ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVIII, № 4, 1985 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

В. С. ХОМЯКОВ, О. В. ДАБАГЯН

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ УПРУГИХ СИСТЕМ СТАНКОВ

Для анализа колебаний и оптимального конструирования станков необходимы адекватные математические модели их упругих систем (УС). Такие модели во временной области, как правило, представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{\dot{q}\} + [C]\{q\} = \{D\}, \qquad (1)$$

где $\{q\}$ и $\{D\}$ — соответственно n-мерные векторы обобщенных координат УС и обобщенных внешних силовых воздействий на нее; $[A]$, $[B]$, $[C]$ — симметричные матрицы размера $(n\times n)$, элементы которых являются функциями s-мерного вектора $\{\alpha\}$ параметров УС. Расчетное определение значений элементов матриц $[A]$, $[B]$, $[C]$ модели (1) в большинстве случаев не позволяет сразу получить динамические характеристики УС, которые совпали бы с экспериментальными, т. к. имеет место значительная неопределенность расчетных оценок ряда конструктивных параметров УС. Рассматриваемый ниже алгоритм идентификации позволяет на основе данных эксперимента проводить последовательное уточнение значений конструктивных параметров УС с целью обеспечения адекватности ее расчетных и экспериментальных динамических характеристик.

Начальные оценки параметров станка и данные эксперимента в общем случае являются случайными величинами. Так как в дальнейшем используются линейные уравнения идентификации и уравнения метода наименьших квадратов, то имеется возможность статистического анализа полученных оценок на всех этапах процедуры идентификации.

Пусть заданы или определены по чертежам станка начальные оценки $\{\hat{\alpha}\}_0$ элементов s-мерного вектора $\{\alpha\}$ неизвестных конструктивных параметров УС. Обозначим буквой u номер шага процедуры. Перед началом идентификации $(u=1)$ считаем параметры $\{\alpha\}$ нормально распределенными случайными величинами со средними значениями

$$\{\alpha_a\} = M[\{\alpha\}] = \{\hat{\alpha}\}_{u-1} = \{\hat{\alpha}\}_0 \qquad (2)$$

и ковариационной матрицей

$$[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{u-1} = M[\{\alpha - \hat{\alpha}_{u-1}\}\{\alpha - \hat{\alpha}_{u-1}\}^T], \tag{3}$$

которая также должна быть задана. Эта матрица диагональная, каждый ее элемент представляет начальную оценку $(s_i^2)_{u-1}$ дисперсии соответствующего параметра $(\alpha_i)_{i-1}$ станка. По $\{\hat{\alpha}\}_0$ можно вычислить матрицы $[A]$, $[B]$, $[C]$ системы (1), а затем, решая задачу о собственных значениях, найти вектор собственных значений $\{\hat{\lambda}\}_0$ и модальную матрицу $[\hat{v}]_0$, составленную из собственных векторов УС станка.

Запишем все найденные собственные значения и соответствующие им собственные векторы в виде вектора оценок характеристик собственных форм колебаний $\{\hat{w}\}_0' = \left\{\dfrac{\{\hat{\lambda}\}_0}{\{\hat{v}\}_0}\right\}$ или в более общем виде $\{\hat{w}\}_1'$.

Допустим, что функциональная зависимость между выходными характеристиками $\{w\}$ собственных форм колебаний и параметрами $\{\alpha\}$ УС станка аппроксимируется суммой членов степенного ряда Тейлора. Линейная часть разложения имеет вид:

$$\{w\} = \{\hat{w}\}_{u+1} + [U]_{u-1}\{\Delta\alpha\}, \tag{4}$$

где $[U]_{u-1}$ — матрица чувствительности характеристик собственных форм колебаний УС станка по его параметрам при $\{\alpha\} = \{\hat{\alpha}\}_{u-1}$; $\{\Delta\alpha\} = \{\alpha - \hat{\alpha}_{u-1}\}$ — отклонение параметров станка.

С учетом (2) и (3) среднее значение вектора $\{\Delta\alpha\}$:

$$\{\mu_{\Delta\alpha}\} = M[\{\Delta\alpha\}] = M[\{\alpha - \hat{\alpha}_{u-1}\}] = \{0\}, \tag{5}$$

а ковариационная матрица —

$$[\mathrm{cov}(\Delta\alpha, \Delta\alpha)] = M[\{\Delta\alpha\}\{\Delta\alpha\}^T] =$$

$$= M[\{\alpha - \hat{\alpha}_{u-1}\}\{\alpha - \hat{\alpha}_{y-1}\}^T] = [\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{u-1}. \tag{6}$$

Предположим, что r элементов вектора $\{w\}$ можно измерить в ходе экспериментов на станке. Так как измерения содержат ненаблюдаемые ошибки $\{\varepsilon\}$, то r-мерный вектор $\{\bar{w}\}_э$ средних значений экспериментальных характеристик собственных форм колебаний станка принимаем в виде аддитивной смеси

$$\{\bar{w}\}_э = \{w\} + \{\varepsilon\}.$$

Учитывая (4), получим:

$$\{\bar{w}\}_э = \{\hat{w}\}_{u-1} + [U]_{u-1}\{\Delta\alpha\} + \{\varepsilon\}$$

или

$$\{\Delta w\}_{u-1} = \{\bar{w}\}_э - \{\hat{w}\}_{u-1} = [U]_{u-1}\{\Delta\alpha\} + \{\varepsilon\}. \tag{7}$$

Уравнение (7) характеризует вариацию характеристик $\{\Delta w\}$ УС станка при отклонении ее параметров $\{\Delta\alpha\}$. Матрица чувствительности $[U]_{n-1}$ предполагается известной. Она отыскивается с помощью модели чувствительности [1] при известной исходной системе (1) и параметрах $\{\hat{\alpha}\}_{n-1}$. Так как вектор $\{\overline{w}\}_э$ значительно короче $\{\hat{w}\}_{n-1}$, то в (7) используется лишь часть последнего, которая содержит лишь элементы имеющиеся в $\{\overline{w}\}_э$.

Считаем составляющие вектора $\{\varepsilon\}$ нормально распределенными случайными величинами с нулевым средним

$$\{\mu_\varepsilon\} = M[\{\varepsilon\}] = \{0\} \tag{8}$$

и ковариационой матрицей $[\mathrm{cov}(\varepsilon, \varepsilon)]$, каждый диагональный элемент которой представляет собой оценку s_i^2 дисперсии соответствующей экспериментально найденной величины w_{ii}. Зная среднее квадратическое отклонение $s_i = +\sqrt{s_i^2}$, можно оценить сходимость $\{\hat{w}\}_{n-1}$ и $\{\overline{w}\}_э$ после очередного шага процедуры идентификации.

Определим статистические характеристики вектора $\{\Delta w\}_{n-1}$. Из (5)–(8) следует, что его среднее значение равно

$$\{\mu_{\Delta w}\} = M[\{\Delta w\}_{n-1}] = M[\{\Delta\alpha\}] + M[\{\varepsilon\}] = \{0\}, \tag{9}$$

ковариационная матрица —

$$[\mathrm{cov}(\Delta w, \Delta w)]_{n-1} = M[\{\Delta w\}_{n-1}\cdot\{\Delta w\}^T_{n-1}] =$$
$$= [U]_{n-1}\cdot[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{n-1}\cdot[U]^T_{n-1} + [\mathrm{cov}(\varepsilon, \varepsilon)], \tag{10}$$

и взаимно-ковариационная матрица —

$$[\mathrm{cov}(\Delta w, \Delta\alpha)]_{n-1} = M[\{\Delta w\}_{n-1}\cdot\{\Delta\alpha\}^T_{n-1}] = [U]_{n-1}\cdot[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{n-1}. \tag{11}$$

Задача идентификации, как обратная задача теории чувствительности, состоит в нахождении по вектору вариаций характеристик $\{\Delta w\}_{n-1}$ наилучшей линейной несмещенной оценки $\{\widehat{\Delta\alpha}\}_{n-1}$ вектора отклонений параметров $\{\Delta\alpha\}$, чему соответствует формальное соотношение

$$\{\widehat{\Delta\alpha}\}_{n-1} = [\hat{\beta}]\cdot\{\Delta w\}_{n-1}, \tag{12}$$

где $[\beta]$ — матрица размера $(s \times r)$.

Оценка $\{\widehat{\Delta\alpha}\}_0$, вычисленная на первом шаге процедуры, позволяет найти уточненное значение оценки вектора $\{\alpha\}$ параметров станка $\{\hat{\alpha}\}_1 = \{\hat{\alpha}\}_0 + \{\widehat{\Delta\alpha}\}_0$, которое является опорным для второго шага и так далее до тех пор, пока не будет достигнута удовлетворительная сходимость или не будет превышено заданное максимальное число шагов.

Матрица [β] может быть найдена путем минимизации ковариационной матрицы оценки $\widehat{\{\alpha\}}_u$ вектора параметров $\{\alpha\}$:

$$[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_u = M[\{\alpha - \widehat{\alpha}_y\}\{\alpha - \widehat{\alpha}_u\}^T] =$$

$$= M[\{\Delta\alpha - \widehat{\Delta\alpha}_{u-1}\}\{\Delta\alpha - \widehat{\Delta\alpha}_{u+1}\}^T], \tag{13}$$

где

$$\widehat{\{\alpha\}}_u = \widehat{\{\alpha\}}_{u-1} + \widehat{\{\Delta\alpha\}}_{u-1}. \tag{14}$$

Для этого, подставив (12) в (14), формально продифференцируем квадратичную форму $[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_u$ по элементам матрицы [β] и приравняем полученное выражение нулевой матрице:

$$M[-2\{\Delta w\}_{u-1}(\{\Delta\alpha\} - [\beta]\{\Delta w\}_{u-1})^T] = [0]$$

или

$$M[\{\Delta w\}_{u+1}\{\Delta\alpha\}^T] = M[\{\Delta w\}_{u-1}\{\Delta w\}^T_{u-1}\cdot[\beta]^T]. \tag{15}$$

Отсюда после подстановки (10) и (11) получим

$$[\beta] = [\mathrm{cov}(\Delta w, \Delta\alpha)]^T\cdot([\mathrm{cov}(\Delta w, \Delta w)]^T)^{-1}. \tag{16}$$

Наконец, используя (12) и (14), получим формулу для вычисления уточненной оценки вектора параметров $\{\alpha\}$ на u-м шаге процедуры идентификации:

$$\widehat{\{\alpha\}}_u = \widehat{\{\alpha\}}_{u-1} + [\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]^T_{u-1}\cdot[U]^T\cdot([U]\cdot[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{u-1}\cdot[U]^T +$$

$$+ [\mathrm{cov}(\varepsilon, \varepsilon)])^{-1}\cdot(\{\overline{w}\}_э - \widehat{\{w\}}_{u-1}). \tag{17}$$

Ковариационная матрица оценки $\widehat{\{\alpha\}}_u$ имеет вид:

$$[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_u = [\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{u-1} - [\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]^T_{u-1}\cdot[U]^T\cdot([U]\cdot[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{u-1}\times$$

$$\times[U]^T + [\mathrm{cov}(\varepsilon, \alpha)])^{-1}\cdot[U]\cdot[\mathrm{cov}(\alpha, \alpha)]_{u-1}. \tag{18}$$

Полученные формулы и выражения дают возможность представить алгоритм итерационной процедуры идентификации в виде блок-схемы, показанной на рисунке. Следует также отметить, что измеренные формы колебаний могут не совпадать с нормальными, хотя в уравнении (7) при определении вариаций $\{\Delta w\}_{u+1}$ в роли $\{\overline{w}\}_э$ выступают нормальные формы колебаний. Поэтому при обработке данных эксперимента лучше дополнительно использовать процедуры модульного анализа [2].

Мосстанкин,
ЕрПИ им. К. Маркса

20. III. 1985

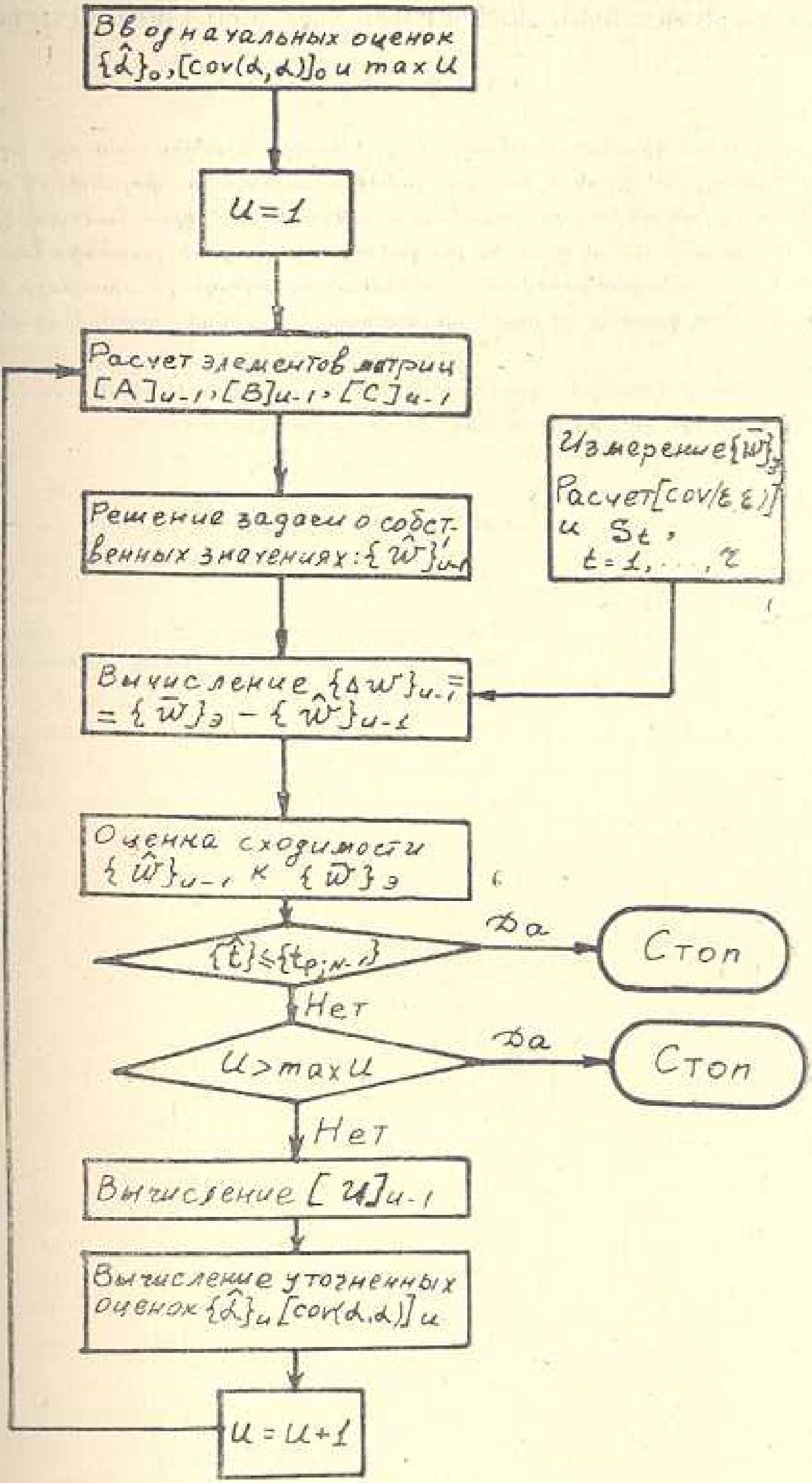
Ввод начальных оценок $\{\hat{\alpha}\}_0$, $[cov(\alpha,\alpha)]_0$ и max u
u=1
Расчет элементов матриц $[A]_{u-1}$, $[B]_{u-1}$, $[C]_{u-1}$
Решение задачи о собственных значениях: $\{\hat{w}\}'_{u-1}$
Измерение $\{\bar{w}\}_э$
Расчет $[cov(\varepsilon,\varepsilon)]$ и S_t, $t=1,\dots,r$
Вычисление $\{\Delta w\}_{u-1} = \{\bar{w}\}_э - \{\hat{w}\}_{u-1}$
Оценка сходимости $\{\hat{w}\}_{u-1}$ к $\{\bar{w}\}_э$
$\{\hat{t}\} \leq \{t_{p;n-l}\}$
Да
Стоп
Нет
u>max u
Да
Стоп
Нет
Вычисление $[\mathcal{U}]_{u-1}$
Вычисление уточненных оценок $\{\hat{\alpha}\}_u$ $[cov(\alpha,\alpha)]_u$
u=u+1

Рис.

Վ. Ս. ԽՈՄՅԱԿՈՎ, Հ. Վ. ԴԱՔԱՂՅԱՆ

ՀԱՍՏՈՑԻ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՆՈՒՅՆԱԿԱՆԱՑՄԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտված եղանակը թույլ է տալիս ճշտելու հաստոցի հաշվարկային մոդելի իներցիոն և առաձգական պարամետրերը փորձնական տվյալներով ստացված սեփական հաճախականությունների և կրող համակարգի տատանումների ձևի հիման վրա։ Նույնականացման պրոցեսի զուգամիտման արագացման համար օգտագործվում են փորձնական տվյալների սխալների և հաստոցի անհայտ կառուցվածքային պարամետրների վիճակագրական գնահատականները։

Ալգորիթմը կարող է օգտագործվել հաստոցի առաձգական համակարգի նույնական մաթեմատիկական մոդելի ստացման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем управления.— М.: Наука, 1981.— 464 с.
2. *Хомяков В. С., Досько С. И.* Идентификация динамических систем станков в частотной области.— В сб.: Динамика станков. Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции.— Куйбышев: 1984, с. 184—186.