ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIX, № 4, 1986 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

С. С. ДАРБИНЯН, А. А. ОВСЕПЯН

К РАСЧЕТУ СООРУЖЕНИЙ НА СЕЙСМИЧЕСКИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ ПО СЕЙСМОГРАММАМ И ВЕЛОСИГРАММАМ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Традиционно установившийся метод расчета сооружений на сейсмостойкость, как правило, в качестве внешнего воздействия принимает акселерограммы землетрясений. При решении некоторых практических задач возникает необходимость определить сейсмические нагрузки, когда заданы сейсмограммы или велосиграммы землетрясений. Известно однако, что численное дифференцирование графически заданных сильно осциллирующих функций приводит к недопустимым погрешностям, способным резко искажать силовую диаграмму рассмотренных систем. Исходя из этого, ставится задача расчета сооружений на сейсмические воздействия с использованием сейсмограмм или велосиграмм, минуя операцию численного дифференцирования.

Рассмотрим колебание сооружения, представленного в виде системы со многими степенями свободы, движение которой описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$m_k \ddot{U}_k(t)+(C_k+C_{k+1})\, U_k(t)-C_k U_{k-1}(t)-C_{k+1} U_{k+1}(t)=-m_k \ddot{U}_0(t), \quad (1)$$
$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

где $U_k(t)$ — горизонтальное перемещение массы m_k; C_k — жесткость системы между массами m_{k-1} и m_k; $U_0(t)$ — закон колебания почвы в виде акселерограммы.

Переходя к обобщенным координатам и вводя диссипативную функцию Релея по эквивалентной гипотезе Фойгта, окончательно получаем систему уравнений, описывающую сейсмические колебания рассматриваемой системы [1]:

$$\ddot{q}_i(t)+\alpha_i\omega_i\dot{q}_i(t)+\omega_i^2 q_i(t)=-\delta_i(\ddot{U}_0), \quad (2)$$
$$i=1,2,3,\ldots,n,$$

где

$$\delta_i=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_{ki}}{a_{1i}}m_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{ki}}{a_{1i}}\right)^2 m_k};$$

ω_i — значения круговых частот системы; $\dfrac{a_{ki}}{a_{1i}}$ — известные величины, зависящие от круговых частот и жесткостей C_k [1]; α_i — коэффициенты внутреннего трения.

Умножая обе части уравнения (2) на $d\xi$ и почленно интегрируя дважды от 0 до t при нулевых начальных условиях, получаем:

$$q_i(t) + d_i\omega_i\int\limits_0^t q_i(\xi)\,d\xi + \omega_i^2\int\limits_0^t d\xi\int\limits_0^t q_i(\xi)\,d\xi = -\delta_i U_0(t), \tag{3}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n.$$

Применяя формулу Коши

$$\int\limits_{t_0}^t d\xi\int\limits_{t_0}^t d\xi\dots\int\limits_{t_0}^t \varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_{t_0}^t (t-\xi)^{n-1}\varphi(\xi)\,d\xi$$

относительно третьего члена левой части уравнения (3), приходим к следующим уравнениям:

$$q_i(t) + \int\limits_0^t K_i(t,\ \xi)\,q_i(\xi)\,d\xi = -\delta_i U_0(t), \tag{4}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,$$

где

$$K_i(t,\ \xi) = \alpha_i\,\omega_i + \omega_i^2(t-\xi). \tag{5}$$

Уравнения (4), характеризующие сейсмическое движение многомассовой системы, являются линейными интегральными уравнениями второго рода типа Вольтерра. Существование единственного решения каждого уравнения системы (4) следует из существования и единственности решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в окрестности точки $t = 0$.

Для численного решения уравнения Вольтерра второго рода на ЭВМ обычно применяются методы итераций. При этом количество итераций зависит от заданной точности искомого решения, что в итоге требует большого количества машинного времени и вносит дополнительные ошибки вычислений. Однако использование «внутренних» свойств уравнения (4), определяющихся ядром, позволяет находить его решение в явном виде [2]:

$$q_i(t) = -\delta_i\left[U_0(t) + \lambda_i\int\limits_0^t R_i(t,\ \xi;\ \lambda_i)\,U_0(\xi)\,d\xi\right],$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ n,$$

где $\lambda_i = -1$; $R_i(t,\ \xi;\ \lambda_i)$ — резольвента интегрального уравнения (4).

В данном случае $R_i(t, \xi; \lambda_i)$ можно построить аналитически. Для этого представим ядро интегральных уравнений (4) $K_i(t, \xi)$ многочленами второй степени относительно t:

$$K_i(t, \xi) = a_{0i} + a_{1i}(t - \xi), \tag{5'}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Тогда резольвенты для (5) будут определяться выражениями [2]:

$$R_i(t, \xi; \lambda_i) = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \frac{\partial^2 g_i(t, \xi; \lambda_i)}{\partial t^2}, \tag{6}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где функции $g_i(t, \xi; \lambda_i)$ являются решениями следующей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2 g_i(t, \xi; \lambda_i)}{\partial t^2} - \lambda_i \left[a_{0i} \frac{\partial g_i(t, \xi; \lambda_i)}{\partial t} + a_{1i} g_i(t, \xi; \lambda_i) \right] = 0, \tag{7}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

удовлетворяющих условиям

$$g_i(t, \xi; \lambda_i)\big|_{t=\xi} = 0, \qquad \frac{\partial g_i(t, \xi; \lambda_i)}{\partial t}\bigg|_{t=\xi} = 1.$$

После некоторых преобразований из системы (7) получаем:

$$g_i(t, \xi; -1) = \frac{1}{\omega_i^*} \exp\left\{- \frac{d_i \omega_i}{2}(t - \xi)\right\} \sin \omega_i^* (t - \xi),$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

где

$$\omega_i^* = \omega_i \sqrt{1 - \frac{\alpha_i^2}{4}}.$$

Следовательно, согласно (6) будем иметь:

$$R_i(t, \xi, -1) = R_i(t - \xi) = \omega_i \exp\left\{- \frac{\alpha_i \omega_i}{2}(t - \xi)\right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\omega_i (2 - \alpha_i^2)}{2\omega_i^*} \sin \omega_i^* (t - \xi) + \alpha_i \cos \omega_i^* (t - \xi) \right].$$

Тогда решение системы интегральных уравнений (4) представляется в виде:

$$q_i(t) = -\delta_i \left[U_0(t) - \int_0^t R_i(t - \xi) U_0(\xi) d\xi, \right. \tag{8}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Задавая в качестве внешнего воздействия закон колебания почвы в виде сейсмограммы и решая систему линейных интегральных уравнений второго рода типа Вольтерра (4), на основе (8) для смещений окончательно получаем:

$$U_k(t) = -U_0(t) + \sum_{i=1}^{n} \eta_{ik} \int_0^t R_i(t-\xi)\, U_0(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

где η_{ik} — коэффициенты формы колебания.

Аналогично можно решить поставленную задачу, задавая в качестве внешнего воздействия закон колебания почвы в виде велосиграммы. В этом случае движение многомассовой системы описывается системой линейных интегро-дифференциальных уравнений вида:

$$\dot{q}_i(t) + \alpha_i \omega_i q_i(t) + \omega_i^2 \int_0^t q_i(\xi)\, d\xi = -\delta_i \dot{U}_0(t), \tag{10}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Применяя к обеим частям (10) преобразование Лапласа, получаем [2]:

$$Q_i(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha_i \omega_i s + \omega_i^2} F_i(s),$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Определяя корни характеристического уравнения второго порядка и переходя во временную область, решение системы (10) в явном виде записываем следующим образом:

$$q_i(t) = -\delta_i \int_0^t K_i(t-\xi)\, \dot{U}_0(\xi)\, d\xi, \tag{11}$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

где

$$K_i(t-\xi) = -\exp\left\{-\frac{\alpha_i \omega_i}{2} t - \xi\right\}\left[\frac{\alpha_i \omega_i}{2\omega_i^*} \sin \omega_i^* (t-\xi) - \cos \omega_i^* (t-\xi)\right].$$

На основе (11) для смещений получим

$$U_k(t) = -\sum_{i=1}^{n} \eta_{ik} \int_0^t K_i(t-\xi)\, \dot{U}_0(\xi)\, d\xi, \tag{12}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Величины поперечных и сейсмических сил определяются формулами:

$$Q_k = C_k (U_k - U_{k-1}); \qquad S_k = Q_k - Q_{k+1}.$$

На этой основе представляется возможным в качестве частного случая использование сейсмограмм и велосиграмм землетрясений для определения спектров реакций. Такой путь определения спектра $\tau(T, \alpha)$ рассматривался в [3].

В зависимости от имеющейся сейсмической информации о кинематических параметрах движения почвы на основе (9) и (12) для спектров перемещений и скоростей будем иметь:

$$\chi(T,\alpha) = \Bigg| -U_0(t) + \frac{2\pi}{T} \int_0^t \exp\left\{-\frac{\alpha\pi}{T}(t-\xi)\right\} \times$$

$$\times \left[\sin\frac{2\pi}{T}(t-\xi) + \alpha\cos\frac{2\pi}{T}(t-\xi) \right] U_0(\xi)\, d\xi \Bigg|_{\max};$$

$$v(T,\alpha) = \Bigg| \int_0^t \exp\left\{-\frac{\alpha\pi}{T}(t-\xi)\right\} \times$$

$$\times \left[\frac{\alpha}{2}\sin\frac{2\pi}{T}(t-\xi) - \cos\frac{2\pi}{T}(t-\xi) \right] U_0(\xi)\, d\xi \Bigg|_{\max}.$$

Тогда $\tau(T, \alpha)$ можно определить по формуле

$$\tau(T, \alpha) = \frac{2\pi}{T} v(T, \alpha) = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \chi(T, \alpha).$$

Нетрудно установить, что при наличии велосиграмм спектр $\tau(T, \alpha)$ вычисляется непосредственно:

$$\tau(T, \alpha) = \Bigg| \frac{2\pi}{T} \Bigg\{ \alpha \dot{U}_0(t) - \frac{\pi}{T} \int_0^t \exp\left\{-\frac{\alpha\pi}{T}(t-\xi)\right\} \times$$

$$\times \left[3\alpha\sin\frac{2\pi}{T}(t-\xi) - 2\cos\frac{2\pi}{T}(t-\xi) \right] U_0(\xi)\, d\xi \Bigg\} \Bigg|_{\max}.$$

При наличии сейсмограмм и велосиграмм одновременно для спектра $\tau(T, \alpha)$ будем иметь:

$$\tau(T, \alpha) = \Bigg| \frac{2\pi}{T} \Bigg\{ \alpha \dot{U}_0(t) + \frac{2\pi}{T} U_0(t) - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \int_0^t \exp\left\{-\frac{\alpha\pi}{T}(t-\xi)\right\} \times$$

$$\times \left[\sin\frac{2\pi}{T}(t-\xi) + 2\alpha\cos\frac{2\pi}{T}(t-\xi) \right] U_0(\xi)\, d\xi \Bigg\} \Bigg|_{\max}.$$

Изложенный путь определения сейсмических нагрузок дает возможность использовать сейсмограммы и велосиграммы при расчетах сооружений на сейсмостойкость, исследовать последствия землетрясений и установить спектр приведенных сейсмических ускорений τ (T, α). Отметим, что для обеспечения высокой точности расчетов при интегрировании сильно осциллирующих функций необходимо применить специфические численные методы.

ИГИС АН АрмССР

15. IV. 1985

Ս. Ս. ԴԱՐԲԻՆՅԱՆ, Ա. Ա. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ՍԵՅՍՄԻԿ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏԱԿ ԿԱՌՈՒՅՑՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՆ ԸՍՏ ԵՐԿՐԱՇԱՐԺԵՐԻ ՍԵՅՍՄՈԳՐԱՄՆԵՐԻ ԵՎ ՎԵԼՈՍԻԳՐԱՄՆԵՐԻ

Ամփոփում

Դիտարկվում է սեյսմիկ ազդեցությունների տակ բազմաթիվ ազատության աստիճաններ ունեցող համակարգերի տեսքով ներկայացվող կառույցների հաշվարկման խնդիրը՝ օգտագործելով երկրաշարժերի սեյսմոգրամները կամ վելոսիգրամները։ Այդ դեպքում խնդիրը բերվում է Վոլտերի տիպի երկրորդ սեռի գծային հավասարումների կամ գծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգերի լուծմանը վերլուծական եղանակով։ Այսպիսի մոտեցման դեպքում հնարավոր է դառնում երկրաշարժերի սեյսմոգրամների ու վելոսիգրամների օգտագործումը բերված սեյսմիկ արագացումների սպեկտրների որոշման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дарбинян С. С., Назаров А. Г.* К расчету сооружений на сейсмические воздействия.— Бюллетень по инженерной сейсмологии, 1971, № 6, с. 18—25.
2. *Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И.* Интегральные уравнения.— М.: Наука, 1976.— 215 с.
3. *Пирузян С. А.* Метод определения спектра приведенных сейсмических ускорений на основе сейсмограмм землетрясений.— Изв. АН АрмССР (сер. ТН), 1965, т. XVIII, № 5, с. 54—58.