

## СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Н. К. СНИТКО

К ФИЗИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ  
ДЕФОРМАЦИЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ  
УСТОЙЧИВОСТИ

В ряде случаев конструкции рассчитывают в предельном состоянии при допуске упруго-пластических деформаций. Потеря устойчивости сжатых стержней для средних и малых гибкостей происходит в большинстве случаев в упруго-пластической области [1—3] и необходимо знать не только значение касательного модуля, но и самую зависимость между  $\tau$  и  $\varepsilon$ . В данной работе на основе рассмотрения физического процесса деформирования малого элемента квазизотропного тела установлена зависимость между  $\tau$  и  $\varepsilon$ , дано аналитическое выражение для касательного модуля, содержащее три параметра:  $E$ ,  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$ , и установлена исходная функция процесса  $f(\varepsilon)$  — скорость роста пластической деформации по сечению. Получено три выражения для касательного модуля и связи между  $\tau$  и  $\varepsilon$  для трех законов изменения функции  $f(\varepsilon)$ . Вывод указанных аналитических зависимостей базируется на многочисленных исследованиях механических свойств монокристаллов и поликристаллов, осуществленных кристалло-физиками.

Микрошлифы для пластически деформированного металла кубической системы показали, что сдвиги происходят внутри зерен. Рассматривая различные деформации зерен, мы далее учитываем их связанность по общему напряжению, пренебрегая лишь *местными взаимодействиями по границам зерен*. Предполагается, что каждый кристаллит в соответствии со своей ориентацией переходит в *состояние текучести при достижении максимального касательного напряжения* — предела текучести по сдвигу  $t$ . Каждый кристаллит имеет свой частный предел текучести по осевому напряжению и ведет себя по идеализированной диаграмме Прандтля. Далее все частные пределы текучести отдельных кристаллитов усредняются в общем напряжении; в результате для каждого  $\varepsilon_i$  получаем значение  $\sigma_i$  и реальную диаграмму растяжения. При данном общем напряжении  $\sigma$  для поликристалла, которому соответствует деформация  $\varepsilon$ , часть сечения растягиваемого образца находится в упругой области, часть — в пластической  $F_{д.л.}$  Пластическая зона последовательно нарастает по мере развития текучести от наиболее слабого зерна, для которого предел текучести совпадает с пределом упругости агрегата  $\sigma_0$  вплоть до наиболее жесткого зерна, предел текучести которого соответствует  $E\varepsilon_0$  (где  $\varepsilon_0$  —

деформация предела текучести агрегата). Модули продольной упругости всех отдельных кристаллитов считаются постоянными и равными модулю Юнга; легко обобщить данное решение и на случай переменного  $Ei$ . Вводится исходная функция пластического процесса  $f(\varepsilon)$  — скорость роста пластической зоны, равная первой производной от площади пластической зоны. Отметим, что для ряда значений углов поворота кристаллита вокруг осей координат получаем ряд частных пределов текучести  $\varepsilon_i = E\varepsilon_i = t/r_i$ , причем, для наиболее слабого кристаллита  $\varepsilon_0 = E\varepsilon_0 = t/r_0$ , где  $\varepsilon_0$  — предел упругости. Суммируя все частные пределы текучести, получаем предел текучести агрегата

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i,$$

где  $n$  — число ориентировок. Охватив все возможные ориентировки числом  $n$ , получаем предел текучести полукристалла методом усреднения.

На основании полученного численного материала для влияний ориентировки  $r_i$  кристаллита на частный предел текучести ( $E\varepsilon_i = t/r_i$ ,  $E\varepsilon_0 = t/r_0$ ) найдены числа, характеризующие относительную деформацию текучести кристаллита  $\varepsilon_i/\varepsilon_0 = r_0/r_i = \beta_i$ . Каждое  $\varepsilon_i$  выражено в зависимости от  $\varepsilon_0$ . Нанеся на сетку значений углов ориентировки числа  $\beta_i$  (в узловых точках сетки) и соединяя однозначные значения  $\beta_i$  горизонталями, получаем картину упруго-пластического деформирования поликристалла, от которой легко перейти к диаграмме растяжения. Выше изложено решение задачи в дискретной схеме.

Переходим к интегральной зависимости  $\sigma$  от  $\varepsilon$ , рассматривая теперь сплошную среду (рис. 1). Разбиваем площадь сечения поликристалла  $F = 1$  (проведенную перпендикулярно первому главному напряжению) на ряд бесконечно малых участков  $dF_{pl}$ , каждый из которых соответствует данному значению перехода от текущей деформации  $\varepsilon_i$  для одной ориентировки к деформации  $\varepsilon_i + d\varepsilon_i$  для следующей ориентировки. Ориентировки считаем теперь меняющимися непрерывно. Пластическую деформацию отображаем в последовательности ее развития от  $\varepsilon_0$  до  $\varepsilon_1$ . Сечение делится на пластическую область  $F_{pl}$  и упругую область  $F_{yl}$ . Очевидно, что  $F_{pl} + F_{yl} = 1$ . Вводим скорость роста пластической зоны

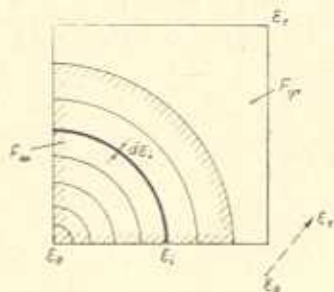


Рис. 1.

$$f(\varepsilon_i) = \frac{dF_{pl}}{d\varepsilon_i}.$$

Тогда

$$F_{пл} = \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} f(\varepsilon_i) d\varepsilon_i. \quad (a)$$

Так как функция  $F_{пл}$  легко определяется по изменению  $\sigma$ , то легко найти и функцию  $f(\varepsilon)$ , изучая процесс деформирования агрегата монокристалла. Тогда элементарное пластическое усилие

$$dS_{пл} = E\varepsilon_i dF_{пл}.$$

Пластическое усилие после интегрирования по частям

$$S_{пл} = E \left( \varepsilon F_{пл} - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F_{пл} d\varepsilon_i \right).$$

Упругое усилие

$$S_{уп} = E\varepsilon(1 - F_{пл}).$$

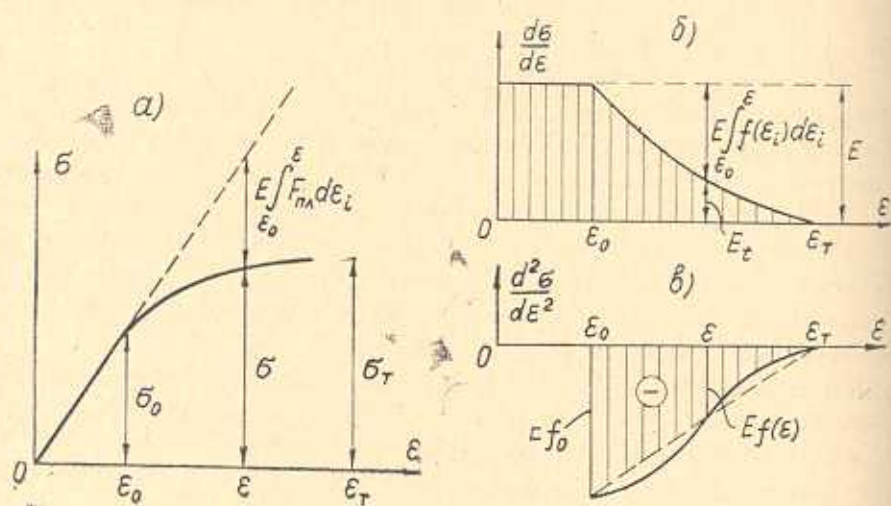


Рис. 2.

Полное усилие на единичную площадку будет:

$$\sigma = S_{пл} + S_{уп}$$

или

$$\sigma = \left( E\varepsilon F_{пл} - E \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F_{пл} d\varepsilon_i \right) + E\varepsilon(1 - F_{пл}).$$

Окончательно для микронапряжения имеем (рис. 2, а):

$$\sigma = E \left( \varepsilon - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} F_{пл} d\varepsilon_i \right). \quad (1)$$

Касательный модуль легко определяется (рис. 2, б):

$$E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E(1 - F_{пл}), \quad (2)$$

Вторая производная от  $\sigma$  (рис. 2, в):

$$\frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} = -E \frac{dF_{пл}}{d\varepsilon} = -Ef(\varepsilon), \quad (3)$$

где  $f(\varepsilon)$  — скорость роста пластической зоны.

Изучая процессы пластического деформирования полукристаллов металла кубической системы, нами обнаружено, что при осевом действии силы функция  $f(\varepsilon)$  близка или к линейной зависимости ( $\alpha$ -железо) или к параболической зависимости (хромоникелевая сталь).

1. **Линейная зависимость.** Пусть исходная функция пластического процесса — линейная зависимость

$$f(\varepsilon) = f_0 \left( \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \right), \quad (4)$$

причем,

$$\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} f(\varepsilon) d\varepsilon = 1; \quad f_0 = \frac{2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}. \quad (5)$$

По определению

$$F_{пл} = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon_1} f(\varepsilon_1) d\varepsilon_1, \quad (6)$$

поэтому

$$F_{пл} = \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} - \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \right)^2. \quad (7)$$

Следовательно, касательный модуль

$$E_t = E(1 - F_{пл}) = E \left( 1 - \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} \right)^2. \quad (8)$$

Эта формула применяется для проверки конструкции из углеродистых сталей на устойчивость ( $\sigma_{кр} = \pi^2 E_t / k^2$  в пластической области). При этом необходимо знать выражение для напряжения в упруго-пластической области. Пульзуясь формулой (1) и внося в нее выражение (7), после интегрирования имеем:

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_1 - \varepsilon_0} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^3}{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)^2} \right]. \quad (9)$$

Характерно, что из (9) при  $\varepsilon = \varepsilon_T$  получаем:

$$\varepsilon_T = \frac{3\sigma_T - 2\sigma_0}{E}, \quad (10)$$

что дает для мягкой стали  $\varepsilon_T = 0,00179$  ( $\varepsilon_0 = 0,001$ ). Для многих новых „тягучих“ сталей упруго-пластическая область имеет больший по длине диапазон  $\varepsilon$ .

2. **Параболическая зависимость.** Пусть исходная функция пластического процесса — квадратная парабола вида:

$$f(\varepsilon) = f_0 \left[ 1 - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} \right], \quad (11)$$

где, согласно (5),

$$f_0 = \frac{3}{2(\varepsilon_T - \varepsilon_0)}. \quad (12)$$

Площадь пластической зоны по (6)

$$F_{pl} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} - \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} \right)^3. \quad (13)$$

Касательный модуль теперь:

$$E_t = E \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} \right)^2 \right] \quad (14)$$

— выражение, резко отличное от (8).

Пользуясь (13) и внося его в соотношение (7), имеем следующую зависимость для  $\sigma$ :

$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \frac{3}{4} \cdot \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} + \frac{1}{8} \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^4}{(\varepsilon_T - \varepsilon_0)^2} \right]. \quad (15)$$

Теперь при  $\varepsilon = \varepsilon_T$  из (15) получаем:

$$\varepsilon_T = \frac{1}{3E} (8\sigma_T - 5\sigma_0), \quad (16)$$

что хорошо соответствует данным для стали 15ХСНД.

Для случая стали с большой областью пластических деформаций (например, сплав 29:  $\sigma_T = 9000$ ,  $\sigma_0 = 6000$ ,  $\lambda_{up} \approx 60$ ,  $\sigma_{кр} = 9000 - 50$ ) функция  $f(\varepsilon)$  берется по параболе вида:

$$f(\varepsilon) = f_0 \left( \frac{\varepsilon_T - \varepsilon}{\varepsilon_T - \varepsilon_0} \right)^2.$$

где  $f_0 = 3/(\varepsilon_T - \varepsilon_0)$ .

Касательный модуль

$$E_t = E \left[ \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon_t - \varepsilon_0} - 3 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_t - \varepsilon_0} \right)^2 + \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_t - \varepsilon_0} \right)^3 \right]. \quad (17)$$

Зависимость для  $\sigma$ :

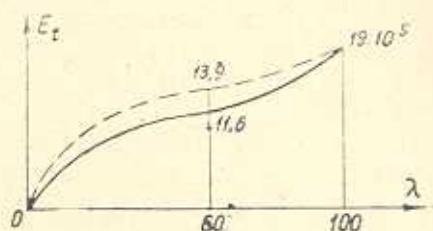
$$\sigma = E \left[ \varepsilon - \frac{3(\varepsilon - \varepsilon_0)^2}{2(\varepsilon_t - \varepsilon_0)} + \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^3}{(\varepsilon_t - \varepsilon_0)^2} - \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)^4}{4(\varepsilon_t - \varepsilon_0)^3} \right]. \quad (18)$$

Характерные деформации в этом случае будут равны:  $\varepsilon_t = 0,00636$ ;  $\varepsilon_0 = 0,00273$ . Предельная гибкость  $\lambda_{пр} = 60$ , при превышении которой справедливо решение Эйлера. Значение  $\varepsilon_t$ , исходя из выражения (18), получаем по формуле

$$\varepsilon_t = \frac{16\sigma_t - 12\sigma_0}{E}.$$

Таким образом, получены физически вполне обоснованные выражения для  $E_t$  и  $\sigma$  в упруго-пластической области, что обеспечивает уточнение расчета конструкций по предельным состояниям с допуском пластических деформаций.

Для малоуглеродистой стали Ст. 3 нами произведено сопоставление значений касательного модуля, вычисленных по (8) и по формуле Шенли:



$$E_t = E \left[ 1 - \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{\sigma_t - \sigma_0} \right)^2 \right].$$

Результаты сравнения представлены на рис. 3 (пунктирная кривая—по Шенли, сплошная кривая—по формуле (8)). Значения модулей приведены в функции от гибкости  $\lambda$  для реализации расчетов на устойчивость. Действительные значения касательного модуля оказались ниже, чем по Шенли (при  $\lambda = 60$  отклонение в 18,7%). Расчет на устойчивость по Шенли—не в запас устойчивости.

ЛИСИ

Поступило 31.X.1973.

Ն. Կ. ՍԵՏԻՍ

ԿԱՅՈՐՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԱՌԱՋԳԱՎԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԳԵՆԱՐԱՄԱՅԻՆՈՒԹՅԱՆ  
ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՏԵՄՈՒԹՅԱՆ ԿԵՐԱՌՄԱՆ ԱՌԹԻՎ

Ա մ փ ո փ ո Վ մ

Օգտագործելով կվադրիդատորայ մարմնի փոքր էլեմենտի ձևափոխության ֆիզիկական պրոցեսի սխեման, հորվածում առաջարկվում է առաձգականու-

իչան շոշափող մոդուլի անալիտիկ արտահայտություն: Կրիստալիտի պտտման անկյան մի շարք արժեքների համար ստացված են հոսունության սահմանի մասնակի արժեքներ, որոնց դումարը իրենից ներկայացնում է ագրեգատի հոսունության սահմանը: Գտնված առաձգականության շոշափող մոդուլի օգնությամբ ուսումնասիրված է սեղմված ձողի կայունությունը առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տիրույթում: Մասնավոր օրինակի վրա ցույց է տրված, որ բոա Շենլիի կատարված կայունության հաշվարկը կարող է տալ կրիտիկական բևեի խիստ մեծացված արժեք:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Chwalla E. Theorie des außermittig gedrückten Stäbes aus Baustahl. „Stahlbau“, 1934, Н. 21—23.
2. Пинаджян В. В. К вопросу несущей способности скато-изогнутых стержней. „Проект и стандарт“, № 1, 1938.
3. Shanley F. R. Inelastic Column Theory. JAS, v. 13, № 12, 1946.