

Կ.Հ. ՍՈՂՈՄՈՆՅԱՆ, Մ.Զ. ՊՈՂՈՍՅԱՆ, Մ.Գ. ԲԱԿՈՒՆՑ
ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊՐՈՑԵՍՏԻՎ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄԸ ԴՐԱՆՑ
ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ՎՐԱ

Դիտարկվում են տարածությունների այնպիսի պրոյեկտիվ ձևափոխությունների սինթեզման հարցեր, որոնք թույլ են տալիս տարածության անսահմանափակ մասը արտապատկերել նրա երկկողմանի սահմանափակ տիրույթի վրա: Ուսումնասիրվում են ուղղի կետերի բազմության պրոյեկտիվ ձևափոխությունների կոնստրուկտիվ հատկությունները, և դրանց հիման վրա սինթեզվում են երկչափ տարածության (հարթության) որոշ ձևափոխություններ, որոնք ողջ կիսահարթությունը արտապատկերում են նրա սահմանափակ տիրույթի վրա:

Առանցքային բառեր. պրոյեկտիվ արտապատկերում, ձևափոխություն, ինվոլյուցիա, կոլինեացիա, անիսկական տարրեր, կրկնակի տարրեր, հոմոլոգիա, ինվերսիա:

Ներածություն: Գրաֆիկական մոդելավորման ժամանակակից համակարգչային տեխնոլոգիայի հիմքում դրված է ողջ եռաչափ տարածության փոխարինումը դրա թվային մոդելով՝ համակարգչային վիրտուալ տարածությամբ: Սա թույլ է տալիս նախագծման ավանդական միջոցներից անցնել համակարգչային, ինչը ընձեռնում է նոր տեխնոլոգիական հնարավորություններ: Այս տեխնոլոգիայի կարևորագույն առանձնահատկություններից է մոդելների երկրաչափական հատկությունների ավտոմատացված ձևափոխությունների հնարավորությունը:

Եռաչափ գրաֆիկական մոդելավորման համակարգչային տեխնոլոգիան, մասնավորապես, թույլ է տալիս ավտոմատացնել մարդու գործունեությունը այնպիսի բնագավառում, որտեղ անհրաժեշտ է լինում ստեղծել եռաչափ իրականության ծավալային (ռելիեֆային) կերպարը՝ այն տեղավորելով սահմանափակ տարածության մեջ: Այդպիսի կերպարներից են ռելիեֆային հեռանկարները, օրինակ, հարթաքանդակները և բարձրաքանդակները:

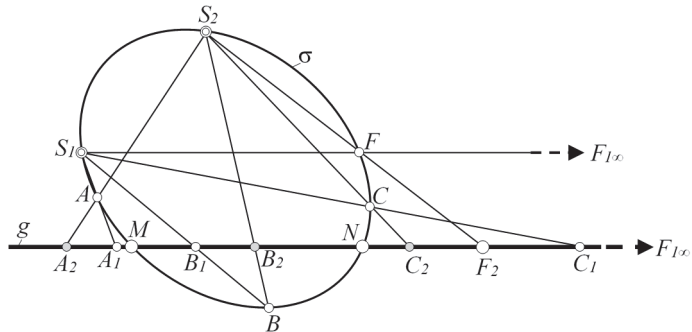
Ռելիեֆային հեռանկարի երկրաչափական մոդելավորման համակարգչային տեխնոլոգիայի մշակումն ունի կարևոր գործնական նշանակություն տարբեր բնագավառներում, մասնավորապես՝ կիրառական արվեստում, և ճարտարապետության մեջ բազմաթիվ են այն դեպքերը, երբ անհրաժեշտ է լինում իրական դրվագների ակնառու պատկերման նպատակով ստեղծել ռելիեֆներ: Եռաչափ

իրականության ռելիեֆային պատկերները կիրառվում են թատրոնում, ինչպես նաև կինոնկարահանումների ժամանակ, երբ պետք է ստեղծել իրական բնապատկերի այնպիսի դեկորացիա, որը կտեղավորվի բեմի սահմանափակ տարածքում, սակայն կստեղծի իրական, անսահմանափակ բնապատկերի տպավորություն:

Այս խնդիրների լուծման համար անհրաժեշտ է կիրառել տարածության այս կամ այն արտապատկերումը (ձևափոխությունը) այդ նույն տարածության սահմանափակ շերտի վրա: Ի տարբերություն հարթ գրաֆիկական մոդելավորման՝ ռելիեֆային մոդելավորման երկրաչափական օրինաչափությունները դեռևս լիակատար ուսումնասիրված չեն, որոնցով հնարավոր կլինե՞ր մշակել մոդելավորման համակարգչային տեխնոլոգիան: Ուստի մեր աշխատանքի նպատակն է ուսումնասիրել երկրաչափական այն ձևափոխությունները, որոնք թույլ կտան տարածությունն արտապատկերել դրա սահմանափակ տիրույթի վրա: Դրանք կարող են հիմք ծառայել ռելիեֆային հեռանկարի երկրաչափական մոդելավորման ալգորիթմների մշակման և դրանց կառուցման գործընթացի ավտոմատացման համար: Այս խնդիրն ունի գործնական կարևոր նշանակություն, քանի որ ռելիեֆային կերպարի համակարգչային մոդելի առկայությունը թույլ կտա ավտոմատացնել ռելիեֆային պատկեր պարունակող օբյեկտների նախագծման գործընթացը և կազմակերպել դրանց արտադրությունը թվային կառավարմամբ հաստոցների (ինչպես նաև եռաչափ տպիչների) գործարկմամբ:

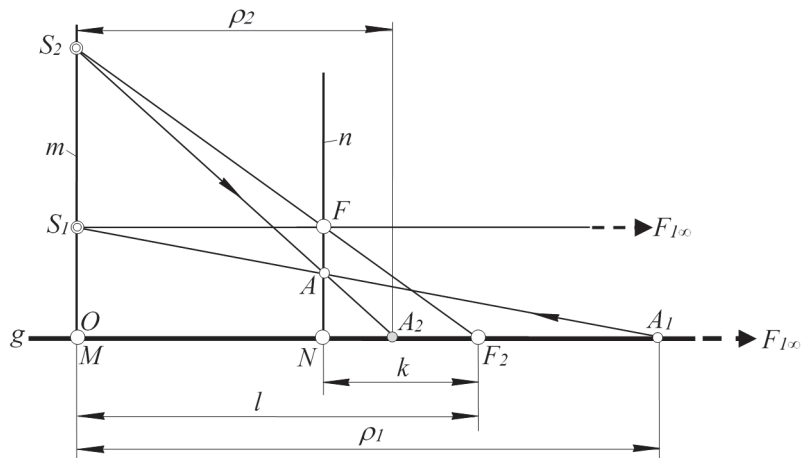
Ուղղի ձևափոխությունները: Աշխատանքում դիտարկվում է դրված խնդրի լուծման մի տարբերակ՝ հիմնված պրոյեկտիվ ձևափոխությունների վրա, որոնք տարածության անիսկական (անվերջ հեռու) տարրերը համապատասխանության մեջ են դնում սովորական տարրերի հետ:

Ուղղի պրոյեկտիվ ձևափոխությունը որոշվում է որպես երկրորդ կարգի գծի կետերի զույգ պրոյեկցիաների համապատասխանություն, երբ պրոյեկտման կենտրոնները պատկանում են այդ գծին [1-3]: Այսինքն, ուղղի պրոյեկտիվ ձևափոխությունը կարելի է դիտել որպես երկրորդ կարգի գծի բինար մոդել այդ գծի վրա: Նկ. 1-ում ցույց է տրված ***g*** ուղղի համապատասխան կետերի կառուցումը երկրորդ կարգի ***σ*** գծի միջոցով, որի վրա են դասավորված պրոյեկտման ***S₁*** և ***S₂*** կենտրոնները: Ակնհայտ է, որ ***σ*** գծի և ***g*** ուղղի հատման ***M*** և ***N*** կետերը կլինեն ձևափոխության հնարավոր երկու *կրկնակի* (անշարժ) կետերը: Նկարում կառուցված է ուղղի անիսկական ***F_{1∞}*** կետի համապատասխան ***F₂*** կետը, որը կոչվում է ձևափոխության *սահմանային կետ*: Ուղղի պրոյեկտիվ ձևափոխությունը միարժեքորեն առաջադրվում է, եթե նախապես տրված են երեք զույգ համապատասխան կետեր:



Նկ. 1. Ուղղի պրոյեկտիվ ձևափոխությունը

Մեր առջև դրված խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ է ձևափոխությունն առաջադրել կրկնակի M , N կետերի և սահմանային F_2 կետի միջոցով (նկ. 2): Պարզվում է [4,5], որ այս դեպքում σ գիծը կարելի է տրոհել երկու՝ m և n ուղիղների, որոնցից առաջինն անցնում է M կետով, իսկ մյուսը՝ N կետով: Պրոյեկտման $S_1 \in m$ կենտրոնը կարելի է ընտրել կամայականորեն: $F \in n$ կետը կդասավորվի $S_1 F_{1\infty} \parallel g$ ուղղի վրա, իսկ $F_2 F$ և m ուղիղների հատման կետը կլինի պրոյեկտման S_2 կենտրոնը: Յուրաքանչյուր $A \in n$ կետի A_1 և A_2 պրոյեկցիաները կլինեն g ուղղի վրա հաստատված ձևափոխության համապատասխան կետերը:



Նկ. 2. Համապատասխան կետերի կապը

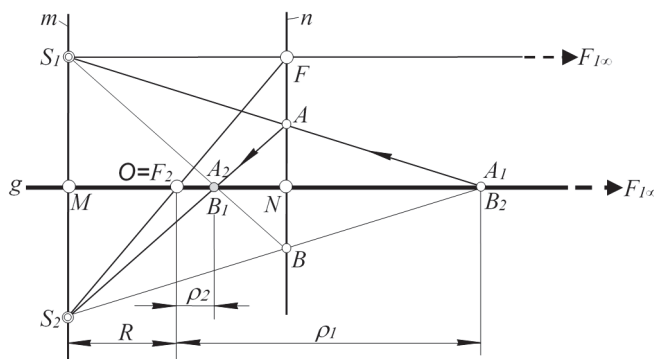
$O=M$ սկզբնակետի նկատմամբ ձևափոխության համապատասխան A_1 և A_2 կետերի կոորդինատները նշանակենք ρ_1 և ρ_2 : $OS_1 A_1$ և $N A A_1$ եռանկյունների, $OS_2 F_2$ և $N F F_2$ եռանկյունների, ինչպես նաև $OS_2 A_2$ և $N A A_2$ եռանկյունների նմանությունից ստանում ենք վերոհիշյալ կոորդինատների կապի հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 l}{\rho_1 + k} \text{ և } \rho_1 = \frac{k \rho_2}{l - \rho_2}, \quad (1)$$

որտեղ l և k մեծությունները սահմանային F_2 կետի հեռավորություններն են համապատասխանորեն M և N կրկնակի կետերից:

Դժվար չէ նկատել, որ այս ձևափոխությունն g ուղղի անսահմանափակ NF_∞ ճառագայթն արտապատկերում է սահմանափակ NF_2 հատվածի վրա: Մա այն հատկությունն է, որն անհրաժեշտ է դրված խնդրի հետագա լուծման համար:

Դիտարկենք այն դեպքը, երբ տրված են M և N կրկնակի կետերը, իսկ F_2 սահմանային կետը MN հատվածի միջնակետն է (նկ. 3): Այս դեպքում պրոյեկտման S_1 և S_2 կենտրոնները դասավորվում են g ուղղի նկատմամբ սիմետրիկ, որի հետևանքով կետերի համապատասխան զույգերը դառնում են փոխադարձ փոխարինելի (եթե $B_1=A_2$, ապա $B_2=A_1$): Այսինքն, կրկնակի և սահմանային կետերի այսպիսի դասավորության դեպքում ստանում ենք ուղղի կետերի բազմության *ինվոլյուցիոն* ձևափոխություն [4-6]:



Նկ. 3. Ինվոլյուցիայի առաջադրումը

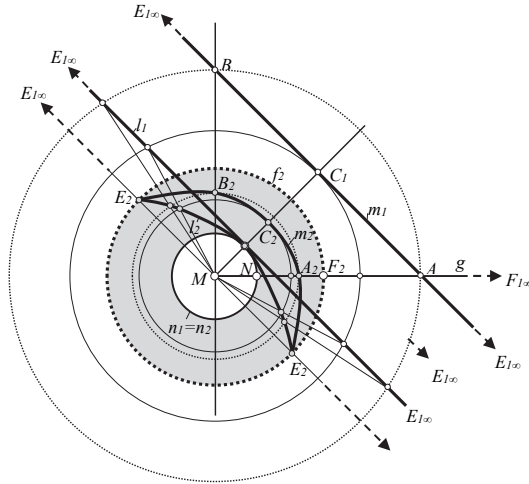
Եթե $O=F_2$ սկզբնակետի նկատմամբ ինվոլյուցիայի համապատասխան A_1 և A_2 կետերի կոորդինատները նշանակենք ρ_1 և ρ_2 , ապա կարելի է ստանալ դրանց կապի հետևյալ արտահայտությունը՝

$$\rho_1 \rho_2 = R^2, \quad (2)$$

որտեղ R մեծությունները սահմանային F_2 կետի հեռավորությունն են կրկնակի կետերից: Այս ինվոլյուցիան g ուղղի անսահմանափակ NF_∞ ճառագայթն արտապատկերում է սահմանափակ NF_2 հատվածի վրա:

Հարթության ձևափոխությունները: Հարթության մեջ դիտարկենք M կենտրոնով ճառագայթների փունջը (նկ. 4): Այդ փնջի ճառագայթներին պատկանող կետերի բազմությունն ընդգրկում է հարթության բոլոր կետերը: Փնջի ճառագայթ-

ներից յուրաքանչյուրի վրա առաջադրենք վերևում դիտարկված պրոյեկտիվ ձևափոխությունը՝ երկու կրկնակի կետերի և սահմանային կետի միջոցով:



Նկ. 4. Հարթության արտապատկերումը նրա օղակաձև տիրույթի վրա

Օրինակ, g ճառագայթի վրա առաջադրված են կրկնակի՝ M, N և սահմանային՝ F_2 կետերը, ընդ որում, M կետը փնջի կենտրոնն է: Արդյունքում սինթեզվում է հարթության որոշակի ձևափոխություն, որը կարելի է բնութագրել որպես g ճառագայթի ձևափոխության պտույտ նրա կրկնակի M կետի շուրջը:

Եթե բացառենք N կետի պտույտով առաջացած $n_1=n_2$ շրջանը, ապա սինթեզված ձևափոխությունը ողջ հարթությունն արտապատկերում է նրա N և F_2 կետերի պտույտով առաջացած օղակի վրա:

Հարթության այս ձևափոխությունը ոչ գծային է, որում, ընդհանուր դեպքում, հարթության անսահմանափակ ուղիղն արտապատկերվում է սահմանափակ կոր գծի վրա: Իրոք, հարթության կամայական m_1 ուղիղը (նկ. 4) բևեռային կոորդինատային համակարգում (M բևեռով) ունի հետևյալ հավասարումը՝

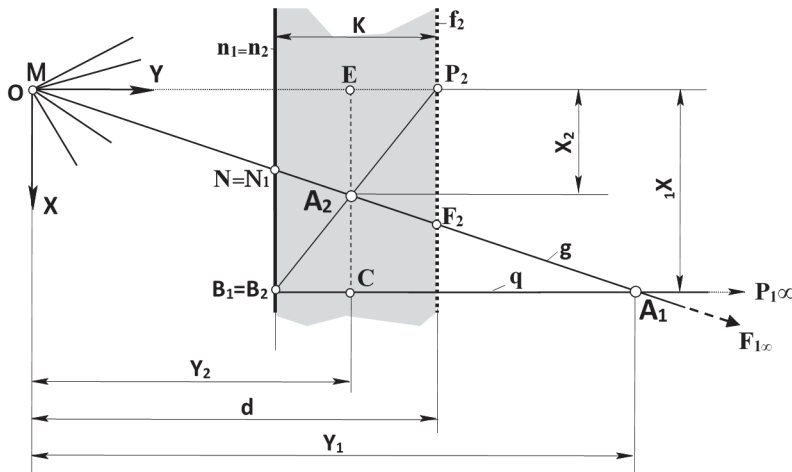
$$\rho_1 = \frac{P}{\cos' \varphi}, \quad (3)$$

որտեղ P -ն m_1 ուղիղին ուղղահայաց MC_1 հատվածի երկարությունն է (C_1 կետի բևեռային կոորդինատներն են՝ $(P, 0)$): (1) և (3) հավասարումներից ստանում ենք m_1 ուղիղին համապատասխանող m_2 կոր գծի հետևյալ հավասարումը՝

$$\rho_2 = \frac{Pl}{P + K \cos \varphi},$$

որտեղ $l=MF_2$, $K=NF_2$:

Դիտակենք այն դեպքը, երբ M կենտրոնով փնջի ճառագայթների կրկնակի կետերը դասավորվում են $n_1=n_2$ ուղղի վրա, իսկ սահմանային կետերը՝ նրան զուգահեռ f_2 ուղղի վրա (նկ. 5): Արդյունքում հարթության մեջ սինթեզվում է կենտրոնական պրոյեկտիվ ձևափոխություն (հոմոլոգիա):



Նկ. 5. Հարթության արտապատկերումը նրա երկու զուգահեռ ուղիղներով սահմանափակված շերտի վրա

Հոմոլոգիայի կրկնակի $n_1=n_2$ ուղիղը հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների: Սահմանային f_2 ուղիղն ընդգրկող կիսահարթությունն այս հոմոլոգ ձևափոխությամբ արտապատկերվում է $n_1=n_2$ և f_2 ուղիղներով սահմանափակված շերտի վրա:

Ստանանք դիտարկվող կիսահարթության կամայական A_1 կետի և նրա A_2 կերպարի կապը՝ արտահայտված դեկարտյան կոորդինատներով: Կոորդինատների սկզբնակետը համատեղենք M կետի հետ, իսկ X առանցքը՝ ուղղահայաց $n_1=n_2$ ուղղին: A_2 կերպարը ստանալու համար օգտվենք օժանդակ A_1B_1 ուղղից, որի անիսկական $P_{1\infty}$ կետի P_2 կերպարը կդասավորվի սահմանային f_2 ուղղի վրա: Ակնհայտ է, որ A_2 կերպարը B_2P_2 հատվածի և MA_1 ճառագայթի հատման կետն է:

Ելնելով MEA_2 և A_1A_2C եռանկյունների, ինչպես նաև MP_2A_2 և $A_1A_2B_2$ եռանկյունների նմանությունից՝ ստանում ենք կամայական A_1 կետի և նրա A_2 կերպարի հետևյալ կապը՝

$$\begin{cases} X_2 = \frac{dX_1}{Y_1 + K} \\ Y_2 = \frac{dY_1}{Y_1 + K} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{dX_2}{d - Y_2} \\ Y_1 = \frac{KY_2}{d - Y_2} \end{cases}:$$

Եզրակացություն: Այս կամ այն տարածությունը նրա սահմանափակ տիրույթի վրա արտապատկերելու համար որպես էլակետային տարր կարելի է օգտագործել ուղիղը, որի վրա հաստատված է կետերի պրոյեկտիվ համապատասխանություն՝ երկու կրկնակի և սահմանային կետերի միջոցով (այդպիսի ուղիղը կանվանենք *պրոյեկտիվ ուղիղ*):

Եթե տարածության մեջ առաջադրենք պրոյեկտիվ ուղիղների բազմություն այնպես, որ տարածության յուրաքանչյուր կետով անցնի այդ ուղիղներից միայն մեկը, ապա կսինթեզվի տարածության որոշակի ձևափոխություն (զծային և ոչ զծային): Այդ ձևափոխությունը, ինչպես կարելի է նկատել վերևում բերված օրինակներից, թույլ է տալիս տարածությունն արտապատկերել նրա սահմանափակ տիրույթի վրա:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՑԱՆԿ

1. **Согомонян К.А.** Линейно-конструктивные методы формообразования (геометрическое моделирование). – Ереван: Айастан, 1990. – 214 с.
2. **Глаголев Н.А.** Проективная геометрия. – М.: Высшая школа, 1963. – 268с.
3. **Джапаридзе И.С.** Конструктивные отображения проективных преобразований пространства. – Тбилиси: Изд-во ГПИ, 1964. – 327 с.
4. **Берже М.** Геометрия: Пер. с франц. – М.: Мир, 1984. – Т. 1. - 560 с.
5. **Берже М.** Геометрия: Пер. с франц. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. - 368 с.
6. **Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.** Современная геометрия: Методы и приложения. – М.: Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 760 с.

Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան: Նյութը ներկայացվել է խմբագրության 25.05.2021:

К.А. СОГОМОНЯН, М.З. ПОГОСЯН, М.Г. БАКУНЦ

ПРОЕКТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ НА ИХ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОБЛАСТИ

Рассматриваются вопросы синтеза проективных преобразований, которые позволяют отобразить бесконечную часть пространства на двустороннюю ограниченную область. Изучаются конструктивные свойства проективных преобразований множества точек прямых, на основе чего синтезируются определенные преобразования двумерного пространства (плоскости), отображающие всю полуплоскость на его ограниченную область.

Ключевые слова: проективное отображение, преобразование, инволюция, коллинеация, анизальные элементы, повторяющиеся элементы, гомотопия, инверсия.

K.H. SOGHOMONYAN, M.Z. POGHOSYAN, M.G. BAKUNTS

PROJECTIVE REFLECTION OF SPACES ON THE LIMITED DOMAINS

Issues on the synthesis of projective conversions are considered, which allow to reflect the infinite part of the space on a two-sided limited domain. The constructive properties of projective conversions of a set of points of the route are studied based on which, some conversions of two-dimensional space are synthesized, which reflect the whole semi-plane on its limited domain.

Keywords: projective reflection, conversion, involution, collineation, invalid items, double elements, homology, inversion.