ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVII, №2, 1974 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Ю. Л. САРКИСЯН

# КВАДРАТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РАЗОМКНУТОЙ ТРЕХЗВЕННОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЦЕПИ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ ПАРАМИ

В последнее время значительное внимание уделяется развитию простых механических систем, осуществляющих пространственное перемещение объекта через заданные позиции или же по определенному закону движения. Подобные системы находят растущее применение в практике конструирования систем ориентации и сканирования, биомеханических устройств, автооператоров и различных механизмов автоматического действия со сложным движением исполнительного органа. В свете сказанного большое значение приобретают вопросы синтеза двухэлементных звеньев и других кинематических цепей, связывающих объект с системой отсчета.

Методы синтеза разомкнутых кинематических цепей для точного воспроизведения ограниченного числа заданных положений разработаны в [1], [2], [4]. Однако, при задании неограниченного числа конечно-удаленных положений или некоторого непрерывного закона движения эти методы неприменимы, что делает необходимым разработку методов синтеза, обеспечивающих практически допускаемое приближение к требуемым движениям.

В настоящей статье рассматривается задача синтеза трехзвенной кинематической цепи, состоящей из системы отсчета, ведомого объекта и промежуточного двухэлементного звена с вращательными парами, с использованием метода квадратичного приближения. Применительно к аналогичной цепи с цилиндрическими парами данная задача решена в [3].

**Постановка задачи.** Объект $e$ совершает пространственное движение относительно системы отсчета $E$, координатные системы $oxyz$ и $OXYZ$ неразрывно связаны с $e$ и $E$ соответственно (рис. 1). Движение $e$ может быть задано неограниченным числом $N$ конечно-удаленных положений или же уравнениями, связывающими выбранные обобщенные координаты.

Рассматриваемая задача формулируется следующим образом: определить положения осей $z_e$ и $z_E$ подвижной и неподвижной цапф относительно систем $oxyz$ и $OXYZ$ соответственно, а также величину $h$ расстояния между $z_e$ и $z_E$ так, чтобы после введения промежуточного двухэлементного звена движение (положения) объекта $e$ оставалось насколько возможно близким к заданному.

Пусть $A_1$ и $A_2$—точки пересечения неподвижной оси вращения $\sigma_E$ с плоскостями $XOZ$ и $YOZ$, а $B_1$ и $B_2$—точки пересечения подвижной оси вращения $\sigma_e$ с плоскостями $xoz$ и $yoz$. Указанные четыре точки и расстояние $h$ между осями $\sigma_e$ и $\sigma_E$ (усредненное значение) полностью определяют проектируемое двухэлементное звено, и, поэтому, синтез сводится к определению координат точек $A_1$ и $A_2$ в системе

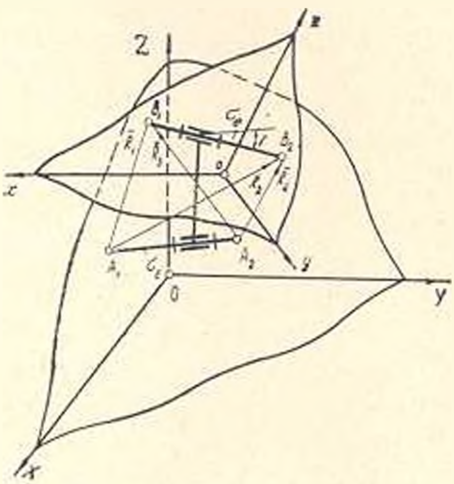


Рис. 1

$OXYZ$, координат точек $B_1$ и $B_2$ в системе $oxyz$ и величины $h$. Таким образом, подлежат определению 9 скалярных величин.

Расстояния $A_1B_{1i}=R_{1i}$, $A_1B_{2i}=R_{2i}$, $A_2B_{1i}=R_{3i}$, $A_2B_{2i}=R_{4i}$ между точками искомых осей в соответствии с вышеприведенной постановкой задачи должны по возможности мало отличаться от постоянной в заданных $N$ положениях системы $e$. Обозначим через $R_1$, $R_2$, $R_3$, $R_4$ размеры $A_1B_1$, $A_2B_1$, $A_1B_2$, $A_2B_2$ проектируемого звена. Легко убедиться, что искомые параметры должны минимизировать в заданных положениях взвешенные разности следующего вида:

$$\Delta_{q_{1i}}=R_{1i}^2-R_1^2=-2\left(X_{B_{1i}}X_{A_1}+Z_{B_{1i}}Z_{A_1}+H_1-\frac{1}{2}R_{1i}^2\right);$$

$$\Delta_{q_{2i}}=R_{2i}^2-R_2^2=-2\left(X_{B_{2i}}X_{A_1}+Z_{B_{2i}}Z_{A_1}+H_2-\frac{1}{2}R_{2i}^2\right);$$

$$\Delta_{q_{3i}}=R_{3i}^2-R_3^2=-2\left(Y_{B_{1i}}Y_{A_2}+Z_{B_{1i}}Z_{A_2}+H_3-\frac{1}{2}R_{3i}^2\right);$$

$$\Delta_{q_{4i}}=R_{4i}^2-R_4^2=-2\left(Y_{B_{2i}}Y_{A_2}+Z_{B_{2i}}Z_{A_2}+H_4-\frac{1}{2}R_{4i}^2\right).$$

где

$$H_1=\frac{1}{2}(R_1^2-R_{A_1}^2);\quad H_2=\frac{1}{2}(R_2^2-R_{A_1}^2);\quad H_3=\frac{1}{2}(R_3^2-R_{A_2}^2);$$

$$H_4=\frac{1}{2}(R_4^2-R_{A_2}^2).$$

**Вывод расчетных уравнений синтеза.** Сначала составим суммы квадратов всех четырех взвешенных разностей для $N$ заданных положений, обозначая их через $S_1$, $S_2$, $S_3$ и $S_4$ соответственно, т. е.

$$S_j=\sum_{i=1}^{N}\Delta^2_{q_{ji}}.\qquad \begin{matrix} i=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ N \\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \end{matrix}$$

Далее рассмотрим условия стационарности сумм $S_1$ и $S_2$:

$$\frac{\partial S_1}{\partial X_{A_1}}=0;\quad \frac{\partial S_1}{\partial Z_{A_1}}=0;\quad \frac{\partial S_1}{\partial H_1}=0;\quad \frac{\partial S_2}{\partial X_{A_1}}=0;\quad \frac{\partial S_2}{\partial Z_{A_1}}=0;$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial H_2}=0.$$

После ряда преобразований эти условия могут быть сведены к четырем линейным уравнениям относительно $X_{A_1}$ и $Z_{A_1}$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}X^2_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}} & \sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}Z_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}} \\ \sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}Z_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}} & \sum_{i=1}^{N}Z^2_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} X_{A_1} \\ Z_{A_1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}R_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}R_{B_{ji}} \\ \sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}}R_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}R_{B_{ji}} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

$j=1,\ 2.$

Используя условия стационарности сумм $S_3$ и $S_4$

$$\frac{\partial S_3}{\partial Y_{A_2}}=0;\quad \frac{\partial S_3}{\partial Z_{A_2}}=0;\quad \frac{\partial S_3}{\partial H_3}=0;\quad \frac{\partial S_4}{\partial Y_{A_2}}=0;\quad \frac{\partial S_4}{\partial Z_{A_2}}=0;\quad \frac{\partial S_4}{\partial H_4}=0,$$

можно получить еще четыре уравнения, линейные относительно $Y_{A_2}$ и $Z_{A_2}$.

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}Y^2_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}} & \sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}}Z_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}} \\ \sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}}Z_{B_{ji}}-\frac{1}{N}Y_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}} & \sum_{i=1}^{N}Z^2_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}} \end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} Y_{A_2} \\ Z_{A_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}}Z_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}R_{B_{ji}} \\ \sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}}R_{B_{ji}}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_{B_{ji}}\sum_{i=1}^{N}R_{B_{ji}} \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Условия, необходимые для совместности линейных уравнений (1), записываются в виде (3) и (4).

$$
\begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}}^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\
\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}}^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\
\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}}^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} Z_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} R_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{2i}}
\end{vmatrix} = 0; \quad (3)
$$

$$
\begin{vmatrix}
\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}}^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\
\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}}^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\
\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} Z_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} X_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}}^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} R_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{2i}}
\end{vmatrix} = 0. \quad (4)
$$

Аналогично, для совместности системы (2) должны быть удовлетворены условия (5) и (6).

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} Y^2_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} Y^2_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z^2_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} Y^2_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} Z_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} R_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{2i}} \end{vmatrix} = 0; \quad (5)$$

$$\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{N} Y^2_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} Z_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z^2_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} R_{B_{1i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{1i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{1i}} \\ \sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} Z_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Y_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z^2_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} & \sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} R_{B_{2i}} - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} Z_{B_{2i}} \sum\limits_{i=1}^{N} R_{B_{2i}} \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Таким образом, получена система четырех уравнений шестой степени (3)÷(6) относительно $x_{B_1}$, $z_{B_1}$, $y_{B_2}$, $z_{B_2}$, которую можно решить лишь численными методами. Среди решений данной системы следует отыскать те сочетания координат $B_1$ и $B_2$, которые минимизируют суммы $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Имея точки $B_1$ и $B_2$, из линейных систем (1) и (2) можно определить координаты точек $A_1$ и $A_2$.

Максимальное число положений, при котором найденное решение может обращать в нуль $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, следовательно, и $\Delta_{q_{1i}}$, $\Delta_{q_{2i}}$, $\Delta_{q_{3i}}$, $\Delta_{q_{4i}}$, равно трем. Вопрос о максимальном числе звеньев рассматриваемого типа, совместных с тремя положениями движущейся системы, в последние годы обсуждался в различных источниках, но исчерпывающий ответ на этот вопрос дан лишь в диссертационной работе Л. Цая [4], а именно: всегда существует два и только двухэлементных звена с вращательными парами, которые точно воспроизводят заданные три положения системы $e$, и, следовательно, в качестве генератора трех произвольно заданных положений объекта может послужить механизм Беннета. Таким образом, двухэлементные звенья, спроектированные вышеописанным методом, при $N>3$ могут обеспечить лишь приближение к заданным движениям объекта.

Проектирование рассматриваемой кинематической цепи заканчивается определением длины $h$ двухэлементного промежуточного звена. С этой целью необходимо предварительно вычислить расстояние между $\varphi_e$ и $\varphi_E$ в $N$ заданных положениях

$$d_i=\frac{\begin{vmatrix} X_{B_{1i}}-X_{A_1} & Y_{B_{1i}} & Z_{B_{1i}}-Z_{A_1} \\ m_{Ei} & n_{Ei} & l_{Ei} \\ M_E & N_E & L_E \end{vmatrix}}{\sin\gamma_i}, \qquad i=1,\,2,\,3,\,\ldots\,N$$

где $m_E$, $n_E$, $l_E$ и $M_E$, $N_E$, $L_E$ суть тройки направляющих косинусов $\varphi_e$ и $\varphi_E$ относительно неподвижных осей координат; $\gamma_i$—угол между $\varphi_e$ и $\varphi_E$ в $i$-ом положении, определяемый по формуле

$$\gamma_i=\arccos\,(M_E m_{Ei}+n_{Ei}N_E+l_{Ei}L_E).$$

В вышеприведенных выражениях значения $m_{Ei}$, $n_{Ei}$, $l_{Ei}$ вычисляются по известным формулам линейного преобразования:

$$\begin{bmatrix} m_{Ei} \\ n_{Ei} \\ l_{Ei} \end{bmatrix}=[T_i]\begin{bmatrix} m_e \\ n_e \\ l_e \end{bmatrix}, \qquad i=1,\,2,\,\ldots\,N$$

где $[T_i]$—известная ортогональная матрица вращения, составленная из направляющих косинусов осей $ox$, $oy$, $oz$, а $m_e$, $n_e$, $l_e$—найденные значения направляющих косинусов оси $\varphi_e$ относительно объекта $e$ (системы $oxyz$).

Искомую величину $h$ находим после усреднения по модулю предельных значений $h_i^{max}$ и $h_i^{min}$, т. е.

$$h=\frac{|h_i^{\max}|+|h_i^{\min}|}{2}.$$

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступило 25.II.1974

Յու. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

## ՊՏՏԱԿԱՆ ԶՈՒՅԳԵՐՈՎ ԶՓԱԿՎԱԾ ԵՌՕՂԱԿ ԿԻՆԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ՇՂԹԱՅԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ամփոփում

*Հոդվածում դիտարկվում է անշարժ օղակից, շարժվող օբյեկտից և միջանկյալ երկտարր պտտական զույգերով օղակից բաղկացած կինեմատիկական շղթայի քառակուսային սինթեզը օբյեկտի դիրքերի ցանկացած թվի դեպքում։ Խնդիրը բերվում է չորս քաշային տարբերությունների համատեղ մինիմիզացման պայմանին, որը նկարագրվում է չորս անհայտներով չորս 6-րդ աստիճանի հավասարումների սիստեմով։ Ստացված արդյունքները գործնական հետաքրքրություն են ներկայացնում ավտոօպերատորների նախագծման համար։*

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Росс Б.* Теория конечных положений в применении к синтезу механизмов. Прикладная механика, № 4. «Мир», 1967.
2. *Чен П., Росс Б.* Расчетные уравнения для синтеза кинематических цепей по раздельными и бесконечно близким положениям. «Конструирование и технологии машиностроения», № 1. 1969.
3. *Саркисян Ю. Л.* Квадратический синтез двухэлементного звена с цилиндрическими парами. «Машиностроение», № 4, 1974.
4. *Lung-Wen Tsai*, Design of Open Loop Chains For Rigid Body Guidance.—PhD Dissertation, Stanford University, 1972.