ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX, № 4, 1977 Серия технических наук

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

М. А. КАРАПЕТЯН

РАСЧЕТ ДЕЙСТВУЮЩЕГО ПОЛЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРЕМЫ ГРИНА

Пусть сферические диэлектрические включения дисперсной системы распределены в диэлектрической среде регулярным образом (расположены в узлах кубической решетки). При наложении внешнего электрического поля происходит структурная поляризация дисперсной системы и на граничных поверхностях включения-среда появляется связанный заряд. При внешнем однородном поле (напряженности E_0) регулярно распределенные включения поляризуются однородно по направлению внешнего поля.

Расчет электрического поля во включениях и среде осложняется тем, что каждое поляризованное включение само является источником поля. Таким образом, данное включение подвергается воздействию как внешнего поля, так и полей всех остальных поляризованных включений. Результирующее поле всех поляризованных включений в центре данной частицы будем называть электрическим полем взаимодействия $E_в$ включений дисперсной системы. Поскольку расчет электрического поля в дисперсных системах представляет интерес для электроизоляционной техники, электронно-ионной технологии, высокочастотной сушки сельскохозяйственных культур и других областей техники, то расчет поля взаимодействия поляризованных включений представляется актуальным. С целью расчета этого поля дисперсную систему представим как некоторый объем с поляризованным пространственным зарядом плотности ρ, закон распределения которого сложен и не поддается математическому описанию. Выделим в этой системе небольшой сферический объем V с центром в точке O, совпадающей с центром одного включения (рис. 1).

Согласно теореме Грина [1], потенциал электрического поля в точке M (рис. 1) определяется выражением

$$U_M = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\int\limits_V \frac{\rho}{r}\,dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\oint\limits_S \frac{\sigma}{r}\,ds + \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\oint\limits_S \nu\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,ds, \qquad (1)$$

где S — сферическая поверхность выделенного объема V; σ — плотность заряда сферической поверхности — заряженной поверхности; ν — электрический момент двойного слоя, расположенного на сферической поверхности; n — внешняя нормаль к поверхности S. Последние два члена в (1) обусловлены пространственными зарядами, находящимися в поляризованной дисперсной системе вне объема V. Таким образом, потенциал $U_м$ определяется всеми зарядами структурной поляризации данной дисперсной системы. Поэтому можно утверждать, что $U_м$ есть потенциал электрического поля взаимодействия поляризованных включений в некоторой произвольной точке M. Нашей же задачей является расчет поля в точке O, совпадающей с центром одного из включений.

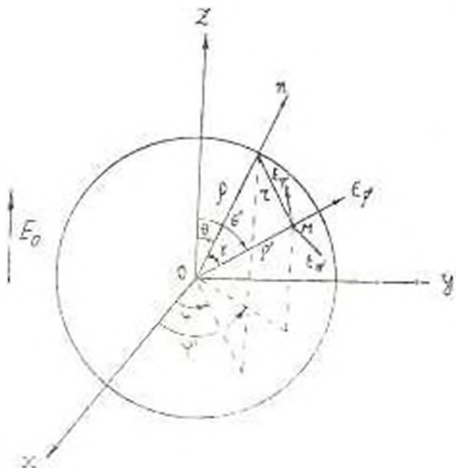

Рис. 1. К расчету поля внешних объемных зарядов в центре сферического объема V.

Поскольку $\nu = \varepsilon_2 U$ [1], где U — потенциал сферической поверхности, то

$$\nu = \varepsilon_2 U_0 \cos\theta = B\cos\theta, \qquad (2)$$

и третья составляющая потенциала в произвольной точке M

$$U_{п.3} = \frac{B}{4\pi\varepsilon_2} \oint \cos\theta \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, ds. \qquad (3)$$

Здесь U_0, следовательно и B, неизвестные постоянные величины.

Нормаль к сферической поверхности n совпадает по направлению с координатой ρ, следовательно $dn = d\rho$. Отсюда следует, что третья составляющая потенциала в точке O равняется нулю ($U_{п.3} = 0$), так как при этом

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\gamma} = \rho = \mathrm{const}, \qquad (4)$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi').$$

Нулю равным все три составляющие напряженностей в сферической системе координат.

$$E_{м,\rho} = -\frac{\partial U_{м.з}}{\partial \rho'}; \qquad E_{м,\theta} = -\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{\partial U_{м.з}}{\partial \theta'};$$

$$E_{м,\varphi} = -\frac{1}{\rho' \sin \theta'}\cdot\frac{\partial U_{м.з}}{\partial \varphi'}. \tag{5}$$

При переносе выражений (5) в точку O будем иметь:

$$E_{O,\rho,з} = 0; \quad E_{O,\theta,з} = 0; \quad E_{O,\varphi,з} = 0. \tag{6}$$

Этот результат объясняется тем, что расчет составляющих напряженностей по (5) и переход из точки M в точку O не исключает необходимости дифференцирования под интегралом постоянной величины $\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} = \mathrm{const}$. Таким образом, доля поля взаимодействия регулярно распределенных поляризованных включений, обусловленная двойным заряженным слоем, равна нулю.

Перейдем к расчету напряженности поля взаимодействия, обусловленного заряженной сферической поверхностью, ограничивающей объем V. В первую очередь необходимо определить плотность зарядов σ на этой граничной поверхности. Ее определим, исходя из следующих рассуждений. Поскольку $E_в$ определяется наложением двух полей, обусловленных внешним (относительно объема V) и внутренним объемными зарядами, то при расчете поля в точке O, обусловленного внешними зарядами, следует предположить, что внутренние заряды из объема V изъяты. Это предположение равносильно утверждению об отсутствии (при расчете поля с напряженностью $E_{O,з}$) включений в объеме V. На этой же основе в вышеприведенных выражениях среда характеризовалась абсолютной диэлектрической проницаемостью ε_1 (ε_1—абсолютная диэлектрическая проницаемость вещества включений).

Поскольку внутри V поляризованность включений $P_в = 0$, а вне этого объема $P_в \neq 0$, то на граничной сферической поверхности появится связанный заряд, плотность которого при внешнем однородном поле и регулярном распределении включений

$$\sigma = P_в \cos \theta. \tag{7}$$

Принимая за основу (7), хотя $P_в$ нам не известно, расчитаем напряженность поля в точке O (рис. 1), обусловленной заряженной сферической поверхностью. Эту напряженность можно подсчитать по схеме вышеприведенного расчета с использованием второго интеграла (1) и выражения (7). Определение $E_{O,з}$ существенно упростится, если пользоваться результатами соответствующего расчета [2]. Резуль тирующая составляющая напряженности поля, вызванного элементарным зарядом кольцевой поверхности

$$dq = \sigma ds = 2\pi\rho^2 P_n \sin\theta\cos\theta\, d\theta, \tag{8}$$

определяется выражением

$$dE_{0,2} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_2\rho^2}\cos\theta. \tag{9}$$

Тогда

$$E_{0,2} = \frac{P_n}{2\varepsilon_2}\int\limits_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta = \frac{P_n}{3\varepsilon_2}. \tag{10}$$

Таким образом, поляризованные включения, находящиеся вне объема V, создают поле взаимодействия напряженности $P_n/3\varepsilon_2$.

Расчет поля пространственных зарядов объема V с использованием первого интеграла (1) не представляется возможным, так как функция распределения плотности зарядов ρ структурной поляризации не может быть построена. Поэтому напряженность поля взаимодействия $E_{0,1}$, обусловленная пространственными зарядами объема V, определим, пользуясь представлением об электрическом моменте поляризованного включения $\vec{p}$. При внешнем однородном поле и регулярном распределении включений векторы электрических моментов последних направлены по внешнему полю. В этом случае вектор поляризованности включений

$$\vec{P}_n = m\vec{p}, \tag{11}$$

где m — плотность включений в дисперсной системе, которая так же имеет направление внешнего поля ($\vec{E}_0$).

Электрический момент элементарного объема dV дисперсной системы

$$d\vec{P}_n = m\vec{p}\,dV = m\vec{p}\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta\, d\alpha. \tag{12}$$

При строгом рассматривании задачи $\vec{p}$ является суммой мультипольных моментов до бесконечного порядка. Однако, как показали исследования [3, 4], во многих практических случаях $\vec{p}$ может быть представлен в качестве электрического момента мультиполя первого порядка, то есть диполя.

Согласно [3, 4], при регулярном распределении сферических включений в системе результирующее поле квадрупольных моментов частиц в данной точке равняется нулю. Учет октупольных моментов включений при расчете результирующего поля в дисперсной системе обусловливает дополнительный член в выражении напряженности содержащий объемную концентрацию включений в 10/3 степени, тогда как член, соответствующий учету дипольных моментов, содержит объемную концентрацию включений в первой степени. Отметим также, что удельный вес коэффициентов этих членов в выражении напряженности поля весьма невелик и обратно пропорционален порядку мультиполя.

Из вышеизложенного следует, что при расчете электрического поля взаимодействия регулярно распределенных поляризованных включений учет мультипольных моментов порядка выше первого имеет практический смысл при объемных концентрациях частиц, превышающих 0,3—0,5. Экспериментальные исследования по измерению эффективных диэлектрических проницаемостей различных дисперсных систем с металлическими включениями [4] подтверждают сделанный выше вывод.

Поскольку объемные концентрации включений дисперсных систем, встречающихся в электроизоляционной технике, электронно-ионной технологии, при высокочастотной сушке сельскохозяйственных культур и других областях техники, меньше 0,5, то под символом p будем подразумевать дипольный момент поляризованных включений. Исходя из вышесказанного, dP_v можно рассматривать в качестве дипольного момента объема dV.

Радиальная и тангенциальная составляющие напряженности поля в точке O, вызванного диполем с электрическим моментом dP_v, равны:

$$dE_{\rho'} = \frac{2dP_v \cos\theta'}{4\pi\varepsilon_0 \rho'^3}; \tag{13}$$

$$dE_{\theta'} = \frac{dP_v \sin\theta'}{4\pi\varepsilon_0 \rho'^3}. \tag{14}$$

Учитывая симметрию задачи, можно утверждать, что составляющие по осям x и y результирующего поля в центре сферы равны нулю. Поэтому результирующее поле зарядов объема V в точке O определим как сумму составляющих (13) и (14) по оси z:

$$dE_{0,1} = dE_{\rho'} \cos\theta' - dE_{\theta'} \sin\theta'. \tag{15}$$

С учетом (13) и (14) для $E_{0,1}$ напишем

$$E_{0,1} = \frac{mp}{4\pi\varepsilon_0} \int_a \frac{d\rho'}{\rho'} \int_0^{2\pi} d\varphi' \left\{ 4 \int_0^{\pi/2} \sin\theta' \cos^2\theta' d\theta' - 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta' d\theta' \right\} = 0, \tag{16}$$

(так как разность интегралов в скобке равна нулю). В (16) литерой a обозначен радиус сферического включения, центр которого расположен в точке O. Интегрирование по радиусу ρ' осуществлено в прелах от a до ρ, чтобы исключить учет взаимодействия центральной частицы на саму себя.

Таким образом, напряженность поля взаимодействия поляризованных сферических включений

$$E_в = \frac{P_в}{3\varepsilon_2} = \frac{mp}{3\varepsilon_2}. \tag{17}$$

Каждое из включений оказывается под воздействием поля с напряженностью

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \frac{\vec{P}_в}{3\varepsilon_2} = \vec{E}_0 + \frac{m\vec{p}}{3\varepsilon_2}. \tag{18}$$

Это поле будем называть макроскопическим действующим полем. Выражение (18) может быть записано и в скалярной форме

$$E_1 = E_0 + \frac{P_в}{3\varepsilon_2}, \tag{19}$$

так как $\vec{E}_0$ и $\vec{P}_в$ совпадают по направлению.

Во многих практических задачах оказывается необходимым рассматривать включения дисперсных систем в форме трехосных эллипсоидов. Поэтому возникает необходимость определить действующее поле и в этом, наиболее общем, случае. Метод расчета напряженности действующего поля для случая эллипсоидальных включений может быть идентичным с вышеизложенным. Однако, в отличие от рассмотренной задачи, выделенный объем V должен быть ограничен трехосной эллипсоидальной поверхностью. Это приводит к огромным трудностям математического характера при расчете напряженностей $E_{a,1}$, $E_{a,2}$, $E_{a,3}$ и, следовательно, $E_в$. Между тем, выражение для $E_в$ при включениях эллипсоидальной формы можно получить простым преобразованием (17) — заменой коэффициента 1/3 коэффициентом деполяризации N эллипсоида [5] по оси, совпадающей с направлением внешнего поля [6]. Следовательно,

$$E_1 = E_0 + \frac{N_a}{\varepsilon_2} mp, \tag{20}$$

где p — дипольный момент поляризованного вдоль оси $2a$ эллипсоидального включения.

Часто приходится считаться с фактом, что включения дисперсной системы имеют разные формы и размеры. Для решения этой задачи весьма хорошим приближением является предположение, что включения системы делятся на n сортов эллипсоидальных включений. Все эллипсоидальные включения данного i-го сорта ориентированы одинаково относительно внешнего поля и распределены в системе регулярным образом. Принимая за основу это предположение, можно написать, что

$$E_1 = E_0 + \frac{1}{\varepsilon_{a1}} \sum_{m} N_i m_i p_i, \tag{21}$$

где ε_{a1} — абсолютная диэлектрическая проницаемость дисперсионной среды.

Уравнение (19) является результатом строгого аналитического расчета и для дисперсной системы с регулярно распределенными сферическими включениями является точным выражением действующего поля. Этот вывод подтверждается и следующим сопоставлением. Принимая за основу (19), в [7] рассчитано переходное электрическое поле в соответствующей неоднородной среде. Полученные в [7] выражения напряженностей поля в установившемся режиме совпадают с известными точными формулами Рэлея [3, 8] (при учете только дипольного взаимодействия).

Точность выражения (20) для дисперсных систем с регулярно распределенными эллипсоидальными включениями подтверждается совпадением результатов [9] в частном случае цилиндрических включений (в установившемся режиме) с соответствующими точными формулами Рэлея [3, 8].

ЕрПИ им. К. Маркса Поступило 25.IX.1976.

Մ. Ռ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԳՈՐԾՈՂ ԴԱՇՏԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ ԳՐԻՆԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԿԻՐԱՌՄԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Էլեկտրական դաշտի հաշվարկը դիսպերս միջավայրերում ներկայացնում է գործնական հետաքրքրություն էլեկտրամեկուսիչ տեխնիկայի, էլեկտրոնաիոնային տեխնոլոգիայի, գյուղատնտեսական կուլտուրաների բարձրահաճախականային չորացման և այլ բնագավառների համար։ Հաշվարկի բարդությունը կապված է բևեռացված ներառումների դաշտերի փոխազդեցության հաշվառման հետ։ Ստրուկտուրային բևեռացումով պայմանավորված լիցքերը դիտելով որպես ծավալային և օգտագործելով Գրինի թեորեմը, հաշվված է այդ լիցքերի ստեղծած դաշտի լարվածությունը տվյալ ներառման կենտրոնում։ Ստացված արդյունքը հանդիսանում է կանոնավոր բաշխված և համասեռ բևեռացված ներառումների փոխազդեցության դաշտը։

Աշխատանքում որոշվում է և տվյալ ներառումը բևեռացնող դաշտը, որը և անվանվել է գործող դաշտ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шимони К.* Теоретическая электротехника. Изд. «Мир», 1964.
2. *Сканави Г. И.* Физика диэлектриков (область слабых полей). ГИТТЛ, 1949.

3. *Lord Rayleigh.* On the Influence of Obstacles arranged in Rectangular Order upon the Properties of a Megium. Philosophical Magazine and Journal of Science, 34, pp. 481—502, 1692.

4. *Kharadly M. M. Z.* and *Jackson W.* The properties of artifical dielectrics comprising arrays of conducting elements. Proc. Instn. Electr. Engrs (London), 100, 1953.

5. *Поливанов К. М.* Теоретические основы электротехники, ч. III. Изд. «Энергия», 1969.

6. *Нетушил А. В., Жуховицкий Б. Я., Кудин В. Н., Парини Е. П.* Высокочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников. Госэнергоиздат, 1959.

7. *Карапетян М. А.* Электрическое поле в дисперсной системе со сферическими включениями. «Известия АН АрмССР, Физика», № 6, 1971.

8. *Сканави Г. И.* Физика диэлектриков (область сильных полей), 1958.

9. *Карапетян М. А.* Перераспределение постоянного поля в дисперсной системе с эллипсоидальными включениями. «Электричество», № 10, 1971.