

3. Мовсесян Р. А. и др. Високоточный электрооптический дальномер ТВСД-1200 // Геодезия и картография — 1973. — № 9. — С. 14—18.
4. Экспресс-информация «Радиолокация, телевидение, радиосвязь». — 1966. — № 24. — С. 1—11.

ЕрГУ

15. 1. 1988

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLII, № 6, 1989, с. 312—316

ГИДРАВЛИКА

УДК 556.343.24

С. Ш. НУРЦДЖАНЫ

ФИЛЬТРАЦИЯ В НЕОГРАНИЧЕННЫЙ ПЛАСТ ИЗ ВОДОХРАНИЛИЩА КРУГЛОЙ ФОРМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ УРОВЕННЫМ РЕЖИМОМ

Разработан метод прогноза фильтрации воды из круглого в пласте водоохранилища, в котором уровень воды колеблется по закону косинуса. Фильтрация происходит в неограниченном пласте, расположенном на горизонтальном водоупоре. Получены аналитические выражения для определения деформационной поверхности, расхода воды и стока из водоохранилища.

Библиогр.: 2 назв.

*Մանրագրություն 1-րդ ծածկումը կար հասկանալի չբարձրից, որտեղ քի մակար-
դակը տատանվում է կոսինուսի օրենքով: Մծանցումը տեղի է ունենում դեպի անսահման
փակ շերտ, որը անզուգրված է անջրաթափանց փրկոնակաև շերտի վրա: Ստացված են վեր-
ընթակաև արտահայտություններ դեֆորմսիոն մակերևույթի ջրամբարից քի էլքի ու կրուտու-
նեքի որոշման համար:*

Наблюдения за уровнем режимом целого ряда водоохранилищ, расположенных в горных и предгорных районах, показали, что на многих из них наблюдаются периодические сезонные колебания. В некоторых случаях эти колебания могут быть описаны зависимостью вида

$$h(t) = A_1 - A_2 \cos(2\pi t/T), \quad (1)$$

где $A_1 = 0.5(h_1 + h_2)$, $A_2 = 0.5(h_1 - h_2)$, h_1 и h_2 — максимальная и минимальная глубины воды в водоохранилище. T — период колебания.

Рассмотрим фильтрацию воды из водоохранилища круглой формы в неограниченный пласт, когда колебания уровня воды в нем могут быть описаны зависимостью (1). Дифференциальное уравнение безнапорной плоскорадиальной нестационарной фильтрации в пласте, расположенном на горизонтальном водоупоре, при постоянном коэффициенте фильтрации k имеет вид [1]

$$\mu \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{k}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r h \frac{\partial h}{\partial r} \right), \quad (2)$$

где μ — коэффициент гравитационной емкости при насыщении и гравитационной водоотдачи при осушении пласта.

Кривые условия будут

$$h(r, 0) = h(r), \quad h(r_0, t) = h(t). \quad (3)$$

Уравнение (2) нелинейное и его решение при краевых условиях (3) может быть получено только численными методами. Для аналитического решения, которое имеет большую ценность по сравнению с численным, необходимо произвести линеаризацию уравнения (2). Существуют два основных способа линеаризации этого уравнения.

1. *Первый способ.* Уравнение (2) записывается в виде

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{aT}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right), \quad a = \frac{kh_s}{\mu}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad (4)$$

где a — коэффициент уровнестепроизводительности, h_s — средняя глубина потока.

Задача сводится к решению уравнения (4) при краевых условиях (3). Введем новую функцию $v(r, \tau) = h(r, \tau) - h(\tau)$. Тогда уравнение (4) и краевые условия (3) будут

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{aT}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - 2\pi A_s \sin 2\pi\tau; \quad (5)$$

$$v(r, 0) = h(r) - h_0, \quad v(r_0, \tau) = 0. \quad (6)$$

Решение уравнения (5) может быть найдено с помощью преобразования Вебера [2]

$$\bar{v}(p, \tau) = \int_0^\infty r H(pr) v(r, \tau) dr \quad (7)$$

с ядром преобразования

$$H(pr) = J_0(pr) Y_0(pr_0) - J_0(pr_0) Y_0(pr), \quad (8)$$

где $J_0(pr)$ и $Y_0(pr)$ — функции Бесселя нулевого порядка первого и второго родов.

Применив преобразование (7) к уравнению (5), получим

$$\frac{d\bar{v}(p, \tau)}{d\tau} + m_p \bar{v}(p, \tau) - (4A_s p) \sin 2\pi\tau = 0, \quad (9)$$

где $m_p = aTp^2$.

Решение этого уравнения известно и имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{v}(p, \tau) = & \frac{A_s}{\pi^2 p^2 \omega_{1p}} [m_p \sin 2\pi\tau - 2\pi (\cos 2\pi\tau - \exp(-m_p \tau))] + \\ & + \bar{v}(p, 0) \exp(-m_p \tau), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\omega_{1p} = 1 + (m_p/2\pi)^2.$$

Применив к (10) формулу обращения для преобразования Всбера в виде

$$v(r, z) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{v}(p, z) p H(pr)}{J_0^2(pr_0) + Y_0^2(pr_0)} dp, \quad (11)$$

найдем оригинал искомой функции $v(r, z)$. Возвращаясь к функции $h(r, z)$, получаем

$$h(r, z) = h(z) + \frac{A_2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{H(pr) [R_{1p}(z) + V_{1p}(z)]}{J_0^2(pr_0) + Y_0^2(pr_0)} \cdot \frac{dp}{p} + \\ + \int_0^{\infty} \frac{\bar{v}(p, 0) p H(pr)}{J_0^2(pr_0) + Y_0^2(pr_0)} \exp(-m_p z) dp, \quad (12)$$

где $R_{1p}(z) = (m_p \sin 2\pi z - 2\pi \cos 2\pi z) / \omega_{1p}$, $V_{1p}(z) = 2\pi \exp(-m_p z) / \omega_{1p}$.

Отсюда видно, что через несколько циклов колебаний влияние начального условия практически перестает сказываться и процесс принимает квазистационарный характер, а выражение (12) упрощается и принимает вид

$$h_1(\bar{r}, z) = h(z) + \frac{A_2}{\pi^2} [I_1(\eta, \bar{r}) \sin 2\pi z - 2\pi I_2(\eta, \bar{r}) \cos 2\pi z], \quad (13)$$

где $\bar{r} = r/r_0$, $x = pr_0$, $H(\bar{r}x) = J_0(\bar{r}x) Y_0(x) - J_0(x) Y_0(\bar{r}x)$,

$$\eta = \alpha T_1 r_0^2, \quad \omega_{1x} = 1 + (\eta x^2 / 2\pi)^2,$$

$$I_1(\eta, \bar{r}) = \eta \int_0^{\infty} \frac{x H(\bar{r}x)}{J_0^2(x) + Y_0^2(x)} \cdot \frac{dx}{\omega_{1x}},$$

$$I_2(\eta, \bar{r}) = \int_0^{\infty} \frac{H(\bar{r}x)}{J_0^2(x) + Y_0^2(x)} \cdot \frac{dx}{x \omega_{1x}}.$$

Расход через весь периметр водохранилища в случае квазистационарного режима будет

$$q(1, z) = \frac{2kh_s A_2}{\pi^2} [I_3(\eta) \sin 2\pi z - 2\pi I_6(\eta) \cos 2\pi z], \quad (14)$$

где

$$I_3(\eta) = \eta \int_0^{\infty} \frac{x}{J_0^2(x) + Y_0^2(x)} \cdot \frac{dx}{\omega_{1x}}, \quad I_6(\eta) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \omega_{1x} [J_0^2(x) + Y_0^2(x)]}.$$

Фильтрационный сток через весь периметр водохранилища за время t от начала цикла колебания будет

$$W(1, \tau) = \frac{\hbar h_s T A_2}{\pi^2} |(1 - \cos 2\pi\tau) I_0(\tau) - 2\pi I_0(\tau) \sin 2\pi\tau|, \quad (15)$$

$$0 \leq \tau \leq 1.$$

11. *Второй способ.* Уравнение (2) записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{aT}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right), \quad u(r, \tau) = 0,5h^2(r, \tau) \quad (16)$$

при краевых условиях

$$u(r, 0) = u(r), \quad u(r_m, \tau) = 0,5h^2(\tau).$$

Вводя новую функцию $v(r, \tau) = u(r, \tau) - 0,5h^2(\tau)$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{aT}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -2A_2(2A_1 \sin 2\pi\tau - A_2 \sin 4\pi\tau), \\ v(r, 0) &= u(r) - 0,5h^2, \quad v(r_m, \tau) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Применив к уравнению (17) преобразование Вебера (7), имеем

$$\frac{d\bar{v}(p, \tau)}{d\tau} + m_p \bar{v}(p, \tau) = \frac{2A_2}{p^2} (2A_1 \sin 2\pi\tau - A_2 \sin 4\pi\tau) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{v}(p, \tau) &= \frac{A_2}{\pi^2 p^2} \left\{ \frac{A_1}{\omega_{1p}} [m_p \sin 2\pi\tau - 2\pi (\cos 2\pi\tau - \exp(-m_p \tau))] - \right. \\ &- \frac{A_2}{8\omega_{2p}} [m_p \sin 4\pi\tau - 4\pi (\cos 4\pi\tau - \exp(-m_p \tau))] \left. \right\} + v(p, 0) \exp(-m_p \tau), \\ \omega_{2p} &= 1 + (m_p 4\pi)^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Применив к (18) формулу обращения (11), находим оригинал исходной функции и, возвращаясь к переменной $h(r, \tau)$, получаем

$$\begin{aligned} h(r, \tau) &= \left\{ h^2(\tau) + \frac{2A_2}{\pi^2} \int_0^\tau \left\{ \frac{A_1}{\omega_{1p}} [m_p \sin 2\pi\tau - 2\pi (\cos 2\pi\tau - \exp(-m_p \tau))] - \right. \right. \\ &- \frac{A_2}{8\omega_{2p}} [m_p \sin 4\pi\tau - 4\pi (\cos 4\pi\tau - \exp(-m_p \tau))] \left. \right\} \frac{H(pr)}{J_0^2(pr_0) + Y_0^2(pr_0)} \\ &\quad \left. \frac{dp}{p} + 2 \int_0^\tau \frac{v(p, 0) \exp(-m_p \tau) p H(pr)}{J_0^2(pr_0) + Y_0^2(pr_0)} dp \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

В случае квазиустановившегося режима будем иметь:

$$h(r, z) = \left| h^2(z) + \frac{2A_2}{\pi^2} \left[A_1 I_1(z, \bar{r}) \sin 2\pi z - 2\pi A_1 I_1(z, \bar{r}) \cos 2\pi z - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{A_2}{8} I_2(z, \bar{r}) \sin 4\pi z + \frac{\pi A_2}{2} I_2(z, \bar{r}) \cos 4\pi z \right] \right|^{1/2},$$

где

$$I_2(z, \bar{r}) = \gamma \int_0^{\bar{r}} \frac{H(rx)}{J_0^2(x) + Y_0^2(x)} \cdot \frac{dx}{\omega_{2r}},$$

$$I_1(z, \bar{r}) = \int_0^{\bar{r}} \frac{H(rx) dx}{x \omega_{2r} [J_0^2(x) + Y_0^2(x)]}, \quad \omega_{2r} = 1 + (rx^2/4\pi)^2;$$

$$q(1, z) = \frac{4kA_2}{\pi^2} \left[A_1 I_1(z) \sin 2\pi z - 2\pi A_1 I_1(z) \cos 2\pi z - \right. \\ \left. - \frac{A_2}{8} I_2(z) \sin 4\pi z + \frac{\pi A_2}{2} I_2(z) \cos 4\pi z \right],$$

где

$$I_1(z) = \gamma \int_0^{\infty} \frac{x}{J_0^2(x) + Y_0^2(x)} \cdot \frac{dx}{\omega_{2x}}, \quad I_2(z) = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x \omega_{2x} [J_0^2(x) + Y_0^2(x)]};$$

$$W(1, z) = \frac{2kTA_2}{\pi^2} \left[A_1 I_1(z) (1 - \cos 2\pi z) - 2\pi A_1 I_1(z) \sin 2\pi z - \right. \\ \left. - A_2 I_2(z) (1 - \cos 4\pi z) / 16 + \frac{\pi A_2}{4} I_2(z) \sin 4\pi z \right].$$

Полученные решения могут быть использованы для прогнозирования подпора подземных вод при фильтрации из водоемов круглой формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубарнинова-Кочикова П. Я. Теория движения грунтовых вод.— М.: Наука, 1977.— 664 с.
2. Диткин В. А., Прудников А. И. Интегральные преобразования и операционное исчисление.— М.: Физматгиз, 1961.— 524 с.

БрШЗ им. К. Маркса

22. VI. 1988