# <UЗUЗUЗUՆԻԳԻՏՈՐԹՅՈՐՆՆԵՐԻԱՉԳԱՅԻՆԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻՏԵՂԵԿԱԳԻՐ ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

 Մեխшնիկш
 75, №1-2, 2022
 Механика

 УДК 539.3
 Doi: 10.54503/0002-3051-2022.75.1-2-27

## РЕЗОНАНСЫ В ВЫНУЖДЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

## Багдасарян Г.Е., Сагоян Р.О., Варданян И.А.

Ключевые слова: Ортотропные оболочки, сверхзвуковой поток газа, резонанс, вынужденные колебания.

## Բաղդասարյան Գ.Ե., Մաղոյան Ռ.Օ., Վարդանյան Ի.Ա. Ռեզոնանսներ օրթոտրոպ թաղանթների ստիպողական ոչ գծային տատանումներում

**Հիմնաբառեր։**Օրթոտրոպ թաղանթներ, գազի գերձայնային հոսանք, ռեզոնանս, ստիպողական տատանումներ

Դիտարկված է կրկնակի կորության ուղղանկյուն օրթոտրոպ թաղանթի ոչ գծային տատանումների խնդիրը։ Ոչ գծային խնդիրների լուծման անալիտիկ մեթոդի հիման վրա, ուսումնասիրվել է խնդրի ոչ գծայնության ազդեցությունը տատանողական պրոցեսի բնութագրիչների վրա։ Յույց է տրված, որ տատանումների ոչ գծային լինելը հանգեցնում է էապես նոր տեսակի ռեզոնանսների ի հայտ գալուն՝ օբերտոնների և սեփական տատանումների պատիկ հաձախականությունների վրա։ Հոդվածում ստացված են բանաձևեր, որոնք ցույց են տալիս ամպլիտուդա-հաձախության կախվածության բնույթը և այդ բանաձները կարող են հիմք հանդիսանալ դիտարկվող թաղանթի ոչ գծային տատանումների բնութագրերի վրա անիզոտրոպիայի և ընդլայնական սահքերի ազդեցությունն ուսումնասիրելու համար։ Առաջարկված է ամպլիտուդա-հաձախականության կախվածության կորի վրա սահմանալին և բիֆուրկացիայի կետերի հայտնաբերման մեթոդ։

## Baghdasaryan G.Y., Saghoyan R.O., Vardanyan I.A. Resonances in forced nonlinear vibrations of orthotropic shells

Keywords: Orthotropic shells; supersonic gas flow; resonance, forced vibrations.

The problem of nonlinear vibrations of an orthotropic shallow shallow shell of double curvature, rectangular in plan, is considered. On the basis of the analytical method for solving nonlinear vibration problems, proposed in [4,6], the influence of problem nonlinearity on the characteristics of oscillatory process is studied. It is shown that the oscillation nonlinearity leads to the appearance of essentially new types of resonances at overtones and at multiple frequencies of natural oscillations. In this paper, the obtained formulas showing the nature of amplitude-frequency dependence can become the basis for studying the effect of anisotropy and transverse shears on the characteristics of nonlinear oscillations of the shell under consideration. A method for finding limit points and bifurcation points on the curve of amplitude-frequency dependence is proposed.

Рассматривается задача нелинейных колебаний прямоугольной в плане ортотропной пологой оболочки двоякой кривизны. На основе аналитического метода решения нелинейных задач колебаний, предложенного в работах [4,6], исследовано влияние нелинейности задачи на характеристики колебательного процесса. Показано, что нелинейность колебаний приводит к появлению существенно новых типов резонансов на обертонах и на кратных частотах собственных колебаний. Полученные в работе формулы, показывающие характер амплитудно-частотной зависимости, могут стать основой для исследования влияния анизотропии и поперечных сдвигов на характеристики нелинейных колебаний рассматриваемой оболочки. Предложен способ нахождения предельных точек и точек бифуркации на кривой амплитудно-частотной зависимости.

#### 1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую ортотропную пологую оболочку постоянной толщины h . Пусть материал оболочки подчиняется обобщенному закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных координатных линий  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  . Координатная поверхность ( $\alpha$ ,  $\beta$ ) совпадает со срединной поверхностью оболочки. Считается, что геометрия срединной поверхности оболочки совпадает с геометрией плоскости и главные кривизны  $k_{\alpha}$  и  $k_{\beta}$  при дифференцировании ведут себя как постоянные.

Принимаются следующие предположения [1,2].

- а) по толщине оболочки нормальные перемещения остаются неизменными,
- б) нормальные напряжения  $\sigma_{\gamma}$  пренебрежимо малы по сравнению с прочими напряжениями,
- в) касательные напряжения  $\, \tau_{\alpha\gamma} \,$  и  $\, \tau_{\beta\gamma} \,$ , согласно гипотезам С.А.Амбарцумяна, имеют вид [1]

$$\tau_{\alpha\gamma} = f(\gamma)\varphi(\alpha, \beta, t)$$

$$\tau_{\beta\gamma} = f(\gamma)\psi(\alpha, \beta, t)$$
(1.1)

где  $\phi(\alpha,\beta,t)$  и  $\psi(\alpha,\beta,t)$  – искомые функции,  $f(\gamma)$  – функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине оболочки, причем  $f(\pm h/2)=0$ ,

г) нормальные перемещения  $w(\alpha, \beta, t)$  сравнимы с толщиной оболочки.

Учитывая принятые предположения и поступая обычным образом [1-3], получим следующую систему дифференциальных уравнений движения оболочки

$$a_{11} \frac{\partial^{4} F}{\partial \alpha^{4}} + \left(a_{66} - 2a_{12}\right) \frac{\partial^{4} F}{\partial \alpha^{2} \partial \beta^{2}} + a_{22} \frac{\partial^{4} F}{\partial \beta^{4}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial \alpha^{2}} + k_{\beta} \frac{\partial^{2} w}{\partial \alpha^{2}} + \frac{\partial^{2} w}{\partial \alpha^{2}} \frac{\partial^{2} w}{\partial \beta^{2}} - \left(\frac{\partial^{2} w}{\partial \alpha \partial \beta}\right)^{2} = 0,$$

$$(1.2)$$

$$2B_{55}I_{0}\left(h/2\right)\frac{\partial\Phi_{1}}{\partial\alpha} + 2B_{44}I_{0}\left(h/2\right)\frac{\partial\Phi_{2}}{\partial\beta} + k_{\alpha}\frac{\partial^{2}F}{\partial\beta^{2}} + k_{\beta}\frac{\partial^{2}F}{\partial\alpha^{2}} + \frac{\partial^{2}w}{\partial\alpha^{2}}\frac{\partial^{2}F}{\partial\beta^{2}} - 2\frac{\partial^{2}w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^{2}F}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^{2}w}{\partial\alpha\partial\beta}\frac{\partial^{2}w}{\partial\alpha^{2}} + Z\left(\alpha,\beta,t\right) = 0$$

$$(1.3)$$

$$D_{11} \frac{\partial^{3} w}{\partial \alpha^{3}} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right) \frac{\partial^{3} w}{\partial \alpha \partial \beta^{2}} + 2B_{55}I_{0}\left(h/2\right)\Phi_{1} =$$

$$= I_{1} \left(B_{11} \frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial \alpha^{2}} + B_{66} \frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial \beta^{2}}\right) + I_{1} \left(B_{12} + B_{66}\right) \frac{\partial^{2} \Phi_{2}}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$(1.4)$$

$$D_{22} \frac{\partial^{3} w}{\partial \beta^{3}} + \left(D_{12} + 2D_{66}\right) \frac{\partial^{3} w}{\partial \alpha^{2} \partial \beta} + 2B_{44} I_{0} \left(h/2\right) \Phi_{2} =$$

$$= I_{1} \left(B_{22} \frac{\partial^{2} \Phi_{2}}{\partial \beta^{2}} + B_{66} \frac{\partial^{2} \Phi_{2}}{\partial \alpha^{2}}\right) + I_{1} \left(B_{12} + B_{66}\right) \frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial \alpha \partial \beta}$$

$$(1.5)$$

$$I_0(\gamma) = \int_0^{\gamma} f(\gamma) d\gamma, \qquad I_1(\gamma) = \int_0^{\gamma} \gamma I_0(\gamma) d\gamma \qquad \left(D_{ik} = B_{ik} \frac{h^3}{12}\right)$$

Здесь  $w(\alpha,\beta,t)$  – прогиб оболочки,  $D_{ik}$  – жесткость при изгибе,  $B_{ik}$  и  $a_{ik}$  – обычные коэффициенты упругости [1],  $\Phi_1=B_{55}^{-1}\phi(\alpha,\beta,t)$ ,  $\Phi_2=B_{44}^{-1}\psi(\alpha,\beta,t)$  – функции, характеризующие поперечные сдвиги,  $F=F(\alpha,\beta,t)$  – функция напряжений, через которую внутренние усилия представляются так:

$$T_{\alpha} = \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2}, \qquad T_{\beta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2}, \qquad S = -\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta}.$$

Поперечная нагрузка  $Z(\alpha, \beta, t)$  складывается из сил инерции, сил демпфирования и нормально приложенной заданной нагрузки  $f(\alpha, \beta, t)$ 

$$Z = -\rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_0 h \lambda \frac{\partial w}{\partial t} + f(\alpha, \beta, t)$$
(1.6)

Здесь  $\rho_0$  — плотность материала оболочки,  $\lambda$  — коэффициент линейного затухания, t — время. Легко заметить, что система (1.2)-(1.5), за исключением уравнения неразрывности (1.2), содержит искомые функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , характеризующие учет поперечных сдвигов.

Здесь, в отличие от обычной системы уравнений нелинейной теории оболочек, вместо двух уравнений имеем четыре уравнения.

Рассматривается шарнирно опертая пологая оболочка, края которой свободно смещаются в плане. Тогда имеем следующие граничные условия: при  $\alpha=0, \ \alpha=a_1$ 

$$w = 0, \quad S = 0, \quad T_{\alpha} = 0, \quad \psi = 0, \quad M_{\alpha} = 0$$
 (1.7)

при 
$$\beta = 0$$
,  $\beta = a_2$ 

$$w = 0$$
,  $S = 0$ ,  $T_{\beta} = 0$ ,  $\varphi = 0$ ,  $M_{\beta} = 0$  (1.8)

3десь  $T_{\alpha}$ ,  $T_{\beta}$  и S- средние усилия на кромках оболочки,

$$M_{\alpha} = -D_{11} \frac{\partial^{2} w}{\partial \alpha^{2}} - D_{12} \frac{\partial^{2} w}{\partial \beta^{2}} + I_{1} \left( B_{11} \frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial \alpha^{2}} + B_{66} \frac{\partial^{2} \Phi_{1}}{\partial \beta^{2}} \right)$$

$$\partial^{2} w \qquad \partial^{2} w \qquad \left( \partial^{2} \Phi_{1} - \partial^{2} \Phi_{2} \right)$$

$$M_{\beta} = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + I_1 \left( B_{22} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \beta^2} + B_{66} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial \alpha^2} \right)$$

Таким образом, задача колебаний рассматриваемой оболочки сводится к решению системы нелинейных уравнений (1.2)-(1.5) при граничных условиях (1.7)-(1.8), когда Z представлена выражением (1.6).

# 2. Сведение поставленной задачи к исследованию нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

Приближенное решение системы (1.2)-(1.5) будем искать в виде

$$w(\alpha, \beta, t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} f_{ik}(t) \sin \lambda_i \alpha \cdot \sin \mu_k \beta$$
 (2.1)

$$\Phi_{1}(\alpha,\beta,t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} p_{ik}(t) \cos \lambda_{i} \alpha \cdot \sin \mu_{k} \beta$$

$$\Phi_{2}(\alpha,\beta,t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} R_{ik}(t) \sin \lambda_{i} \alpha \cdot \cos \mu_{k} \beta \qquad \left(\lambda_{i} = \frac{i\pi}{a_{1}}, \ \mu_{k} = \frac{k\pi}{a_{2}}\right).$$
(2.2)

Здесь  $f_{ik}(t)$ ,  $p_{ik}(t)$ ,  $R_{ik}(t)$  подлежащие определению функции времени t. Рассматривая (2.1) замечаем, что часть граничных условий (1.7)-(1.8) удовлетворяются.

Подставляя (2.1) в (1.2), найдем функцию  $F(\alpha, \beta, t)$ , удовлетворяющую граничным условиям (1.7)-(1.8).

Затем, подставляя значения w,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  соответственно из (2.1) и (2.2) в (1.4) и (1.5), получим линейную алгебраическую систему относительно  $p_{ik}\left(t\right)$  и  $R_{ik}\left(t\right)$ . Решая эту систему, выразим  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  через функции  $f_{ik}\left(t\right)$ .

Для определения  $f_{ik}(t)$  воспользуемся уравнением (1.3). Подставляя (2.1) и (2.2) и найденные выражения для F в (1.3) и решая его методом Бубнова-Галеркина, для  $f_{ik}(t)$  получим систему

$$\frac{d^2 f_{ik}}{dt^2} + 2\lambda \frac{df_{ik}}{dt} + \omega_{ik}^2 f_{ik} + \Psi_{ik} (f_{11}, ..., f_{nm}, M) = 0$$

$$(i = 1, 2, ..., n, k = 1, 2, ..., m)$$
(2.3)

где  $\omega_{ik}$  – частота собственных колебаний оболочки,  $\Psi_{ik}$  – некоторые нелинейные функции.

В дальнейшем ограничимся случаем одночленной аппроксимации. Тогда вместо системы (2.3) в случае цилиндрической панели  $(k_{\alpha}=0)$  получаем следующее нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно безразмерной функции  $y=f_{11}/h$ :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y - ly^2 + dy^3 = q(t). \tag{2.4}$$

Здесь

$$\omega^{2} = \omega_{1}^{2} = \frac{1}{\rho_{0}h} \left[ 2I_{0} (h/2) B_{55} \lambda_{1} P_{11} + 2I_{0} (h/2) B_{44} \lambda_{1} \mu_{1} R_{11} + \frac{k_{\beta}^{2} \lambda_{1}^{4}}{\Delta_{11}} \right],$$

$$q(t) = \frac{4}{\rho_{0}h} \frac{1}{a_{1}a_{2}} \int_{0}^{a_{1}a_{2}} \int_{0}^{a_{1}a_{2}} f(\alpha, \beta, t) \sin \lambda_{1} \alpha \sin \mu_{1} \beta d\alpha d\beta,$$

$$l = -L\omega_1^2 \delta_{11}, \quad d = Q\gamma_{11}\omega_1^2,$$

где

$$\begin{split} P_{11} &= \frac{\lambda_{1}}{Q_{11}} \Big\{ \Big[ D_{11} \lambda_{1}^{2} + \big( D_{12} + 2D_{66} \big) \mu_{1}^{2} \Big] \Big[ 2B_{44} I_{0} \left( h/2 \right) + I_{1} \left( B_{22} \mu_{1}^{2} + B_{66} \lambda_{1}^{2} \right) \Big] - \\ &- I_{1} \left( B_{12} + B_{66} \right) \Big[ D_{22} \mu_{1}^{2} + \big( D_{12} + 2D_{66} \big) \lambda_{1}^{2} \Big] \mu_{1}^{2} \Big\}, \\ R_{11} &= \frac{\mu_{1}}{Q_{11}} \Big\{ \Big[ D_{22} \mu_{1}^{2} + \big( D_{12} + 2D_{66} \big) \lambda_{1}^{2} \Big] \Big[ 2B_{55} I_{0} \left( h/2 \right) + I_{1} \left( B_{11} \lambda_{1}^{2} + B_{66} \mu_{1}^{2} \right) \Big] - \\ &- I_{1} \left( B_{12} + B_{66} \right) \Big[ D_{11} \lambda_{1}^{2} + \big( D_{12} + 2D_{66} \big) \mu_{1}^{2} \Big] \lambda_{1}^{2} \Big\}, \\ Q_{11} &= \Big[ 2B_{55} I_{0} \left( h/2 \right) + I_{1} \left( B_{11} \lambda_{1}^{2} + B_{66} \mu_{1}^{2} \right) \Big] \Big[ 2B_{44} I_{0} \left( h/2 \right) + I_{1} \left( B_{22} \mu_{1}^{2} + B_{66} \lambda_{1}^{2} \right) \Big] - \\ &- I_{1}^{2} \left( B_{12} + B_{66} \right)^{2} \lambda_{1}^{2} \mu_{1}^{2}; \\ L &= \frac{1}{\Omega_{2} h \omega_{2}^{2}}, \quad Q &= \frac{h}{16 \Omega_{2} \omega_{2}^{2}}, \quad \delta_{11} &= -\frac{8 \lambda_{1}^{2} \mu_{1}^{2}}{3 \pi^{2}} \Big( \frac{1}{\alpha_{1} \lambda_{2}^{2}} + \frac{4 \lambda_{1}^{2}}{\lambda_{1}} \Big) k_{\beta} h, \end{split}$$

$$\gamma_{11} = \frac{\lambda_1^2}{a_{22}} + \frac{1}{a_{11}} \mu_1^4, \qquad \Delta_{11} = a_{11} \lambda_1^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda_1^2 \mu_1^2 + a_{22} \mu_1^4.$$

Здесь  $\omega_1$  – частота первой формы малых собственных колебаний оболочки.

## 3. Исследование основного нелинейного уравнения

В предыдущем пункте получили уравнение (2.4). Пусть  $q(t) = q \cdot \cos \theta t$ . Тогда (2.4) примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda \frac{dy}{dt} + \omega^2 y - ly^2 + dy^3 = q\cos\theta t.$$
(3.1)

Член  $2\lambda \, dy/dt$  в уравнении (3.1) характеризует затухание системы, где показатель линейного затухания  $\lambda$  определяется из опытов.

Уравнение типа (3.1) исследовано в [4]. Ниже используются основные результаты, полученные в этой работе и в работе [6].

Из уравнения (3.1), пренебрегая нелинейными членами, находим

$$y'' + 2\lambda y' + \omega^2 y = q \cos \theta t. \tag{3.2}$$

решение которого имеет вид

$$y = a \cdot e^{-\lambda t} \cos(\omega t + c) + b \cos(\theta t + \delta), \tag{3.3}$$

где а и с произвольные постоянные, а

$$b = \frac{q}{\sqrt{\left(\omega^2 - \theta^2\right)^2 + 4\lambda^2 \theta^2}}, \qquad \text{tg}\delta = \frac{2\lambda\theta}{\theta^2 - \omega^2}.$$
 (3.4)

В (3.3) существенным является второй член, т.к. первый экспоненциально убывает со временем, и решение (3.3) через достаточно большой промежуток времени фактически имеет вид

$$y = b\cos(\theta t + \delta),\tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.1) в случае, когда  $q=0\,$  легко можно получить методом последовательных приближений. Имеем

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots, (3.6)$$

$$y_1 = b\cos\omega t$$
,  $y_2 = \frac{lb^2}{2\omega^2} - \frac{lb^2}{6\omega^2}\cos 2\overline{\omega}t$ ,  $y_3 = -\frac{lb^2}{16\omega^2} \left(\frac{l^2}{3\omega^2} - \frac{d}{2}\right)\cos 3\overline{\omega}t$ , (3.7)

$$\overline{\omega} = \omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \dots, \tag{3.8}$$

$$\omega_0 = \omega, \qquad \omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \left(\frac{3d}{8\omega} - \frac{5l^2}{12\omega^2}\right)b^2.$$
(3.9)

Пусть мы находимся вблизи обычного резонанса, т.е.  $\theta = \omega + \varepsilon$ . В формуле (3.4) заменив  $\omega$  на нелинейное значение частоты  $\overline{\omega}$  по формуле (3.8), получим [4]

$$b^{2} \left[ \left( \varepsilon - \kappa b^{2} \right)^{2} + \lambda^{2} \right] = \frac{q^{2}}{4\omega^{2}}, \tag{3.10}$$

где 
$$\kappa = \frac{3d}{8\omega} - \frac{5l^2}{12\omega^2}$$
.

Уравнение (3.10), начиная со следующего значения  $q_{kp}=8\omega^2\lambda^2/|\kappa|$ , имеет три вещественных корня в определенной области частот [3,4]. Границы этой области определяются условием

$$\frac{db}{d\varepsilon} = \frac{-\varepsilon b + \kappa b^2}{\varepsilon^2 + \lambda^2 - 4\kappa \varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4} = \infty$$

или

$$\varepsilon^2 - 4\kappa\varepsilon b^2 + 3\kappa^2 b^4 + \lambda^2 = 0. \tag{3.11}$$

Решая (3.11) совместно с (3.10), находим точки C и D кривой (3.10) (см. Рис.1), в которых а) происходит смена устойчивости на неустойчивость и б) касательные кривой зависимости "амплитуда-частота" в этих точках являются вертикальными. Такие точки называются предельными и определение положения этих точек на указанной кривой является существенным при исследовании устойчивости нелинейных колебаний [6,7]. Отрезок CD соответствует неустойчивым колебаниям системы [6]. В точке C происходит срыв амплитуды, которая скачком падает до точки E. При обратном процессе в точке D амплитуда скачком возрастает до точки B. Это явление сопровождается преодолением некоторого энергетического барьера [7].

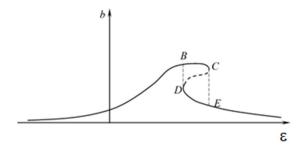


Рис.1

Случай  $\theta = \frac{\omega}{2} + \varepsilon$  и аналогичные ему приводят к возникновению резонансов,

рассмотренных выше, но с меньшей интенсивностью [4,5].

Пусть  $\theta = 2\omega + \epsilon$ . Тогда, аналогичным образом, для амплитуд установившихся колебаний в областях неустойчивости получаются следующие возможные значения:

$$b = 0, (3.12)$$

$$b^{2} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{lq}{6\omega^{2}}\right)^{2} - \lambda^{2}} \right], \tag{3.13}$$

$$b^{2} = \frac{1}{\kappa} \left[ \frac{\varepsilon}{2} - \sqrt{\left(\frac{lq}{6\omega^{2}}\right)^{2} - \lambda^{2}} \right], \tag{3.14}$$

где

$$\varepsilon = \pm \sqrt{\left(\frac{lq}{3\omega^2}\right)^2 - 4\lambda^2}.$$
 (3.15)

Зависимость b от  $\epsilon$  изображена на рис.2.

В интервале AB b=0, т.е. резонанс отсутствует. На участке BD значение b=0 неустойчиво, система находится в состоянии резонанса и получается процесс установления колебаний по линии BK .

В точке K амплитуда скачком падает до значения b=0 и в дальнейшем устойчивым является эта ветвь. Решение DE всюду неустойчиво [4-7].

Таким образом, нелинейность колебаний приводит к появлению существенно новых типов резонансов, т.е. резонансов на обертонах и на кратных частотах собственных колебаний.

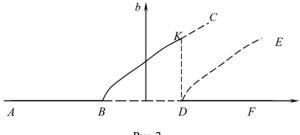


Рис.2

Следует отметить, что эти резонансы имеют автоколебательный характер и существенно отличаются от параметрически возбуждаемых колебаний [7], хотя и возникают на одних и тех же частотах.

В точках B и D происходит бифуркация (разветвление) колебательного состояния: решение, устойчивое до этих точек, после них становится неустойчивым, и наоборот. Исследование резонансов на других частотах не представляет трудностей. Отметим также, что полученные здесь формулы (3.10)-(3.15) позволяют всесторонне исследовать влияние анизотропии и поперечных сдвигов на характеристики рассматриваемых колебаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № 21Т-2С257.

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. Наука, Москва, 1974.
- 2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Наука, Москва, 1972.
- 3. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. Резонанс в вынужденных нелинейных колебаниях слоистых анизотропных оболочек. Известя АН Арм.ССР, Серия Физикоматематические науки, 1961, XIV (1), с. 41-49.
- 4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. Мосва, Физматгиз, 1958.
- 5. Багдасарян Г.Е., Гнуни В.Ц. К теории динамической устойчивости анизотропных оболочек вращения. Известия АН Арм.ССР, Серия Физико-математические науки, 1960, XIII(5), с. 21-30.
- 6. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва, Физматгиз, 1963.
- 7. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1956

## **Information about authors:**

**Baghdasaryan Gevorg Yervand** – Academician of the NAS RA, Professor, Main researcher at the Institute of Mechanics NAS RA Phone.: (010) 355308; E-mail: gevorgb@rau.am

Saghoyan Rafayel Onik – Freelance employer, Institute of Mechanics NAS RA Phone: (093) 248226; E-mail: rafael1984@mail.ru.

Vardanyan Iren Armen – Freelance employer, Institute of Mechanics NAS RA Phone.: (091) 191129; E-mail: irena 123@bk.ru

Поступила в редакцию 05.04.2021