манипулятора с законами, удовлетворяющими условию $A_1A_3 = R = \text{Const}$. Очевидно, что это условие обеспечивается лишь в том случае, если замкнутый контур $A_1A_2A_3A_1$ сохраняется неизменным на протяжении всего интервала действия следящего манипулятора.

Когда же звено C_2 принимается упругим, точное воспроизведение желаемой траектории путём односложного выбора законов движения не представляется возможным. В

самом деле, вследствие упругих перемещений проблема соблюдения постоянства кривизны траектории точки A_3 сводится к задаче минимизации функции отклонения свободного конца A_3 от заданной окружной траектории. А это означает, что воспроизводимая траектория выражает не что иное, как дополнительную геометрическую связь, накладываемую на движение упругого трёхзвенного манипулятора [1]. Эта внешняя склерономная связь подчиняется следующему тригонометрическому уравнению:

$$\begin{aligned} & [L_1 \cos(q_1^r) + L_2 \cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y \sin(q_1^r + q_2^r)]^2 + \\ & + [L_1 \sin(q_1^r) + L_2 \sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y \sin(q_1^r + q_2^r)]^2 = R^2; \end{aligned} \quad (1)$$

$$|L_1 - L_2| \leq R \leq |L_1 + L_2|,$$

где $\omega = \text{Const}$ - угловая скорость вращения контура $A_1 A_2 A_3$ относительно оси вращения, проходящей через точку A_1 .

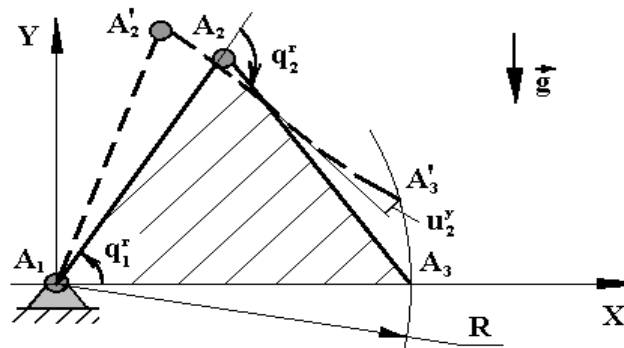


Рис. 1

Длины звеньев C_1 и C_2 следящего манипулятора предположим равными радиусу описываемой окружности, т.е. $R = L_1 = L_2 = 0,35 \text{ м}$, в результате чего замкнутый контур $A_1 A_2 A_3 A_1$ отождествляется с правильным треугольником. Поперечные сечения звеньев будем полагать круглыми с радиусами $r_1 = 6,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ и $r_2 = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, массы звеньев равными $m_1 = 0,309 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,0772 \text{ кг}$, а модуль продольной упругости второго звена $E_2 = 200 \text{ ГПа}$.

Ограничиваясь рассмотрением одной изгибно-упругой степени свободы звена C_2 , т.е. $N_2 = N_2^y = 1$, зададим начальные условия в обобщённых координатах и скоростях: $q_1^r(0) = \pi/3 \text{ рад}$, $q_2^r(0) = -2\pi/3 \text{ рад}$ и $\dot{q}_1^r(0) = 10 \text{ рад/с}$, $\dot{q}_2^r(0) = 0$. Движение исследуемого манипулятора происходит в интервале $t \in [0, T]$, где $T = 0,7 \text{ с}$, по следующим законам: $\omega \equiv \dot{q}_1^r$, $\dot{q}_1^r(t) = 10 \text{ рад/с}$ и $\dot{q}_2^r(t) = 0$, которые формулируют условие обращения замкнутого контура $A_1 A_2 A_3 A_1$ как жёсткого целого вокруг оси вращения, проходящей через точку A_1 .

Процесс численной реализации динамического расчёта предполагается производить в два этапа с применением явной схемы численного интегрирования Ньюмарка. Первый этап усматривает симуляцию движения трёхзвенного манипулятора при отсутствии внешней

геометрической связи (1), тогда как второй этап подразумевает моделирование задачи в общей постановке, т.е. в присутствии дополнительной связи (1).

2. Тестирование задачи при отсутствии внешней связи. Предлагаем результаты первого теста численной реализации динамического анализа упругого манипулятора, полученные при начальных условиях для упругой переменной $q_2^e(0) = \dot{q}_2^e(0) = 0$. Предпринятая реализация теста осуществлена на платформе описанных в [3] алгоритмических процедур при шаге $\Delta t = 10^{-5} c$ явной схемы численного интегрирования Ньюмарка. График функции изгибной деформации от времени представлен на рис. 2 а.

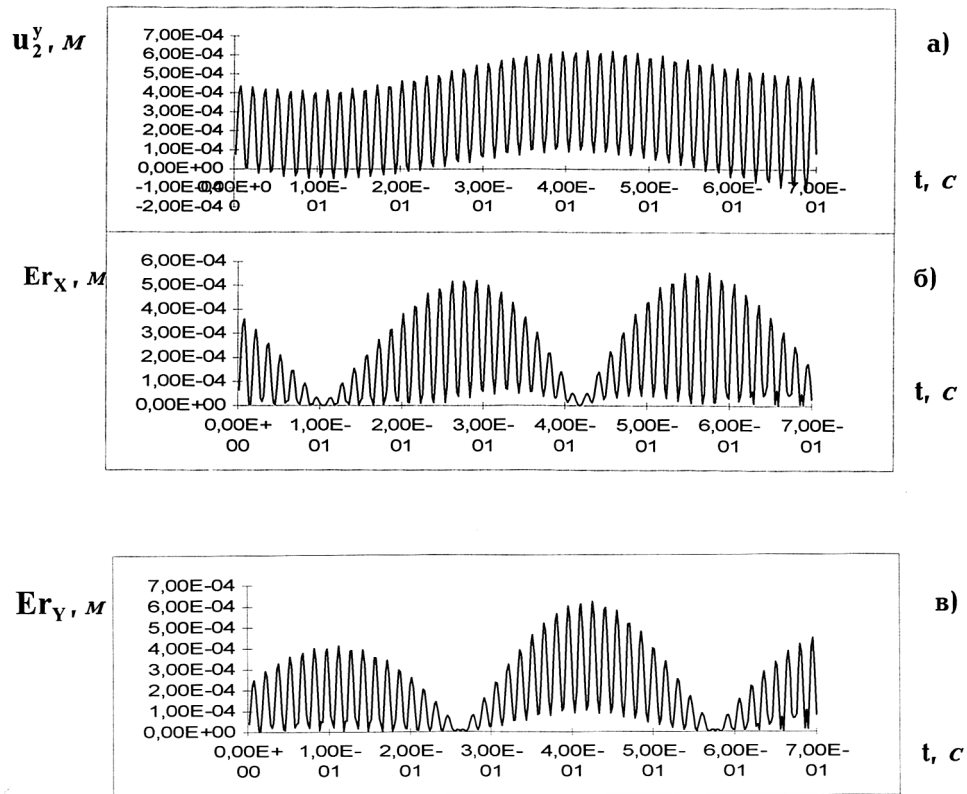


Рис.2

Для оценки отклонения свободного конца A_3 упругого звена C_2 от заданной окружной траектории вследствие деформирования предусматривается функция погрешности Er , которая в проекциях на оси неподвижной системы координат OXY определяется следующими равенствами:

$$\begin{cases} Er_x = |R_x - R_x^*| = |R \cos(\omega t) - [L_1 \cos(q_1^r) + L_2 \cos(q_1^r + q_2^r) - u_2^y \sin(q_1^r + q_2^r)]|; \\ Er_y = |R_y - R_y^*| = |R \sin(\omega t) - [L_1 \sin(q_1^r) + L_2 \sin(q_1^r + q_2^r) + u_2^y \cos(q_1^r + q_2^r)]|. \end{cases} \quad (2)$$

На рис. 2 б и в приводятся графики изменения проекций (2) функции E_{Γ} во времени, генерированные вследствие произведённого теста.

3. Тестирование задачи в присутствии внешней связи. Теперь рассмотрим особенности численной реализации обратной задачи динамики следящего упругого манипулятора [1] в присутствии внешней связи (1). Любопытно отметить, что при $\dot{u}_2^y(A_3, 0) = u_2^y(A_3, 0) \operatorname{tg}(q_1^r + q_2^r)$ имеет место $\ddot{u}_2^y(A_3, t) \equiv 0$, а из этого следует, что при задании начальных условий изгибной деформации и скорости деформации в точке A_3 в виде $u_2^y(A_3, 0) = 10^{-5} \text{ м}$ и $\dot{u}_2^y(A_3, 0) = -1,732 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}$ сохраняется строго линейная зависимость поперечной деформации звена C_2 от времени.

Тест численной реализации поставленной задачи при начальных условиях $u_2^y(A_3, 0) = 10^{-5} \text{ м}$ и $\dot{u}_2^y(A_3, 0) = -7,0 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$ шага интегрирования $\Delta t = 10^{-4} \text{ с}$ явной схемы Ньюмарка осуществлен на базе алгоритма обобщённого метода Ньютона-Эйлера с предварительным подсчётом множителей Лагранжа кодом, предполагающим обращение матрицы масс следящего манипулятора. Результаты теста приводятся на рис. 3 а, б и в.

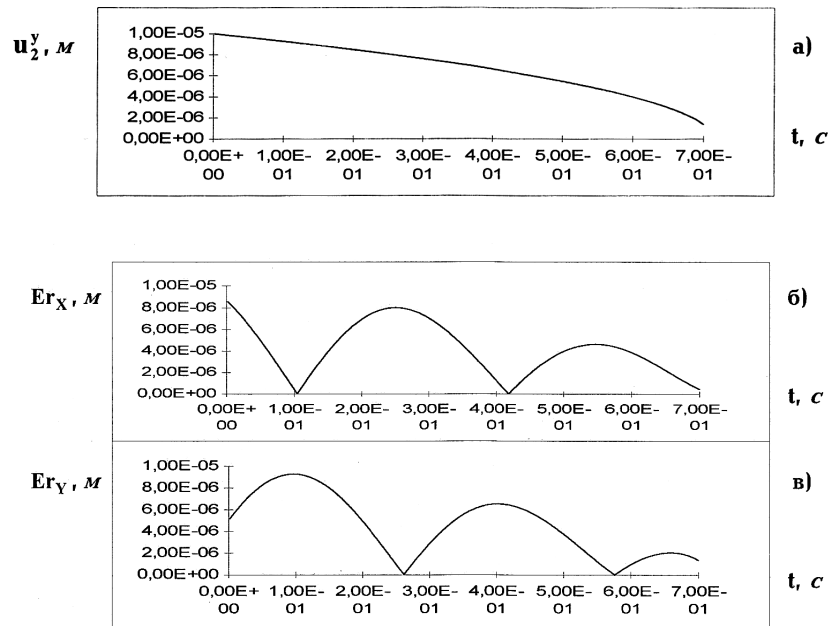


Рис.3

Заключение. Представленное решение задачи минимизации функции отклонения рабочей траектории движения исполнительного органа трёхзвенного упругого манипулятора свидетельствует о хорошей адаптируемости обобщённого метода Ньютона-Эйлера к задачам оптимального управления упругих динамических систем циклического действия.

Как уже отмечалось в [2], обоснованность применения формализма Ньютона-Эйлера к решению данного класса задач тем больше, чем меньше возникает необходимость в расчётах и в перерасчётах неопределённых множителей Лагранжа. Последние подлежат нахождению посредством алгоритмических кодов, использующих процедуру обращения матрицы масс [2], и образуют усилия дополнительной связи, воздействующие на формально-свободную упругую динамическую систему в роли функций управления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Pascal M. and Gagarina T.** A pseudo-rigid model for the dynamical simulation of flexible mechanisms // *Multibody System Dynamics*. - 1999. - V. 3. - P. 303 - 331.
2. **Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих древовидных механических систем в присутствии внешних голономных связей // *Information Technologies and Management*. - Encyclopedia-Armenica. - 2004. - N4. - С. 36 - 43.
3. **Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азуз Н., Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // *Известия НАН РА и ГИУА. Сер.ТН*. - 2004. - Т. 57, N1. - С. 3 - 10.
4. **Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Геворкян Г.А.** Динамический анализ упругих древовидных механических систем без внешних связей // *Известия НАН РА и ГИУА. Сер.ТН*. - 2006. - Т. 59, N1. - С. 3 - 9.
5. **Геворкян Г.А.** Динамический анализ пространственных упругих манипуляторов обобщённым методом Ньютона-Эйлера // *Сб. научных трудов межд. н.-т. конф., посв. 65-летию деп. "Машиностроение" ГИУА*. - 2010. - С. 126 - 128.

ГИУА (П). Материал поступил в редакцию 17.04.2010.

Հ.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

ՆՅՈՒՏՈՆ-ԷՅԼԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ
ՄԵԽԱՆԻԶՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Առաձգական դինամիկական համակարգերի մոդելավորման ոլորտում ստացված նոր արդյունքները, որոնք վերաբերում են ինչպես բաց, այնպես էլ փակ կինեմատիկական շղթաներով մեխանիզմներին, հուսալի նախադրյալներ են ստեղծել առաձգական մեխանիզմների օպտիմալ կառավարման խնդիրներում Նյուտոն-Էյլերի ընդհանրացված մեթոդի կիրառության համար:

Առանցքային բառեր. հետևող մանիպուլյատոր, առաձգական դեֆորմացիաներ, կատարողական օղակի շարժման հետազիծ, շեղման ֆունկցիայի նվազեցում:

H.A. GEVORGYAN

AN APPLICATION OF THE GENERALIZED NEWTON-EULER
METHOD IN THE OPTIMAL CONTROL PROBLEMS
OF FLEXIBLE MECHANISMS

New results achieved on dynamic simulation of open-loop and closed-loop flexible systems by means of the generalized Newton-Euler method are presented. A new application of the generalized Newton-Euler model in the optimal control problems of elastic mechanisms is shown.

Keywords: tracing manipulator, elastic deformations, motion trajectory of executive board, deviation function minimization.