

Н. К. СНИТКО, И. И. КАНДАУРОВ

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ АВОПРИЦЕПА ПРИ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ

### 1. Общие предпосылки и уравнения движения

В данной статье рассматривается неравномерное движение тягача с одноосным прицепом на кривой и на прямолинейном участке, дается анализ взаимного влияния тягача и автоприцепа и устанавливаются условия устойчивого движения автоприцепа. Анализ этого движения может дать определенные выводы для рационального проектирования горных дорог.

Задача о поперечных колебаниях реального прицепа при наличии бокового увода шин тягача и прицепа является достаточно трудной [1]. Прицеп является сложной упругой системой со многими степенями свободы: его можно представить как систему с тремя степенями свободы: одну степень свободы имеет неподдрессоренная масса  $m_1$  (определяется углом поворота  $\varphi$  вокруг точки сцепки) и двумя степенями обладает поддрессоренная масса  $m_2$  (горизонтальное и вертикальное перемещения). При решении задачи в первом приближении рассматриваем прицеп как систему с одной степенью свободы, за которую принимаем угол отклонения продольной оси прицепа  $\varphi$ , считая, что: бокового скольжения колес тягача не происходит; зазоры в сцепном устройстве и упругие связи отсутствуют; точки сцепки тягача с прицепом движется по заданной траектории.

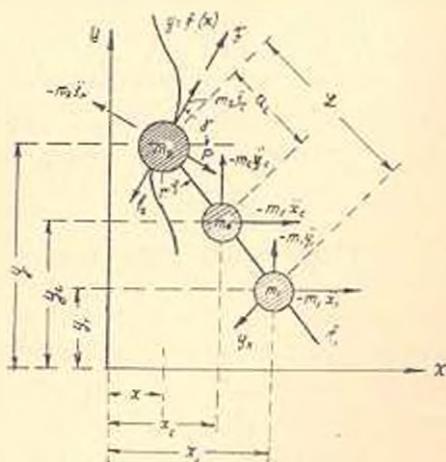


Рис. 1.

Согласно рис. 1 введем следующие обозначения:

$F$  — сила тяги;

$f_1, f_2$  — силы сопротивления качению прицепа и тягача соответственно;

$m_2$  — масса тягача;

$m_1, m_c$  — масса прицепа неподдрессоренная и поддрессоренная соответственно;

$x, y$  — координаты центра тяжести массы тягача;

$x_1, y_1$  — координаты центра тяжести массы  $m_1$ ;

$x_c, y_c$  — координаты центра тяжести массы  $m_c$ ;

$Y_k$  — сила сопротивления боковому уходу колес прицепа;

$P$  — реакция со стороны дороги, нормальная к траектории движения тягача;

$\varphi$  — угол отклонения прицепа от направления оси  $y$ ;

$S$  — ускорение центра тяжести массы тягача по касательной к траектории движения;

$S_N$  — ускорение центра тяжести тягача по нормали к траектории движения;

$y = f(x)$  — уравнение траектории движения центра тяжести массы тягача;

$\gamma$  — угол между касательной к кривой  $y = f(x)$  и осью  $x$ .

Поскольку принято, что точка сцепки движется по заданной траектории, то роль силы  $(-m_1 S_N)$  будет состоять в том, что она вызывает реакцию со стороны дороги. При составлении уравнений движения будем проектировать все силы, действующие на систему, на касательную в рассматриваемой точке к траектории движения тягача. Спроектируем все силы, действующие на систему, на касательную к траектории движения тягача [2]:

$$\begin{aligned} & -m_2 \ddot{S}_\tau + F - f_\tau - \\ & - (m_1 \ddot{x}_1 + m_c \ddot{x}_c) \cos \gamma - (m_1 \ddot{y}_1 + m_c \ddot{y}_c) \sin \gamma - \\ & - f_1 \sin (\gamma - \varphi) - Y_k \cos (\gamma - \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Составим сумму моментов всех сил, действующих на систему, относительно центра тяжести массы тягача.

$$\begin{aligned} & -m_1 \ddot{y}_1 l \sin \varphi - m_1 \ddot{x}_1 l \cos \varphi - m_c \ddot{y}_c a_c \sin \varphi - \\ & - m_c \ddot{x}_c a_c \cos \varphi - Y_k \cdot l = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из геометрических соотношений (рис. 1):

$$y - y_1 = l \cos \varphi, \quad (3)$$

$$y - y_c = a_c \cos \varphi, \quad (4)$$

$$x_1 - x = l \sin \varphi, \quad (5)$$

$$x_c - x = a_c \sin \varphi. \quad (6)$$

Имеем также уравнение траектории движения тягача (вернее точки сцепки):

$$y = f(x), \quad (7)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{df(x)}{dx}, \quad (8)$$

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{df(x)}{dx} \quad (9)$$

Если центр тяжести тягача не лежит в вертикальной плоскости, проходящей через центры отпечатков задних колес тягача, то выражение для продольного ускорения, как известно, имеет вид

$$S = \frac{dv}{dt} - b\omega^2, \quad (10)$$

где  $v$  — скорость движения тягача;

$\omega$  — угловая скорость вращения тягача при движении по кривой;

$b$  — расстояние от оси задних колес до вертикальной плоскости, перпендикулярной продольной оси тягача и проходящей через центр тяжести тягача.

Выясним теперь, какова же зависимость для силы сопротивления боковому уводу.

При малых углах бокового увода зависимость между силой сопротивления боковому уводу и углом увода может быть принята за линейную. В этом случае при  $|\delta| < 15^\circ$  (рис. 2)

$$Y_k \approx k \delta \quad (11)$$

здесь  $k$  — коэффициент сопротивления боковому уводу.

При больших углах увода сила сопротивления боковому уводу может быть принята постоянной, т. е. не зависящей от угла увода.

В этом случае при  $|\delta| \geq 15^\circ$

$$Y_k \approx \pm T \quad (12)$$

здесь  $T$  — сила сопротивления трению, скольжению. Составленной нами выше системой уравнений решается вопрос о вынужденных колебаниях прицепа при движении тягача по заданной траектории.

## 2. Случай равномерного движения поезда на кривой

Рассмотрим случай равномерного движения тягача с прицепом по круговой кривой. Предварительно преобразуем составленную систему уравнений, для чего продифференцируем дважды уравнения (3), (4) и (5), определим вторые производные для  $y_1$ ,  $x_1$ ,  $y_c$ ,  $x_c$  и подставим в уравнение (2). Дифференцируя дважды уравнения (3), (4) и (5) и решая их относительно  $\ddot{y}_1$ ,  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{y}_c$ ,  $\ddot{x}_c$ , получим:

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y} + L (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (13)$$

$$\ddot{y}_c = \ddot{y} + a_c (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \quad (14)$$

$$\ddot{x}_1 = \ddot{x} + L (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \quad (15)$$

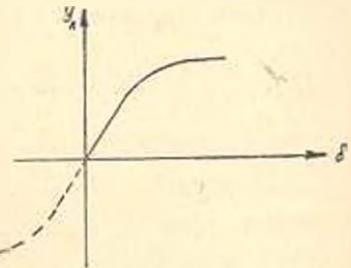


Рис. 2.

$$\ddot{x}_c = \ddot{x} + a_c (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \quad (16)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2), получаем

$$\begin{aligned} m_1 L [\ddot{y} \sin \varphi + L (\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi + \\ + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \ddot{x} \cos \varphi + L (\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi)] + \\ + m_c a_c [\ddot{y} \sin \varphi + a_c (\ddot{\varphi} \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi) + \\ + \ddot{x} \cos \varphi + a_c (\ddot{\varphi} \cos^2 \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi)] + Y_k L = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

или иначе:

$$(m_1 L + m_c a_c) \ddot{\varphi} + (m_1 L + m_c a_c) (\ddot{y} \sin \varphi + \ddot{x} \cos \varphi) + Y_k L = 0. \quad (18)$$

Обозначая через  $I_0$  — сумму моментов инерции масс  $m_1$  и  $m_c$  относительно точки сцепки, имеем:

$$m_1 L^2 + m_c a_c^2 = I_0. \quad (19)$$

Перепишем уравнение (17) в таком виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} (\ddot{y} \sin \varphi + \ddot{x} \cos \varphi) + \frac{L}{I_0} Y_k = 0. \quad (20)$$

Это уравнение используем для решения данной задачи. Согласно заданному условию траектория движения тягача представляет собой круговую кривую, уравнение которой запишем в параметрической форме:

$$y = R \sin \alpha = R \sin \frac{v_0}{R} t \quad (21)$$

$$x = R (1 - \cos \alpha) = R \left( 1 - \cos \frac{v_0}{R} t \right), \quad (22)$$

где  $R$  — радиус круговой кривой;

$t$  — время;

$v_0$  — скорости движения тягача.

Дифференцируя дважды выражения (21) и (22), получим:

$$\ddot{y} = -\frac{v_0^2}{R} \sin \left( \frac{v_0}{R} t \right) \quad (23)$$

$$\ddot{x} = \frac{v_0^2}{R} \cos \frac{v_0}{R} t. \quad (24)$$

Подставляем эти выражения в уравнение (20):

$$\ddot{\varphi} + \frac{L}{I_0} Y_k + \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \left( \cos \varphi \cos \frac{v_0}{R} t - \sin \varphi \sin \frac{v_0}{R} t \right) = 0. \quad (25)$$

Или иначе

$$\ddot{\varphi} + \frac{L}{I_0} Y_k + \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \cos \left( \varphi + \frac{v_0}{R} t \right) = 0. \quad (26)$$

Произведем в этом уравнении замену переменной так, чтобы отклонение прицепа отсчитывать не от направления оси  $y$ , а от направления касательной к траектории движения в точке сцепки. В этом случае новая переменная с  $\beta$ , согласно рис. 3, будет связана соотношением:

$$\beta = \varphi + \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad (27)$$

но

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha. \quad (28)$$

Следовательно

$$\beta = \psi + \alpha = \varphi + \frac{v_0 t}{R}. \quad (29)$$

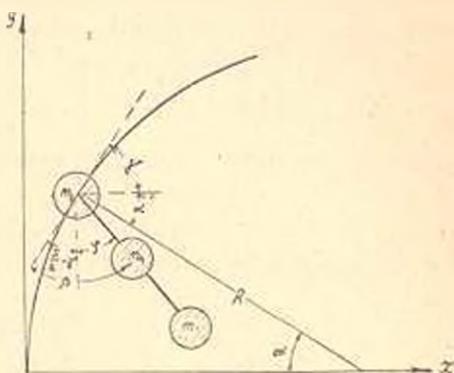


Рис. 3.

Дифференцируя это выражение дважды по  $t$ , получим:

$$\ddot{\beta} = \ddot{\varphi}. \quad (30)$$

Производя в уравнении (26) замену зависимой переменной интегрирования, будем иметь:

$$\ddot{\beta} + \frac{L}{I_0} Y_2 + \left( \frac{m_1 l + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \cos \beta = 0. \quad (31)$$

Теперь через угол  $\beta$  выразим силу сопротивления боковому уводу, для чего вектор скорости движения массы  $m_1$  разложим на два составляющих вектора, одно из которых представляет переносную, а второе, относительную к точке сцепки скорость, как это изображено на рис. 4. Согласно этому рисунку тангенс угла увода имеет вид:

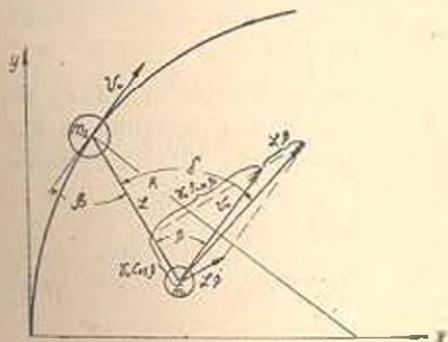


Рис. 4.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{v_0 \sin \beta + L \dot{\beta}}{v_0 \cos \beta} = \operatorname{tg} \beta + \\ &+ \frac{L \dot{\beta}}{v_0 \cos \beta}. \end{aligned} \quad (32)$$

При малых углах увода и малых углах отклонения прицепа от направления движения тягача это выражение можно записать так

$$\delta = \beta + \frac{L \dot{\beta}}{v_0}. \quad (33)$$

Тогда согласно зависимости (11) имеем такое выражение для силы сопротивления боковому уводу:

$$Y_k = k\beta + \frac{kL\dot{\beta}}{v_0} \quad (34)$$

Подставим теперь это выражение для силы сопротивления боковому уводу уравнение (31), полагая при этом  $\cos \beta \approx 1$ , тогда получим

$$\ddot{\beta} + \frac{L^2}{I_0 v_0} k\dot{\beta} + \frac{L}{I_0} k\beta + \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \beta = 0. \quad (35)$$

Запишем дифференциальное уравнение (35) в нормальной форме [2]:

$$\ddot{\beta} + 2z\dot{\beta} + \omega_0^2 \beta = P, \quad (36)$$

где коэффициент затухания имеет значение:

$$z = k \frac{L^2}{2v_0 I_0} \quad (37)$$

квадрат частоты собственных незатухающих колебаний

$$\omega_0^2 = \frac{kL}{I_0} \quad (38)$$

и возмущающая функция:

$$P = - \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \cdot \frac{v_0^2}{R} \quad (39)$$

Интеграл этого дифференциального уравнения, если при входе системы на кривую прицепа не имел возмущения, определится ([2] стр. 89) таким выражением:

$$\beta = \frac{P}{\omega_0^2} \left[ 1 - e^{-z t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{z}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right] \quad (40)$$

Найдя предельное значение  $\beta$  и  $\dot{\beta}$  соответствующие переходу нелинейной зависимости между  $Y_k$  и  $\delta$ , используем для решения задачи другое уравнение, которое получается из уравнения (31) с учетом зависимости (12) для силы сопротивления боковому уводу.

В этом случае уравнение колебаний имеет вид:

$$\ddot{\beta} - \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \cos \beta + \frac{L}{I_0} T = 0. \quad (41)$$

Учитывая [3], что

$$\dot{\beta} = \frac{1}{2} \frac{d(\beta^2)}{dt} \quad (42)$$

Уравнение (42) запишем так:

$$\frac{d(\beta^2)}{dt} = -2 \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \cos \beta + \frac{2L}{I_0} T. \quad (43)$$

В этом уравнении переменные разделяются. Поэтому решение его нетрудно записать в такой форме:

$$\dot{\beta}^2 = -2 \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} \int \cos \beta d\beta \mp \frac{2L}{I_0} T \int d\beta + C, \quad (44)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Постоянная интегрирования в данном случае определяется из условия при  $\beta = \beta_1$ ,  $\dot{\beta} = \dot{\beta}_1$ .

Определяя постоянную интегрирования и подставляя ее в уравнение (44), получим

$$\dot{\beta}^2 = \dot{\beta}_1^2 - 2 \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \cdot \frac{v_0^2}{R} \int_{\beta_1}^{\beta} \cos \beta d\beta \mp \frac{2L}{I_0} T \int_{\beta_1}^{\beta} d\beta \quad (45)$$

или интегрируя, находим:

$$\dot{\beta}^2 = \dot{\beta}_1^2 - 2 \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \cdot \frac{v_0^2}{R} (\sin \beta - \sin \beta_1) \mp \frac{2L}{I_0} T (\beta - \beta_1). \quad (46)$$

При принятой системе координат увеличение отклонения прицепа от направления движения тягача происходит в сторону отрицательного значения угла  $\beta$ .

Приравнивая значение угловой скорости нулю, получим из (46) уравнение, из которого можно определить максимальное значение отклонения прицепа:

$$\dot{\beta}_1^2 - 2 \left( \frac{m_1 L + m_c a_c}{I_0} \right) \frac{v_0^2}{R} (\sin \beta - \sin \beta_1) \mp \frac{2L}{I_0} T (\beta - \beta_1) = 0. \quad (47)$$

Решив это трансцендентное уравнение, можно определить максимальное значение угла отклонения прицепа от направления движения тягача. Оно при малых радиусах  $R$  и заметном интервале времени может оказаться весьма значительным.

### 3. Случай неравномерного движения поезда на прямолинейном участке

Уравнение траектории движения в рассматриваемом случае будет таким

$$x = 0. \quad (48)$$

В результате движение тягача с прицепом согласно рис. 5 будет описываться следующей системой уравнений:

$$-m_c \ddot{y} - m_1 \ddot{y}_1 + F - j_2 - j_1 \cos \varphi - k \delta \sin \varphi \pm I_2 \pm I_1 = 0. \quad (49)$$

$$-m_1 \ddot{y}_1 L \sin \varphi - m_1 \ddot{x}_1 L \cos \varphi - k \delta L \pm I_1 L \sin \varphi = 0. \quad (50)$$

$$x_1 = L \cdot \sin \varphi. \quad (51)$$

$$y - y_1 = L \cos \varphi. \quad (52)$$

В составленных четырех уравнениях все коэффициенты или известны или могут быть заданы, за исключением угла бокового увода.

Для установления функциональной зависимости этой величины от  $\varphi$ ,  $y$  и  $\dot{\varphi}$  на рис. 6 изобразим соотношение между скоростями и углами для центра массы прицепа. У точки  $A$  построим параллелограмм ско-

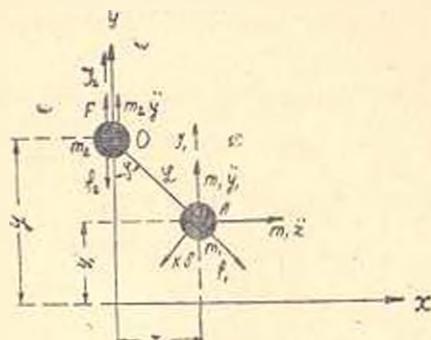


Рис. 5.

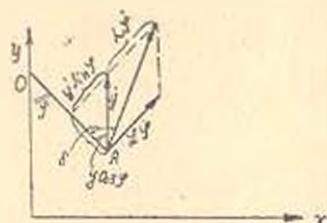


Рис. 6.

ростей, где  $L\dot{\varphi}$  — поперечная скорость по отношению к оси  $OA$  и  $y$  — скорость вдоль оси  $y$

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi + \frac{L\dot{\varphi}}{y \cos \varphi} \quad (53)$$

откуда получаем:

$$\delta = \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L\dot{\varphi}}{y \cos \varphi} \right). \quad (54)$$

Вносим значение для угла бокового увода согласно зависимости (54) в уравнения (49) и (50). В результате этой подстановки имеем:

$$F - m_2 \ddot{y} - m_1 \ddot{y}_1 - f_2 - f_1 \cos \varphi - k \sin \varphi \cdot \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L\dot{\varphi}}{y \cos \varphi} \right) \pm l_2 \pm l_1 = 0 \quad (55)$$

$$\pm l_1 \sin \varphi - m_1 \ddot{y}_1 \sin \varphi - m_1 \ddot{x}_1 \cos \varphi - k \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L\dot{\varphi}}{y \cos \varphi} \right) = 0. \quad (56)$$

Полученные уравнения содержат четыре неизвестных координаты  $y$ ,  $y_1$ ,  $x_1$  и  $\varphi$ .

Уравнениями (55), (56), и (51), (52) определяется движение системы при принятых предположениях, при введении сил сопротивления и силы тяги. Для решения системы дифференцируем дважды (51) и (52).

$$\ddot{x}_1 = L (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi). \quad (57)$$

$$\ddot{y}_1 = \ddot{y} + L (\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi). \quad (58)$$

Подставляем в уравнение (56) полученные значения производных:

$$m_1 \ddot{y} \sin \varphi + m_1 L (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \sin \varphi +$$

$$+ m_1 l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \cos \varphi + I_1 \sin \varphi + \quad (59)$$

$$+ k \cdot \arctg \left( \operatorname{tg} \varphi + \frac{L \dot{\varphi}}{y \cos \varphi} \right) = 0$$

учитывая, что

$$I_1 = m_1 g \sin i \approx m_1 g i, \quad (60)$$

уравнение (59) запишем теперь так

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m_1 L} \arctg \left( \frac{L \dot{\varphi}}{y \cos \varphi} + \operatorname{tg} \varphi \right) (\ddot{y} \mp g i) \frac{\sin \varphi}{L} = 0, \quad (61)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;

$i$  — продольный уклон дороги.

Полученное уравнение (61) описывает колебания прицепа в пределах до  $5^\circ - 10^\circ$ , поскольку линейная зависимость между силой сопротивления боковому уводу и углом бокового увода может быть принята лишь для малых углов бокового увода.

Заменяя для малых углов тригонометрические функции их приближенными значениями  $\sin \varphi \approx \varphi$ ;  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ ;  $\cos \varphi \approx 1$ , вместо уравнения (61) получим

$$\ddot{\varphi} + \frac{k \dot{\varphi}}{m_1 y} [k + m_1 (\ddot{y} \mp g i)] \frac{\varphi}{m_1 L} = 0. \quad (62)$$

В результате для описания малых колебаний из нелинейного уравнения получилось линейное уравнение с переменными коэффициентами. Если движение равномерно замедленное или равномерно ускоренное, то уравнение (62) примет вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{k \dot{\varphi}}{m_1 (v_0 \mp at)} + [k + m_1 (a \mp g i)] \frac{\varphi}{m_1 L} = 0 \quad (63)$$

Поскольку уравнением (63) описываются малые колебания, то для исследования устойчивости движения можно использовать теорему А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению. С этой целью выражение при втором слагаемом, зависящее непосредственно от времени, разложим в ряд по биному Ньютона.

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{at}{v_0}\right)} = \left(1 + \frac{at}{v_0}\right)^{-1} = 1 - \frac{at}{v_0} + \left(\frac{at}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{at}{v_0}\right)^3 + \dots \quad (64)$$

Тогда уравнение (63) запишем следующим образом

$$\ddot{\varphi} + \frac{k \dot{\varphi}}{m_1 v_0} \left[ 1 - \frac{at}{v_0} + \left(\frac{at}{v_0}\right)^2 - \left(\frac{at}{v_0}\right)^3 + \dots \right] +$$

$$+ [k + m_1 (a \mp g i)] \frac{\varphi}{m_1 L} = 0 \quad (65)$$

Следовательно, уравнение для первого приближения будет иметь такой вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{k\varphi}{m_1 v_0} + |k + m_1(a \pm gi)| \frac{\varphi}{m_1 L} = 0. \quad (66)$$

Как видно из этого уравнения, корни характеристического уравнения будут отрицательными лишь при положительном значении коэффициента при  $\varphi$ . В этом случае система будет устойчивой. Таким образом условие устойчивости движения определяется неравенством

$$k + m_1(a \mp gi) > 0. \quad (67)$$

Если имеет место торможение, то ускорение будет иметь отрицательный знак. В этом случае неравенство (67) будет таким:

$$k - m_1(a \mp gi) > 0 \quad (68)$$

или

$$k > m_1(a \pm gi). \quad (69)$$

Знак плюс  $gi$  здесь, согласно принятому на рис. 6 правилу знаков, соответствует движению под уклон, а минус — на подъем. Заметим, что замедленное движение может продолжаться лишь определенный промежуток времени, в частном случае до остановки тягача. В силу этого как при ускоренном, так и при замедленном движении поступательная скорость движения тягача не может принимать отрицательных значений, а следовательно и знак перед вторым слагаемым в уравнениях (63), (65) и (66) не может быть отрицательным, если не учитывать знака  $\varphi$ .

Указанное обстоятельство говорит о том, что в любой промежуток времени, если удовлетворяется неравенство (67), то при малых отклонениях имеет место затухающее колебание и движение системы является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости движения системы при больших угловых отклонениях прицепа.

Для решения данной задачи используем уравнение (61), заменив в нем переменное выражение для силы сопротивления боковому уводу на постоянную величину, обозначив через  $T$ :

$$\ddot{\varphi} + \frac{T}{m_1 L} + (\ddot{y} \mp gi) \frac{\sin \varphi}{L} = 0. \quad (70)$$

В связи с тем, что сила  $T$  проявляет себя как сухое трение и направлена в сторону, противоположную движению, в уравнении (70) перед нею поставлено два знака: плюс и минус.

Уравнением (70) описываются колебания прицепа за пределами угловых отклонений, при которых сила сопротивления боковому уводу могла приниматься пропорциональной углу бокового увода. В этом случае целесообразно перейти к новой переменной, рассматривая дви-

жение относительно границы. Пусть  $\varphi = \varphi_1$  является границей применимости составленных уравнений. Тогда вводимая новая переменная будет связана со старой соотношением

$$u = \varphi - \varphi_1. \quad (71)$$

Откуда

$$\dot{u} = \dot{\varphi}; \quad \ddot{u} = \ddot{\varphi}. \quad (72)$$

Используя эти зависимости, уравнение (70) запишем следующим образом

$$\ddot{u} \pm \frac{T}{m_1 L} + (\ddot{y} \mp gi) \cdot \frac{\sin(u + \varphi_1)}{L} = 0. \quad (73)$$

Если за независимую переменную принять  $u$ , то уравнение (73) будет таким

$$\frac{d(\dot{u}^2)}{2du} \pm \frac{T}{m_1 L} + (y \mp gi) \cdot \frac{\sin(u + \varphi)}{L} = 0. \quad (74)$$

Это уравнение при  $y = f(u)$  с разделяющимися переменными и его решение имеет вид:

$$\frac{u^2}{2} = C \mp \frac{T}{m_1 L} u - \int (\ddot{y} \mp gi) \cdot \frac{\sin(u + \varphi_1)}{L} du. \quad (75)$$

Постоянную интегрирования определяем из начальных условий: при  $u = 0$   $\dot{u} = \dot{\varphi}_1$ . В результате определения постоянной интегрирования  $C$  и подстановки ее в уравнение (75), получим

$$\frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \mp \frac{T}{m_1 L} u - \int_0^u (\ddot{y} \pm gi) \frac{\sin(u + \varphi_1)}{L} du. \quad (76)$$

Если движение тягача равно-ускоренное или равно-замедленное, то выражение (76) будет таким

$$\frac{\dot{u}^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \pm \frac{T}{m_1 L} u - (a \mp gi) [\cos \varphi_1 - \cos(u + \varphi_1)]. \quad (77)$$

Переходя в этом уравнении снова к переменной  $\varphi$  согласно зависимостям (71) и (72) получим

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \mp \frac{T}{m_1 L} (\varphi - \varphi_1) - (a \mp gi) (\cos \varphi_1 - \cos \varphi). \quad (78)$$

Полученное выражение позволяет судить об устойчивости движения системы. Система будет устойчивой в том случае, если угловая скорость равна нулю или имеет мнимое значение при ограниченном угле отклонения. Согласно выражению (78) устойчивое движение системы определится неравенством

$$\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} \mp \frac{T}{m_1 L} (\varphi - \varphi_1) - (a \mp gi) (\cos \varphi_1 - \cos \varphi) \leq 0. \quad (79)$$

Согласно полученному неравенству устойчивым будет такое движение, при котором максимальное отклонение прицепа от нейтрального положения будет меньше допустимого. Следовательно, задаваясь предельным допустимым значением угла отклонения прицепа, можно по выражению (79) определить соотношение между другими параметрами системы и характеристиками дороги, при котором движение рассматриваемой системы даже при больших отклонениях будет устойчивым.

ВАГТ. г. Ленинград

Поступило 11.XII. 1961 г.

Ն. Կ. ՍՆԻՏԿՈՒ ԵՎ Ի. Ի. ԿԱՆԴԱՍՐՈՎ

ԱՎՏՈՎՅԱՆՔԻ ՇԱՐՇԱԿԱՆ ԿՅՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԸՆԴՈՒՅՆԱԿԱՆ  
ՏՍՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԳԵՊԳՈՒՄ

Ու մ փ ո փ ո Վ մ

Հոդվածում գիտվում է քարշակի և միառանցք կցանքի անհավասարաչափ ստիպողական շարժումը ճանապարհի ուղղադիմ և կորագիմ տեղամասերում:

Անալիզի է ենթարկված իրական կցանքի ընդլայնական տատանումները, երբ քարշակի դողերը կողք քաշման են ենթարկվում: Այնուհետև նկարագրվում է քարշակի և կցանքի միմյանց նկատմամբ տենցամ փոխադարձ ազդեցությունը և ձևակերպվում կառքաշարի կալուն շարժման պայմանները:

Հոդվածում գիտված է նաև կորագիմ տեղամասում դնացքի հավասարաչափ շարժման դեպքերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Калдыш М. В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси. Труды ЦАГИ. № 564, 1945.
2. Снитко Н. К. Динамика сооружений. Госстройиздат. Л., 1960.
3. Кандауров И. И. Теория влияния подвижности оси на вращение эксцентрично расположенных масс. Труды ВАГТ № 42, 1959.