ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտ. սերիա XXIV, № 3, 1971 Серия техн. наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Т. Т. ХАЧАТРЯН

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНКЕ

Рассматривается термонапряженное состояние свободно опертой по контуру двухслойной пластинки при стационарном тепловом потоке. Показывается, что после удовлетворения силовым краевым условиям определение перемещений и напряжений в произвольной точке плиты приводится к интегрированию двух уравнений Пуассона относительно прогиба w и функции перемещений u, v точек плоскости контакта φ. Далее показывается, что касательные напряжения τ_{xz}, τ_{yz} и сумма нормальных напряжений σ_x и σ_y в любой точке плиты определяются непосредственно без интегрирования названных уравнений Пуассона.

Обозначим через E_1, μ_1, h_1 коэффициенты Юнга, Пуассона и толщину первого слоя, через E_2, μ_2, h_2 — те же величины для второго слоя. Координатную плоскость xOy совместим с плоскостью контакта слоев, ось z направим вниз (рис. 1). Закон изменения температуры t по толщине слоев пластинки $i=1$ и $i=2$ полагаем заданным в виде

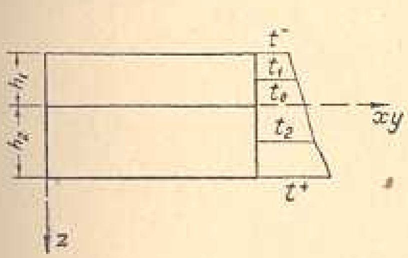

Рис. 1.

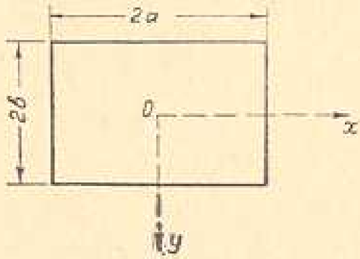

Рис. 2.

$$t_i = t_i(x,\ y,\ z);\quad t_0 = t_i(x,\ y,\ O). \tag{1}$$

Из законов Гука для основных напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} имеем следующие выражения:

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1-\mu_i^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu_i\frac{\partial v}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_i\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \alpha_i(1+\mu_i)\,t_i\right];$$

$$\sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\mu_i^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu_i \frac{\partial u}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - \alpha_i (1+\mu_i) t_i\right];$$

$$\tau_{xy}^i = \frac{E_i}{2(1+\mu_i)}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right], \tag{2}$$

где u, v, w — перемещения точек плоскости $z = 0$; α_i — коэффициенты температурных расширений для слоев $i = 1$, $i = 2$. Умножив (2) на dz и на zdz и интегрируя по толщине плиты, получим выражения для усилий T_1, T_2, S и моментов M_1, M_2, H. Эти выражения удобно представить в таком виде:

$$T_1 = \Phi - B_3 \frac{\partial v}{\partial y} + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$T_2 = \Phi - B_3 \frac{\partial u}{\partial x} + C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \tag{3}$$

$$S = \frac{1}{2} B_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - C_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y},$$

$$M_1 = \Psi - C_2 \frac{\partial v}{\partial y} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$M_2 = \Psi - C_2 \frac{\partial u}{\partial x} + D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \tag{4}$$

$$H = \frac{1}{2} C_2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) - D_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y},$$

где

$$\Phi = (B_1 + B_2)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - C_1 \nabla^2 w - A_1 f_1 - A_2 f_2; \tag{5}$$

$$\Psi = C_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - D_1 \nabla^2 w - A_1 h_1 F_1 - A_2 h_2 F_2; \tag{6}$$

$$f_1 = \frac{1}{h_1} \int_{-h_1}^{0} t_1 dz; \quad f_2 = \frac{1}{h_2} \int_{0}^{h_2} t_2 dz; \tag{7}$$

$$F_1 = \frac{1}{h_1^2} \int_{-h_1}^{0} z t_1 dz; \quad F_2 = \frac{1}{h_2^2} \int_{0}^{h_2} z t_2 dz. \tag{8}$$

В приведенных формулах использованы сокращенные обозначения:

$$B_1 = \frac{E_1 h_1}{1-\mu_1^2}; \quad B_2 = \frac{E_2 h_2}{1-\mu_2^2}; \quad B_3 = (1-\mu_1) B_1 + (1-\mu_2) B_2;$$

$$C_1 = \frac{1}{2}(h_2B_2 - h_1B_1);\quad C_2 = \frac{1-\mu_2}{2}h_2B_2 - \frac{1-\mu_1}{2}h_1B_1;$$

$$D_1 = \frac{1}{3}(h_1^2B_1 + h_2^2B_2);\quad D_2 = \frac{1-\mu_1}{3}h_1^2B_1 + \frac{1-\mu_2}{3}h_2^2B_2; \tag{9}$$

$$A_1 = \alpha_1(1+\mu_1)B_1;\quad A_2 = \alpha_2(1+\mu_2)B_2;\quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Для поперечных сил

$$N_1 = \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \text{ и } N_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x}$$

получим следующие выражения:

$$N_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2}C_2\frac{\partial \omega_z}{\partial y};\quad N_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{1}{2}C_2\frac{\partial \omega_z}{\partial x}, \tag{10}$$

где ω_z — нормальные вращения элемента плиты:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Покажем теперь, что функции Φ, Ψ, ω_z, а следовательно и N_1, N_2 тождественно равны нулю.

Из уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = 0$$

следует, что Ψ есть гармоническая функция.

Из остальных двух уравнений равновесия имеем

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0$$

и из выражений (3) получаем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - B_3\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = 0;\quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + B_3\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

Отсюда следует, что Φ и $B_3\omega_z$ сопряженные гармонические функции.

Краевые условия для свободно опертой прямоугольной плиты таковы (рис. 2):

$$\text{при } x = \pm a,\quad T_1 = v = 0;\quad M_1 = w = 0; \tag{13}$$

$$\text{при } y = \pm b, \quad T_2 = u = 0; \quad M_2 = w = 0.$$

Из этих условий и из выражений (3) и (4) заключаем, что на контуре пластинки гармонические функции Φ и Ψ равны нулю. Следовательно, они тождественно равны нулю, что приведет к равенству нулю также ω_2, N_1 и N_2.

Из (11), с учетом $\omega_2 = 0$, можем принимать:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{14}$$

Поэтому (5) и (6) нам дают два уравнения, содержащие две неизвестные функции w и φ.

$$\Phi = (B_1 + B_2)\nabla^2\varphi - C_1\nabla^2 w - A_1 f_1 - A_2 f_2 = 0. \tag{15}$$

$$\Psi = C_1\nabla^2\varphi - D_1\nabla^2 w - A_1 h_1 F_1 - A_2 h_2 F_2 = 0. \tag{16}$$

Из этих уравнений получим:

$$\nabla^2\varphi = \frac{D_1}{D}(A_1 f_1 + A_2 f_2) - \frac{C_1}{D}(A_1 h_1 F_1 - A_2 h_2 F_2); \tag{17}$$

$$\nabla^2 w = \frac{C_1}{D}(A_1 f_1 + A_2 f_2) - \frac{B_1 + B_2}{D}(A_1 h_1 F_1 + A_2 h_2 F_2), \tag{18}$$

где

$$D = D_1(B_1 + B_2) - C_1^2. \tag{19}$$

Эти уравнения должны быть проинтегрированы при геометрических краевых условиях:

$$\begin{aligned} &w = 0; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } x = \pm a, \\ &w = 0; \quad u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = \pm b. \end{aligned} \tag{20}$$

Покажем, что сумма нормальных напряжений $\sigma_x + \sigma_y$ и касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} могут быть определены непосредственно без интегрирования уравнений (17) и (18).

Из (2) с учетом (14) имеем:

$$\sigma_x^i + \sigma_y^i = \frac{E_i}{1 - \mu_i}(\nabla^2\varphi - z\nabla^2 w - 2\alpha_i t_i). \tag{21}$$

Подставив в левую часть (20) выражения (17) и (18), получим формулу, в которой $\sigma_x + \sigma_y$ будут выражены непосредственно через температурные функции f_i и F_i, даваемые по (7) и (8).

Касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} должны быть определены из уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}; \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}. \tag{22}$$

Подставив в правые части (22) выражения (2) и учитывая (14), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau^i_{xz}}{\partial z} &= -\frac{E_i}{1-\mu_i^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\nabla^2\varphi - z\nabla^2 w - \alpha_i(1+\mu_i)\,t_i\right], \\ \frac{\partial \tau^i_{yz}}{\partial z} &= -\frac{E_i}{1-\mu_i^2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\nabla^2\varphi - z\nabla^2 w - \alpha_i(1+\mu_i)\,t_i\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Интегрируя эти уравнения по z и пользуясь при этом условиями равенства нулю касательных напряжений на торцевых плоскостях плиты, получим:

$$\tau^{(1)}_{xz} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}; \quad \tau^{(1)}_{yz} = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}; \tag{24}$$

$$\tau^{(2)}_{yz} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}; \quad \tau^{(2)}_{yz} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}, \tag{25}$$

где

$$\Phi_1 = B_1\frac{z+h_1}{h_1}\left(\nabla^2\varphi + \frac{h_1-z}{2}\nabla^2 w\right) - A_1 f_1 - \frac{A_1}{h_1}\int_0^z t_1 dz; \tag{26}$$

$$\Phi_2 = B_2\frac{h_2-z}{h_2}\left(\nabla^2\varphi - \frac{h_2+z}{2}\nabla^2 w\right) - A_2 f_2 + \frac{A_2}{h_2}\int_0^z t_2 dz. \tag{27}$$

Подставив в эти формулы правые части (17) и (18), получим: $\Phi_1 = \Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2 = \Phi_2(x, y)$, после чего по (24) и (25) находим напряжения τ_{xz} и τ_{yz} в любой точке плиты. Поскольку $N_1 = 0$, $N_2 = 0$, то в зависимости от заданных законов изменения температуры (11) эти напряжения либо тождественно равны нулю, либо они образуют уравновешенную систему сил в сечениях $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$. В точках плоскости контакта слоев $z = 0$ соблюдаются условия $\tau^{(1)}_{xz} = \tau^{(2)}_{xz}$, $\tau^{(1)}_{yz} = \tau^{(2)}_{yz}$. Это следует из (15) и выражения (9) для C_1. Из (24) и (25) имеем:

$$\tau^{(2)}_{xz} - \tau^{(1)}_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi_1 + \Phi_2); \quad \tau^{(2)}_{yz} - \tau^{(1)}_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}(\Phi_1 + \Phi_2),$$

при $z = 0$ имеем: $\Phi_1 + \Phi_2 = \Phi = 0$.

Приведенные выше уравнения и формулы упрощаются, если материалы слоев имеют одинаковые коэффициенты Пуассона $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и отличаются только модулями Юнга.

В случае однослойной плиты имеем: $E_1 = E_2 = E$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu$; $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Принимая при этом $h_1 = h_2 = h/2$, вместо (17) и (18) получаем:

$$\nabla^2\varphi = \alpha(1+\mu) f; \tag{28}$$

$$\nabla^2 w = -12\alpha \frac{1+\mu}{2} F, \tag{29}$$

где

$$f = \frac{1}{h} \int\limits_{-h/2}^{h/2} t dz; \qquad F = \frac{1}{h^2} \int\limits_{-h/2}^{h/2} z t dz. \tag{30}$$

Вместо (21) будем иметь:

$$\sigma_x + \sigma_y = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[(1+\mu)\left(f + 12 \frac{z}{h} F \right) - 2t \right]. \tag{31}$$

Формулы для касательных напряжений (24) и (25) будут иметь вид:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}; \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y}, \tag{32}$$

где

$$\Phi_0 = \Phi_2 = -\Phi_1 = \frac{\alpha E}{1-\mu} \left[\frac{h-2z}{2} \left((f + 3 \frac{h+2z}{h} F \right) + \int\limits_{h/2}^{z} t dz \right]. \tag{33}$$

При линейном распределении температуры по толщине плиты

$$t = t_0 + \frac{z}{h}\tau; \; t_0 = \frac{t^+ + t^-}{2}; \quad \tau = t^+ - t^-,$$

поэтому получаем:

$$\Phi = 0; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad \sigma_x + \sigma_y = -\alpha E t.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 3.II.1971.

Թ. Թ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՋԵՐՄԱՅԻՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ՊԱՐԱԳԾՈՎ ԱԶԱՏ ՀԵՆՎԱԾ ԵՐԿՇԵՐՏ ՍԱԼՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում քննարկվում է պարագծով ազատ հենված երկշերտ սալի լարվածային վիճակը կայուն ջերմային հոսքի դեպքում։ Ցույց է տրված, որ եզրային ուժային պայմաններին բավարարելուց հետո սալի ցանկացած կետում տեղափոխումների և լարումների որոշումը բերվում է Պուասսոնի երկու հավասարումների ինտեգրմանը ըստ ձկվածքի և կոնտակտի հարթության կետերի տեղափոխումների ֆունկցիայի։ Բացահայտված է, որ սալի կամայական կետում շոշափող լարումները և նորմալ լարումների գումարը որոշվում են անմիջականորեն՝ առանց Պուասսոնի նշված հավասարումների ինտեգրման։