

ГИДРОТЕХНИКА

М. А. ТАРАКЧЯН, В. С. САРКИСЯН, А. В. ШИБАНОВ

О ФИЛЬТРАЦИИ ПРОМСТОКОВ ИЗ ХРАНИЛИЩ КРУГЛОЙ ФОРМЫ

Одной из мер борьбы за охрану окружающей среды является разработка более точных, чем существующие, методов прогноза гидрохимического режима грунтовых вод.

Рассмотрим фильтрацию промышленных стоков из хранилищ (или накопителей) круглой формы в плане, радиусом r_0 . Будем считать, что концентрация вещества в жидкой фазе в хранилище C_0 является постоянной величиной, а процесс фильтрации квазистационарным. Тогда, при постоянной мощности водоносного пласта m , скорость фильтрации v зависит только от радиуса-вектора r и определяется по формуле:

$$v = \frac{Q}{2\pi m r}, \quad (1)$$

где Q — постоянный расход воды, сбрасываемый в хранилище предприятием.

Основное дифференциальное уравнение геохимической гидродинамики, включающее в себя уравнение движения несущей жидкости и растворенных в ней солей, сохранения их массы, кинетики и изотермы массообмена между солями фильтрата и породой, для радиального потока имеет вид [1]:

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) - v \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{\partial b}{\partial t} = n_e \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (2)$$

где $\frac{\partial b}{\partial t}$ — скорость изменения солей в твердой фазе; n_e — пористость грунта; D — коэффициент диффузии; $C(r, t)$ — концентрация вещества в произвольной точке r водоносного пласта в текущий момент времени t .

При больших значениях константы скорости γ ($\gamma \rightarrow \infty$) и конечной скорости сорбции $\frac{\partial b}{\partial t}$ изотерма сорбции будет линейная:

$$b = n_0 \Gamma C; \quad \frac{\partial b}{\partial t} = n_0 \Gamma \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (3)$$

где Γ — коэффициент Генри.

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C}{\partial r} \right) - v \frac{\partial C}{\partial r} = n \frac{\partial C}{\partial t}, \quad (4)$$

где $n = n_0 (1 + \Gamma)$ — активная пористость грунта, а v определяется по (1).

Рассмотрим решение уравнения (4) при следующих краевых условиях:

$$C(r, 0) = C_r; \quad C(r_0, t) = C_0; \quad \frac{\partial C(R_0, t)}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

где R_0 — расстояние от хранилища до границы пласта, где устроен дренаж и поддерживается постоянный уровень грунтовых вод; C_r — минерализация грунтовых вод в естественных условиях ($C_r < C_0$).

Для решения положим, что

$$C = C_1 r^2 + C_0, \quad (6)$$

где

$$v = \frac{Q}{4\pi m D}.$$

Уравнение (4) можно представить так:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial C}{\partial r} - \frac{n}{D} \frac{\partial C}{\partial t} = 0, \quad (7)$$

где

$$2 = \frac{Q}{2\pi m D} - 1.$$

Вводя (6) в уравнение (7), получим:

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial C_1}{\partial r} - \frac{v^2}{r^2} C_1 = \frac{n}{D} \frac{\partial C_1}{\partial t}. \quad (8)$$

Для уравнения (8) краевые условия (5) принимают вид:

$$C_1(r, 0) = (C_r - C_0) r^{-2}; \quad C_1(r_0, t) = 0; \quad \frac{\partial C_1(R_0, t)}{\partial r} + \frac{v}{R_0} C_1(R_0, t) = 0. \quad (9)$$

Для решения уравнения (8) при краевых условиях (9), применим метод Фурье:

$$C_1(r, t) = X(r) \cdot T(t), \quad (10)$$

и перепишем уравнение (8) в следующем виде:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} + \frac{1}{Xr} \frac{\partial X}{\partial r} - \frac{v^2}{r^2} = \frac{n}{DT} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (11)$$

Применив метод разделения переменных Фурье, решим уравнение (11):

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2}{r^2} \right) X = 0. \quad (12)$$

Решением уравнения (12) является функция Бесселя, которая одновременно является собственной функцией (12), равной, согласно [2]:

$$X_\nu(r) = A_1 Y_\nu(\lambda r) + A_2 N_\nu(\lambda r), \quad (13)$$

где A_1 и A_2 — постоянные, определяемые из уравнений (9); $Y_\nu(\lambda r)$, $N_\nu(\lambda r)$ — Бесселевы функции, соответственно, первого и второго рода, порядка ν .

Тогда граничные условия (9) переишутся в следующем виде:

$$A_1 Y_\nu(\lambda r_0) + A_2 N_\nu(\lambda r_0) = 0; \quad (14)$$

$$A_1 Y_{\nu-1}(\lambda R_0) + A_2 N_{\nu-1}(\lambda R_0) = 0. \quad (15)$$

Из (14) имеем:

$$\frac{A_1}{A_2} = - \frac{N_\nu(\lambda r_0)}{Y_\nu(\lambda r_0)} = - \frac{N_{\nu-1}(\lambda R_0)}{Y_{\nu-1}(\lambda R_0)}. \quad (16)$$

Подставив (16) в (13), получим:

$$X_\nu(r) = \frac{A_2}{Y_\nu(\lambda r_0)} [N_\nu(\lambda r) Y_\nu(\lambda r_0) - N_{\nu-1}(\lambda R_0) Y_\nu(\lambda r)].$$

Таким образом, решением уравнения (12) является функция $X_\nu(r)$, определяемая следующим выражением:

$$X_\nu(r) = Y_\nu(\lambda r_0) N_\nu(\lambda r) - Y_\nu(\lambda r) N_\nu(\lambda r_0). \quad (17)$$

Значения $T(t)$ из (10) определяют, интегрируя уравнение

$$\frac{\eta}{DT} \frac{dT}{dt} = -\lambda^2, \quad (18)$$

после чего получают:

$$T(t) = T_0 e^{-\frac{\lambda^2 \eta}{\alpha} t}, \quad (19)$$

а значение T_0 определяют из краевого условия (9):

$$T_0 = (C_r - C_0) r^{-1}. \quad (20)$$

Таким образом, решением уравнения (8) при краевых условиях (9) будет:

$$C_1(r, t) = (C_r - C_0) e^{-\frac{\lambda^2 \eta}{\alpha} t} r^{-1} X_\nu(\lambda r). \quad (21)$$

Произведем некоторые преобразования в выражении (21), для чего разложим степенную функцию $r^{-\nu}$ в ряд Фурье-Бесселя по собственным функциям $X_0(i_k r)$ с весом r [3]:

$$r^{-\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} g_k X_0(i_k r). \quad (22)$$

Известно [3], что

$$g_k = \frac{\int_{r_0}^{R_0} r^{-\nu+1} X_0(i_k r) dr}{\int_{r_0}^{R_0} [X_0(i_k r)]^2 r dr} = \frac{I_1}{I_2}. \quad (23)$$

Определим значение коэффициента ряда g_k из (23). При решении используем известные рекуррентные зависимости и значения Вронскиан [2]:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{r_0}^{R_0} r^{-\nu+1} X_0(i_k r) dr = i_k^{-\nu+2} \int_{i_k r_0}^{i_k R_0} Z^{-\nu+1} X_0(Z) dZ = \frac{2r_0^{-\nu}}{\pi i_k^2}; \\ I_2 &= \int_{r_0}^{R_0} [X_0(i_k r)]^2 r dr = \left[\frac{r^2}{2} \{ [X_0(i_k r)]^2 - X_{\nu-1}(i_k r) X_{\nu+1}(i_k r) \} \right]_{r_0}^{R_0} = \\ &= \frac{1}{2} \left[R_0^2 (X_0^2(i_k R_0) - \frac{4}{\pi^2 i_k^2}) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, находим:

$$g_k = \frac{4r_0^{-\nu}}{\pi i_k^2 \left[R_0^2 [X_0(i_k R_0)]^2 - \frac{4}{\pi^2 i_k^2} \right]}.$$

Выражение (22) переписывается так:

$$r^{-\nu} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4r_0^{-\nu} X_0(i_k r)}{\pi i_k^2 \left[R_0^2 [X_0(i_k R_0)]^2 - \frac{4}{\pi^2 i_k^2} \right]}. \quad (24)$$

Следовательно, (21) будет иметь вид:

$$C_1(r, t) = (C_r - C_0) \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[X_0(i_k r)]^2 r^{-\nu}}{R_0^2 [X_0(i_k R_0)]^2 - \frac{4}{\pi^2 i_k^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{D}{n} i_k^2 t}}{i_k^2}. \quad (25)$$

Перейдя от C_1 к концентрации C по (6), найдем:

$$C(r, t) = C_0 + (C_c - C_0) \frac{4}{\pi} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{D}{r_0^2} \lambda_n^2 t} [X_n(r_0 r)]^2}{\lambda_n^2 [R_0^2 [X_n(r_0 R_0)]^2 - \frac{4}{\pi^2 \lambda_n^2}]} \quad (26)$$

Значение параметра λ_n определяется из краевого условия (15), которое после преобразований будет иметь вид:

$$Y_n(r_0 r_0) X_{n-1}(r_0 R_0) - Y_{n-1}(r_0 R_0) X_n(r_0 r_0) = 0, \quad (27)$$

Из transcendентного уравнения (27) параметр λ_n находится методом последовательных приближений. Причем, оно решается для каждого конкретного объекта и индивидуально.

По формуле (26) можно рассчитать концентрацию исследуемого вещества $C(r, t)$ в произвольной точке r подопочного пласта в любой момент времени t . Расчеты выполняются на ЭВМ ЕС-1022.

Выводы

Полученное решение уравнения конвективной диффузии дает возможность прогноза гидрохимического режима грунтовых вод в районах эксплуатируемых хвостохранилищ или накопителей проточков.

АРМНИПРОЦВЕТМГ

10.XII.1982

Մ. Ա. ՏԱՐԱԶՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱԿԻՍՅԱՆ, Ա. Վ. ՇԻՄԱՆՈՎ

ՇՐՋԱՆԱԶԵՆԻ ՏՆՈՒՔ ՈՒՆԵՑՈՎ ԱՐՏԱԿՐԱԹԱՓՈՆՆԵՐԻ ՊԱՇՏՈՏԱՐԱՆՆԵՐԻՑ
ՇԻՂՈՒԿԻ ԶՏՈՒՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ստացված է նյութատեղափոխման հափստարման մասնակի լուծումը շրջանաձև տեսք ունեցող հեղուկ արտադրաթափոնների պահեստարաններից աղտոտված ջրերի դոման դեկորում, որը հնարավորություն է տալիս կանխագուշակել շրջանի բնահողային ջրերի հիդրոքիմիական սկզբնական վիճակը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Веригин Н. Н. и др. Методы прогнозирования солевого режима грунтов и грунтовых вод. М.: Колос, 1979. — 336 с.
2. Янке Е., Эмде Ф., Лемм Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1968. — 340 с.
3. Корн Г. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). — М.: Наука, 1973. — 831 с.