

Н. К. ИОАННИСЯН

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА ПРИ ЗАКРЫТИИ В КОНЦЕ
ТРУБОПРОВОДА

При развитии объединенной энергосистемы и проектировании межсистемной линии электропередачи, задача автоматического регулирования и обеспечения динамической устойчивости системы требует более точного учета влияния гидравлического удара в напорной системе трубопровод-турбина на поведение гидроагрегатов при переходных процессах [1].

В случае больших возмущений электромеханические переходные процессы становятся зависимыми от характеристики гидротурбины, от явления гидравлического удара [2], которые значительно осложняют протекание процессов, делая их неподдающимися аналитическим расчетам. Поэтому основным путем изучения поведения гидротурбины при нестационарных режимах является метод моделирования физических процессов, происходящих в гидравлической части энергосистемы [1], при помощи которого на динамической модели воспроизводится совокупность всех явлений переходного процесса.

Такое моделирование позволяет выявить основные закономерности переходного процесса гидравлической части системы, как-то: моментные, расходные и оборотные характеристики гидротурбин с учетом влияния гидравлического удара [3], и разработать общую методику для аналитического расчета переходного процесса путем сочетания динамической модели со счетно-решающей машиной.

Для использования указанных машин, наряду с уравнением, описывающим физические процессы в отдельных звеньях и узлах системы, необходимо иметь выражение для гидравлического удара, непрерывного по времени, чтобы можно было их решать совместно.

Как известно дифференциальные уравнения упругого гидравлического удара, выведенные Н. Е. Жуковским [4], имеют вид:

$$g \frac{\partial H}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial t};$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \frac{\gamma g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1)$$

где v — скорость потока в трубопроводе;

x — координата, отсчитываемая вдоль оси трубы;

a — скорость распространения гидравлического удара в трубопроводе;

g — ускорение силы тяжести;

H — напор установки.

Интегрирование волновых уравнений (1) при $a = \text{const}$ приводит к цепным уравнениям Аллиевы. Такое теоретическое решение гидравлического удара по Жуковскому-Аллиевы [5], хотя отличается большим совершенством и изяществом и очень точно воспроизводит действительное явление, ведется пофазно (целой или дробной) с использованием цепных уравнений, т. е. не дает непрерывного во времени решения.

В настоящей статье делается попытка получить непрерывную связь между давлением в трубопроводе и скоростью течения или расходом, что дает возможность представить уравнение гидравлического удара непрерывным по времени.

Обозначим относительное изменение расхода $q = \frac{\Delta Q}{Q_0}$ и напора $h = \frac{\Delta H}{H_0}$, где индекс (0) относится к начальному режиму; тогда уравнения (1) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= -\frac{v_0}{gH_0} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{\partial q}{\partial x} &= -\frac{gH_0}{v_0 a} \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned} \quad (2)$$

Если напорный трубопровод начинается от бассейна с зеркалом, достаточно больших размеров и постоянным уровнем наполнения, то интегрирование уравнений (2), взятых в операционной форме, дает операторное уравнение [6—8]:

$$\frac{\bar{q}}{h} = -\frac{gH_0}{v_0 a} \operatorname{cth} \frac{P\mu}{2}, \quad (3)$$

где $\bar{q}(P, L) \rightarrow q(t, L)$; $\bar{h}(P, L) \rightarrow h(t, L)$; $\mu = \frac{2L}{a}$ — фаза колебания; L — длина трубопровода.

$$\text{Так как } \operatorname{cth} \frac{P\mu}{2} = \frac{1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{P\mu}{2}\right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{P\mu}{2}\right)^4 + \dots}{\frac{P\mu}{2} + \frac{1}{3!} \left(\frac{P\mu}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{P\mu}{2}\right)^5 + \dots}, \quad (4)$$

то подставляя значение $\operatorname{cth} \frac{P\mu}{2}$ из (4) в (3) и отбрасывая все члены ряда, содержащие P в четвертой и более высокой степени, получим:

$$\bar{q} = - \frac{gH_0}{v_0 a} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{P\mu}{2}\right)^2}{1 + \frac{1}{3!} \left(\frac{P\mu}{2}\right)^2} \bar{h}. \quad (5)$$

Применяя теорему умножения изображений, найдем:

$$q(t) = - \frac{1}{T_\tau} \int_0^t h(\tau) d\tau - \frac{2}{T_\tau} \int_0^t h(\tau) \left[\cos \frac{2\sqrt{6}}{\mu} (t-\tau) \right] d\tau. \quad (6)$$

Здесь $T_\tau = \frac{v_0 L}{gH_0}$ — постоянная трубопровода. Трижды дифференцируя (6) по t , получим последовательно:

$$T_\tau \frac{dq}{dt} = -3h + \frac{4\sqrt{6}}{\mu} \int_0^t h(\tau) \left[\sin \frac{2\sqrt{6}}{\mu} (t-\tau) \right] d\tau, \quad (7)$$

$$T_\tau \frac{d^2q}{dt^2} = -3 \frac{dh}{dt} + \frac{48}{\mu^2} \int_0^t h(\tau) \left[\cos \frac{2\sqrt{6}}{\mu} (t-\tau) \right] d\tau, \quad (8)$$

$$\mu^2 T_\tau \frac{d^3q}{dt^3} = -3 \mu^2 \frac{d^2h}{dt^2} - 24 T_\tau \frac{dq}{dt} - 24 h. \quad (9)$$

Аналогичное уравнение (9), но в интегральной форме, приведено в [6]. Уравнение (9) является приближенным и в отличие от (1) есть обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка относительно h . Если $\mu = 0$, то из (9) получим уравнение жесткого удара:

$$T_\tau \frac{dq}{dt} = -h. \quad (10)$$

Допуская при закрытии регулирующего органа турбины изменения расхода во времени по линейному закону (задача Мишо), т. е.

$$q = - \frac{t}{T_s}, \quad (11)$$

где T_s — время полного закрытия регулирующего органа, получим решение уравнения (9) в виде:

$$h(t) = A \cos \frac{2\sqrt{2}}{\mu} t + B \sin \frac{2\sqrt{2}}{\mu} t + \sigma, \quad (12)$$

где A и B — постоянные интегрирования;

$$\sigma = \frac{T_\tau}{T_s} = \frac{\rho}{\theta}; \quad \rho = \frac{\alpha v_0}{2gH_0}; \quad \theta = \frac{T_s}{\mu}.$$

При $t = 0$ из (8), (11) и (12) получим $A = -\sigma$; $B = 0$.

Для относительного изменения напора из (12) получим:

$$h = 2 \sigma \sin^2 \frac{V\sqrt{2}}{\mu} t, \quad (13)$$

откуда

$$h_{\max} = 2 \sigma, \quad (14)$$

что является формулой Мишо для определения наибольшего повышения давления при закрытии.

Допустим, что изменения открытия направляющего аппарата во времени происходит по линейному закону (задача Аллиевии), т. е. при закрытии

$$\alpha = 1 - \frac{t}{T_s},$$

где α — относительная величина открытия.

Тогда для расхода при закрытии можно принять

$$1 + q = \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) V\sqrt{1+h}, \quad (15)$$

или, если отклонение напора в переходных процессах невелико, то

$$1 + q = \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \left(1 + \frac{1}{2}h\right). \quad (16)$$

Подставляя (16) в (9), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{T_r}{2} \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \frac{d^3 h}{dt^3} + 3 \left(1 - \frac{T_r}{2T_s}\right) \frac{d^2 h}{dt^2} + \\ & + \frac{12T_r}{\mu^2} \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \frac{dh}{dt} + \frac{24}{\mu^2} \left(1 - \frac{T_r}{2T_s}\right) h = \frac{24T_r}{\mu^2 T_s}, \end{aligned} \quad (17)$$

что является дифференциальным уравнением гидравлического удара при линейном законе изменения открытия.

Частным решением уравнения (17) будет:

$$h_* = \frac{2\sigma}{2 - \sigma}. \quad (18)$$

Для решения однородного уравнения, т. е. уравнение (17) без правой части, сделаем подстановку

$$h = e^{c\frac{\tau}{3}} w(\tau); \quad e^c = 1 - \frac{t}{T_s}, \quad (19)$$

где

$$c = 3 \left(\frac{2T_s}{T_r} - 1 \right).$$

Тогда уравнение (17) без правой части примет вид:

$$\frac{d^3 w}{dt^3} - 3 \frac{d^2 w}{d\tau^2} - \left(\frac{c^2 + 3c - 6}{3} - 3be^{2c} \right) \frac{dw}{d\tau} - \frac{2c(c^2 - 9)}{27} w = 0, \quad (20)$$

где

$$b = 8 \theta^2.$$

$$\text{Так как} \quad e^{2\tau} = 1 + 2\tau + \frac{(2\tau)^2}{2!} + \dots + \frac{(2\tau)^n}{n!} + \dots,$$

то из уравнения (20) получаем:

$$\frac{d^3 w}{d\tau^3} - 3 \frac{d^2 w}{d\tau^2} + (A_0 + A_1 \tau + \dots + A_n \tau^n + \dots) \frac{dw}{d\tau} - k w = 0, \quad (21)$$

$$\text{где} \quad k = \frac{2c(c^2 - 9)}{27}; \quad A_0 = 3b - \frac{c^2 + 3c - 6}{3};$$

$$A_1 = \frac{2 \cdot 3b}{1!}; \quad A_2 = \frac{2^2 \cdot 3b}{2!} \dots; \quad A_n = \frac{2^n \cdot 3b}{n!} \dots$$

Ищем решение (21) в виде степенного ряда

$$w(\tau) = B_0 + B_1 \tau + \dots + B_n \tau^n + \dots \quad (22)$$

Подставляя (22) и его 1-ые, 2-ые, 3-ие производные в (21) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях τ , определим последовательно коэффициенты B_0, B_1, \dots .

Вообще n -ый коэффициент ряда (22) определяется по формуле:

$$B_n = \frac{3}{n} B_{n-1} - \frac{A_0}{n(n-1)} B_{n-2} - \frac{(n-3) A_1 - k}{n(n-1)(n-2)} B_{n-3} - \\ - \frac{(n-4) A_2}{n(n-1)(n-2)} \cdot B_{n-4} - \frac{(n-5) A_3}{n(n-1)(n-2)} B_{n-5} - \dots \quad (23)$$

Правая часть (23) имеет $n-1$ членов, начиная с члена, содержащего B_{n-1} и кончая членом, содержащим B_1 . Коэффициенты B_0, B_1, B_2 играют роль произвольных постоянных.

На основании (18—23) общее решение уравнения (17) будет

$$h(t) = \left(1 - \frac{t}{T_s}\right)^{\frac{c}{3}} \left\{ B_0 + B_1 e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) + \right. \\ + B_2 \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^2 + B_3 \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^3 + \\ \left. + \dots + B_n \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^n + \dots \right\} + \frac{2\sigma}{2-\sigma}.$$

Произвольные постоянные интегрирования B_0, B_1, B_2 находятся из следующих условий:

$$1) \text{ при } t=0 \text{ имеем } h(t)_{t=0} = 0; \quad (25)$$

поэтому из (7) находим;

$$\left(\frac{dq}{dt}\right)_{t=0} = 0. \quad (26)$$

2) Дифференцируя (16) по t и учитывая (26), получим:

$$\left(\frac{dh}{dt}\right)_{t=0} = \frac{2}{T_s}, \quad (27)$$

вследствии чего из (8) находим:

$$\left(\frac{d^2q}{dt^2}\right)_{t=0} = -\frac{6}{T_r T_s}. \quad (28)$$

3) Дважды дифференцируя (16) по t и учитывая (28), будем иметь:

$$\left(\frac{d^2h}{dt^2}\right)_{t=0} = \frac{4}{T_s} \left(\frac{1}{T_s} - \frac{3}{T_r}\right). \quad (29)$$

Три раза дифференцируя (24) по t и учитывая (25), (27) и (29), получим:

$$B_0 = -\frac{2\sigma}{2-\sigma}; \quad B_1 = 0; \quad B_2 = -\frac{4}{\delta}. \quad (30)$$

Подставляя значения B_0, B_1 , и B_2 в (25), будем иметь:

$$h(t) = \left(1 - \frac{t}{T_s}\right)^{\frac{c}{3}} \left\{ -\frac{2\sigma}{2-\sigma} - \frac{4}{\sigma} \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^2 + \right. \\ \left. + B_2 \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^3 + \dots + B_n \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^n + \dots \right\} + \frac{2\sigma}{2-\sigma}. \quad (31)$$

Когда $t \rightarrow T_s$, т. е. в конце закрытия,

$$h(t)_{t \rightarrow T_s} = h_{\text{пред.}} = \frac{2\sigma}{2-\sigma}, \quad (32)$$

что является формулой Де Спарра для предельного значения удара. При помощи выражения (31) можно вычислить значение гидравлического удара непрерывного для любого момента времени в случае закрытия направляющего аппарата турбины.

Если принимать $2 T_s - T_r = \mu$, (33)

то общее решение уравнения (17) будет:

$$h(t) = \left(1 - \frac{t}{T_s}\right)^{\frac{c}{3}} \left\{ B_0 + B_1 e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) + \dots + B_n \left[e_n \left(1 - \frac{t}{T_s}\right) \right]^n + \dots \right\} + 2\rho. \quad (34)$$

Так как обычно $T_r < T_s$, то из (33) следует, что $\mu \geq T_s$, т. е. полное закрытие происходит быстрее, чем отражается волна, тогда из (34) получим формулу Жуковского для прямого удара

$$h = 2\rho = \frac{v_0 a}{gH_0} \quad (35)$$

Как известно, наибольшее повышение давления при сбросе нагрузки практически имеет место либо в конце первой фазы, либо в конце закрытия, что определяется предельной величиной удара. Из (31) видно, что максимальное повышение может происходить на конце закрытия ($t \rightarrow T_s$) и равно

$$h_{\max} = h(t)_{t \rightarrow T_s} = h_{\text{пред.}} = \frac{2\sigma}{2 - \sigma} \quad (36)$$

что является формулой Де Спарра для определения наибольшего повышения давления при $\rho > 1$.

Если максимальное повышение давления происходит не в конце закрытия, тогда аналитическое определение ее величины становится затруднительным. Однако многочисленные вычисления показывают, что и для этого случая значение наибольшего повышения давления по (31) так же совпадает с максимальным значением давления, вычисленным с помощью следующей формулы Де Спарра:

$$h_{\max} = h_1 = \frac{2\sigma}{1 + \rho - \sigma} \quad (37)$$

где h_1 — относительное изменение напора в первой фазе.

Для иллюстрации правильности полученной формулы (31) ниже приводятся два численных примера в случаях $\rho < 1$ и $\rho > 1$.

Пример 1.

$$H_0 = 250 \text{ м}; \quad L = 900 \text{ м}; \quad a = 900 \frac{\text{м}}{\text{сек}}$$

$$v_0 = 3 \frac{\text{м}}{\text{сек}}; \quad T_s = 6 \text{ сек.}$$

По этим данным определим последовательно $h_{\text{пред.}} = 0,202$; $\sigma = 0,183$; K ; A_0 ; A_1 ; ...; A_n ..., а затем по формуле (23) находим B_3 ; B_4 ; ...

Подставляя значения коэффициентов B_n ($n=3, 4, \dots$) в (31), получим величины изменения напора для каждого момента времени. Результаты расчетов изображены на рис. 1 (кривая 1). На этом же рисунке нанесены кривые 2 и 3, рассчитанные соответственно по цепным уравнениям Аллиеви и по формуле жесткого удара.

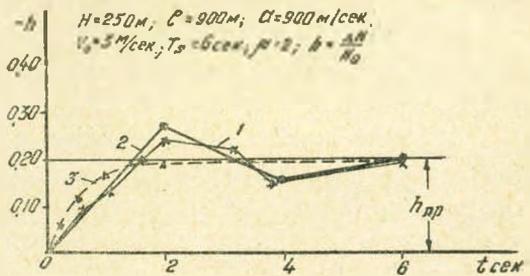


Рис. 1. Относительное изменение напора по времени (пример 1).

Как видно кривые 1 и 2 периодические и мало отличаются друг от

друга, в то время как кривая (3) жесткого удара качественно отличается от них.

Пример 2.

$$H_0 = 50 \text{ м}; L = 245 \text{ м}; v_0 = 1,5 \frac{\text{м}}{\text{сек}}; a = 981 \frac{\text{м}}{\text{сек}};$$

$$T_s = 2 \text{ сек. При этих данных получим } \rho = 1,5.$$

Аналогично предыдущему примеру находим все искомые величины, а результаты нанесены на рис. 2 (кривая 1). Так как здесь $\rho > 1$, то

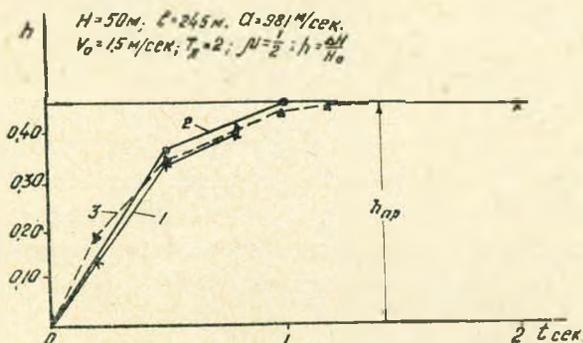


Рис. 2. Относительное изменение напора по времени (пример 2).

кривая удара апериодическая (рис. 2—кривая 1). На этом же рис. 2 нанесены кривые 2 и 3, вычисленные соответственно по цепным уравнениям Аллиеви и по формуле жесткого удара. Все эти кривые апериодические и $h_{\max} = h_{\text{пред.}} = 0,46$.

Из рис. 1—2 явствует, что результаты расчетов по (31) с достаточной для практики точностью совпадают с результатами расчетов по цепным уравнениям Аллиеви.

Так как из (31) для $t \rightarrow T_s$ вытекает формула Де Спарра (36) для h_{\max} , то она отвечает всем точкам на абаке Аллиеви [9] (рис. 3), находящимся в зоне $\rho > 1$, где $\xi^2 = 1 + h$.

В зонах же $\rho < 1$ указанной абакки нанесены точки, полученные по расчету формулой (31). Результаты этих расчетов и соответственные значения по абаке показаны в табл. 1.

Из этих сопоставлений видно, что максимальные значения удара по расчетной формуле (31) и по основной абаке Аллиеви совпадают. Есть небольшое расхождение в фазе, в которой происходит максимальное повышение, что объясняется точностью проведенных расчетов.

Таким образом, из обыкновенного дифференциального уравнения получаются все классические частные случаи—формулы жесткого и прямого ударов, предельное значение удара по Де Спарра, задачи Мишо и Аллиеви.

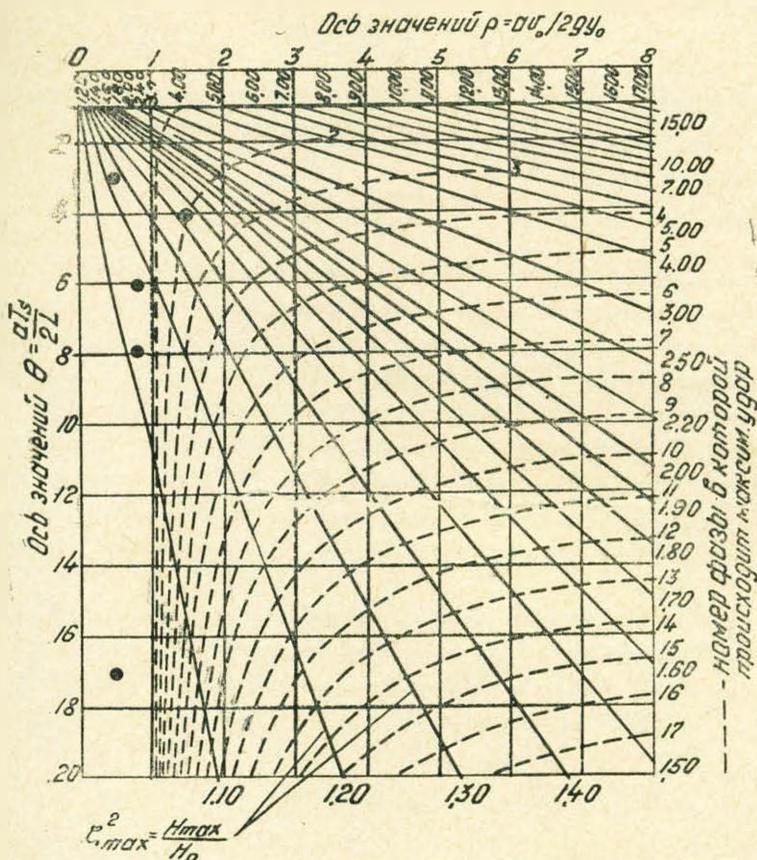


Рис. 3. „Абака“ в безразмерных величинах для определения h_{\max} при закрытии трубопровода с нанесением 6 расчетных точек по формуле (31).

Таблица 1

№ № п/п	ρ	θ	T_s сек	μ сек	h_{\max} по (31)	h_{\max} по абаке
1	0,55	3	6	2,0	0,24	0,26
2	1,50	4	2	0,5	0,46	0,46
3	0,80	6	3	0,5	0,16	0,16
4	1,00	10	10	1,0	0,11	0,11
5	0,51	17	6	0,35	0,03	0,04
6	0,72	8	4	0,50	0,11	0,11

Этот анализ показывает, что уравнение (9) можно считать эквивалентным системе уравнений упругого гидравлического удара (1) и может быть использовано как для расчетов, так и для аналитических исследований.

Ն. Կ. ԻՈԱՆՆԻՅԱՆ

ՀԻԿՐԱՎԼԻԿԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱԾԻ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԱՆԱՎԻՏԻԿ ԱՐՏԱՀԱՅՏՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՃՆՇՄԱՆ ԽՈՂՈՎԱԿԱՇԱՐԻ ՄԱՅՐԸ ՓԱԿԵԼՎՊ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ինչպես հայտնի է, հիդրավլիկական առաձգական հարվածի տեսական լուծումը ըստ ժուկովսկու-Ալլիևի շնայած կատարյալ է ու լրիվ արտահայտում է երևույթը, սակայն լուծվում է ըստ ֆազաների (ամբողջ կամ կոտորակային)։

Հողվածում խողովակաշարի ճնշման ու ելքի փոփոխության միջև եղած կախումն արտահայտվում է սովորական 3-րդ կարգի դիֆֆերենցիալ հավասարման (9) միջոցով, որից ստացվում է հիդրավլիկական հարվածի հավասարման (31) անալիտիկ արտահայտությունը՝ ըստ ժամանակի անընդհատ կապի տեսքով, երբ ճնշման խողովակաշարի ծայրի փակում է տեղի ունենում։

(9) հավասարումից ստացվում է հիդրավլիկական հարվածի կլասիկ դեպքերը։

(31) բանաձևով հաշվումները և նրանց համեմատումը Ալլիևի շղթայական հավասարումներով հաշված արդյունքների հետ ցույց են տալիս, որ (9) հավասարումը կարելի է համարել համարժեք առաձգական հարվածի հավասարումների (4) սիստեմին և օգտագործել ինչպես հաշվումների, այնպես էլ անալիտիկ հետազոտությունների ժամանակ։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Егизаров И. В. Задачи научных исследований по изучению работы гидроэнергосистем и их автоматического регулирования. „Известия АН Армянской ССР“, сер. Ф.МЕТН, № 1, 1953.
2. Картвелишвили Н. А. Влияние взаимодействия гидравлических, механических и электрических процессов на устойчивость работы электростанций. Изв. ОН СССР, № 2, 1958.
3. Буниатян Б. Л. Моделирование гидротурбин при переходных процессах „Известия АН Армянской ССР“ (сер. техн. н.), № 1, 1960.
4. Жуковский П. Е. О гидравлическом ударе в водопроводных трубах. Госиздат, М.—Л., 1949.
5. Егизаров И. В. Гидравлические силовые установки. Т. III, ОНТИ, НКТП СССР, 1947.
6. Картвелишвили Н. А. Устойчивость в малом динамических систем, содержащих малые параметры. Известия ОН АН СССР, № 9, 1957.
7. Под релакцией акад. Костенко М. П. Электродинамическое моделирование энергетических систем. Издат. АН СССР, М.—Л., 1949.
8. Воронов А. А., Первозванский А. А., Семенов В. В. Электродинамическая модель гидравлической турбины и ее регулятора скорости. Изв. ОН АН СССР, № 1, 1956.
9. Мостков М. А. Гидравлический удар в гидроэлектрических станциях, ГОТИ, НКТП СССР, М.—Л., 1938.