

ГИДРОТЕХНИКА

Л. А. ДАЯН

ДВИЖЕНИЕ МОНОМОЛЕКУЛЯРНОЙ ПЛЕНКИ ПОД ВЛИЯНИЕМ
 РАВНОМЕРНОГО ВЕТРА

В последнее время с целью сокращения испарения с водной поверхности используют жирные спирты, молекулы которых, сцепляясь с молекулами воды образуют тонкий, мономолекулярный слой уменьшающий испарение [1]. Эффективность этой пленки связана с явлениями волнения водной поверхности и ветрового дрейфа пленки. В статье исследуется дрейф мономолекулярной пленки под влиянием равномерного ветра. Поверхность водоема покрыта мономолекулярной пленкой. Под влиянием равномерного ветра пленка движется. Нас интересуют скорость и направление движения пленки.

Рассматриваем трехслойную задачу: воздух, пленка, вода. Напишем уравнение движения отдельно [2]:

для воздуха

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right) + l v_1,$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - l u_1;$$

для воды

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) + l v_2,$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - l u_2;$$

для пленки

$$0 = k_1 \rho_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + k_2 \rho_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \Big|_{z=0} + l v_0,$$

$$0 = k_1 \rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \Big|_{z=0} + k_2 \rho_2 \frac{\partial v_2}{\partial z} \Big|_{z=0} - l u_0.$$

Здесь $u_1, v_1, u_2, v_2, u_0, v_0$ — соответственно горизонтальные составляющие скорости ветра, воды и пленки, ρ_1 и ρ_2 — плотности воздуха и воды, p — давление, $l = 2 \omega \cos \theta$ — параметр Кориолиса. Начало координат расположено на поверхности; при этом вертикальные оси z и ζ направлены соответственно вверх и вниз.

Из приведенных шести уравнений можно получить следующие три уравнения, соответственно для воздуха, воды и пленки:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(k_1 \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) - ilV_1 + ilG = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(k_2 \frac{\partial V_2}{\partial \zeta} \right) - ilV_2 = 0; \quad (2)$$

$$ilV_0 = k_1 \rho_1 \left. \frac{\partial V_1}{\partial z} \right|_{z=0} + k_2 \rho_2 \left. \frac{\partial V_2}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}; \quad (3)$$

$$G = G_x + iG_y,$$

где $V_j = u_j + iv_j$ — комплексная скорость

$$G_x = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad G_y = \frac{1}{\rho l} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{— градиентный ветер.}$$

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z=0 \text{ и } \zeta=0, \quad V_1 = V_2 = V_0; \\ \text{при } z \rightarrow \infty, \quad V_1 = G; \\ \text{при } \zeta \rightarrow \infty, \quad V_2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае, когда коэффициенты турбулентной вязкости $k_1 = \text{const}$, $k_2 = \text{const}$, уравнение (1) и (2) принимают вид:

$$k_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} - ilV_1 + ilG = 0, \quad (5)$$

$$k_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial \zeta^2} - ilV_2 = 0. \quad (6)$$

Решение этих уравнений при граничных условиях (4) имеют следующий вид:

$$V_1 = G \{1 - \exp[-a(1+i)z]\} + V_0 \exp[-a(1+i)z]; \quad (7)$$

$$V_2 = V_0 \exp[-a_2(1+i)\zeta], \quad (8)$$

$$\text{где } a_1 = \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{k_1}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{k_2}}.$$

Подставляя значения V_1 и V_2 в уравнение (3), в силу (4) находим значения компонентов скорости пленки:

$$u_0 = G_x \frac{k_1 \rho_1 a_1 l}{A^2 + B^2} - G_y \frac{k_1 \rho_1 a_1 l}{A^2 + B^2}; \quad (9)$$

$$v_0 = G_x \frac{k_1 \rho_1 a_1 l}{A^2 + B^2} - G_y \frac{2k_1^2 \rho_1^2 a_1^2 + 2k_1 \rho_1 a_1 k_2 \rho_2 a_2 + k_1 \rho_1 a_1 l}{A^2 + B^2}, \quad (10)$$

$$\text{где } A = k_1 \rho_1 a_1 + k_2 \rho_2 a_2, \quad B = l + k_1 \rho_1 a_1 + k_2 \rho_2 a_2.$$

Формулы (9) и (10) показывают, что скорость пленки пропорциональна скорости градиентного ветра. Направление дрейфа (угол между направлением движения пленки и осью x) будет:

$$\text{tg} \alpha = \frac{G_x l - G_y l}{G_x l - G_y (A+B)}. \quad (11)$$

Под влиянием силы Кориолиса направление движения пленки отклоняется от направления ветра.

В действительности коэффициенты турбулентности не являются постоянными величинами, а зависят от вертикальной координаты. Для коэффициента турбулентной вязкости в воздухе пользуемся моделью излома Юдина и Швеца:

$$k_1 = \begin{cases} c_1 z & z \leq h, \\ c_1 h & z > h. \end{cases} \quad (12)$$

Формула (12) дает линейное возрастание коэффициента турбулентной вязкости до некоторой высоты h , после чего он остается постоянным (рис. 1).

Для коэффициента турбулентной вязкости в воде пользуемся формулой вида:

$$k_2 = \begin{cases} \bar{k}_2 - a_0 \zeta & \zeta \leq h_1, \\ k_0 & \zeta > h_1, \end{cases} \quad (13)$$

где $a_0 = \frac{\bar{k}_2 - k_0}{k_0}$, $\zeta = \frac{z}{h}$.

Формула (13) дает линейное убывание коэффициента турбулентной вязкости до некоторой глубины h_1 , после чего этот коэффициент совпадает с коэффициентом молекулярной вязкости k_0 . \bar{k}_2 — коэффициент турбулентной вязкости на поверхности воды (рис. 2).

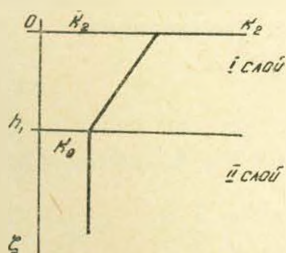


Рис. 2. Изменение коэффициента турбулентной вязкости с глубиной в воде.

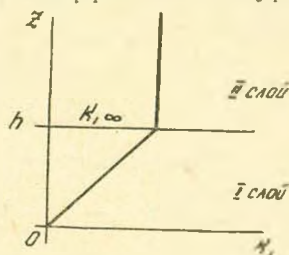


Рис. 1. Изменение коэффициента турбулентной вязкости с высотой в атмосфере.

Перейдем к решению уравнения движения отдельно для воздуха и воды.

Напишем уравнение движения для воздуха отдельно для I и II слоев.

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) - \frac{il}{c_1} V_1 + \frac{il}{c_1} G = 0, \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial z^2} - \frac{il}{c_1 h} V_1 + \frac{il}{c_1 h} G = 0. \quad (15)$$

Граничные условия имеют вид:

при $z = z_0$, $V_1^I = V_0$;

при $z = h$, $V_1^I = V_1^{II}$, $\frac{\partial V_1^I}{\partial z} = \frac{\partial V_1^{II}}{\partial z}$; (16)

при $z \rightarrow \infty$, $V_1^{II} = G$.

Решение уравнения (24) будем искать в виде суммы общего однородного и частного решений неоднородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения можно взять в виде: $V_1 = -G$.

Однородное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(z \frac{\partial V_1}{\partial z} \right) - \frac{il}{c_1} V_1 = 0 \quad (17)$$

после замены переменной $y = 2 \sqrt{\frac{\omega \cos \theta}{c}} z i = z' \sqrt{i}$ приводит к уравнению Бесселя

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial V_1}{\partial y} \right) + V_1 = 0. \quad (18)$$

Решением уравнения (18) является:

$$V_1 = \bar{c}_1 I_0(y) + \bar{c}_2 H_0(y),$$

где I_0 и H_0 — функции Бесселя и Ханкеля нулевого порядка от комплексного аргумента.

Окончательное решение уравнения (14) имеет вид:

$$V_1^I = \bar{c}_1 J_0(z' \sqrt{i}) + \bar{c}_2 H_0(z' \sqrt{i}) - G. \quad (19)$$

Решая уравнение (15) получим:

$$V_1^{II} = G \{1 - \exp[-a(1+i)z]\} + c \exp[-a(1+i)z]. \quad (20)$$

В силу (16) находятся постоянные интегрирования \bar{c}_1 и \bar{c}_2 .

Окончательно скорость ветра в приводном слое будет равна:

$$V_1 = \frac{(V_0 + G)b - 2GH_0(z_0' \sqrt{i})}{A_1} J_0(z' \sqrt{i}) + \\ + \frac{2GJ_0(z_0' \sqrt{i}) + (V_0 + G)a}{A_1} H_0(z' \sqrt{i}) - G. \quad (21)$$

Движение воды для двух слоев описывается уравнениями:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(\bar{k}_2 - a_0 \zeta) \frac{\partial V_2^I}{\partial \zeta} \right] - \frac{il}{\bar{k}_2} V_2^I = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 V_2^I}{\partial \zeta^2} - \frac{il}{k_0} V_2^I = 0. \quad (23)$$

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\text{при } \zeta = \zeta_0, \quad V_2^{(I)} = V_0;$$

$$\text{при } \zeta = h_1, \quad V_2^{(I)} = V_2^{(II)}, \quad \frac{\partial V_2^{(I)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial V_2^{(II)}}{\partial \zeta}; \quad (24)$$

$$\text{при } \zeta \rightarrow \infty, \quad V_2^{(II)} = 0,$$

где ζ_0 — высота шероховатости.

Уравнение (22) заменой переменной $x = 1 - a_0 \frac{\zeta}{h_1}$ приводит к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2 V_2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dV_2}{dx} + \frac{il h_1^2}{\bar{k}_2 a_0^2} \cdot \frac{1}{x} V_2 = 0,$$

решение которого имеет следующий вид:

$$V_2^{(I)} = \bar{c}_1 \tilde{J}_0(\beta \sqrt{ix}) + \bar{c}_2 \tilde{H}_0(\beta \sqrt{ix}), \quad (25)$$

где $\beta = \frac{2h}{a_0} \sqrt{\frac{l}{k^2}}$. J_0 и H_0 — функции Бесселя и Ханкеля от комплексного аргумента.

Решение для второго слоя воды имеет вид:

$$V_2^{(II)} = \bar{c}_3 \exp[-b_0(1+i)\zeta], \text{ где } b_0 = \sqrt{\frac{l}{2k_0}}.$$

С помощью граничных условий (24) определяются постоянные интегрирования $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$. Окончательно для скорости воды в поверхностном слое получаем:

$$V_2 = \frac{A_1 H_0(\beta \sqrt{ix}) - B_1 J_0(\beta \sqrt{ix})}{\Delta} V_0.$$

где

$$A_1 = J_0(\beta \sqrt{ix_h}) + J_1(\beta \sqrt{ix_h}),$$

$$B_1 = H_0(\beta \sqrt{ix_h}) + H_1(\beta \sqrt{ix_h}),$$

$$\Delta = J_0(\beta \sqrt{ix_0}) B_1 - H_0(\beta \sqrt{ix_0}) A_1,$$

$$x_0 = 1 - a_0 \frac{\zeta_0}{h_1}, \quad x_h = 1 - a_0.$$

Теперь уже зная скорости ветра и воды в поверхностных слоях, на основании (3) можно найти скорость движения пленки по формуле:

$$H V_0 = c_1 z \rho_1 \left. \frac{dV_1}{dz} \right|_{z=z_0} + (\bar{k}_2 - a_0 \bar{\zeta}) \rho_2 \left. \frac{dV_2}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_0}.$$

Подставляя полученные значения V_1 и V_2 в это уравнение, определяем компоненты скорости движения пленки

$$u_0 = -\frac{2\sqrt{2} z_0 \rho_1 l}{S^2 + L^2} [G_x (MS + LN) - G_y (NS - ML)]; \quad (27)$$

$$v_0 = -\frac{2\sqrt{2} z_0 \rho_1 l}{S^2 + L^2} [G_x (NS - ML) + G_y (MS + LN)],$$

где M, N, S, L — постоянные величины.

Полученное выражение показывает, что скорость движения пленки пропорциональна скорости градиентного ветра, а направление движения пленки, выражаемое формулой $tg \alpha_0 = v_0/u_0$, не совпадает с направлением ветра — $tg \alpha_1 = v_1/u_1$.

В частности для параметров атмосферы

$$\begin{aligned} \rho_1 &= 1,03 \cdot 10^3 \text{ г/м}^3, & h &= 50 \text{ м}, & c_1 &= 4 \cdot 10^{-2} \text{ м/сек.} \\ z_0 &= 10^{-4} \text{ м}, & \zeta_0^1 &= 10^{-3}, \end{aligned}$$

и для параметров воды

$$\begin{aligned} \rho_2 &= 1 \cdot 10^6 \text{ г/м}^3, & \zeta_0 &= 10^{-4} \text{ м}, & \bar{k}_2 &= 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек.} \\ k_0 &= 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек.}, & h_1 &= 20 \text{ м} \text{ и } l &= 1 \cdot 10^{-4} \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

По формуле (21) находим величину скорости ветра $v_1 = 14,7$ м/сек, на высоте 1 м над водной поверхностью, а по формуле (27) — скорость движения пленки $v_0 = 0,45$ м/сек.

Наблюдения в натуре показали, что отношение скорости ветра к скорости пленки равно примерно 20. В рассмотренном нами примере это отношение равно 32. Причина расхождения возможно заключается в том, что уравнения движения атмосферы упрощены и многие факторы, которые могут образовать ветер, не учтены. Например, движение ветра принимается равномерным, что для озера Севан маловероятно; не учтены окружающие озеро горы, которые создают разность температуры и т. д. При решении задачи не учитывались также физико-химические характеристики мономолекулярной пленки.

Поступило 15.I 1963 г.

Լ. Ա. ԴԱՅԱՆ

ՄՈՆԻՏՈՐԵԿՈՒՅԱՐ ԹԱՂԱՆԹԻ ՇԱՐԺՈՒՄԸ ՀԱՎԱՍԱՐԱԶԱԺ
ՔՍՄՈՆ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում տեսականորեն ուսումնասիրվում է մոնոմոլեկուլյար թաղանթի շարժումը՝ հավասարաչափ փշոզ քամու ազդեցության տակ:

Ինչպես հայտնի է, վերջին տարիներս ջրի մակերևույթից գոլորշիացումը կրճատելու համար օգտագործում են յուղային սպիրտներ, որոնք ջրի մակերևույթի վրա առաջացնում են մոնոմոլեկուլյար թաղանթ: Այդ սպիրտների օգտագործման էֆեկտիվությունը կախված է նրա առաջացրած թաղանթի շարժման հետ:

Թաղանթը շարժվում է քամու ազդեցության տակ, ջրի հետ միասին: Աշխատանքում դիտվում է եռչիրտ խնդիր—օդ, թաղանթ, ջուր: Օդի և ջրի շարժման արագությունների միջոցով որոշվում է թաղանթի շարժման արագությունը և ուղղությունը. ստացված բանաձևերով հաշվված է կոնկրետ օրինակ, ընդ որում խնդրի պարամետրերը վերցրած են Սևանա լճի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Егизаров И. В. Возможность значительной экономии водных ресурсов для народного хозяйства и одномолекулярная пленка для борьбы с испарением с поверхности водоемов, озер и волохранилищ, „Известия АН Армянской ССР“, сер. ТН, № 3 и 6, 1960, № 2, 1961, и № 4, 1962.
2. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы, Гидроиздат, 1961.